А.С.Подколзин

Компьютерное моделирование логических процессов

Том 10. Классификация приемов вывода теорем

2025 г.

Введение

Эта книга посвящена исследованию по искусственному интеллекту. Однако, прежде, чем говорить об искусственном интеллекте, стоит повнимательнее присмотреться к естественному интеллекту, его формированию и его возможностям. Созданная природой нейросеть обладает способностью обучаться на примерах, вырабатывая, большей частью неосознанно, системы признаков, позволяющие распознавать различные ситуации. Однако, самой по себе этой способности недостаточно, и нейросеть с самых первых шагов погружается в среду обучения, программирующую ее интеллект. Такая среда формировалась человечеством на протяжении длительного времени и представляет собой целую пирамиду знаний и технологий, зафиксированную в книгах и статьях. Впитывая эту информацию, нейросеть становится в значительной степени лишь вычислительным устройством, в которое закладывается программа. Учебники передают ей знания и приемы решения задач, а способность обучаться на примерах помогает распознавать ситуации, в которых та или иная информация должна применяться. Таким образом, нейросеть алгоритмизирует пассивные знания, формируя некий Алгоритм Рассуждений, лишь частично описанный в учебниках, а в остальном уточняемый при обучении. Она им пользуется, но не способна в полной мере осознавать, как именно он устроен. Интуиция может подсказывать то или иное действие в конкретной ситуации, но почему она это делает - зачастую остается загадкой.

Первое, что приходит в голову в связи с искусственным интеллектом - создать искусственную нейросеть и заняться ее обучением. По этому пути и двигается большинство современных исследователей. Пока архитектура искусственных нейросетей сильно отличается от архитектуры нейросетей естественных, даже нейрон в них не такой. Для повышения уровня интеллекта этих сетей приходится привлекать весьма дорогостоящие суперкомпьютеры. Однако, даже наиболее продвинутые версии, такие, как ChatGPT, характеризуются крайне противоречивыми отзывами - от восторженных заявлений о том, что через 2 - 3 года они во всем превзойдут интеллект человеческий до заявлений типа "он тупит и рассуждать не умеет". Оставим в стороне критику современных искусственных нейросистем. Все это неважно. Вряд ли стоит сомневаться в том, что рано или поздно будет создана искусственная нейросеть, превосходящая по своему уровню интеллекта естественную. НО. Как и естественная нейросеть, она будет аппроксимировать Алгоритм Рассуждений, довольно смутно представляя себе, как он работает. На этом пути ни нам, ни искусственному интеллекту не удастся расшифровать данный Алгоритм. Его расшифровка потребует совсем иных усилий.

Вообще-то говоря, рассуждения - это мир логики, логических процессов. Можно усомниться в том, что нейросеть представляет собой наиболее эффективное вычислительное устройство для выполнения логических вычислений. Природа создавала ее, чтобы догонять, убегать и ловить, а не для того, чтобы теоремы доказывать. Конечно, она приспособилась и к этому, но об огромной избыточности такой реализации логических процессов можно только догадываться. Подобно тому, как для арифметических вычислений обычный процессор гораздо эффективнее любой нейросети,

для экономичной реализации логических вычислений понадобится свой, логический процессор. Нейросети здесь ни при чем.

Однако, логический процессор нужно еще запрограммировать, а для этого необходимо расшифровать упомянутый выше Алгоритм Рассуждений - со всеми его элементами, включая приемы решения задач, приемы проведения исследований, приемы создания новых приемов и т.д. Фактически, речь идет о создании целой науки о логических процессах - своего рода логической динамики. Это необходимо не только для освоения ориентированных на логику вычислительных устройств, гораздо более эффективных, нежели нейросети, но и для понимания того, как устроен мир логики. Такое понимание наверняка пригодится.

Настоящая работа и посвящена первым шагам в развитии данной науки. Первые девять томов монографии были посвящены сравнительно подробному описанию компьютерной логической системы, моделирующей процессы пошагового решения задач в различных предметных областях. Она доказала неплохую эффективность, успешно преодолев различные тесты (вступительные экзамены на мехмат МГУ или письменный выпускной экзамен мехмата за некоторые годы).

Впрочем, главной целью создания системы был вовсе не решатель задач для пользователя, а анализ того, как приемы решения задач возникают из теорем. Иными словами, расшифровка механизма алгоритмизации знаний - ключевого механизма интеллекта. Для этого, начиная с нижнего уровня - базы приемов решателя - постепенно, уровень за уровнем осуществлялось продвижение вверх - к теоремам, являющимся источниками приемов. Огромная база приемов решателя, "извлеченных" из задач, являлась единственным источником такого рода продвижения. 7,8 и 9 тома монографии излагают результаты исследований по автоматическому созданию приемов решателя. Продолжение развития генератора приемов позволяет постепенно переводить обучение решателя задач на уровень, значительно более высокий, чем даже уровень ГЕНОЛОГа.

Первым, и наиболее важным, шагом на пути от теорем к приемам оказался так называемый программирующй логический вывод - варьирование исходных теорем "из учебника" и комбинирование их для получения следствий, практически ценных при решения задач. Приемы такого вывода теорем сложились в своего рода решатель "верхнего" уровня, извлекающий из предъявляемой ему теоремы список следствий, ориентированных на создание приемов. Обучающим материалом для этого решателя послужили теоремы приемов, возникшие при ручном обучении решателя на ГЕНОЛОГе. Они группировались около различных "базисных" теорем, имеющихся в учебниках, образуя задачник на вывод теорем. Обучение заключалось в нахождении объяснения того, как теорема приема могла бы быть получена из базисной теоремы. Таким образом возникали приемы верхнего решателя - приемы программирующего логического теорем.

Прием программирующего вывода - существенно более развитый объект, чем обычное правило вывода в математической логике. Во-первых, он должен самостоятельно находить в базе теорем дополнительные теоремы, которые в сочетании с текущей анализируемой теоремой будут давать полезные следствия. Здесь используются как оглавление базы теорем, так и специальные процедуры быстрого поиска теорем заданного типа. Во-вторых, прием программирующего вывода может обращаться к решателю для различных вспомогательных задач, подсказанных его целевой установокой. В результате срабатывание одного такого приема часто оказывается равно-

сильным длинной цепочке применений обычных правил вывода, причем устройство ее непредсказуемо из-за подключения мощного аппарата всей базы приемов решателя. В-третьих, прием должен использовать определенные эвристические правила для блокировки вывода малополезных (например, чрезмерно громоздких) теорем. В частности, для этого используется блокировка определенных сочетаний последовательно применяемых приемов вывода. При обучении такая блокировка позволила устойчиво обеспечивать исчерпание возможностей дальнейшего вывода в ячейке и выдачу окончательного результата за приемлемое время. В особых случаях результаты вывода выносились в новые ячейки, и глубина вывода таким образом увеличивалась. В-четвертых, прием вывода должен сопровождать теорему характеристиками. Обычно для этого используется общая процедура характеризатора, но иногда прием сам указывает характеристики, объясняющие цель, ради которой он ее получил.

Грань между программирующим логическим выводом и исследовательским выводом является весьма условной. При проработке базы теорем оказалось, что получение многих "классических" теорем может быть объяснено приемами логического вывода того же уровня сложности, что и для их "технических" следствий. Несложные приемы, объясняющие, как одна теорема могла бы быть выведена из других, были созданы, например, для формул корней квадратных и кубических уравнений в элементарной алгебре, теоремы Пифагора и теорем синусов и косинусов в планиметрии, свойств определителей в линейной алгебре, основных формул вычисления первообразных в математическом анализе и т.д. Фактически, теоремы прорабатываются почти подряд, без разделения на базисные и вторичные. Все это вывело процесс обучения решателей на качественно более высокий уровень. Если раньше анализировались задачи из задачников и нужно было предложить приемы, которые доводили аналогичные задачи до ответа, то теперь анализируются теоремы и предпринимаются попытки создать приемы для "открытия" новых теорем. При этом разрешается использовать весь ранее накопленный системой потенциал решения задач.

Описание приемов вывода теорем содержится в 9 томе монографии. Там пересказаны программы приемов, и работа каждой такой программы проиллюстрирована на примере. Этот пересказ осуществлялся в терминах программных переменных. Он получился многословным и трудно воспринимаемым, хотя и полным. Это создало потребность в определенной "расшифровке" действий приемов - кратком описании смысла, достаточном для точного понимания происходящего. Так как приемов вывода теорем накопилось много и их список постоянно пополняется (в том числе за время после написания 9 тома), необходимо было как-то классифицировать данные приемы. Напомним, что классификация приемов ГЕНОЛОГа позволила создать логический ассемблер и перейти к автоматическому созданию приемов. Получится ли аналогичным образом найти способ автоматического создания приемов вывода теорем, или классификация этих приемов позволит лишь довести их коллекцию до необходимой полноты - покажут будущие исследования. Пока удалось создать классификацию таких приемов и предпринять указанную выше их "расшифровку". Заметим, что, по сравнению с девятым томом монографии, к описанию добавилось множество новых приемов.

Данный, десятый том монографии посвящен указанным расшифровке приемов вывода теорем и простейшей их классификации.

Классификация приемов вывода теорем реализована в виде древовидного оглавления, концевые пункты которого суть тексты расшифровки отдельных приемов.

Чтобы перейти в данное оглавление, нужно сначала из корневого меню логической системы перейти в оглавление программ (клавиша "л"), затем нажать клавишу "т". После текста каждого концевого пункта этого оглавления помещается терм "программа(S – N)". Он ссылается на контрольную точку "прием(N)" программы логического символа S, реализующей прием вывода теорем, соответствующий данному концевому пункту.

Можно посмотреть как ЛОС-программу приема вывода теорем, так и примеры использования данного приема при выводе теорем. В обоих случаях, прежде всего, находясь на концевом пункте оглавления, следует нажать "курсор вправо". Это нажатие переводит в концевой пункт оглавления программ, соответствующий приему. Напомним, что к разделу оглавления программ, содержащему ссылки на приемы вывода теорем, можно перейти от корня оглавления вдоль пути "База теорем" - "Программирующий вывод" - "Приемы вывода теорем (справочник ПРОГРВЫВОД)".

Далее, как обычно, нажатие "курсор вправо" переводит в ЛОС-программу приема; нажатие "л" - в просмотр списка теорем, при выводе которых использовался прием. Чтобы для текущей выбранной теоремы списка посмотреть историю ее вывода, используются клавиши "курсор вправо - влево". Заметим, что часто рассматриваемый прием вывода использовался не в конце этой истории, а внутри нее. В каждом кадре, возникающем при просмотре, в верхней части прорисована результирующая теорема, в нижней - одна или несколько теорем, из которых она была выведена. Под верхней теоремой располагается список ее характеристик, затем - ссылка на прием вывода - S, u, N, где u - уровень срабатывания приема; S, N - те же, что и выше. В той же строчке, что ссылка на прием, повторяется название приема из оглавления приемов. Если на этом кадре нажать "ъ", то реализуется повторный запуск программы приема, с остановкой при обращении к процедуре "регтеор", регистрирующей полученную теорему. Чтобы вернуться в исходный кадр, нажимаются "0" и Enter. Для возвращения в список теорем, при выводе которых использован прием, наживается Esc. Далее, для возвращения в оглавление программ, нажимается "курсор вправо". Наконец, для возвращения в тот пункт классификации приемов, из которого перешли в оглавление программ, достаточно нажать "т".

В данном томе мы воспроизведем классификацию приемов вывода теорем и их расшифровку. Почти всегда приводится пример применения приема. Другие примеры его применения легко найти, как указано выше, в программе логической системы. Часто теорема, создаваемая приемом вывода теорем, используется для приема решателя, и тогда нажатием "п" можно перейти от нее к такому приему. В других случаях она может оказаться лишь промежуточным утверждением в цепочке переходов к теореме приема решателя, или просто теоремой из учебника.

Заметим, что ниже приводятся лишь сокращенные описания приемов вывода теорем. Например, в них пропущены указания на уровень срабатывания, отброшены фильтры, учитывающие предысторию вывода теоремы и т.п. Обычно новая теорема обрабатывается оператором "нормтеорема", упрощающим ее при помощи задачи на преобразование. В таких случаях описание приема завершается словами "Результат упрощается". Иногда это даже не указывается.

После описания приема в скобках помещается текст "Прием s - n". Он означает, что ЛОС-программа приема расположена в программе логического символа s, и найти ее можно по вставке "прием(n)". Все программы приемов вывода теорем суть программы справочника "прогрвывод" (их подавляющее большинство), либо справочника

"теоремы", либо, наконец, относятся к процедуре "блоквывода"(их всего 4). Иногда подряд идут несколько приемов, отличающихся только стартовыми характеристиками теорем. Для удобства чтения мы полностью копируем их описания.

Некоторые теоремы, приводимые в качестве примера работы приема вывода, могут показаться не очень нужными, но это означает лишь то, что они понадобились как отдельное звено цепочки выводов, приводящей к нужной теореме. Проследить такую цепочку можно, работая с самой логической системой.

Напомним, что последнюю версию логической системы можно получить по адресу "www.intsys.msu.ru/invest/solver/logsyst.zip".

Автор глубоко благодарен В.Б.Кудрявцеву, поддержка которого сделала возможным проведение данного исследования.

Оглавление

1 Простейшие следствия теоремы **6**
1.1 Преобразование кванторной импликации 6
1.2 Преобразование кванторной эквивалентности 25
1.3 Отождествление подтермов теоремы 45
1.4 Подстановка константы либо некоторого простейшего выражения . . 51
1.5 Варьирование либо исключение условного выражения 70
1.6 Использование параметрического описания 79
1.7 Специальная стандартизация теоремы 81
1.8 Использование симметрии 96
1.9 Переход к эквивалентности с квантором существования 102
1.10 Переход к эквивалентности с квантором общности 105
1.11 Несколько применений одной и той же теоремы 106
1.12 Переход к импликации от эквивалентности 122
1.12.1 Эквивалентность для конъюнкции 122
1.12.2 Эквивалентность для дизъюнкции 133
1.12.3 Эквивалентность двух утверждений произвольного вида 136
1.12.4 Эквивалентность, среди конъюнктивных членов заменяющей части которой встречается кванторная импликация 147
1.12.5 Эквивалентность, среди конъюнктивных членов заменяющей части которой встречается квантор существования 151
1.13 Переход к эквивалентности от импликации 160
1.14 Переход к теореме с функциональными переменными 172
1.15 Эквивалентное преобразование консеквента 181
1.16 Повторное упрощение теоремы 188
1.17 Переход к эквивалентности от тождества 192
1.18 Переход к тождеству от эквивалентности 199
1.19 Следствия тождества с описателем "класс" 206
1.20 Следствия тождества с описателем "отображение" 212
1.21 Свойства операции, заданной косвенным определением 215
1.22 Замена переменной в теореме 215
1.23 Ввод в антецедентах идентифицирующих равенств 222
1.24 Вывод неравенства из равенства 243
1.25 Добавление антецедентов, упрощающих консеквент 246
1.26 Навешивание внешнего оператора на обе части тождества 248
1.27 Переход к утверждению существования 250
1.28 Переход к импликации для усмотрения противоречивых посылок . . . 254
1.29 Ввод вспомогательных переменных для координат 256
1.30 Проверка стандартного свойства одной части тождества 258
1.31 Усмотрение простейшего свойства определяемого понятия 258

1.32 Усмотрение простейшего свойства функции 262

2 Склейка нескольких теорем 265

3 Использование дополнительной теоремы для варьирования текущей 305

3.1 Вывод дизъюнктивного утверждения при помощи дополнительного тождества 305

3.2 Использование дополнительного тождества для варьирования консеквента 306

3.2.1 Преобразование заменяемой части тождества 306

3.2.2 Преобразование заменяющей части тождества 349

3.2.3 Преобразование заменяемой части эквивалентности 365

3.2.4 Преобразование заменяющей части эквивалентности 378

3.2.5 Применение к обеим частям тождества внешней операции и упрощение 389

3.2.6 Применение к обеим частям двух тождеств двуместной операции и сокращение 389

3.2.7 Преобразование подтерма консеквента 390

3.3 Вывод эквивалентности, комбинирующей уравнения 413

3.4 Одновременное преобразование антецедента и консеквента 414

3.5 Использование эквивалентности для варьирования консеквента теоремы 415

3.5.1 Варьирование тождества с условным выражением при помощи эквивалентности 415

3.5.2 Упрощение заменяемой части эквивалентности другой эквивалентностью 416

3.5.3 Варьирование заменяющей части эквивалентности другой эквивалентностью 424

3.5.4 Эквивалентность позволяет ввести дополнительное условие в заменяемую часть параметрического описания 435

3.5.5 Преобразование конъюнктивных членов консеквента к виду дизъюнкции и добавление к антецедентам части подслучаев . . 436

3.5.6 Преобразование консеквента импликации с помощью дополнительной эквивалентности 438

3.5.7 Варьирование описателя "класс" с помощью дополнительной эквивалентности 444

3.5.8 Варьирование тождества с помощью эквивалентности для равенств 449

3.6 Преобразование эквивалентности в тождество 451

3.7 Преобразование эквивалентности в импликацию 452

3.8 Усмотрение эквивалентности консеквента преобразованному антецеденту 463

3.9 Односторонняя модификация эквивалентности 464

3.10 Варьирование заменяющей части эквивалентности при помощи импликации 465

3.11 Варьирование заменяемой части эквивалентности при помощи импликации 472

3.12 Использование параметрического описания 478

3.12.1 Свертка параметрического описания 478
3.12.2 Развертка параметрического описания 490
3.12.3 Шаблон параметрического описания позволяет применить исходное тождество к сложному подвыражению таким образом, чтобы в противоположной его части другое сложное подвыражение было заменено на переменную 494
3.13 Использование уравнений для координат множеств точек 495
3.14 Переход от координат объекта к самому объекту 499
3.15 Преобразование эквивалентности в условие существования 499
3.16 Извлечение тождества из импликации 501
3.17 Установление эквивалентности консеквента антецеденту 501
3.18 Варьирование функциональной переменной 502
3.19 Тождество с описателем "класс" порождает эквивалентность 503
3.20 Опровержение квантора существования 504

4 Варьирование дополнительной теоремы 505
4.1 Дополнительная теорема преобразуется эквивалентностью 505
4.1.1 Использование дизъюнкции для преобразования дополнительной теоремы 515
4.2 Использование тождества для преобразования дополнительной теоремы 516
4.2.1 Использование тождества для варьированя дополнительной эквивалентности 516
4.2.2 Использование тождества для варьирования дополнительного тождества 526
4.2.3 Использование тождества для варьирования консеквента дополнительной импликации 550
4.2.4 Использование тождества для варьирования произвольной дополнительной теоремы 556
4.3 Использование импликации для варьирования дополнительной теоремы 556

5 Обобщение теоремы 561
5.1 Отбрасывание избыточного антецедента 561
5.2 Ослабление антецедентов 576
5.3 Развязка переменной 581
5.4 Переход к новому параметру, обозначающему сложное выражение . . 588
5.5 Домножение обеих частей двуместного отношения 602
5.5.1 Домножение частей равенства в консеквенте на выражение с новым параметром 602
5.5.2 Домножение обеих частей двуместного отношения в антецеденте на выражение с новым параметром 613
5.5.3 Домножение на новый параметр обеих частей равенства в заменяемой части эквивалентности 613
5.6 Ввод дизъюнктивного члена для вырожденного случая 614
5.7 Добавление антецедента к заменяющей части эквивалентности 617
5.8 Подстановка выражения с двумя переменными 618
5.9 Обобщение тождества путем перенесения антецедента в условное выражение 633

5.10 Подстановка вместо переменной сложного выражения 635
5.11 Разнесение новых параметров по разным частям отношения 636
5.12 Индуктивное обобщение теоремы 637
5.13 Отбрасывание фрагментов консеквента 649
5.14 Обобщение вида разрешаемого уравнения 650
5.15 Обобщение уравнения путем изменения системы координат 650

6 Вывод следствий с помощью задачи на описание 652
6.1 Простейшие приемы 652
6.2 Получение явного описания для заданного условия 672
6.3 Попытка решить уравнение 702

7 Вывод следствий с помощью задачи на исследование 705
7.1 Вывод следствий из антецедентов и консеквента 705
7.2 Решение задачи на исследование с целью исключить заданные подвыражения 735
7.3 Изменение уравнения для координат множества объектов 749
7.4 Вывод следствий при расширенном списке антецедентов 752
7.5 Анализ утверждения типа "длялюбого существует длялюбого" 758
7.6 Рассмотрение экстремального значения параметра 759
7.7 Анализ однозначной определимости 760
7.8 Использование задачи на исследование для формирования гипотезы . 764

8 Вывод следствий с помощью задачи на преобразование 767

9 Вывод следствий с помощью задачи на доказательство 774

10 Варьирование антецедентов теоремы 788
10.1 Реализация антецедента текущей теоремы 788
10.2 Реализация антецедента дополнительной теоремы 814
10.3 Реализация антецедента с помощью задачи на описание 825
10.4 Упрощение антецедента 826
10.5 Усиление антецедента 846
10.6 Сужение теоремы путем добавления антецедента, упрощающего идентификацию 851
10.7 Варьирование сложного антецедента 851
10.8 Развязка параметров антецедента с помощью дополнительной теоремы 876
10.9 Группировка нескольких антецедентов в один 881
10.10 Одновременное ослабление антецедентов и консеквента 883
10.11 Перенесение фрагмента консеквента в антецеденты и реализация нового антецедента 886
10.12 Усиление антецедента для варьирования консеквента 888
10.13 Исключение кванторного антецедента и ввод условного выражения 890
10.14 Использование дополнительной теоремы для опровержения антецедента 891
10.15 Ослабление антецедента путем ввода дополнительных антецедентов 891

11 Вывод вспомогательных теорем **893**
11.1 Теорема приема, подготавливающего срабатывание других приемов . 893
11.2 Получение дополнительной теоремы программирующего вывода . . . 894
11.3 Извлечение теоремы из протокола 895
11.4 Создание теоремы, вводящей новые объекты 899
11.5 Создание квазипротокола 900
11.6 Создание протокола 904

Глава 1

Простейшие следствия теоремы

1.1 Преобразование кванторной импликации

Контрапозиции импликации

1. Простая контрапозиция: отрицание элементарного консеквента становится антецедентом, а отрицание некоторого антецедента - консеквентом.

   (a) Проверяется, что для усмотрения истинности отрицания некоторого антецедента существует проверочный оператор. К этому антецеденту применяется контрапозиция. (Прием вывод - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ d \subseteq e \ \& \ \neg(a \subseteq e) \rightarrow \neg(a \subseteq d))$

   из теоремы

   $\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ a \subseteq d \ \& \ d \subseteq e \rightarrow a \subseteq e)$

   (b) Не используемый для сопровождения по о.д.з. антецедент имеет вид отрицания равенства двух переменных. К нему применяется контрапозиция. (Прием вывод - 25).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDab}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(\text{прямая}(ab) = \text{прямая}(CD)) \ \&$
   $A \in \text{прямая}(ab) \ \& \ A \in \text{прямая}(CD) \ \& \ B \in \text{прямая}(ab) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD) \ \&$
   $a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow$
   $A = B)$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDab}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ A \in \text{прямая}(ab) \ \& \ A \in \text{прямая}(CD) \ \& \ B \in \text{прямая}(ab) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(CD) = \text{прямая}(ab))$

   (c) Проверяется, что для усмотрения истинности отрицания некоторого антецедента существует проверочный оператор . К этому антецеденту применяется контрапозиция. (Прием легковидеть - 7).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ b \subseteq a\ \&\ \neg(\text{конечное}(b)) \rightarrow \neg(\text{конечное}(a)))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(a)\ \&\ b \subseteq a \rightarrow \text{конечное}(b))$

(d) Проверяется, что для усмотрения истинности отрицания некоторого не используемого для сопровождения по о.д.з. антецедента существует проверочный оператор. К этому антецеденту применяется контрапозиция. (Прием спуск - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(b)\ \&\ \neg(\text{конечное}(a \cup b)) \rightarrow \neg(\text{конечное}(a)))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(a)\ \&\ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{конечное}(a \cup b))$

(e) Не используемый для сопровождения по о.д.з. антецедент имеет сложность, большую сложности консеквента и не меньшую сложности остальных антецедентов. Этот антецедент имеет единственную переменную и одноместное корневое отношение. К нему применяется контрапозиция. (Прием вывод - 75).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abp}(\text{ведет}(p, b, b, a) \rightarrow \neg(\text{простграф}(a)))$

из теоремы

$\forall_{abcp}(\text{ведет}(p, b, c, a)\ \&\ \text{простграф}(a) \rightarrow \neg(b = c))$

(f) Консеквент - равенство двух переменных либо равенство переменной логическому символу. Некоторый антецедент имеет самый сложный среди антецедентов заголовок, содержит не менее 3 параметров и отличен от условия принадлежности. К нему применяется контрапозиция. (Прием вывод - 82).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcdxG}(b \in d\ \&\ c \in x\ \&\ d \in \text{компоненты}(G)\ \&\ x \in \text{компоненты}(G)\ \&\ \text{граф}(G)\ \&\ \neg(x = d) \rightarrow \neg(\text{смежны}(b, c, G)))$

из теоремы

$\forall_{bcdxG}(b \in d\ \&\ c \in x\ \&\ d \in \text{компоненты}(G)\ \&\ x \in \text{компоненты}(G)\ \&\ \text{граф}(G)\ \&\ \text{смежны}(b, c, G) \rightarrow x = d)$

(g) Консеквент - равенство двух переменных. Имеется единственный антецедент, содержащий обе эти переменные. К нему применяется контрапозиция. (Прием вывод - 90).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{fxy}(x \in \text{Dom}(f)\ \&\ y \in \text{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f)\ \&\ \neg(x = y) \rightarrow \neg(f(x) = f(y)))$

из теоремы

$\forall_{fxy}(f(x) = f(y)\ \&\ x \in \text{Dom}(f)\ \&\ y \in \text{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow x = y)$

(h) Консеквент не имеет своим заголовком отрицание. Существует единственный антецедент, сложность которого больше сложности консеквента. Он содержит все параметры консеквента. Для усмотрения истинности отрицания консеквента существует проверочный оператор. К указанному антецеденту применяется контрапозиция. (Прием попыткаспуска - 31).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \ \& \ \neg(a = \emptyset) \to 0 < \text{card}(a))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \ \& \ \text{card}(a) \leq 0 \to a = \emptyset)$$

2. Простая контрапозиция, при которой дополнительно предпринимаются попытки упрощения отрицаний.

(a) Консеквент и некоторый существенный бесповторный антецедент не являются равенствами и не имеют своим заголовком отрицание. Консеквент содержит все параметры антецедента. Предпринимаются попытки упростить отрицания антецедента и консеквента. Если корневые их символы "не" при этом пропадают, реализуется контрапозиция. (Прием легковидеть - 11).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_{afxy}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ x \in a \ \& \ y \in a \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ 0 \leq f(y) - f(x) \ \& \ \text{возрастает}(f, a) \to 0 \leq y - x)$$

из теоремы

$$\forall_{afxy}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ x \in a \ \& \ y \in a \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ 0 < x - y \ \& \ \text{возрастает}(f, a) \to 0 < f(x) - f(y)$$

(b) Консеквент и некоторый элементарный существенный антецедент, не используемый для сопровождения по о.д.з., имеют одни и те же параметры. Предпринимается попытка упростить отрицание консеквента. Если результат не имеет заголовком символ "не", либо исходная теорема не выражала свойство самого сложного своего понятия, то реализуется контрапозиция. (Прием попыткаспуска - 11).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_{aAB}(\neg(A = B) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ A \in \text{интервал}(aB) \to \neg(a \in \text{луч}(AB)))$$

из теоремы

$$\forall_{aAB}(\neg(A = B) \ \& \ a \in \text{луч}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \to \neg(A \in \text{интервал}(aB)))$$

(c) Консеквент имеет единственный невырожденный числовой атом, а некоторый антецедент представляет собой неравенство с двумя неврожденными числовыми атомами. Такой антецедент единственный. Более того, нет другого существенного антецедента с заголовком, отличным от символа "не".

Реализуется контрапозиция, причем отрицания консеквента и антецедента упрощаются задачами на преобразование. (Прием числоценка - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(B=C)\ \&\ \neg(A \in \text{прямая}(BC))\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ 0 \le -\pi/2+\angle(ACB) \to 0 < l(AB)-l(BC))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(B=C)\ \&\ \neg(A \in \text{прямая}(BC))\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ l(AB) \le l(BC) \to \angle(ACB) < \pi/2)$

(d) Импликация типа обобщенной транзитивности, у которой отрицание консеквента преобразуется в утверждение без заголовка "не", причем существенные антецеденты не имеют заголовка "не". Предпринимается контрапозиция существенного антецедента с консеквентом, и полученная теорема используется для приема усмотрения ложности подутверждения. (Прием транзитоперанд - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ a<b\ \&\ 0 \le a-c \to \neg(b<c))$

из теоремы

$\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ a<b\ \&\ b<c \to a<c)$

3. Простая контрапозиция с дизъюнктивным консеквентом: отрицания его дизъюнктивных членов переносятся в антецеденты, а отрицание некоторого антецедента превращается в консеквент.

(a) Консеквент представляет собой дизъюнкцию элементарных утверждений. Его оценка сложности больше 3. Имеется единственный антецедент A с такой же оценкой сложности. Реализуется контрапозиция: отрицания дизъюнктивных членов добавляются в антецеденты, а консеквентом становится отрицание антецедента A. Результат упрощается с блокировкой контрапозиций. Если при этом импликация распадается в конъюнкцию нескольких импликаций, они рассматриваются по отдельности. При этом проверяется непротиворечивость их антецедентов. (Прием дизъюнкция - 19)

Пример: вывод теоремы

$\forall_{anxA}(\neg(\text{точкаприкосн}(x,a))\ \&\ \neg(\text{точкаприкосн}(x,A))\ \&\ a-\text{set}\ \&\ A-\text{set}\ \&\ a \subseteq \mathbb{R}^n\ \&\ A \subseteq \mathbb{R}^n\ \&\ n-\text{натуральное} \to \neg(\text{точкаприкосн}(x, a \cup A)))$

из теоремы

$\forall_{anxA}(a-\text{set}\ \&\ A-\text{set}\ \&\ a \subseteq \mathbb{R}^n\ \&\ A \subseteq \mathbb{R}^n\ \&\ n-\text{натуральное}\ \&\ \text{точкаприкосн}(x, a \cup A) \to \text{точкаприкосн}(x,a)\ \vee\ \text{точкаприкосн}(x,A))$

4. Контрапозиция и замена нового антецедента на более сильное ограничение.

(a) Консеквент является равенством двух числовых атомов. Единственный существенный антецедент - условие принадлежности некоторой переменной

x атомарному неоднобуквенному выражению t, более в теореме не встречающемуся. Все переменные консеквента встречаются в данном антецеденте. Реализуется контрапозиция, после чего отрицание исходного консеквента заменяется на строгое неравенство его операндов (рассматриваются оба варианта). Список антецедентов упрощается. (Прием равны - 30).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aAB}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ 0 < l(AB)-l(aA) \rightarrow \neg(a \in \text{окружность}(AB)))$

из теоремы

$\forall_{aAB}(\neg(A = B)\ \&\ a \in \text{окружность}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \rightarrow l(aA) = l(AB))$

5. Развязка транзитивного отношения в антецедентах и контрапозиция.

   (a) Антецедент $P(A, B)$ с транзитивным отношением P заменяется на два антецедента $P(A, C)$ и $P(D, B)$ для новых объектов C, D. Затем отрицание консеквента переносится в антецеденты, а консеквентом становится отрицание равенства объектов C, D. (Прием вывод - 53).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdBCD}(\text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(BC)\ \&\ \text{прямая}(cd) \parallel \text{прямая}(CD)\ \&\ \neg(\text{прямая}(BC) = \text{прямая}(CD))\ \&\ \neg(c = d)\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(a = b)\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \rightarrow \neg(\text{прямая}(ab) = \text{прямая}(cd)))$

   из теоремы

   $\forall_{BCD}(\neg(B = C)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(CD) \rightarrow \text{прямая}(BC) = \text{прямая}(CD))$

6. Несколько антецедентов объединяются в конъюнкцию, после чего предпринимается ее контрапозиция с консеквентом.

   (a) Усмотрение в антецедентах группы отрицаний равенств для одной и той же переменной, не используемых для сопровождения по о.д.з., и контрапозиция для получения в консеквенте дтзъюнкции этих равенств. (Прием вывод - 55).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{mn}(n - \text{натуральное}\ \&\ \text{простое}(m)\ \&\ n \mid m \rightarrow n = 1\ \vee\ n = m)$

   из теоремы

   $\forall_{mn}(n - \text{натуральное}\ \&\ \neg(n = 1)\ \&\ \neg(n = m)\ \&\ \text{простое}(m) \rightarrow \neg(n \mid m))$

   (b) Контрапозиция консеквента, имеющего вид отрицания, с несколькими (более одного) антецедентами, имеющими вид отрицания и не используемыми для сопровождения по о.д.з. (Прием свойства - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{натуральное}\ \&\ a - \text{rational}\ \&\ \text{простое}(ab) \rightarrow a - 1 = 0\ \vee\ b - 1 = 0)$

из теоремы

$\forall_{ab}(\neg(a-1=0)\ \&\ \neg(b-1=0)\ \&\ b-$ натуральное $\&\ a-$ rational $\rightarrow$ $\neg($простое$(ab)))$

7. Контрапозиция, в процессе которой отрицание консеквента разворачивается в квантор существования.

   (a) Имеется единственный существенный антецедент A, заголовком которого служит символ "не". Этот антецедент не используется для сопровождения по о.д.з. Отрицание консеквента преобразуется при помощи задачи на описание к виду квантора существования. Все конъюнктивные члены подкванторого утверждения и отличные от A антецеденты становятся антецедентами новой теоремы, а консеквентом становится отрицание утверждения A. (Прием вывод - 31).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDa}(A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&\ D-$ точка $\&\ \neg(C=D)\ \&$ $\neg(A=B)\ \&$ прямая$(AB)\parallel$ прямая$(CD)\ \&\ a\in$ прямая$(AB)\ \&\ a\in$ прямая(CD) $\rightarrow$ прямая$(AB)=$ прямая$(CD))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&\ D-$ точка $\&\ \neg(C=D)\ \&$ $\neg(A=B)\ \&$ прямая$(AB)\parallel$ прямая$(CD)\ \&\ \neg($прямая$(AB)=$ прямая$(CD))\rightarrow$

   непересек(прямая(AB), прямая$(CD)))$

8. Перенесение в антецеденты отрицания консеквента и замена консеквента на константу "ложь".

   (a) Консеквентом теоремы служит отрицание равенства. Это равенство разрешается относительно своих параметров при помощи задачи на описание. Результат добавляется к антецедентам теоремы, а консеквентом новой теоремы становится логическая константа "ложь". Теорема упрощается, с сохранением консеквента. Если получается конъюнкция, рассматриваются все ее конъюнктивные члены. Они сопровождаются характеристикой "контроль", указывающей, что теорема создана для приемов, контролирующих противоречия при разборе случаев. (Прием Крд - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{BCK}(\neg(B=C)\ \&$ коорд(прямая$(BC),K)=\mathrm{set}_{xy}(x-$число $\&\ y-$число$)\ \&$ $B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&$ систкоорд$(K)\rightarrow$ ложь$)$

   из теоремы

   $\forall_{abcBCK}(\neg(B=C)\ \&$ коорд(прямая$(BC),K)=\mathrm{set}_{xy}(c+ax+by=0\ \&$ $x-$число $\&\ y-$число$)\ \&\ a-$число $\&\ b-$число $\&\ c-$число $\&\ B-$точка $\&$ $C-$ точка $\&$ систкоорд$(K)\rightarrow\neg(a^2+b^2=0))$

9. Антецедент разбивается на два подутверждения, возможно, со вводом вспомогательного параметра, Затем контрапозиция реализуется для одного из этих подутверждений.

   (a) Консеквент имеет вид $f(A_1 \dots A_n) = f(B_1 \dots B_n)$, причем для объектов, тип которых - такой, как у значений операции f, существует специальный оператор P усмотрения их различия. Выражение $f(A_1 \dots A_n)$ встречается в антецедентах. Выбираются новые переменные $x_1, \dots, x_n$. Во всех антецедентах выражение $f(A_1 \dots A_n)$ заменяется на $f(x_1 \dots x_n)$. После этого к антецедентам добавляются отрицание консеквента и условия на о.д.з. терма $f(x_1 \dots x_n)$, а новым консеквентом становится отрицание равенства $f(A_1 \dots A_n) = f(x_1 \dots x_n)$. Новая теорема снабжается характеристикой, указывающей, что она создана для программы оператора P. (Прием равны - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abBCD}(\neg(a = b)\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(CD)\ \&\ \neg(\text{прямая}(BC) = \text{прямая}(CD)) \to \neg(\text{прямая}(BC) = \text{прямая}(ab)))$

   из теоремы

   $\forall_{BCD}(\neg(B = C)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(CD) \to \text{прямая}(BC) = \text{прямая}(CD))$

10. Вводится вспомогательное обозначение для подвыражения консеквента, после чего контрапозиция предпринимается для равенства, вводящего это обозначение.

    (a) Среди корневых операндов консеквента имеется невырожденный числовой атом T. Выбирается новая переменная x, после чего в антецедентах и консеквенте T заменяется на x. При помощи задачи на преобразование отрицание измененного консеквента преобразуется к виду Q, заголовком которого не служит символ "не". Утверждение Q и сопровождающие его по о.д.з. утверждения добавляются к антецедентам, а консеквентом становится утверждение "не(равно(T x))". (Прием спуск - 42).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ab}(a < 0\ \&\ b - \text{set}\ \&\ a - \text{число} \to \neg(\text{card}(b) = a))$

    из теоремы

    $\forall_b(b - \text{set}\ \&\ \text{card}(b) - \text{число} \to 0 \leq \text{card}(b))$

    (b) Консеквент имеет вид "не(A)", где утверждение A небесповторно. Рассматривается переменная x, имеющая в A более одного вхождения, и выбирается новая переменная y. Некоторое (не первое вхождение x в A заменяется на y. Полученное утверждение и сопровождающие его по о.д.з. утверждения добавляются к антецедентам, а консеквентом становится отрицание равенства переменных x, y. (Прием элементарно - 12).

    Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ a < b \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \neg(a = b))$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \neg(a < a))$

(c) В консеквенте встречается символ константы s, причем однократно. Существует проверочный оператор для усмотрения отрицания равенства этой константе. Выбирается новая переменная x. Отрицание консеквента, в котором s заменено на x, добавляется к антецедентам, а новым консеквентом становится "не(равно(s x))". (Прием пример - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(\neg(a \subseteq b) \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \neg(a = \emptyset))$

из теоремы

$\forall_b(b - \text{set} \rightarrow \emptyset \subseteq b)$

(d) Консеквент имеет вид "не(A)". Существует единственная переменная x, имеющая в утверждении более одного вхождения. Число этих вхождений равно 2. Выбирается новая переменная y. Результат замены в A первого вхождения x на переменную y добавляется к антецедентам, а консеквентом становится утверждение "не(равно(x y))". (Прием вывод - 71).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{acd}(\text{простграф}(c) \ \& \ \text{смежны}(a, d, c) \rightarrow \neg(d = a))$

из теоремы

$\forall_{cd}(\text{простграф}(c) \rightarrow \neg(\text{смежны}(d, d, c)))$

11. Отрицание антецедента добавляется к консеквенту в качестве дизъюнктивного члена, а сам антецедент исключается.

(a) Оценка сложности элементарного консеквента A больше 5, причем его заголовком не является отрицание. Имеется не более двух антецедентов, оценка сложности которых больше 5. Среди них выбирается антецедент вида "не(B)", имеющий те же параметры, что и A. Он исключается из антецедентов, а новым консеквентом становится дизъюнкция $A \vee B$. (Прием вывод - 83).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{anA}(A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R}^n \ \& \ a \in A \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow \text{предельныточка}(a, A) \vee \text{изолирточка}(a, A))$

из теоремы

$\forall_{anA}(\neg(\text{предельныточка}(a, A)) \ \& \ A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R}^n \ \& \ a \in A \ \&$
$n - \text{натуральное} \rightarrow \text{изолирточка}(a, A))$

Перестановка местами антецедента и консеквента без перехода к отрицаниям

1. Консеквент имеет вид "коорд$(A,K)=(a_1,\ldots,a_n))$", некоторый антецедент - вид "коорд$((B,K)=(x_1,\ldots,x_n))$", где $x_1,\ldots,x_n$ - различные переменные. Выбираются новые переменные $y1,\ldots,y_n$, и относительно переменных $x_1,\ldots,x_n$ решаются уравнения $a_1=y_1,\ldots,a_n=y_n$. Посылками служат все не содержащие $x_1,\ldots,x_n$ антецеденты и равенство "коорд$(A,K)=(y_1,\ldots,y_n))$". Если получаетя результат $x_1=t_1$ & ... & $x_n=t_n$, то выводится импликация, антецеденты которой получаются заменой "коорд$((B,K)=(x_1,\ldots,x_n))$" на "коорд$(A,K)=(y_1,\ldots,y_n))$", а консеквентом служит "коорд$((B,K)=(t1_1,\ldots,t_n))$". (Прием коорд - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abefABK}$(систкоорд(K) & $A-$точка & $B-$точка & коорд$(A,K)=(a,b)$ & коорд(вектор$(AB),K)=(e,f)\rightarrow$ коорд$(B,K)=(a+e,b+f))$

   из теоремы

   $\forall_{ABKabcd}$(систкоорд(K) & $A-$точка & $B-$точка & коорд$(A,K)=(a,b)$ & коорд$(B,K)=(c,d)\rightarrow$ коорд(вектор$(AB),K)=(c-a,d-b))$

2. Усмотрение того, что один из антецедентов, имеющий вид отрицания равенства, является следствием консеквента: для доказательства от противного используется задача на исследование. Теорема - квнторная импликация, усматривающая тип объекта по уравнению для координат его точек. Рассматривается антецедент вида $\neg(t_1=t_2)$, не используемый для сопровождения по о.д.з. Решается задача на исследование, посылки которой - остальные антецеденты, равенство $t_1=t_2$ и консеквент. Цель - "противоречие". После решения усматривается посылка "ложь". Консеквентом новой теоремы становится $\neg(t_1=t_2)$, антецеденты - отличные от $\neg(t_1=t_2)$ антецеденты исходной теоремы и ее консеквент. (Прием видобъекта - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcefK}(b-$число & $c-$число & $f-$число & систкоорд(K) & $a-$число & коорд$(e,K)=\mathrm{set}_{xy}(\exists_t(x=a+ft$ & $y=b+ct$ & $t-$число)) & Прямая$(e)\rightarrow\neg(c^2+f^2=0))$

   из теоремы

   $\forall_{abcefK}(b-$число & $c-$число & $f-$число & систкоорд(K) & $a-$число & $\neg(c^2+f^2=0)$ & коорд$(e,K)=\mathrm{set}_{xy}(\exists_t(x=a+ft$ & $y=b+ct$ & $t-$число)) $\rightarrow$ Прямая$(e))$

3. Переход к обратной импликации, если конъюнкция определяет набор параметров правой части равенства в антецедентах. Теорема - кванторная импликация с элементарными антецедентами и консеквентом, имеющим вид конъюнкции утверждений. Среди конъюнктивных членов консеквента выделяются равенства $x_1=t_1,\ldots,x_n=t_n$, у которых переменные x_i не входят в выражения tj. Имеется антецедент $r_1=r_2$, такой, что параметры r_1 включаются в список

$x_1, \ldots, x_n$, а выражение r_2 не содержит переменных $x_1, \ldots, x_n$, Утверждение "$\exists_{x_1 \ldots x_n}(r1 = r2)$" - следствие отличных от "$r_1 = r_2$"антецедентов. Консеквентом новой теоремы становится равенство $r_1 = r_2$, антецедентами - отличные от этого равенства антецеденты исходной теоремы и ее консеквент. (Прием конъюнкция - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{AKabc}(\text{Трехмерн}(K)\ \&\ \text{Вектор}(A)\ \&\ \text{крд}(A, K, 1) = a\ \&\ \text{крд}(A, K, 2) = b\ \&$
$\text{крд}(A, K, 3) = c \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (a, b, c))$

из теоремы

$\forall_{AKabc}(\text{Трехмерн}(K)\ \&\ \text{Вектор}(A)\ \&\ \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \rightarrow$
$\text{крд}(A, K, 1) = a\ \&\ \text{крд}(A, K, 2) = b\ \&\ \text{крд}(A, K, 3) = c)$

4. Усмотрение однозначной определимости объекта при замене одного из антецедентов на консеквент. Теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. Единственный имеющий максимальную сложность антецедент - некоторое равенство $t_1 = t_2$. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты, а неизвестные - параметры посылок. После решения составляется список S, содержащий отличные от $t_1 = t_2$ антецеденты, а также все отличные от антецедентов посылки, не имеющие заголовка "актив" и не содержащие равенства. Проверяется, что $t_1 = t_2$ не является следствием S. Выбирается некоторый парамет x равенства $t_1 = t_2$, Список S, к которому добавлено равенство $t_1 = t_2$, разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Проверяется, что "$\exists_x(S_1)$" - следствие S_2. Выбирается новая переменная y, и при помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство $x = y$ - следствие S и консеквента, а также результатов замены в S и консеквенте переменной x на y. Консеквентом новой теоремы становится $t_1 = t_2$, антецедентами - S и консеквент исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 29).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC))\ \&$
$l(AB)l(CD) = l(AD)l(BC)\ \&\ D \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \ \&\ B - \text{точка}\ \&$
$C - \text{точка}\&\ D - \text{точка} \rightarrow \angle(ABD) = \angle(CBD))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC))\ \&$
$\angle(ABD) = \angle(CBD)\ \&\ D \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \ \&\ B - \text{точка}\ \&$
$C - \text{точка}\&\ D - \text{точка} \rightarrow l(AB)l(CD) = l(AD)l(BC))$

5. Попытка доказать эквивалентность консеквента единственному существенному антецеденту, содержащему все его параметры - вывод обратной импликации. Теорема - тождество, уменьшающее оценку сложности выражения. Имеется единственный существенный антецедент A, такой, что через его параметры, быть может, с помощью антецедентов вида $x = t$, выражаются все параметры консеквента. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что

этот антецедент - следствие остальных антецедентов и консеквента. Он становится консеквентом новой теоремы; антецедентами ее - остальные антецеденты исходной теоремы и ее консеквент. (Прием упрощение - 32).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abgh}(a = \text{операция}(h)\ \&\ g \in \text{носитель}(h)\ \&\ \text{порядокэлемента}(g,h) - \text{натуральное}\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ 0 \leq b\ \&\ \text{группа}(h)\ \&\ \text{алгстепень}(g,a,b) = \text{единица}(a) \rightarrow \text{порядокэлемента}(g,h) \mid b)$

из теоремы

$\forall_{abgh}(a = \text{операция}(h)\ \&\ g \in \text{носитель}(h)\ \&\ \text{порядокэлемента}(g,h) - \text{натуральное}\ \&\ \text{порядокэлемента}(g,h) \mid b\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ 0 \leq b\ \&\ \text{группа}(h) \rightarrow \text{алгстепень}(g,a,b) = \text{единица}(a))$

Частичная свертка кванторной импликации

1. Квантор общности по одной из переменных кванторной приставки заносится вглубь теоремы и сворачивается в элементарное утверждений.

   (a) Исходная теорема обрабатывается задачей на преобразование, имеющей цель "свертка". Если в результате длина связывающей приставки уменьшается, то выдается результат. (Прием легковидеть - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{af}(a - \text{set}\ \&\ f - \text{функция} \rightarrow \text{прообраз}(f,a) \subseteq \text{Dom}(f))$

   из теоремы

   $\forall_{afx}(a - \text{set}\ \&\ x \in \text{прообраз}(f,a)\ \&\ f - \text{функция} \rightarrow x \in \text{Dom}(f))$

   (b) Действия те же, что в предыдущем приеме, но стартовая характеристика теоремы - "спуск". (Прием спуск - 31).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_n(n - \text{натуральное} \rightarrow \text{наибольший}(n, \text{set}_m(m - \text{натуральное}\ \&\ m \mid n)))$

   из теоремы

   $\forall_{mn}(m - \text{натуральное}\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ m \mid n \rightarrow 0 \leq n - m)$

   (c) Консеквент теоремы имеет вид "$x \in t$", где переменная x не входит в t. Переменная x встречается в единственном антецеденте A, причем этот антецедент не является условием принадлежности. Выражение "$\text{set}_x(A)$" упрощается, и в результате получается не содержащее символа "класс" выражение B. Из антецедентов удаляется утверждение A, а консеквентом становится утверждение "$B \subseteq t$". (Прием легковидеть - 26)

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bG}(\text{граф}(G) \rightarrow \text{смежнверш}(b,G) \subseteq \text{вершины}(G))$

   из теоремы

   $\forall_{abG}(\text{граф}(G)\ \&\ \text{смежны}(a,b,G) \rightarrow a \in \text{вершины}(G))$

2. Квантор общности по одной из переменных кванторной приставки заносится вглубь теоремы и сворачивается в другую кванторную импликацию, имеющую более простые понятия.

   (a) Попытка исключения описателя "отображение" в консеквенте путем кванторной свертки по одному из параметров: выбирается параметр x данного описателя, являющийся одновременно параметром консеквента. Находятся все содержащие x антецеденты $A_1, \ldots, A_n$ и формируется импликация "$\forall_x(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n \to B)$", где B - консеквент теоремы. После упрощения задачей на преобразование эта импликация превращается в утверждение C, не содержащее описателя "отображение". Оно становится консеквентом новой теоремы, а антецедентами ее служит все отличные от $A_1, \ldots, A_n$ антецеденты исходной теоремы. (Прием отображение - 33).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bf}$(включается(b, f) & семействомножеств(f) & несовместны$(f) \to$ несовместны(b))

   из теоремы

   $\forall_{af}$(семействомножеств(f) & $a -$ set & $a \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ & несовместны$(f) \to$ несовместны$(\lambda_x(f(x), x \in a))$)

3. Квантор существования по некоторой переменной навешивается на все содержащие эту переменную антецеденты, а затем такой же квантор - на консеквент. В обоих случаях кванторы сворачиваются в элементарные утверждения.

   (a) Консеквент K имеет не менее двух параметров. Выбирается его параметр x, имеющий в консеквенте единственное вхождение. Проверяется, что лишь один антецедент A содержит x. Проверяется, что x входит в него однократно. При помощи задачи на преобразование упрощаются утверждения "$\forall_x(\neg(K))$" "$\forall_x(\neg(A))$". Первое из них дает элементарное утверждение B, второе - элементарное утверждение C. Вместо антецедента A берется утверждение B, консеквентом становится C. (Прием транзитоперанд - 16)

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ad}(a -$ set & $d -$ set & $a \subseteq \mathbb{R}$ & $d \subseteq a$ & огрснизу$(a) \to$ огрснизу$(d))$

   из теоремы

   $\forall_{abd}(a -$ set & $d -$ set & $a \subseteq \mathbb{R}$ & $d \subseteq a$ & нижняягрань$(b, a) \to$ нижняягрань$(b, d))$

Консеквент преобразуется в кванторную импликацию, антецеденты которой добавляются к антецедентам теоремы, а консеквентом становится консеквент возникшей импликации

1. Если консеквент не является равенством, то он обрабатывается относительно списка антецедентов сначала задачей на преобразование с целью "развертка", затем - с целью "свертка". Если получается кванторная импликация A с элементарным консеквентом и не содержащая отрицаний в антецедентах, то консеквент исходной теоремы заменяется на A. Результат упрощается; при этом

антецеденты утверждения A добавляются к антецедентам теоремы, а новым консеквентом становится консеквент утверждения A (Прием вывод - 87).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bGM}(b \in \{1, \ldots, \text{мдлина}(M) + 1\}$ & $\text{орграф}(G)$ & $\text{маршрут}(M, G) \rightarrow$ $\text{мверш}(M, b) \in \text{вершины}(G))$

из теоремы

$\forall_{GM}(M - mbox$ & $\text{орграф}(G)$ & $\text{маршрут}(M, G) \rightarrow \text{мвершины}(M) \subseteq$ $\text{вершины}(G))$

Преобразования импликации с дизъюнкцией в консеквенте

1. Вывод эквивалентности отрицания одного из дизъюнктивных членов консеквента дизъюнкции остальных членов.

   (a) Консеквентом служит дизъюнкция элементарных утверждений с более чем двумя дизъюнктивными членами. Выбирается один из них. Проверяется, что его отрицание является следствием любого из остальных. Затем консеквент заменяется на эквивалентность дизъюнкции оставшихся дизъюнктивных членов отрицанию выбранного. (Прием дизъюнкция - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}$ & $b - \text{число} \rightarrow a < b \ \vee \ b < a \leftrightarrow \neg(a = b))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}$ & $b - \text{число} \rightarrow a < b \ \vee \ b < a \ \vee \ a = b)$

2. Один из дизъюнктивных членов заменяется на более слабое ограничение.

   (a) Справочник поиска теорем "ослабление" позволяет найти ослабленную версию отношения - заголовка одного из дизъюнктивных членов консеквента. Его заголовок заменяется на ослабленную версию. (Прием дизъюнкция - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{число}$ & $d - \text{число} \rightarrow d \leq c \ \vee \ c \leq d)$

   из теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{число}$ & $d - \text{число} \rightarrow d < c \ \vee \ c \leq d)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}$ & $b - \text{число}$ & $a < b \rightarrow a \leq b)$

3. Консеквентом теоремы служит дизъюнкция с альтернативными членами. Эта теорема порождает эквивалентность, преобразующую сложную дизъюнктивно-конъюнктивную конструкцию с множественными вхождениями указанных альтернативных членов, в одну дизъюнкцию с однократными вхождениями альтернатив, около которых группируются прочие условия. Различные приемы вывода теорем соответствуют различным шаблонам дизъюнктивно-конъюнктивных конструкций.

(a) Консеквентом служит дизъюнкция $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ взаимно исключающих утверждений. Выбираются новые переменные $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$. Затем консеквент заменяется на эквивалентность утверждения $(A_1 \,\&\, x_1 \vee \ldots \vee A_n \,\&\, x_n) \,\&\, (A_1 \,\&\, y_1 \vee \ldots \vee A_n \,\&\, y_n)$ утверждению $(A_1 \,\&\, x_1 \,\&\, y_1 \vee \ldots \vee A_n \,\&\, x_n \,\&\, y_n)$. (Прием дизъюнкция - 7).

Пример: вывод теоремы приема

$\forall_{abcdefgh}(a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \to (a < b \,\&\, c \vee b < a \,\&\, d \vee a = b \,\&\, e) \,\&\, (a < b \,\&\, f \vee b < a \,\&\, g \vee a = b \,\&\, h) \leftrightarrow a < b \,\&\, c \,\&\, f \vee b < a \,\&\, d \,\&\, g \vee a = b \,\&\, e \,\&\, h)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \to a < b \vee b < a \,\&\, a = b)$

(b) Консеквентом служит дизъюнкция $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ взаимно исключающих утверждений. Выбираются новые переменные $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$, а также переменные z_1, z_2. Затем консеквент заменяется на эквивалентность утверждения $(A_1 \,\&\, x_1 \vee \ldots \vee A_n \,\&\, x_n) \,\&\, z_1 \vee (A_1 \,\&\, y_1 \vee \ldots \vee A_n \,\&\, y_n) \,\&\, z_2$ утверждению $(A_1 \,\&\, (x_1 \,\&\, z_1 \vee y_1 \,\&\, z_2) \vee \ldots \vee (A_n \,\&\, (x_n \,\&\, z_1 \vee y_n \,\&\, z_2))$. (Прием дизъюнкция - 8).

Пример: вывод теоремы приема

$\forall_{abcdefghij}(a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \to (a < b \,\&\, c \vee b < a \,\&\, d \vee a = b \,\&\, e) \,\&\, i \vee (a < b \,\&\, f \vee b < a \,\&\, g \vee a = b \,\&\, h) \,\&\, j \leftrightarrow a < b \,\&\, (c \,\&\, i \vee f \,\&\, j) \vee b < a \,\&\, (d \,\&\, i \vee g \,\&\, j) \vee a = b \,\&\, (e \,\&\, i \vee h \,\&\, j))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \to a < b \vee b < a \vee a = b)$

4. Исключение дизъюнкции путем отождествления дизъюнктивных членов.

(a) Консеквентом служит дизъюнкция двух утверждений A, B с одинаковыми заголовками, различающимися только некорневыми вхождениями v_1, v_2 некоторых термов t_1, t_2. Эти вхождения расположены внутри невырожденных числовых атомов p_1, p_2. К антецедентам добавляет равенство $p_1 = p_2$, а консеквент заменяется на утверждение A. (Прием дизъюнкция - 10).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(BC) \,\&\, D \in \text{интервал}(AC) \,\&\, A - \text{точка} \,\&\, B - \text{точка} \,\&\, C - \text{точка} \,\&\, D - \text{точка} \to 0 < l(BC) - l(BD))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \,\&\, B - \text{точка} \,\&\, C - \text{точка} \,\&\, D - \text{точка} \,\&\, D \in \text{интервал}(AC) \to 0 < l(AB) - l(BD) \vee 0 < l(BC) - l(BD))$

(b) Консеквентом служит дизъюнкция, некоторый дизъюнктивный член которой имеет вид строгого неравенства с нулем в одной части и разностью двух невырожденных числовых атомов t_1, t_2 в другой. К антецедентам добавляется равенство $t_1 = t_2$, а из дизъюнкции в консеквенте удаляется указанное строгое неравенство. (Прием дизъюнкция - 16).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(BD)$ & $D \in$ интервал(AC) & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка $\rightarrow 0 < l(BD) - l(BC))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $D \in$ интервал$(AC) \rightarrow 0 < l(AB) - l(BD) \ \vee \ 0 < l(BC) - l(BD))$

5. Попытка преобразования неэлементарных дизъюнктивных членов в элементарные.

   (a) Дизъюнкция в консеквенте имеет неэлементарные дизъюнктивные члены. Они упрощаются при помощи задачи на преобразование, имеющей цель "свертка", и если все становятся элементарными, то выводится новая теорема с дизъюнкцией найденных элементарных формулировок в консеквенте. (Прием дизъюнкция - 17).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDE}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка & $\neg(A = B)$ & $\neg(C \in$ прямая$(AB))$ & $E \in$ плоскость(ABC) & $D \in$ отрезок(AC) & $\neg(D = E) \rightarrow$ разныестороны$(B, C,$ прямая$(DE)) \ \vee$ разныестороны$(A, B,$ прямая$(DE)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDE}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка & $\neg(A = B)$ & $\neg(C \in$ прямая$(AB))$ & $E \in$ плоскость(ABC) & $D \in$ отрезок(AC) & $\neg(D = E) \rightarrow \exists_F(F \in$ отрезок(BC) & $F \in$ прямая$(DE))$ $\vee \ \exists_F(F \in$ отрезок(AB) & $F \in$ прямая$(DE)))$

6. Исключение дизъюнкции двух равенств с равными левыми частями путем расщепления переменной, встречающейся в этих частях.

   (a) В консеквенте выделяется одна или несколько дизъюнкций вида "коорд$(x, K) = t_1 \ \vee$ коорд$(x, K) = t_2$" для некоторой переменной x, причем эта переменная в другом виде в консеквенте не встречается. Проверяется, что контексты указанных дизъюнкций несовместны. После этого выбирается новая переменная y. К антецедентам добавляются результаты замены x на y во всех содержащих x антецедентах. Кроме того, добавляется "$\neg(x = y)$". В консеквенте каждая дизъюнкция "коорд$(x, K) = t_1 \ \vee$ коорд$(x, K) = t_2$" заменяется на конъюнкцию "коорд$(x, K) = t_1$ & коорд$(y, K) = t_2$". Теорема снабжается характеристикой, указывающей, что она создана для приема решателя, использующего симметрию. (Прием систкоорд - 37).

   Пример: вывод теоремы приема

   $\forall_{abcdefmpqAEK}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $A -$ точка & прямкоорд(K) & фокус(A, E) & $\neg(c = 0)$ & коорд$(E, K) =$ set$_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy_e = 0$ & $x -$ число & $y -$ число$)$ & $\neg(a = 0)$ & $m = 4ace - b^2c - d^2a$ & $p = -b/(2a)$ & $q = -d/(2c)$ & $f -$ точка & фокус(f, E)

& $\neg(A = f) \to$ коорд$(f, K) = (p, q - \sqrt{m(c-a)/(2ac)})$ & коорд$(A, K) = (p, q + \sqrt{m(c-a)/(2ac)})$ & $0 < m(c-a) \vee$
коорд$(f, K) = (p - \sqrt{m(a-c)/(2ac)}, q)$ & коорд$(A, K) = (p + \sqrt{m(a-c)/(2ac)}, q)$ & $0 \leq m(a-c)$)

из теоремы

$\forall_{AEKabcdepqm}(a -$число & $b -$число & $c -$число & $d -$число & $e -$число & $A -$точка & прямкоорд(K) & фокус(A, E) & $\neg(c = 0)$ & коорд$(E, K) =$ set$_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy_e = 0$ & $x -$число & $y -$число) & $\neg(a = 0)$ & $m = 4ace - b^2c - d^2a$ & $p = -b/(2a)$ & $q = -d/(2c) \to 0 < m(c-a)$ & (коорд$(A, K) = (p, q + \sqrt{m(c-a)/(2ac)}) \vee$ коорд$(A, K) = (p, q - \sqrt{m(c-a)/(2ac)}))) \vee$
$0 \leq m(a-c)$ & (коорд$(A, K) = (p + \sqrt{m(a-c)/(2ac)}, q) \vee$ коорд$(A, K) = (p - \sqrt{m(a-c)/(2ac)}, q)))$

Преобразования импликации с конъюнкцией в консеквенте

1. Сохранение в консеквенте лишь одного из конъюнктивных членов.

   (a) Если все антецеденты суть элементарные утверждения, а консеквент имеет вид A_1 & ... & A_n, то выводятся импликации, в которых консеквент заменен на утверждение $A_i; i = 1, \ldots, n$. Они упрощаются. (Прием конъюнкция - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(l(AE) = l(BE)$ & $l(CF) = l(DF)$ & $E \in$ прямая(AB) & $F \in$ прямая(CD) & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$точка & $F -$точка & трапеция$(ABCD) \to$ прямая$(AD) \parallel$ прямая$(EF))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка & $F -$ точка & трапеция$(ABCD)$ & $E \in$ прямая(AB) & $l(BE) = l(AE)$ & $F \in$ прямая(CD) & $l(CF) = l(FD) \to$ прямая$(EF) \parallel$ прямая(AD) & $2l(EF) = l(BC) + l(AD))$

   (b) Если консеквент имеет вид A_1 & ... & A_n, то выводятся импликации, в которых консеквент заменен на утверждение $A_i; i = 1, \ldots, n$. Они упрощаются. (Прием определение - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fx}(x \in$ Dom(f) & $f -$ функция & взаимнооднозначно$(f) \to$ обрфункция$(f)(f(x)) = x)$

   из теоремы

   $\forall_f(f -$ функция & взаимнооднозначно$(f) \to$ обрфункция$(f) -$ функция & Dom(обрфункция$(f))$ = Val(f) & $\forall_x(x \in$ Dom$(f) \to$ обрфункция$(f)(f(x)) = x))$

(c) Если консеквент имеет вид A_1 & ... & A_n, то выводятся импликации, в которых консеквент заменен на утверждение A_i - для всех элементарных $A_i; i = 1, \ldots, n$. (Прием числсвязь - 9).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{hnpqrstwz}(\neg(n = w)$ & коорд(окружность$(nw), z) = \text{set}_{uv}(h+pu^2+qv^2+ruv+su+tv = 0$ & $u-$число & $v-$число) & $h-$число & $p-$число & $q-$число & $r-$число & $s-$число & $t-$число & $n-$точка & $w-$точка & прямкоорд(z) & Двумерн$(z) \rightarrow \neg(q = 0))$

из теоремы

$\forall_{hnpqrstwz}(\neg(n = w)$ & коорд(окружность$(nw), z) = \text{set}_{uv}(h+pu^2+qv^2+ruv+su+tv = 0$ & $u-$число & $v-$число) & $h-$число & $p-$число & $q-$число & $r-$число & $s-$число & $t-$число & $n-$точка & $w-$точка & прямкоорд(z) & Двумерн$(z) \rightarrow \neg(q = 0)$ & $p = q$ & $r = 0)$

Преобразования импликации с квантором в консеквенте

1. Квантор общности из консеквента выносится в начало теоремы. Если при этом консеквент становится конъюнктивным, сохраняется лишь один из конъюнктивных членов.

   (a) Консеквентом служит кванторная импликация с элементарными антецедентами $A_1, \ldots, A_n$ и консеквентом A_0. Утверждения $A_1, \ldots, A_n$ добавляются к антецедентам, а консеквентом становится конъюнктивный член утверждения A_0. Новый список антецедентов упрощается. (Прием квантимплик - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{axA}(A - \text{set}$ & $A \subseteq \mathbb{R}$ & предельнточка(a, A) & $x -$ число & $0 < x \rightarrow$
   $\exists_y(y \in A$ & $\neg(y = a)$ & $|a - y| < x))$

   из теоремы

   $\forall_{axA}(A - \text{set}$ & $A \subseteq \mathbb{R}$ & предельнточка$(a, A) \rightarrow \forall_x(x -$ число & $0 < x \rightarrow$
   $\exists_y(y \in A$ & $\neg(y = a)$ & $|a - y| < x)))$

2. Отбрасывание части утверждений под квантором существования в консеквенте.

   (a) Консеквентом служит квантор существования. Среди конъюнктивных членов подкванторного утверждения выбирается такой член A, что он не используется для сопровождения по о.д.з. и имеет сложность, меньшую сложности всего подкванторного утверждения. Проверяется, что все параметры A встречаются в остальных конъюнктивных членах. Выводится импликация, в которой утверждение A под квантором существования отброшено. Дополнительно проверяется, что не имеет места случай, когда единственное оставшееся утверждение под квантором существования - равенство переменной его связывающей приставки выражению, не содержащему этой переменнй. (Прием допконтекст - 6).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{abG}(\text{граф}(G)\ \&\ \text{смежны}(a,b,G) \to \exists_r(\text{ведет}(r,a,b,G)))$

из теоремы

$\forall_{abG}(\text{граф}(G)\ \&\ \text{смежны}(a,b,G) \to \exists_r(r \in \text{ребра}(G)\ \&\ \text{ведет}(r,a,b,G)))$

3. Извлечение из параметрического описания класса условий равенства либо включения для этого класса.

   (a) Консеквент K - квантор существования. Среди конъюнктивных членов подкванторного утверждения C встречается равенство $x = t$, такое, что переменная x имеет в K лишь одно вхождение. Список антецедентов разбивается на подсписок A_1 утверждений, содержащих x, и подсписок A_2 остальных утверждений. Выражение "класс(x и(A_1))" преобразуется к виду B, не содержащему связанных переменных и имеющему не более двух параметров. Проверяется, что утверждения A_1 суть следствия утверждений A_2, к которым добавлены конъюнктивные члены утверждения C. Выводится импликация с антецедентами A_2, консеквентом которой служит равенство "$\text{set}_x(K) = B$". Проверяется, что после стандартизации она по-прежнему является равенством для класса. (Прием допконтекст - 14).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(b - \text{set} \to \text{set}_a(\exists_c(a = b \cap c\ \&\ c - \text{set})) = \text{подмножества}(b))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a \subseteq b\ \&\ b - \text{set}\ \&\ a - \text{set} \to \exists_c(c - \text{set}\ \&\ a = b \cap c))$

   (b) Консеквент K - квантор существования. Среди конъюнктивных членов подкванторного утверждения C встречается равенство $x = t$, такое, что переменная x имеет в K лишь одно вхождение. Список антецедентов разбивается на подсписок A_1 утверждений, содержащих x, и подсписок A_2 остальных утверждений. Выражение "класс(x и(A_1))" преобразуется к виду B, не содержащему связанных переменных и имеющему не более двух параметров. Не удается проверить, что утверждения A_1 суть следствия утверждений A_2, к которым добавлены конъюнктивные члены утверждения C. Выводится импликация с антецедентами A_2, консеквентом которой служит включение "$B \subseteq \text{set}_x(K)$". Проверяется, что после стандартизации она по-прежнему является включением в класс. (Прием допконтекст - 15).

   Пример(не сохраненный в базе теорем): вывод теоремы

   $\forall_{aG}(a \in \text{вершины}(G)\ \&\ \text{граф}(G) \to \text{компсвязн}(G,a) \subseteq$
   $\text{set}_b(\exists_z(b = \text{конец}(z)\ \&\ \text{начало}(z) = a\ \&\ \text{вершмаршрут}(z,G))))$

   из теоремы

   $\forall_{aG}(a \in \text{вершины}(G)\ \&\ b \in \text{компсвязн}(G,a)\ \&\ \text{граф}(G) \to$
   $\exists_z(b = \text{конец}(z)\ \&\ \text{начало}(z) = a\ \&\ \text{вершмаршрут}(z,G)))$

4. Переход от утверждения типа "длялюбого существует" к утверждению "существует длялюбого".

(a) Использование ассоциативности позволяет переставить кванторы общности и существования в тождестве для бинарной операции: консеквентом служит квантор существования, причем в списке S подкванторных утверждений содержится равенство R вида $f(x,a)=f(x,b)$ либо вида $f(x,a)=x$, где x - переменная, не встречающаяся в связывающей приставке квантора существования (рассматриваются также случаи, когда x - второй операнд). Среди антецедентов имеется утверждение "бинарнооперация(f,M)". Рассматривается конъюнкция $P(x)$ всех содержащих переменную x антецедентов теоремы. Выбираются новые переменные y_1,y_2. Утверждение "$\forall_{xy_2}(P(x)\ \&\ P(y_2)\to\exists_{y_1}(y_1\in M\ \&\ f(y_1,x)=y_2))$" преобразуется к виду Q, не содержащему связанных переменных. Список посылок U_1 при этом состоит из всех не содержащих x антецедентов теоремы и утверждения "ассоциативно(f)". Утверждение "$\exists_x P(x)$"преобразуется к виду D, не содержащему связанных переменных. Список посылок U_2 состоит при этом из утверждений U_1 и утверждения Q. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения U_2 и D, а консеквент имеет вид "$\exists_X(S_2\ \&\ \forall_x(P(x)\to S_1))$". Здесь X - связывающая приставка исходного квантора существования; S_1 - конъюнкция всех содержащих x элементов списка S; S_2 - остаток списка S. Эта импликация упрощается и выдается в качестве результата. (Прием допконтекст - 16).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{fA}(\neg(A=\emptyset)\ \&\ A-\text{set}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&\ \text{правобратимо}(f)\ \&\ \text{левобратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f,A)\to\exists_z(\text{левединица}(z,f)))$

из теоремы

$\forall_{fyA}(A-\text{set}\ \&\ y\in A\ \&\ \text{левобратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f,A)\to\exists_z(f(z,y)=y\ \&\ z\in A))$

5. Исключение квантора существования в консеквенте путем перенесения в антецеденты части подкванторных утверждений.

(a) Попытка усмотрения однозначной определимости нового объекта по части условий. Консеквент теоремы имеет вид "$\exists_x(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n)$". Выбирается A_i, не используемое для сопровождения по о.д.з. и содержащее как x, так и какой-то другой параметр. Выбирается новая переменная y, и при помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство $x=y$ - следствие антецедентов, утверждений $A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_n$ и результатов замены в последних утверждениях переменной x на y. Консеквентом новой теоремы становится A_i, антецедентами - антецеденты исходной теоремы и утверждения $A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_n$. Результат упрощается. (Прием допконтекст - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDEFG}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB)=\text{прямая}(AC))\ \&\ l(AD)=l(BD)\ \&\ l(AF)=l(CF)\ \&\ l(BE)=l(CE)\ \&\ D\in\text{прямая}(AB)\ \&\ E\in\text{прямая}(BC)\ \&\ F\in\text{прямая}(AC)\ \&\ G\in\text{отрезок}(AE)\ \&\ G\in\text{отрезок}(BF)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\ \&\ G-\text{точка}\to G\in\text{отрезок}(CD))$

из теоремы

$\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC))\ \&\ D \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ l(AD) = l(BD)\ \&\ E \in \text{отрезок}(BC)\ \&\ l(BE) = l(CE)\ \&\ F \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ l(AF) = l(CF) \rightarrow \exists_G(G - \text{точка}\ \&\ G \in \text{отрезок}(CD)\ \&\ G \in \text{отрезок}(AE)\ \&\ G \in \text{отрезок}(BF)))$

1.2 Преобразование кванторной эквивалентности

Перенесение части конъюнктивных членов одной из частей эквивалентности в антецеденты

1. Перенесение в антецеденты всех конъюнктивных членов, кроме одного: консеквентом служит эквивалентность с конъюнкцией K в одной из своих частей. Выбирается такой конъюнктивный член A, что в списке S оставшихся членов нет равенства, имеющего более одного параметра либо фиксирующего значение переменной. Проверяется, что A не используется для сопровождения по о.д.з. и не является следствием объединения списка антецедентов теоремы со списком S. Затем утверждения S переносятся в антецеденты, а конъюнкция K в консеквенте заменяется на A. (Прием и - 37).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcd}(b - \text{set}\ \&\ c - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ d \subseteq c \rightarrow d \subseteq b \cap c \leftrightarrow d \subseteq b)$

   из теоремы

   $\forall_{bcd}(b - \text{set}\ \&\ c - \text{set}\ \&\ d - \text{set} \rightarrow d \subseteq b \cap c \leftrightarrow d \subseteq b\ \&\ d \subseteq c)$

2. Консеквентом служит эквивалентность с конъюнкцией K в одной из своих частей. Все ее конъюнктивные члены, используемые для сопровождения по о.д.з., переносятся в антецеденты и исключаются из K. (Прием и - 62).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abf}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция} \rightarrow b \subseteq \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow \text{образ}(f, b) \subseteq a)$

   из теоремы

   $\forall_{abf}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ f - \text{функция} \rightarrow b \subseteq \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow b \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ \text{образ}(f, b) \subseteq a)$

3. Перенесение в антецеденты сопровождающих утверждений заменяющей части для получения эквивалентности, группирующей разрешенные относительно заданной неизвестные условия: консеквентом служит эквивалентность с конъюнкцией в заменяющей части. Заменяемая часть элементарная и содержит все параметры заменяющей части. Среди ее параметров выбирается переменная x,

глубина вхождения которой в заменяемую часть равна 1, причем число содержащих x конъюнктивных членов заменяющей части больше 1. Рассматриваются конъюнкция K всех содержащих x конъюнктивных членов заменяющей части и список S остальных ее конъюнктивных членов. Проверяется, что все они используются для сопровождения по о.д.з. утверждения K. Затем список S добавляется к антецедентам, а заменяющая часть консеквента заменяется на K. (Прием и - 56).

4. Консеквентом служит эквивалентность с конъюнкцией в заменяемой части. Заменяющая часть элементарна. Ее оценка сложности не превосходит оценки сложности заменяемой части. Выбирается такой конъюнктивный член A заменяемой части, что его оценка сложности строго больше оценок сложности остальных членов. Проверяется, что среди остальных членов нет равенства, после чего все они добавляются к антецедентам, а заменяемой частью становится утверждение A. (Прием общнорм - 61).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bce}(\neg(b = 0)\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ \text{числитель}(b) - \text{even}\ \&\ b - \text{rational}\ \&\ ce \leq 0 \to c^b = e^b \leftrightarrow c = -e)$

   из теоремы

   $\forall_{bce}(\neg(b = 0)\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ \text{числитель}(b) - \text{even}\ \&\ b - \text{rational} \to c^b = e^b\ \&\ ce \leq 0 \leftrightarrow c = -e)$

5. Перенесение в антецеденты конъюнктивного члена заменяемой части для получения эквивалентности усиления одноместного предиката: заменяемая часть эквивалентности в консеквенте имеет вид $P(x)\ \&\ A$, заменяющая - вид $Q(x)$. Утверждение $P(x)$ не используется для сопровождения по о.д.з. утверждений $A, Q(x)$. К списку антецедентов добавляются утверждение A и все необходимые для сопровождения A по о.д.з. утверждения. Консеквентом становится эквивалентность $P(x) \leftrightarrow Q(x)$. (Прием общнорм - 76).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(0 < a\ \&\ a - \text{число} \to a - \text{целое} \leftrightarrow a - \text{натуральное})$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{целое}\ \&\ 0 < a \leftrightarrow a - \text{натуральное})$

6. Перенесение в антецеденты всех конъюнктивных членов заменяющей части, имеющих более чем двуместные отношения. (Прием определение - 59).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&$
   $\text{четырехугольник}(ABCD) \to \text{параллелограмм}(ABCD) \leftrightarrow$
   $\text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD))$

   из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \rightarrow$
$\text{параллелограмм}(ABCD) \leftrightarrow \text{четырехугольник}(ABCD)\ \&$
$\text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD))$

7. Заменяемая чать эквивалентности в консеквенте элементарна. Заменяющая часть представляет собой конъюнкцию квантора и некоторого количества элементарных утверждений. Все эти элементарные утверждения переносятся в список антецедентов. (Прием развертка - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \mathbb{R}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow \text{нижняягрань}(b, a) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{нижняягрань}(b, a) \leftrightarrow b - \text{число}\ \&\ \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$

8. Заменяющая часть A эквивалентности в консеквенте имеет своим конъюнктивным членом равенство $x = t$, где x - переменная, не имеющая других вхождений в заменяющей части. Определяется результат B подстановки t вместо x в заменяемую часть. Указанное равенство и все конъюнктивные члены заменяющей части, используемые для сопровождения по о.д.з. утверждения B, переносятся в антецеденты. Новая заменяющая часть - конъюнкция оставшихся ее членов. (Прием и - 55).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fB}(B - \text{set}\ \&\ f - \text{функция} \rightarrow \text{Отображение}(f, \text{Dom}(f), B) \leftrightarrow \text{Val}(f) \subseteq B)$

   из теоремы

   $\forall_{fAB}(\text{Отображение}(f, A, B) \leftrightarrow f - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(f) = A\ \&\ B - \text{set}\ \&$
   $\text{Val}(f) \subseteq B)$

9. Заменяемая часть эквивалентности в консеквенте - конъюнкция элементарных утверждений. Выбирается одно из этих утверждений, не используемое для сопровождения по о.д.з. Оно становится новой заменяемой частью. Остальные утверждений переносятся в антецеденты. (Прием общнорм - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(b = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \text{числитель}(b) - \text{even}\ \&\ b - \text{rational}\ \&$
   $0 \leq ac \rightarrow a^b = a^c \leftrightarrow a = c)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(b = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \text{числитель}(b) - \text{even}\ \&\ b - \text{rational} \rightarrow$
   $a^b = a^c\ \&\ 0 \leq ac \leftrightarrow a = c)$

10. Теорема предствляет собой эквивалентность, определяющую некоторое понятие. Определяющая часть - конъюнкция. Все члены этой конъюнкции, указывающие тип значений переменных, переносятся в антецеденты. (Прием и - 79).

    Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \to a \in (b, \infty) \leftrightarrow 0 < a - b)$

из теоремы

$\forall_{ab}(b - \text{число} \to a \in (b, \infty) \leftrightarrow a - \text{число} \ \& \ 0 < a - b)$

11. Определяющая часть определения представляет собой конъюнкцию квантора, не содержащего описателей и связки "эквивалентно", и некоторого непустого списка элементарных утверждений. Все эти утверждения переносятся в антецеденты. (Прием связпарам - 7).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_m(m - \text{натуральное} \ \& \ 1 < m \to \text{простое}(m) \leftrightarrow \forall_n(n - \text{натуральное} \ \& \ \neg(n = 1) \ \& \ \neg(n = m) \to \neg(n \mid m)))$

    из теоремы

    $\forall_m(\text{простое}(m) \leftrightarrow m - \text{натуральное} \ \& \ 1 < m \ \& \ \forall_n(n - \text{натуральное} \ \& \ \neg(n = 1) \ \& \ \neg(n = m) \to \neg(n \mid m)))$

12. Определяющая часть определения представляет собой конъюнкцию квантора K, не содержащего описателей и связки "эквивалентно", и некоторого непустого списка элементарных утверждений. Все эти утверждения переносятся в антецеденты. Консеквентом становится эквивалентность отрицания исходной определяемой части и упрощенного отрицания квантора K. (Прием связпарам - 8).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{fg}(f - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g) \to \neg(f = g) \leftrightarrow \exists_x(\neg(f(x) = g(x)) \ \& \ x \in \mathrm{Dom}(f)))$

    из теоремы

    $\forall_{fg}(f - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ \to f = g \leftrightarrow \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g) \ \& \ \forall_x(x \in \mathrm{Dom}(f) \to f(x) = g(x)))$

Преобразование кванторной эквивалентности с дизъюнкцией в одной из своих частей

1. Консеквент - эквивалентность некоторого элементарного утверждения A дизъюнкции равенства $x = t$ и утверждения B. Переменная x не входит в t. Определяется результат подстановки t вместо x в B, и отрицание этого результата добавляется к антецедентам. Консеквентом становится эквивалентность утверждения $A \ \& \ \neg(x = t)$ утверждению B. (Прием или - 51).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abc}(\neg(b \in \{;c\}) \ \& \ c - \text{слово} \to \neg(a = b) \ \& \ a \in \{b;c\} \leftrightarrow a \in \{;c\})$

    из теоремы

    $\forall_{abc}(c - \text{слово} \to a \in \{b;c\} \leftrightarrow a = b \ \vee \ a \in \{;c\})$

2. Сохранение в консеквенте единственного дизъюнктивного члена путем перенесения в антецеденты фрагмента этого дизъюнктивного члена, несовместного с остальными дизъюнктивными членами либо отождествляющего их с данным членом.

   (a) Консеквент имеет вид эквивалентности некоторого утверждения дизъюнкции двух утверждений B, C. Утверждение C представляет собой конъюнкцию. Рассматривается некоторый ее элементарный конъюнктивный член D. Проверяется, что из антецедентов теоремы и утверждения D следует отрицание утверждения B. Затем D добавляется к антецедентам теоремы, а дизъюнкция $B \vee C$ заменяется на результат отбрасывания в C конъюнктивного члена D. (Прием или - 73).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(0 < a \;\&\; a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \to 0 < ab \leftrightarrow 0 < b)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \to 0 < ab \leftrightarrow a < 0 \;\&\; b < 0 \;\vee\; 0 < a \;\&\; 0 < b)$

   (b) Теорема - определение элементарного утверждения A. Определяющая часть - дизъюнкция двух утверждений B, C. Список S элементарных конъюнктивных членов утверждения B, отрицания которых суть конъюнктивные члены утверждения C, непуст. Выводятся две теоремы. Антецеденты первой получены добавлением к исходному списку антецедентов утверждений S, а консеквент - эквивалентность утверждения A конъюнкции не вошедших в список S конъюнктивных членов утверждения B. Вторая теорема устроена аналогично, но вместо утверждений списка S к антецедентам добавляются из отрицания, а в консеквенте используются конъюнктивные члены утверждения C, отрицания которых не вошли в S. (Прием определение - 118).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ax}(\neg(a = \text{вектор0}) \;\&\; \text{Вектор}(a) \;\&\; \text{Вектор}(x) \to \text{коллинеарны}(a, x) \leftrightarrow \exists_y(x = ya \;\&\; y - \text{число}))$

   из теоремы

   $\forall_{ax}(\text{Вектор}(a) \;\&\; \text{Вектор}(x) \to \text{коллинеарны}(a, x) \leftrightarrow a = \text{вектор0} \;\vee\; \neg(a = \text{вектор0}) \;\&\; \exists_y(y - \text{число} \;\&\; x = ya))$

3. Теорема - эквивалентность, разрешающая свою заменяемую часть относительно некоторой неизвестной y. Заменяющая часть представляет собой дизъюнкцию, внутри которой встречается равенство $x = t$, причем переменная x отлична от y, а выражение t не содержит ни x, ни y. Проверяется, что все расположенные в заменяющей части надтермы указанного равенства имеют только заголовки "и", "или". Затем во все антецеденты теоремы и в консеквент вместо переменной x подставляется t. Результат упрощается, и проверяется, что его оценка сложности не меньше, чем у исходной теоремы. (Прием глуб - 30).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ac}(a - \text{число} \;\&\; \text{Вектор}(c) \to ac = \text{вектор0} \leftrightarrow a = 0 \;\vee\; c = \text{вектор0})$

из теоремы

$\forall_{acd}(a - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ \text{Вектор}(d) \rightarrow d = ac \leftrightarrow \neg(a = 0) \ \& \ c = (1/a)d \ \vee \ a = 0 \ \& \ d = \text{вектор0})$

4. В одной из частей консеквента располагается недизъюнктивная часть A, а в другой - дизъюнкция утверждений B и C. Кванторная импликация, выражающая, что из B вытекает $\neg(C)$, сворачивается в элементарное утверждение D. Затем A и D переносятся в антецеденты, а консеквентом становится эквивалентность $B \leftrightarrow \neg(C)$.

   (a) Консеквент - эквивалентность некоторого утверждения A дизъюнкции двух других утверждений B, C Список $x_1, \ldots, x_n$ общих параметров этих утверждений непуст, однако каждое из них имеет параметр, не встречающийся в другом. Утверждение "$\forall_{x_1 \ldots x_n}(B \rightarrow \neg(C))$" упрощается и превращается в элементарное утверждение D. К антецедентам теоремы добавляются утверждения A, D, а консеквентом становится $B \leftrightarrow \neg(C)$. (Прием или - 60).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ a \in b \cup c \ \& \ \text{непересек}(b, c) \rightarrow a \in b \leftrightarrow \neg(a \in c))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$

   (b) Консеквент - эквивалентность некоторого утверждения A дизъюнкции двух других утверждений B, C Список $x_1, \ldots, x_n$ общих параметров этих утверждений непуст, однако каждое из них имеет параметр, не встречающийся в другом. Утверждение "$\forall_{x_1 \ldots x_n}(B \rightarrow \neg(C))$" упрощается и превращается в элементарное утверждение D. Среди максимальных подвыражений утверждения A имеется единственное подвыражение t, не содержашее переменных $x_1, \ldots, x_n$. Оно имеет в A единственное вхождение. Выбирается новая переменная y и находится результат A_1 замены в A подвыражения t на y. К антецедентам исходной теоремы добавляются утверждения $y = t, A_1, D$. Консеквентом становится эквивалентность "$B \leftrightarrow \neg(C)$". Она сопровождается характеристикой "усиление(первыйтерм)". (Прием или - 91).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(b{-}\text{set} \ \& \ c{-}\text{set} \ \& \ d = b{\cup}c \ \& \ a \in d \ \& \ \text{непересек}(b, c) \rightarrow a \in b \leftrightarrow \neg(a \in c))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$

5. Перенесение в антецеденты отрицаний фрагментов дизъюнктивных членов одной из частей консеквента и упрощение консеквента относительно новых антецедентов.

(a) Среди дизъюнктивных членов заменяющей части эквивалентности выбирается некоторый член A. Проверяется, что остальные члены элементарны, и их отрицания переносятся в антецеденты. Заменяющей частью становится утверждение A. (Прием или - 65).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ \neg(b = 0) \rightarrow ab = 0 \leftrightarrow a = 0)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \rightarrow ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0)$

(b) Одна из частей эквивалентности в консеквенте - дизъюнкция элементарных утверждений. Среди них выбирается некоторое утверждение A. Проверяется, что среди остальных утверждений нет указателей типа значения переменной, и их отрицания переносятся в антецеденты. Дизъюнкция в консеквенте заменяется на утверждение A. (Прием связпарам - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{af}(a - \text{set } \& \ \neg(a = \emptyset) \rightarrow \text{семействомножеств}(\lambda_b(f, b \in a)) \leftrightarrow f - \text{set})$

из теоремы

$\forall_{af}(a - \text{set} \rightarrow \text{семействомножеств}(\lambda_b(f, b \in a)) \leftrightarrow a = \emptyset \ \vee \ f - \text{set})$

(c) Перенесение в антецеденты отрицаний дизъюнктивных членов определяющей части, соответствующих вырожденным случаям: определяющая часть - дизъюнкция таких утверждений, что лишь одно из них - некоторое утверждение A - содержит все параметры определяемого утверждения. Тогда все остальные дизъюнктивные члены переносятся в антецеденты, а дизъюнкция заменяется на A. (Прием определение - 122).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(C = D) \ \& \ \neg(A \in \text{прямая}(CD)) \ \& \ \neg(B \in \text{прямая}(CD)) \ \& \ A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \& \ C - \text{точка } \& \ D - \text{точка} \rightarrow$
$\text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \leftrightarrow B \in \text{плоскость}(ACD) \ \&$
$\text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(AB)))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \& \ C - \text{точка } \& \ D - \text{точка } \& \ \neg(C = D) \rightarrow$
$\text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \leftrightarrow \text{непересек}(\text{отрезок}(AB), \text{прямая}(CD)) \ \&$
$B \in \text{плоскость}(ACD) \ \vee \ A \in \text{прямая}(CD) \ \vee \ B \in \text{прямая}(CD))$

(d) Заменяемая часть эквивалентности общей стандартизации - дизъюнкция двух элементарных утверждений. Пусть одно из них - A, другое - B. Заменяющая часть элементарна. Отрицание утверждения A упрощается и присоединяется к антецедентам, а в заменяемой части остается только B. (Прием общнорм - 23).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ 0 \leq a - b \rightarrow b < a \leftrightarrow \neg(a = b))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \rightarrow a < b \ \vee \ b < a \leftrightarrow \neg(a = b))$

(e) Среди дизъюнктивных членов заменяющей части эквивалентности выбирается некоторый член A. Проверяется, что остальные члены элементарны, и их отрицания переносятся в антецеденты. Заменяющей частью становится утверждение A. (Прием уменьшение - 19).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(0 < b - a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to 0 \le -b + |a| \leftrightarrow a + b \le 0)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to 0 \le -b + |a| \leftrightarrow a + b \le 0 \ \vee \ 0 \le a - b)$

(f) Заменяемая часть эквивалентности имеет вид $A \ \vee \ B$. Рассматривается список S всех таких элементарных конъюнктивных членов утверждения A, отрицание которых - конъюнктивный член B. Этот список непуст. Выводятся две теоремы. Первая получается добавлением к антецедентам утверждений S и заменой дизъюнкции $A \ \vee \ B$ на конъюнкцию не вошедших в S членов утверждения A. Вторая - добавлением к антецедентам отрицаний утверждений списка S и заменой дизъюнкции на конъюнкцию членов утверждения B, отрицания которых не попали в список S. (Прием уменьшение - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \to \text{однонаправлены}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD)) \leftrightarrow A \in \text{отрезок}(BC) \ \& \ \text{точкалуча}(C, D, B) \ \vee \ C \in \text{отрезок}(AD) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, D))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \to \text{однонаправлены}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD)) \leftrightarrow \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD)) \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{однасторона}(B, D, \text{прямая}(AC)) \vee (A \in \text{отрезок}(BC) \ \& \ \text{точкалуча}(C, D, B) \ \vee \ C \in \text{отрезок}(AD) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, D)) \ \& \ \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD))$

(g) Заменяющая часть эквивалентности - дизъюнкция двух утверждений A, B. A имеет вид конъюнкции. Выбирается элементарный конъюнктивный член утверждения A, отрицание которого переносится в антецеденты, а консеквентом становится B. (Прием или - 72).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \le a \to 0 < ab \leftrightarrow 0 < a \ \& \ 0 < b)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to 0 < ab \leftrightarrow a < 0 \ \& \ b < 0 \ \vee \ 0 < a \ \& \ 0 < b)$

(h) Теорема представляет собой эквивалентность для разрешения ее заменяемой части относительно неизвестной x. Заменяющая часть - дизъюнкция, некоторый дизъюнктивный член A которой не содержит x. В этом дизъюнктивном члене беретя такой его элементарный конъюнктивный член B, отрицание которого не служит конъюнктивным членом прочих дизъюнктивных членов. Заголовок B отличен от отрицания. Тогда отрицание B

добавляется к антецедентам, а из заменяющей части исключается член A. (Прием глуб - 49).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\to b=ac\leftrightarrow\neg(c=0)\ \&\ a=b/c)$

из теоремы

$\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\to b=ac\leftrightarrow\neg(c=0)\ \&\ a=b/c\ \vee\ b=0\ \&\ c=0)$

6. Вывод эквивалентности, преобразующей квантор существования в дизъюнкцию: консеквент теоремы - эквивалентность некоторого утверждения A дизъюнкции $x=t_1\ \vee\ x=t_n$, где x - переменная, входящая в A и не входящая в $t_1,\ldots,t_n$. Выбирается новая переменная P и консеквент заменяется на эквивалентность "$\exists_x(A\ \&\ P(x))\leftrightarrow P(t_1)\ \vee\ P(t_n)$". Новая теорема снабжается характеристикой, указывающей, что она создана для приема развертки квантора существования в дизъюнкцию. (Прием конечное - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(\exists_a(a-\text{boolean}\ \&\ b(a))\leftrightarrow b(0)\ \vee\ b(1))$

   из теоремы

   $\forall_a(a-\text{boolean}\leftrightarrow a=0\ \vee\ a=1)$

7. Попытка отождествления серий в параметрическом описании значений неизвестной: эквивалентность дает параметрическое описание для значений неизвестной x, входящей в заменяемую часть. Заменяющая часть имеет среди своих конъюнктивных членов дизъюнкцию $A\ \vee\ B$ двух кванторов существования, содержащих параметр x. В списке S остальных конъюнктивных членов заменяющей части нет утверждения, содержащего x. Список $y_1,\ldots,y_n$ отличных от x параметров дизъюнкции $A\ \vee\ B$ непуст. Решается задача на описание, условиями которой служат не содержащие x антецеденты, утверждения списка S, а также равенство "$\text{set}_x(A)=\text{set}_x(B)$". Неизвестные - $y_1,\ldots,y_n$. Единственная посылка - константа "истина". Если получен ответ C, то он добавляется к антецедентам, а в консеквенте дизъюнкция $A\vee B$ заменяется на то из утверждений A,B, которое короче. (Прием неизвпарам - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_x(x-\text{число}\to\cos x=1\leftrightarrow\exists_n(x=2\pi n\ \&\ n-\text{целое}))$

   из теоремы

   $\forall_{ax}(a-\text{число}\ \&\ x-\text{число}\to a=\cos x\leftrightarrow(\exists_n(x=2\pi n-\arccos a\ \&\ n-\text{целое})\ \vee\ \exists_n(x=2\pi n+\arccos a\ \&\ n-\text{целое}))\ \&\ 0\le a+1\ \&\ 0\le -a+1)$

8. Заменяемое утверждение - дизъюнкция, заменяющее элементарно. В дизъюнкции выбирается элементарный дизъюнктивный член A, после чего заменяемое утверждение заменяется на дизъюнкцию A и заменяющего утверждения. (Прием общнорм - 37).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \to a < b \ \vee \ a \leq b \leftrightarrow a \leq b)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \to a < b \ \vee \ a = b \leftrightarrow a \leq b)$

9. Попытка определить область значений неизвестной, в которой решение становится однозначным: эквивалентность позволяет разрешать относительно неизвестной x уравнение вида $y = t$, где y - переменная, отличная от x и не входящая в t. Заменяющая часть, после приведения ее к виду д.н.ф., представляет собой дизъюнкцию. Выбирается такой дизъюнктивный член K данной дизъюнкции, среди конъюнктивных членов которого встречается равенство вида $x = p$. Решается задача на описание, условиями которой служат конъюнктивные члены утверждения K и все содержащие y антецеденты. Посылки - оставшиеся антецеденты. Неизвестной задачи служит переменная y. Она помечается как несущественная. Ответ A добавляется к антецедентам, а заменяющей частью становится K. (Прием глуб - 25).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ax}(a - \text{число } \& \ x - \text{число } \& \ x \leq \pi/2 \ \& \ 0 \leq x + \pi/2 \to a = \sin x \leftrightarrow$
   $x = \arcsin a \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq -a + 1)$

   из теоремы

   $\forall_{ax}(a - \text{число } \& \ x - \text{число } \& \ 0 \leq x + \pi/2 \ \& \ 0 \leq -x + 3\pi/2 \to a = \sin x \leftrightarrow$
   $(x = -\arcsin a + \pi \ \vee \ x = \arcsin a) \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq -a + 1)$

10. Получение из эквивалентности, сворачивающей дизъюнкцию двух элементарных утверждений в одно, эквивалентность свертки конъюнкции двух утверждений в одно. Теорема - эквивалентность общей стандартизации, имеющая вид $A_1 \ \vee \ A_2 \leftrightarrow A_3$, где A_1, A_2, A_3 элементарны. При помощи задачи на доказательство усматривается, что $\neg(A_2$ - следствие антецедентов и A_1. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $(A_3 \ \& \ A_2) \leftrightarrow A_1$. Антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием общнорм - 38).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \to \neg(a = b) \ \& \ a \leq b \leftrightarrow a < b)$

    из теоремы

    $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \to a < b \ \vee \ a = b \leftrightarrow a \leq b)$

Преобразование эквивалентности с квантором в одной из своих частей

1. Попытка отождествления подтермов, расположенных под квантором в одной из частей эквивалентности.

   (a) Заменяемая часть эквивалентности в консеквенте имеет вид "$\forall_{x_1 \ldots x_n}(A_1$ & $\ldots$ & $A_m \to A_0)$", причем утверждение A_0 элементарно. Выбирается такое $A_i; i = 1, \ldots, m$, что либо его заголовок отличен от отрицания и совпадает с заголовком A_0, либо оба эти утверждения суть отрицания утверждений с одинаковыми заголовками. Проверяется, что среди параметров утверждения A_i, отличных от $x_1, \ldots, x_n$, имеется единственный параметр f, для которого "функция(f)" - антецедент теоремы. Предпринимается попытка подобрать в качестве f такой терм "отображение($\ldots$)", при котором A_i отождествилось бы с A_0. Если для отождествления необходимы также равенства некоторых не содержащих $x_1, \ldots, x_n$ подвыражений, то эти равенства вместе с равенством для f добавляются к антецедентам. Консеквентом становится заменяющая часть исходной эквивалентности. (Прием кванторнаясвертка - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{set} \to \text{взаимнооднозначно}(\lambda_x(x, x \in a)))$

   из теоремы

   $\forall_f(f - \text{функция} \to \text{взаимнооднозначно}(f) \leftrightarrow \forall_{xy}(f(x) = f(y)\ \&\ x \in \text{Dom}(f)\ \&\ y \in \text{Dom}(f) \to x = y))$

   (b) В заменяемой части эквивалентности кванторной свертки рассматриваются вхождения двух различных подтермов A, B с одинаковыми заголовками. Оба вхождения расположены под общим квантором. Определяется подстановка S вместо параметров заменяемой части, унифицирующая данные подтермы. При унификации не разрешается использовать подтермы, содержащие связанные переменные заменяемой части. Для получения новой теоремы подстановка S применяется к антецедентам и консеквенту исходной теоремы. (Прием кванторнаясвертка - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(b - \text{set} \to \text{непересек}(b, b) \leftrightarrow b = \emptyset)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set} \to \text{непересек}(a, b) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \to \neg(c \in b)))$

2. Попытка свертки квантора в одной из частей эквивалентности в бескванторное утверждение.

   (a) Заменяемая часть эквивалентности - кванторная импликация "$\forall_{x_1 \ldots x_n}(A_1$ & $\ldots$ & $A_m \to A_0)$". Решается задача на описание с условиями $A_1, \ldots, A_m$, $\neg(A_0)$, посылками которой служат антецеденты теоремы, а неизвестными - $x_1, \ldots, x_n$. Если получен ответ B, отличный от "отказ", то при помощи задачи на преобразование с целью "свертка" преобразуется утверждение "$\neg(\exists_{x_1 \ldots x_n}(B))$". Если получается элементарное утверждение C, то оно

замещает в новой теореме указанную кванторную импликацию. (Прием кванторнаясвертка - 10).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \to \text{непересек}(a,b) \leftrightarrow a \cap b = \emptyset)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \to \text{непересек}(a,b) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \to \neg(c \in b)))$

(b) В заменяющей части встречается кванторная импликация "$\forall_{x_1 \ldots x_n}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_m \to A_0)$". Выбирается некоторое $A_i, i > 0$, причем такое, что подсписок $x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}$ переменных $x_1, \ldots, x_n$, входящих в A_i, непуст, и все переменные этого подсписка встречаются в остальных антецедентах A_s. Рассматривается кванторная импликация "$\forall_{x_{j_1} \ldots x_{j_k}}(A_1 \ \& \ \ldots A_{i-1} \ \& \ A_{i+1} \ \& \ \ldots \ \& \ A_m \to A_i)$". Проверяется, что все ее параметры содержатся в антецедентах теоремы. При помощи задачи на преобразование с целями "упростить", "свертка" данная импликация преобразуется в элементарное утверждение B. Оно добавляется к антецедентам теоремы, а утверждение A_i исключается из списка антецедентов импликации заменяющей части. (Прием развертка - 132).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abd}(\neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ b \mid a \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \to d = \text{нод}(a,b) \leftrightarrow \neg(b = 0) \ \& \ d = |b|)$

из теоремы

$\forall_{abd}(\neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \to d = \text{нод}(a,b) \leftrightarrow \forall_f(f - \text{натуральное} \ \& \ f \mid a \ \& \ f \mid b \to f \leq d) \ \& \ d - \text{натуральное} \ \& \ d \mid a \ \& \ d \mid b)$

3. Развязка антецедента заменяемой кванторной импликации, имеющего вид принадлежности: заменяемая часть имеет вид "$\forall_x(x \in y \to A)$", где y - переменная, не имеющая прочих вхождений в заменяемую часть. Теорема не имеет антецедента вида "бинарнаяоперация(F, y)". Выбираются новые переменные f, z. В утверждении A переменная x заменяется на $f(x)$. В антецедентах теоремы и заменяющей части переменная y заменяется на "$\text{set}_z(\exists_x(x \in y \ \& \ z = f(x)))$". Результат упрощается. (Прием кванторнаясвертка - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abd}(\forall_c(c \in a \to d(c) - \text{число}) \ \& \ b - \text{число} \to \text{нижняягрань}(b, \text{set}_e(\exists_c(e = d(c) \ \& \ c \in a))) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \to b \leq d(c)))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \to \text{нижняягрань}(b,a) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \to b \leq c))$

4. Извлечение эквивалентности, вводящей уравнение множества точек в задаче на преобразование, имеющей цель "класс": теорема определяет общий вид уравнения для множества точек заданного типа. В одной части эквивалентности расположено условие A на тип множества, в другой - квантор существования

"$\exists_{x_1 \ldots x_n}(B_1$ & $\ldots$ & $B_m)$". Выбираются новые переменные P, y. Рассматриваются параметры $z_1, \ldots, z_k$ утверждения A. Находится то B_i, которое задает уравнение - оно имеет вид "коорд$(X, K) = M$". Определяется конъюнкция B всех таких B_j, параметры которых не включаются в параметры выражения M, либо которые необходимы для сопровождения M по о.д.з. Затем консеквент теоремы заменяется на эквивалентность утверждения "$\exists_{z_1 \ldots z_k y}(A$ & $P(z_1 \ldots z_k y))$" утверждению "$\exists_{z_1 \ldots z_k y x_1 \ldots x_n}(B$ & A & $P(z_1 \ldots z_k y))$". При необходимост отбрасывается антецедент, указывающий на планарную ситуацию, но новая теорема сопровождается характеристикой "планиметрия". (Прием уравнкрив - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{dABCK}$(систкоорд(K) & $K = (A, B, C) \to \exists_{Pe}$(Прямая$(P)$ & $d(P, e)) \leftrightarrow$
$\exists_{Peabc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & коорд$(P, K) = \mathrm{set}_{xy}(x -$ число &
$y -$ число & $ax + by + c = 0)$ & Прямая(P) & $d(P, e)))$

из теоремы

$\forall_{ABCKP}$(систкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $P \subseteq$ плоскость$(ABC) \to$
Прямая$(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $\neg(a^2 + b^2 = 0)$ &
коорд$(P, K) = \mathrm{set}_{xy}(x -$ число & $y -$ число & $ax + by + c = 0)))$

5. Теорема - определение некоторого отношения. Определяющая часть - квантор общности "$\forall_{x_1 \ldots x_n}(A_1$ & $\ldots$ & $A_m \to A_0)$". Некоторое A_i имеет вид "$x_i \in$ область(f)", где f - переменная, отличная от $x_1, \ldots, x_n$. Выбираются новые переменные a, b. В антецедентах и в консеквенте теоремы переменная f заменяется на "доопределение$(f, \{a\}, b)$". К антецедентам добавляются утверждения "функция(f)", "$\neg(a \in$ область$(f))$". Снимаются блокировки с приемов, основанных на теоремах, уже имеющихся в списке вывода, в частности, с самого определения. Затем теорема упрощается и проверяется, что определение позволило свернуть ее консеквент в утверждение, не содержащее связанных переменных. (Прием определение - 225).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abf}(\neg(a \in \mathrm{Dom}(f))$ & $b -$ set & $f -$ функция & семействомножеств$(f) \to$
   несовместны(доопределение$(f, \{a\}, b)) \leftrightarrow$ несовместны(f) & Непересек$(b, f))$

   из теоремы

   $\forall_f$(семействомножеств$(f) \to$ несовместны$(f) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in \mathrm{Dom}(f)$ & $y \in \mathrm{Dom}(f)$
   & $\neg(x = y) \to$ непересек$(f(x), f(y))))$

6. Исключение квантора существования в заменяющей части путем перенесения в антецеденты равенства, определяющего значение его связанной переменной.

   (a) Теорема - определение элементарного утверждения. Определяющая часть имеет вид "$\exists_x(x = t$ & $A)$", где A - конъюнкция элементарных утверждений, оценка сложности которой меньше оценки сложности определяемого утверждения. Переменная x не входит в t. Равенство $x = t$ добавляется к антецедентам, а определяющая часть заменяется на A. (Прием определение - 50).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{af}(\text{последовательность}(f, \mathbb{R})\ \&\ a = \lim(f) \to \text{сходится}(f) \leftrightarrow a - \text{число})$

из теоремы

$\forall_f(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \to \text{сходится}(f) \leftrightarrow \exists_a(a - \text{число}\ \&\ a = \lim(f)))$

(b) Теорема дает параметрическое описание значений некоторой переменной, удовлетворяющей условию A. Заменяющая часть имеет вид "$\exists_x(y = t\ \&\ B)$", где y - переменная, отличная от x и не имеющая других вхождений в определяющей части. Термы t, B не имеют переменной, отличной от x. Выбирается новая переменная z и находится результат t_1 замены в t переменной x на z. Из антецедентов теоремы, равенства $t = t1$ и необходимых для сопровождения по о.д.з. термов $t, t1$ утверждений при помощи задачи на доказательство выводится равенство $x = z$. Тогда к антецедентам добавляются утверждения, необходимые для сопровождения t по о.д.з., определяется результат A_1 подстановки t вместо y в утверждение A, и консеквент заменяется на эквивалентность $A_1 \leftrightarrow B$. (Прием неизвпарам - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_n(n - \text{число} \to \sin(n\pi) = 0 \leftrightarrow n - \text{целое})$

из теоремы

$\forall_x(x - \text{число} \to \sin x = 0 \leftrightarrow \exists_n(x = n\pi\ \&\ n - \text{целое}))$

7. Попытка устранить повторные вхождения переменной путем ввода вспомогательного параметра, если он однозначно определяется прочими переменными: теорема представляет собой эквивалентность, дающую параметрическое описание значений некоторой переменной x, удовлетворяющей условию A. В этом условии выделяется неоднобуквенный подтерм t, содержащий только переменную x, причем x встречается в A также вне данного подтерма. Заменяющая часть имеет вид "$\exists_{z_1 \ldots z_k}(x = p\ \&\ B)$". Выбирается новая переменная y и определяется результат A_1 замены в A выделенного вхождения t на y. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство $t = y$ - следствие антецедентов и утверждения A_1. Определяется результат t_1 замены в t переменной x на p. При помощи задачи на описание конъюнкция "$B\ \&\ y = t_1$" упрощается относительно неизвестных $z_1, \ldots, z_k$. Возникает утверждение C без связанных переменных. Затем консеквент заменяется на эквивалентность A_1 утверждению "$\exists_{z_1 \ldots z_k}(x = p\ \&\ C)$". (Прием параметризация - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdef}(d - \text{set}\ \&\ e - \text{set} \to \text{кортеж}(c, f, d \times e) \leftrightarrow \exists_{ab}(c = \text{кортежпар}(a, b)\ \&$
$\text{кортеж}(a, f, d)\ \&\ \text{кортеж}(b, f, e)))$

из теоремы

$\forall_{cde}(d - \text{set}\ \&\ e - \text{set} \to \text{кортеж}(c, l(c), d \times e) \leftrightarrow \exists_{ab}(c = \text{кортежпар}(a, b)\ \&$
$\text{кортеж}(a, l(a), d)\ \&\ \text{кортеж}(b, l(a), e)))$

8. Заменяющая часть эквивалентности - общий вид уравнения для координат множества M точек специального вида. Вводится произвольная точка A данного множества, к антецедентам добавляется равенство для ее произвольных координат, и консеквентом становится эквивалентность существования содержащего A множества M указанного типа, определяемого рассматриваемым уравнением, выполнению этого уравнения для координат точки A. (Прием уравнкрив - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefK}(\neg(a^2+b^2=0)$ & коорд$(d,K)=(e,f)$ & $a-$число & $b-$число & $c-$число & систкоорд$(K) \to \exists_P($коорд$(P,K)=\mathrm{set}_{xy}(c+ax+by=0$ & $x-$число & $y-$число) & $d\in P$ & Прямая$(P)) \leftrightarrow c+ae+bf=0)$

   из теоремы

   $\forall_{ABCKP}($систкоорд(K) & $K=(A,B,C)$ & $P\subseteq$ плоскость$(ABC) \to$ Прямая$(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a-$число & $b-$число & $c-$число & $\neg(a^2+b^2=0)$ & коорд$(P,K)=\mathrm{set}_{xy}(x-$число & $y-$число & $ax+by+c=0)))$

9. Заменяющая часть эквивалентности - общий вид уравнения для координат множества M точек специального вида. Среди конъюнктивных членов квантора существования, дающего этот общий вид, усматриваются ограничения R на коэффициенты уравнения. Выводится эквивалентность условия существования множества M указанного вида с данным уравнением выполнению ограничений R. Эквивалентность проверяется при помощи вспомогательных задач. (Прием уравнкрив - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcK}(a-$число & $b-$число & $c-$число & систкоорд$(K) \to \exists_P($коорд$(P,K)=\mathrm{set}_{xy}(c+ax+by=0$ & $x-$число & $y-$число) & Прямая$(P)) \leftrightarrow \neg(a^2+b^2=0))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCKP}($систкоорд(K) & $K=(A,B,C)$ & $P\subseteq$ плоскость$(ABC) \to$ Прямая$(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a-$число & $b-$число & $c-$число & $\neg(a^2+b^2=0)$ & коорд$(P,K)=\mathrm{set}_{xy}(x-$число & $y-$число & $ax+by+c=0)))$

10. Предпринимается попытка найти условие, при котором квантор существования в заменяющей части становится истинным. Это условие добавляется к антецедентам, а квантор в консеквенте заменяется на константу "истина".

    (a) Теорема - определение утверждения A, причем определяющая часть содержит квантор существования "$\exists_{x_1\ldots x_k}(B_1$ & $\ldots$ & $B_n)$", где $B_1,\ldots,B_n$ элементарны. Составляется список S, полученный добавлением к антецедентам теоремы всех утверждений из области вхождения квантора существования. Решается задача на описание с посылками S и условиями $B_1,\ldots,B_n$. Неизвестными служат переменные $x_1,\ldots,x_k$. В задаче требуется найти пример, причем не обязательно полный. Проверяется, что ответ содержит для каждой переменной x_i равенство "$x_i=t_i$, определяющее ее значение. Составляется список S_1 прочих конъюнктивных членов ответа.

Проверяется, что его параметры включаются в параметры антецедентов теоремы и утверждения A. Список S_1 добавляется к антецедентам теоремы, а в консеквенте указанный квантор существования заменяется на константу "истина". Результат упрощается. (Прием развертка - 113).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{nxA}(A-\text{set} \ \& \ A \subseteq (\mathbb{R})^n \ \& \ x \in A \ \& \ n-\text{натуральное} \rightarrow \text{точкаприкосн}(x, A))$

из теоремы

$\forall_{nxA}(n - \text{натуральное} \ \& \ A - \text{set} \ \& \ A \subseteq (\mathbb{R})^n \rightarrow \text{точкаприкосн}(x, A) \leftrightarrow \text{числнабор}(x, n) \ \& \ \forall_b(b - \text{число} \ \& \ 0 < b \rightarrow \exists_y(y \in A \ \& \ y \in \text{евклокр}(x, b))))$

11. Извлечение эквивалентности с одним из членов подкванторного утверждения после доказательства однозначной определимости. Теорема - эквивалентность вида $A_1 \leftrightarrow \exists_x(B_1 \ \& \ \ldots \ \& \ B_n)$, где A_1 - элементарное утверждение, $n \geq 3$. Выбирается B_i, имеющее не менее 3 параметров. Проверяется, что среди остальных B_j имеется утверждение длины, большей 2. Выбирается новая переменная y, и при помощи задачи на доказательство устанавливается, что $x = y$ - следствие антецедентов, утверждений $B_1, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_n$ и результатов замены в этих утверждениях переменной x на y. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $A_1 \leftrightarrow B_i$. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы, утверждения $B_1, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_n$ и утверждения, необходимые для сопровождения по о.д.з. Результат упрощается. (Прием развертка - 76).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ E \in \text{прямая}(CD) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \leftrightarrow \text{прямая}(AE) \perp \text{прямая}(CD))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \rightarrow \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \leftrightarrow \exists_E(E - \text{точка} \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{прямая}(AE) \perp \text{прямая}(CD)))$

12. Извлечение явного параметрического описания функций из косвенного их задания. Теорема - определение вида $A_1 \leftrightarrow \text{функция}(f) \ \& \ \text{область}(f) = A_2 \ \& \ \exists_{x_1 \ldots x_k}(A_3 \ \& \ \forall_y(A_4 \rightarrow f(y) = t)) \ \& \ A_5$. Переменная f не встречается в термах A_2, A_3, A_4, t. Проверяется, что равенство "$\text{set}_y(A_4) = A_2$ следствие антецедентов и A_5. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_5 \ \& \ \exists_{x_1 \ldots x_k}(A_3 \ \& \ f = \lambda_y(t, A_4))$. Антецеденты те же, что у исходной теоремы. (Прием определение - 40).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(\text{последовательность}(a, b) \rightarrow \text{подпоследовательность}(c, a) \leftrightarrow \exists_d(\text{последовательность}(d, \mathbb{N}) \ \& \ \text{возрастает}(d, \mathbb{N}) \ \& \ c = \lambda_i(a(d(i)), i - \text{натуральное})))$

из теоремы

$\forall_{abc}$(последовательность$(a,b) \to$ подпоследовательность$(c,a) \leftrightarrow c -$ функция & $\mathrm{Dom}(c) = \mathbb{N}$ & $\exists_d$(последовательность$(d,\mathbb{N})$ & возрастает$(d,\mathbb{N})$ & $\forall_i(i-$натуральное $\to c(i) = a(d(i)))))$

Перенесение антецедента теоремы в конъюнктивные члены одной из частей эквивалентности

1. Перенесение указателя типа в заменяющую часть определения равенства: теорема - определение равенства вида $x = t$, где x - переменная, не встречающаяся в t. Некоторый антецедент имеет вид $P(x)$, где P - тип значений выражения t, определяемый по заголовку t. Этот антецедент исключается, но добавляется как новый конъюнктивный член заменяющей части. (Прием и - 57).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a -$ число $\to \mathrm{arctg}(a) = b \leftrightarrow b -$ число & $a = \mathrm{tg}\, b$ & $0 < \pi + 2b$ & $0 < \pi - 2b)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число $\to \mathrm{arctg}(a) = b \leftrightarrow a = \mathrm{tg}\, b$ & $0 < \pi + 2b$ & $0 < \pi - 2b)$

2. Перенесение в конъюнктивные члены заменяемой части антецедента, являющегося следствием заменяющей части. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$, имеющая единственный антецедент B. Проверяется, что B - следствие A_2. Новая теорема не имеет антецедентов; консеквентом ее служит эквивалентность $(B$ & $A_1) \leftrightarrow A_2$. (Прием общнорм - 75).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a -$ целое & $0 < a \leftrightarrow a -$ натуральное$)$

   из теоремы

   $\forall_a(a -$ целое $\to 0 < a \leftrightarrow a -$ натуральное$)$

3. Перенесение указателя типа в заменяющую часть определения равенства: теорема - определение равенства вида $x = t$, где x - переменная, не встречающаяся в t. Некоторый антецедент имеет вид $P(x)$, где P - тип значений выражения t, определяемый по заголовку t. Этот антецедент исключается, но добавляется как новый конъюнктивный член заменяющей части. (Прием числитель - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ghiv}(g -$ число & Вектор(h) & вертикнапр(h,i) & Трехмерн$(i) \to v = gh \leftrightarrow$ Вектор(v) & $g \cdot$ крд$(h,i,3) =$ крд$(v,i,3)$ & вертикнапр$(v,i))$

   из теоремы

   $\forall_{ghiv}(g -$ число & Вектор(h) & Вектор(v) & вертикнапр(h,i) & Трехмерн$(i) \to$ $v = gh \leftrightarrow g \cdot$ крд$(h,i,3) =$ крд$(v,i,3)$ & вертикнапр$(v,i))$

4. Консеквент теоремы имеет вид $(x = t \leftrightarrow A)$, где x - переменная, не входящая в t. Имеется единственный содержащий x антецедент B. Рассматривается список S остальных антецедентов. Утверждение "$\exists_x(A)$" упрощается относительно этого списка и превращается в утверждение C без связанных переменных. Определяется результат B_1 подстановки выражения t вместо переменноы x в утверждение B. Затем выводится импликация с антецедентами S и консеквентом $C \leftrightarrow B_1$. (Прием и - 68).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{число } \&\ d - \text{число} \rightarrow c + di - \text{число} \leftrightarrow d = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{acd}(a - \text{число } \&\ c - \text{число } \&\ d - \text{число} \rightarrow a = c + di \leftrightarrow a = c\ \&\ d = 0)$

5. Консеквент теоремы - эквивалентность квантора существования "$\exists_{x_1 \ldots x_n}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n)$" некоторому утверждению B. Составляется список S, состоящий из утверждений $A_1, \ldots, A_n$ и всех указателей типа значения переменной, встречающихся в антецедентах. Определяются такие не входящие в S антецеденты, для которых с помощью задачи на доказательство удается установить, что они суть следствия утверждений S. Эти антецеденты исключаются из списка антецедентов и добавляются как новые конъюнктивные члены утверждения B. (Прием кванторнаясвертка - 23).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abG}(\text{граф}(G) \rightarrow \exists_r(\text{ведет}(r, a, b, G)) \leftrightarrow a \in \text{вершины}(G)\ \&\ b \in \text{вершины}(G)\ \&\ \text{смежны}(a, b, G))$

   из теоремы

   $\forall_{abG}(a \in \text{вершины}(G)\ \&\ b \in \text{вершины}(G)\ \&\ \text{граф}(G) \rightarrow \text{смежны}(a, b, G) \leftrightarrow \exists_r(\text{ведет}(r, a, b, G)))$

6. Консеквент теоремы - эквивалентность квантора существования $\exists_{x_1 \ldots x_n}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_m)$ некоторому утверждению B. Последовательно отбираются антецеденты $C_1, \ldots, C_k$, такие, что каждый из них является следствием утверждений $A_1, \ldots, A_m$ и отличных от него еще не отобранных антецедентов. Проверяется, что некоторые параметры утверждений $C_1, \ldots, C_k$ не встречаются среди оставшихся антецедентов. Затем эти утверждения переносятся из антецедентов в новые конъюнктивные члены утверждения B. (Прием развертка - 110).

   Пример - вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\text{орграф}(a) \rightarrow b \in \text{ребра}(a)\ \&\ \text{началоребра}(c, b, a) \leftrightarrow \exists_x(\text{ведет}(b, c, x, a)))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(\text{орграф}(a)\ \&\ b \in \text{ребра}(a) \rightarrow \text{началоребра}(c, b, a) \leftrightarrow \exists_x(\text{ведет}(b, c, x, a)))$

Перенесение отрицания одного из антецедентов в дизъюнктивные члены заменяющей части эквивалентности

1. Попытка перенесения отрицания существенного антецедента в дизъюнктивные члены заменяющей части эквивалентности общей стандартизации. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$. Выбирается существенный антецедент вида $\neg(t_1 = t_2)$. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что A_1 - следствие антецедентов, в которых вместо $\neg(t_1 = t_2)$ берется $t_1 = t_2$. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $A_1 \leftrightarrow (A_2 \ \vee \ t_1 = t_2)$. Антецеденты - отличные от $\neg(t_1 = t_2)$ антецеденты исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием общнорм - 25).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq c \rightarrow -c^b + a^b = 0 \leftrightarrow a = c \ \vee \ b = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(a = c) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq c \rightarrow -c^b + a^b = 0 \leftrightarrow b = 0)$

На обе части эквивалентности навешивается отрицание

1. Консеквент имеет вид $\neg(A) \leftrightarrow B$. Он заменяется на $A \leftrightarrow \neg(B)$. (Прием нормотр - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \neg(b \leq a) \leftrightarrow a < b)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \neg(a < b) \leftrightarrow b \leq a)$

2. Консеквент имеет вид $A \leftrightarrow B$, где A, B - элементарные утверждения. Утверждение $\neg(A)$ упрощается относительно антецедентов и превращается в утверждение C, заголовок которого отличен от отрицания. Консеквент заменяется на $C \leftrightarrow \neg(B)$. (Прием общнорм - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| \leq 0 \leftrightarrow a = 0)$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow 0 < |a| \leftrightarrow \neg(a = 0))$

3. Действия те же, что в предыдущем пункте, но новая теорема упрощается с использованием других теорем, уже полученных в списке вывода. (Прием общнорм - 107).

4. Консеквент теоремы имеет вид "$\exists_{x_1 \ldots x_n}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_m) \leftrightarrow B$", где B - элементарное утверждение. Выбирается такое i, что A_i не используется для сопровождения по о.д.з., а все утверждения $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_m$ не имеют своим заголовком отрицание. Затем консеквент заменяется на "$\forall_{x_1 \ldots x_n}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_{i-1}\ \&\ A_{i+1}\ \&\ \ldots\ \&\ A_m \rightarrow \neg(A_i)) \leftrightarrow \neg(B))$". (Прием общнорм - 24).

   Пример: вывод теоремы

   $$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow \forall_c(a < c\ \&\ c - \text{число} \rightarrow b \leq c) \leftrightarrow b \leq a)$$

   из теоремы

   $$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow \exists_c(c < b\ \&\ a < c\ \&\ c - \text{число}) \leftrightarrow a < b)$$

5. Консеквент теоремы имеет вид "$(A\ \vee B) \leftrightarrow C$". Утверждения A, B, C элементарны и их оценки сложности одинаковые, причем C меет единственный подтерм максимальной сложности. Тогда консеквент заменяется на "$\neg(C) \leftrightarrow \neg(A)\ \&\ \neg(B)$". (Прием общнорм - 79).

   Пример: вывод теоремы

   $$\forall_c(c - \text{число} \rightarrow \neg(\sin(2c) = 0) \leftrightarrow \neg(\sin c = 0)\ \&\ \neg(\cos c = 0))$$

   из теоремы

   $$\forall_c(c - \text{число} \rightarrow \sin(2c) = 0 \leftrightarrow \sin c = 0\ \vee\ \cos c = 0)$$

6. Консеквент теоремы - эквивалентность элементарного утверждения A кванторy общности. Она заменяется на эквивалентность утверждения $\neg(A)$ квантору существования, в который преобразуется квантор общности. (Прием развертка - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $$\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set} \rightarrow \neg(a \subseteq b) \leftrightarrow \exists_c(\neg(c \in b)\ \&\ c \in a))$$

   из теоремы

   $$\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set} \rightarrow a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow c \in b))$$

Попытка определить характеристику функции, заданной разбором случаев

1. Теорема - эквивалентность, определяющая некоторую характеристику P функции f. Некоторые параметры $x_1, \ldots, x_k$ данной характеристики однозначно определяются по функции f и остальным параметрам. Среди таких параметров встречается множество A, для которого в определяющей части имеется подтерм "образ(f, A)". Рассматривается функция F, заданная с помощью условного выражения: "$\lambda_y((f_1(y)\ \text{при}\ y \in B,\ \text{иначе} f_2(y)), y \in C)$". В предположении, что для вспомогательных функций f_1, f_2 определяющие части их характеристик P уже даны, предпринимается попытка разрешить относительно $x_1, \ldots, x_k$ определяющую часть характеристики функции F. Новым консеквентом становится эквивалентность характеристики P для F найденному ответу. Выведенная теорема

сопровождается характеристикой, указывающей, что по ней создается прием, сводящий определение характеристики P для функции F к характеристикам P для вспомогательных функций f_1, f_2 (последние характеристики явно заданы антецедентами теоремы). (Прием определение - 239).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdehijkAB}(A - \text{set}\ \&\ A \subseteq e\ \&\ A \subseteq d \cup \text{Dom}(c)\ \&\ d \cap A \subseteq \text{Dom}(a)\ \&\ \text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(c) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ a - \text{функция}\ \&\ c - \text{функция}\ \&\ \text{Max}(a, d \cap A, h, i)\ \&\ \text{Max}(c, A \setminus d, j, k) \to \text{Max}(\lambda_g((a(g)\ \text{при}\ g \in d,\ \text{иначе}\ c(g)), g \in e), A, B, b) \leftrightarrow b = \max(i, k)\ \&\ B = (h\ \text{при}\ 0 \leq i - k,\ \text{иначе}\ \emptyset) \cup (j\ \text{при}\ 0 \leq k - i,\ \text{иначе}\ \emptyset))$

из теоремы

$\forall_{fbAB}(f - \text{функция}\ \&\ A - \text{set}\ \&\ A \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \text{Max}(f, A, B, b) \leftrightarrow \text{наибольший}(b, \text{образ}(f, A))\ \&\ B = A \cap \text{слой}(f, b))$

1.3 Отождествление подтермов теоремы

Отождествление переменных

1. Попытка отождествления переменных, расположенных на одноименных операндах атомарных подвыражений консеквента: консеквент теоремы - равенство, содержащее ровно три нечисловых атомарных подвыражения. Все эти подвыражения имеют один и тот же заголовок и ровно два операнда. Либо первые операнды, либо вторые операнды этих трех выражений суть две переменные x, y. Предпринимается замена x на y в антецедентах и консеквенте, после чего результат упрощается. (Прием Атомарное - 7).

   Пример: вывод утверждения

   $\forall_{ab}(a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка} \to \text{вектор}(ab) - \text{вектор}(ab) = \text{вектор}0)$

   из утверждения

   $\forall_{abC}(a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \to \text{вектор}(aC) - \text{вектор}(ab) = \text{вектор}(bC))$

2. Консеквент - эквивалентность некоторого утверждения A дизъюнкции B. Утверждение A имеет не менее двух и не более четырех параметров. Начальная теорема текущего цикла вывода - некоторое определение. Рассматривается произвольная пара параметров утверждения A, и равенство их добавляется к антецедентам. Список антецедентов упрощается и проверяется его непротиворечивость. Новая теорема упрощается. Проверяется, что она получила характеристику "общнорм" либо "усиление". (Прием или - 77).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{BCD}(\neg(B = C)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ D \in \text{прямая}(BC)\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \to \text{однонаправлены}(\text{вектор}(CB), \text{вектор}(CD)) \leftrightarrow \text{точкалуча}(C, B, D))$

   из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&$ прямая$(AB)=$ прямая$(CD)\ \&\ A-$точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\rightarrow$ однонаправлены(вектор(AB), вектор$(CD)) \leftrightarrow$ $A \in$ отрезок$(BC)\ \&$ точкалуча$(C,D,B) \vee C \in$ отрезок$(AD)\ \&$ точкалуча$(A,B,$ $D))$

3. Отождествление всех пар соответствующих координат двух различных объектов, кроме одной такой пары: среди антецедентов имеются равенства вида "коорд$(A,K)=(x_1,\ldots,x_n)$" и "коорд$(B,K)=(y_1,\ldots,y_n)$". Кроме того, имеется антецедент "$\neg(A=B)$". Как $x_1,\ldots,x_n$, так и $y_1,\ldots,y_n$ - список различных переменных. Выбирается некоторое i, и повсюду в теореме переменные $x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n$ заменяются на $y_1,\ldots,y_{i-1},y_{i+1},\ldots,y_n$. Результат упрощается. (Прием коорд - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCKbcdxy}(\neg(A=B)\ \&$ коорд$(A,K)=(c,b)\ \&$ коорд$(B,K)=(c,d)\ \&$ коорд$(C,K)=(x,y)\ \&\ C \in$ прямая$(AB)\ \&\ A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&$ $C-$ точка $\&$ систкоорд$(K) \rightarrow x=c)$

   из теоремы

   $\forall_{ABCKabcdxy}(\neg(A=B)\ \&$ коорд$(A,K)=(a,b)\ \&$ коорд$(B,K)=(c,d)\ \&$ коорд$(C,K)=(x,y)\ \&\ C \in$ прямая$(AB)\ \&\ A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&$ $C-$ точка $\&$ систкоорд$(K) \rightarrow (c-a)(y-b)-(d-b)(x-a)=0)$

4. Попытка получить тождество дистрибутивной развертки путем отождествления двух переменных: консеквент теоремы имеет вид "$t=f(g(x,y),h(z,v))$", где x,y,z,v - различные переменные, причем в t некоторая переменная входит больше одного раза. Определяется результат подстановки в t переменной z вместо x, который упрощается и переходит в бесповторное выражение t_1. В антецедентах переменная x заменяется на z, а консеквентом становится равенство "$t_1=f(g(x,y),h(x,v))$". Новая теорема упрощается. (Прием свертка - 60).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ace}(\neg(c=0)\ \&\ a-$ число $\&\ c-$ число $\&\ e-$ число $\rightarrow a/c+e/c=(a+e)/c)$

   из теоремы

   $\forall_{abce}(\neg(b=0)\ \&\ \neg(c=0)\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\&\ e-$ число $\rightarrow$ $(ac+be)/bc=a/b+e/c)$

5. Попытка отождествления двух точек: среди антецедентов находятся утверждения "точка$(A$", "точка(B)", где A,B - переменные. Общее число переменных теоремы не более 6. Проверяется отсутствие различных признаков, согласно которым отождествление точек A,B нецелесообразно: отсутствие антецедента $\neg(A=B)$, отсутствие многоугольников, среди вершин которых упомянуты A,B, и т.п. Предпринимаются попытки усмотреть противоречивость антецедентов, получаемых при отождествлении A и B: сначала попытка доказать $\neg(A=B)$, затем - попытка вывести "ложь" из таких антецедентов, к которым добавлены условия на о.д.з. консеквента, полученного при отождествлении точек. Затем в антецедентах и консеквенте переменная A заменяется на B. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 13).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{AC}(\neg(A = C)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(AC),$
$\text{вектор}(AC)) = 0)$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B) \rightarrow$
$\text{уголмежду}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(AC)) = \angle(BAC))$

6. Попытка отождествления двух симметричных переменных: список антецедентов переводится в себя при перестановке местами двух его параметров x, y. Каждый из этих параметров входит в консеквент однократно, причем оба они встречаются среди параметров некоторого не имеющего собственных связанных переменных подутверждения консеквента. В антецедентах и в консеквенте x заменяется на y, после чего результат упрощается. (Прием допконтекст - 13).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fyA}(A - \text{set}\ \&\ y \in A\ \&\ \text{левобратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, A) \rightarrow$
   $\exists_z(f(z, y) = y\ \&\ z \in A))$

   из теоремы

   $\forall_{fxyA}(A - \text{set}\ \&\ x \in A\ \&\ y \in A\ \&\ \text{левобратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, A) \rightarrow$
   $\exists_z(f(z, x) = y\ \&\ z \in A))$

   Заметим, что выведенная теорема - лишь промежуточная и используется далее для получения теоремы о существовании левой единицы. Впрочем, таких промежуточных теорем среди приводимых примеров достаточно много.

7. Попытка отождествления переменных для исключения связанных переменных в консеквенте: в заменяющей части эквивалентности находятся два подтерма P, Q, содержащие связанные переменные этой части. Они отличаются друг от друга только переобозначением без отождествлений некоторых параметров заменяющей части. Такое переобозначение предпринимается как в антецедентах, так и в консеквенте. Новая теорема упрощается, и проверяется, что ее консеквент не имеет связанных переменных. (Прием развертка - 130).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(\neg(b = 0)\ \&\ b - \text{целое} \rightarrow \text{нод}(b, b) = |b|)$

   из теоремы

   $\forall_{abd}(\neg(a^2 + b^2 = 0)\ \&\ a - \text{целое}\ \&\ b - \text{целое} \rightarrow d = \text{нод}(a, b) \leftrightarrow$
   $\forall_f(f - \text{натуральное}\ \&\ f \mid a\ \&\ f \mid b \rightarrow f \leq d)\ \&\ d - \text{натуральное}\ \&\ d \mid a\ \&\ d \mid b)$

Отождествление переменных и контрапозиция

1. Попытка отождествления точек для исключения обобщенного антецедента: среди антецедентов теоремы встречаются утверждения "точка(A)", "точка(B)", где A, B - переменные. Нет антецедента $\neg(A = B)$. Составляется список S результатов замены A на B в антецедентах и в отрицании консеквента. Если задача на исследование не усматривает противоречивости данного списка, то он упрощается, причем после упрощения становится короче. В качестве антецедентов новой теоремы берутся первые утверждения укороченного списка, в качестве консеквента - отрицание последнего. Результат упрощается. (Прием вывод - 30).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{BCD}(\neg(B = C)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&$
   $\text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(CD) \to \text{прямая}(BC) = \text{прямая}(CD))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D)\ \&$
   $\neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD)) \to$
   $\text{непересек}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD)))$

Отождествление неоднобуквенных подтермов теоремы

1. Консеквент теоремы - равенство $A = B$. Каждое из выражений A, B имеет ровно два подтерма максимальной сложности P_1, P_2 - одни и те же как для A, так и для B. Подтерм P_2 получается из P_1 подстановкой переменной y вместо некоторой переменной x (x не входит в P_2). В антецедентах и консеквенте переменная x заменяется на y, а результирующая теорема упрощается. Проверяется, что новая теорема позволяет создать прием для вычислений с константными термами. (Прием свертка - 82).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bceij}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ 0 \le c \to (b + i\sqrt{c})(e + j\sqrt{c}) = be + cij + (bj + ei)\sqrt{c})$

   из теоремы

   $\forall_{bcefgij}(f + g = 1\ \&\ 0 < f\ \&\ 0 < g\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&$
   $f - \text{число}\ \&\ g - \text{число}\ \&\ 0 \le c \to be + bjc^g + cij + eic^f = (b + ic^f)(e + jc^g))$

2. Консеквент теоремы - тождество, упрощающее сложное подвыражение. Заменяемая часть имеет единственный подтерм максимальной сложности, заменяющая - хотя бы два таких подтерма - P_1, P_2. Эти подтермы имеют одинаковые заголовки. Находится подстановка S, унифицирующая P_1 и P_2. Эта подстановка применяется к антецедентам и консеквенту. Результат упрощается. (Прием сокращ - 20).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(b - \text{число} \to \sin(2b) = 2\sin b \cos b)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$

3. Попытка отождествления двух числовых атомов и разрешения равенства относительно единственного оставшегося числового атома: консеквент теоремы - равенство, имеющее ровно два невырожденных числовых атома A_1, A_2 и не имеющее вырожденных числовых атомов. Заголовки атомов A_1, A_2 совпадают. Выбирается новая переменная x, в консеквенте атомы A_1, A_2 заменяются на x и полученное уравнение разрешается относительно x. Находится результат B подстановки в ответ атома A_2 вместо x. К антецедентам добавляется равенство $A_1 = A_2$, а консеквентом становится B. (Прием числовойатом - 19).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(B = D)\ \&\ \angle(ABD) = \angle(CBD)\ \&$
   $B \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \to$
   $\angle(CBD) = \pi/2)$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&$
   $\neg(B = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ B \in \text{отрезок}(AC) \to \angle(ABD) + \angle(DBC) = \pi)$

4. Попытка отождествления двух числовых атомов для сокращения соотношения: консеквент теоремы - равенство, имеющее не менее трех невырожденных числовых атомов. Рассматриваются такие два из них, что после их отождествления уравнение можно сократить на их общее значение. К антецедентам добавляются равенство данных атомов и условие отличия одного из них от нуля. Результат упрощается, и проверяется, что при этом сокращение выполнено - каждый невырожденный числовой атом встречается в консеквенте лишь однократно. (Прием числовойатом - 61).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{defg}(\neg(d = e)\ \&\ l(de) = l(ef)\ \&\ e \in \text{отрезок}(df)\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&$
   $f - \text{точка}\ \&\ g - \text{точка} \to -2l(ef)^2 - 2l(eg)^2 + l(dg)^2 + l(fg)^2 = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{defg}(f - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ e \in \text{отрезок}(df)\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ g - \text{точка} \to$
   $l(dg)^2 l(ef) + l(fg)^2 l(de) = (l(de)l(ef) + l(eg)^2)(l(de) + l(ef)))$

5. Попытка реализовать рефлексивное отношение в антецедентах отождествлением его операндов и исключить почти вырожденную альтернативу: консеквент теоремы - дизъюнкция $A_1 \vee \ldots \vee A_n$; некоторый антецедент Q - двуместное отличное от равенства рефлексивное отношение с операндами P_1, P_2. Составляется список S, полученный из списка антецедентов заменой Q на $P_1 = P_2$. Выбирается некоторый дизъюнктивный член A_i, после чего решается задача на исследование с посылками S и A_i. В результате ее список посылок содержит равенство двух переменных x, y, входящих в Q. Создается теорема, антецедентами которой служат утверждения S и $\neg(x = y)$, а консеквентом -

"$A_1 \vee \ldots \vee A_{i-1} \vee A_{i+1} \vee \ldots \vee A_n$". Список антецедентов упрощается, а если $n = 1$, то и вся новая теорема упрощается. (Прием дизъюнкция - 15).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(B = C)\ \&\ l(AB) = l(AC)\ \&\ A \in \text{прямая}(BC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
$B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \to A \in \text{отрезок}(BC))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(B - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ B \in \text{прямая}(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
$0 \leq l(AB) - l(AC) \to C \in \text{отрезок}(AB)\ \vee\ A \in \text{отрезок}(BC))$

6. Отождествление параметров в декомпозирующей импликации: консеквент имеет вид $P(A, B)$, где P отлично от равенства и отрицания. Выражение A имеет ровно два параметра x, y, причем они не входят в B. Имеется ровно два антецедента с заголовком P, именно $P(x, D)$ и $P(E, y)$. Выражения D, E не содержат переменных x, y. Параметры выражения B те же, что у выражения D. Последнее не совпадает хотя бы с одним из выражений B, E. Тогда к антецедентам добавляются равенства $D = B$, $D = E$. Результат упрощается. (Прием попыткаспуска - 26).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{afn}(\text{перестановка}(a, \{1, \ldots, n\})\ \&\ \text{перестановка}(f, \{1, \ldots, n\})\ \&\ n - \text{целое}\ \&$
   $0 \leq n \to \text{перестановка}(\text{произведение}(f, a), \{1, \ldots, n\}))$

   из теоремы

   $\forall_{afA}(\text{перестановка}(a, \{1, \ldots, \text{card}(A)\})\ \&\ \text{перестановка}(f, A)\ \&\ A - \text{set}\ \&$
   $\text{конечное}(A) \to \text{перестановка}(\text{произведение}(f, a), A))$

7. Попытка переформулировать равенство различных операндов двух симметричных двуместных отношений в антецедентах, имеющих одинаковый операнд: имеются антецеденты $P(A, B)$ и $P(B, C)$, где отношение P симметричное. Выражение C получается из выражения A переобозначением переменных без отождествлений. Из антецедентов исключается $P(A, B)$, а к оставшимся антецедентам и консеквенту применяется указанное переобозначение. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 68).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(D = F)\ \&$
   $\neg(E = F)\ \&\ A \in \text{плоскость}(DEF)\ \&\ B \in \text{прямая}(DE)\ \&\ C \in \text{прямая}(DE)\ \&$
   $A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&$
   $\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(DE)\ \&\ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(EF)\ \&\ \text{прямая}(DE) \perp$
   $\text{прямая}(DF) \to l(BC)l(DE) = l(AB)l(DF))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(D = F)\ \&$
   $\neg(E = F)\ \&\ D \in \text{плоскость}(DEF)\ \&\ E \in \text{плоскость}(ABC)\ \&$

$F \in$ плоскость(ABC) & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка & $F -$ точка & прямая$(AB) \perp$ прямая(BC) & прямая$(AB) \perp$ прямая(DE) & прямая$(AC) \perp$ прямая(EF) & прямая$(DE) \perp$ прямая$(DF) \rightarrow l(BC)l(DE) = l(AB)l(DF))$

8. Попытка отождествления операндов двух самых сложных отношений в антецедентах: конъюнкция антецедентов имеет ровно два подтерма максимальной сложности, причем эти подтермы - некоторые антецеденты $P(A, B)$ и $P(C, D)$, где P отлично от равенства и симметрично. Выражение C имеет общий параметр с A и не имеет общих параметров с B. Равенства $A = C$, $B = D$ упрощаются и преобразуются в утверждения E, F, заголовок которых отличен от равенства. Составляется список S, образованный отличными от $P(C, D)$ антецедентами и утверждениями E, F. При помощи задачи на исследование проверяется непротиворечивость списка S. Если в этой задаче выводится равенство двух параметров списка S, то такое равенство добавляется к S. Затем список антецедентов теоремы заменяется на S, а результат упрощается. (Прием числовойатом - 90).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ceABCDE}(\neg(c = B)$ & $\neg(e = A)$ & $\neg(e = D)$ & $\neg(A = D)$ & $\neg(A = E)$ & $\neg(B = C)$ & $\neg(D = E)$ & $\neg($прямая$(cB) =$ прямая$(AE))$ & $\neg($прямая$(eA) =$ прямая$(AD))$ & $c \in$ прямая(eA) & $B \in$ прямая(AD) & $C \in$ прямая(cB) & $C \in$ прямая(AE) & $E \in$ прямая(eD) & $c -$ точка & $e -$ точка & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка & прямая$(cB) \parallel$ прямая$(eD) \rightarrow l(eD)l(AC) = l(cB)l(AE))$

   из теоремы

   $\forall_{ceABCDE}(\neg(D = E)$ & $\neg(e = D)$ & $\neg(c = B)$ & $c -$ точка & $\neg(B = C)$ & $C -$ точка & $B -$ точка & $\neg(A = E)$ & $E -$ точка & $\neg(A = D)$ & $D -$ точка & $\neg(e = A)$ & $A -$ точка & $e -$ точка & $\neg($прямая$(eA) =$ прямая$(AD))$ & $\neg($прямая$(AE) =$ прямая$(BC))$ & $c \in$ прямая(eA) & $B \in$ прямая(AD) & $C \in$ прямая(AE) & прямая$(cB) \parallel$ прямая(eD) & прямая$(BC) \parallel$ прямая$(DE) \rightarrow l(eD)l(AC) = l(cB)l(AE))$

1.4 Подстановка константы либо некоторого простейшего выражения

Добавление антецедента, выражающего равенство некоторого выражения константе

1. Подстановка единицы вместо атомарного подвыражения: консеквент имеет ровно три нечисловых атомарных подвыражения. Выбирается одно из них - некоторое подвыражение A имеющее в консеквенте ровно одно вхождение. Проверяется, что оно имеет вид $f(A, t)$, где операция f имеет единицу e по своему операнду t. К антецедентам добавляется равенство $t = e$, а в консеквенте $f(A, t)$ заменяется на $f(A, e)$. Список антецедентов упрощается, а затем относительно него упрощается консеквент. (Прием Атомарное - 16).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abct}$(мточка(a) & мточка(c) & мтело(b) & t – число & Скорость(a,c,t) = вектор0 $\rightarrow$ Скорость(c,b,t) = Скорость(a,b,t))

из теоремы

$\forall_{abct}$(мточка(a) & мточка(c) & мтело(b) & t – число $\rightarrow$ Скорость(a,c,t) + Скорость(c,b,t) = Скорость(a,b,t))

2. Рассмотрение случая, когда числовой атом в определяющем терме обращается в константу: в определяющей части рассматривается такое подвыражение $f(\ldots)$, что справочник поиска теорем "числ" находит по f теорему с консеквентом вида $(f(\ldots) = e \leftrightarrow P)$. Здесь e - константа. Список антецедентов теоремы пополняется соответствующим образом переобозначенными антецедентами дополнительной теоремы и утверждением P. В консеквенте подвыражение $f(\ldots)$ заменяется на e. Напомним, что справочник "числ" находит эквивалентность общей стандартизации, в одной из частей которой расположено равенство невырожденного числового атома константе, а в другой - утверждение меньшей сложности. (Прием определение - 19).

   Пример: вывод теоремы

   "конечное($\emptyset$)"

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{set} \rightarrow \text{конечное}(a) \leftrightarrow \text{card}(a) - \text{число})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{set} \rightarrow \text{card}(a) = 0 \leftrightarrow a = \emptyset)$

3. Попытка подстановки нуля вместо атомарного выражения - операнда заменяемой части. Теорема - тождество сокращенной перезаписи $f(t_1,t_2) = t_3$. t_1 - атомарное нечисловое выражение. По символу f находится тождество вида $f(a,x) = a$, где a - константное выражение, x - переменная. К антецедентам добавляются равенство $t_1 = a$ и скорректированные антецеденты дополнительного тождества. Консеквент заменяется на $t_3 = a$. Результат упрощается. (Прием свертка - 85).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{atK}$(Ускорение(a,K,t) = вектор0 & t – число & мточка(a) & Неподв(K,t) & мтело(K) $\rightarrow$ вектор0 = Сила(a,t))

   из теоремы

   $\forall_{atK}$(Неподв(K,t) & t – число & мтело(K) & мточка(a) $\rightarrow$ масса(a)Ускорение(a,K,t) = Сила(a,t))

   и дополнительной теоремы

   $\forall_b(b - \text{число} \rightarrow b\text{вектор0} = \text{вектор0})$

4. Рассмотрение случая, когда атомарное выражение константное. Теорема - тождество вида "крд$(A, K, i) = B$", у которого заголовком F служит логический символ, не входящий в B. По названию "крд" типа координат находится тождество вида "крд$(t_1, K, i) = t_2$", у которого выражение t_1 константное. К антецедентам исходной теоремы добавляется равенство $A = t_1$, а консеквент заменяется на $B = t_2$. Результат упрощается. (Прием крд - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abtK}$(Сила$(a, t) =$ вектор0 & $t-$число & $b-$слово & Силы$(a, \{; b\}, t)$ & мточка(a) & Трехмерн$(K) \to \sum_{i=1}^{l(b)}$ крд(сила$(a, b(i), t), K, 1) = 0$)

   из теоремы

   $\forall_{abtK}(t -$ число & $b -$ слово & Силы$(a, \{; b\}, t)$ & мточка(a) & Трехмерн$(K) \to$ крд(Сила$(a, t), K, 1) = \sum_{i=1}^{l(b)}$ крд(сила$(a, b(i), t), K, 1)$)

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{Ki}$(Трехмерн(K) & $i \in \{1, 2, 3\} \to$ крд(вектор0$, K, i) = 0$)

5. Зануление численной характеристики атомарного выражения - сомножителя заменяющей части. (Прием числзнач - 51).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abt}$(нормреакция$(a, b, t) =$ вектор0 & $0 <$ длина(Скорость$(a, b, t))$ & $t -$ число & движениепо$(a, b, t) \to$ силатрения$(a, b, t) =$ вектор0)

   из теоремы

   $\forall_{abt}$(движениепо(a, b, t) & $t -$ число & $0 <$ длина(Скорость$(a, b, t)) \to$ длина(силатрения$(a, b, t)) =$ коэффтрения(a, b)длина(нормреакция$(a, b, t)))$

Подстановка вместо функциональной переменной константной либо тождественной функции

1. Попытка рассмотреть константную функцию: теорема - эквивалентность вида "$A \leftrightarrow B_1$ & $\ldots$ & B_n". Некоторое B_i имеет вид "функция(f)", некоторое B_j - вид "Dom$(f) = M$". Выбираются новые переменные x, y, и рассматривается выражение F вида "$\lambda_x(y, x \in M)$". Из конъюнктивных членов заменяющей части удаляются B_i, B_j. Затем во все антецеденты и в консеквент вместо f подставляется F. Результат упрощается, и проверяется, что получена эквивалентность, заменяющая часть которой не содержит символа "отображение". (Прием и - 51).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cB}(B -$ set $\to$ последовательность$(\lambda_b(c, b -$ натуральное$), B) \leftrightarrow c \in B)$

   из теоремы

   $\forall_{aB}(B -$ set $\to$ последовательность$(a, B) \leftrightarrow a -$ функция & Dom$(a) = \mathbb{N}$ & Val$(a) \subseteq B)$

2. Теорема - тождество, исключающее описатель. Среди антецедентов имеется утверждение "функция(f)" либо "числнабор(f)". Консеквент содержит подтерм вида $f(t)$. Каждый антецедент, содержащий f, не имеет вхождений подтермов вида $g(\ldots)$ для функций g, отличных от f. Вместо переменной f в антецеденты и консеквент подставляется выражение "отображение($\ldots$)" для константной функции. Результат упрощается. (Прием описатель - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bc}(\neg(c = \emptyset)\ \&\ b - \text{set}\ \&\ c - \text{set} \rightarrow b = \bigcap_{d,d\in c} b)$

   из теоремы

   $\forall_f(\neg(\text{Dom}(f) = \emptyset)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{семействомножеств}(f) \rightarrow$
   $\text{set}_a(\forall_x(x \in \text{Dom}(f) \rightarrow a \in f(x))) = \bigcap(f))$

3. Теорема - тождество, исключающее описатель. Среди антецедентов имеется утверждение "функция(f)" либо "числнабор(f)". Консеквент содержит подтерм вида $f(t)$. Каждый антецедент, содержащий f, не имеет вхождений подтермов вида $g(\ldots)$ для функций g, отличных от f. Вместо переменной f в антецеденты и консеквент подставляется выражение "отображение($\ldots$)" для тождественной функции. Результат упрощается. (Прием описатель - 24).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ a \subseteq b \rightarrow a = \text{образ}(\lambda_c(c, c \in b), a))$

   из теоремы

   $\forall_{af}(a - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{set}_x(\exists_y(y \in a\ \&\ x = f(y))) = \text{образ}(f, a))$

4. Попытка рассмотреть набор одинаковых элементов: теорема - определение с эквивалентностьб в консеквенте. Определяемая часть содержит выражение $a(i)$, расположенное внутри описателя "$\lambda_i(Q, P)$". Имеется антецедент "слово(a)". Выбираются новые переменные j, n, и создается выражение F вида "$\lambda_j(a, j -$ целое $\&\ 1 \leq j\ \&\ j \leq n)$". Везде в теореме подвыражение "длинанабора(a)" заменяется на n. Затем в антецедентах и консеквенте a заменяется на F; добавляется антецедент "натуральное(n)". Результат упрощается. (Прием определение - 216).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{Aax}(A - \text{set}\ \&\ a - \text{натуральное} \rightarrow x \in \prod_{c=1}^{a} A \leftrightarrow \text{кортеж}(x, a, A))$

   из теоремы

   $\forall_{Ax}(\text{семействомножеств}(A)\ \&\ A\text{−слово}\ \&\ \neg(A = \text{пустоеслово}) \rightarrow x \in \prod_{i=1}^{l(A)} A(i) \leftrightarrow$
   $x - \text{слово}\ \&\ l(x) = l(A)\ \&\ \forall_i(i \in \{1, \ldots, l(A)\} \rightarrow x(i) \in A(i)))$

5. Попытка рассмотреть константную функцию: теорема - определение с эквивалентностью в консеквенте. Определяющая часть содержит подтерм $f(x)$, расположенный внутри квантора по единственной переменной x. Имеется антецедент

"функция(f)". Выбираются новые переменные x, y, и рассматривается выражение F вида "$\lambda_x(f, x \in y)$". В антецеденты и консеквент вместо переменной f подставляется F. Добавляется антецедент "множество(y)". Результат упрощается. (Прием определение - 217).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_{af}(a - \text{set} \to \text{семействомножеств}(\lambda_b(f, b \in a)) \leftrightarrow a = \emptyset \ \vee \ f - \text{set})$$

из теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \to \text{семействомножеств}(f) \leftrightarrow \forall_x(x \in \text{Dom}(f) \to f(x) - \text{set}))$$

6. Теорема имеет более одного антецедента вида "функция(...)", причем встречаются выражения с заголовком "значение". Выбирается произвольный антецедент вида "функция(f)", и вместо f в антецеденты и консеквент подставляется выражение для тождественной функции, заданной через описатель "отображение". Результат упрощается. (Прием функции - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $$\forall_{abh}(\forall_c(c \in (a, b) \to \text{дифференцируема}(h, c)) \ \& \ 0 < b - a \ \& \ \text{Dom}(h) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ [a, b] \subseteq \text{Dom}(h) \ \& \ \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ h - \text{функция} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{непрерывно}(h, [a, b]) \to \exists_c(\text{производная}(h, c) = (-h(b)+h(a))/(a-b) \ \& \ c \in (a, b)))$$

   из теоремы

   $$\forall_{abhi}(\forall_c(c \in (a, b) \to \neg(\text{производная}(i, c) = 0)) \ \& \ \forall_c(c \in (a, b) \to \text{дифференцируема}(h, c)) \ \& \ \forall_c(c \in (a, b) \to \text{дифференцируема}(i, c)) \ \& \ \text{Dom}(h) = \text{Dom}(i) \ \& \ a < b \ \& \ \text{Dom}(i) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ [a, b] \subseteq \text{Dom}(i) \ \& \ \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(i) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ h - \text{функция} \ \& \ i - \text{функция} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{непрерывно}(h, [a, b]) \ \& \ \text{непрерывно}(i, [a, b]) \to \exists_c(\text{производная}(h, c)/\text{производная}(i, c) = (-h(b) + h(a))/(-i(b) + i(a)) \ \& \ c \in (a, b)))$$

7. Теорема имеет более одного антецедента вида "функция(...)", причем встречаются выражения с заголовком "значение". Выбирается произвольный антецедент вида "функция(f)", и вместо f в антецеденты и консеквент подставляется выражение для константной функции, заданной через описатель "отображение". Результат упрощается. (Прием функции - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $$\forall_{beA}(A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \text{Dom}(e) \ \& \ \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{ограничена}(e, A) \to \text{ограничена}(\lambda_a(b + e(a), a \in \text{Dom}(e)), A))$$

   из теоремы

   $$\forall_{cdeA}(\text{Dom}(d) = c \ \& \ \text{Dom}(e) = c \ \& \ A - \text{set} \ \& \ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{ограничена}(d, A) \ \& \ \text{ограничена}(e, A) \to \text{ограничена}(\lambda_a(d(a) + e(a), a \in c), A))$$

8. Попытка зануления функционального параметра: теорема представляет собой тождество для исключения описателей либо перехода к более простым описателям. В заменяемой части усматривается подвыражение A, имеющее единицу e относительно некоторого своего корневого операнда t. Внутри t встречается подвыражение $f(x)$, где f, x - переменные, причем f - параметр заменяемой части, а x связано внешним квантором общности, расположенным в этой части. Других вхождений f в t нет. Определяется результат p замены в t подвыражения $f(x)$ на f. Решается задача на описание с условием "$p = e$" и неизвестной f. Получается ответ вида "$f = a$". Относительно антецедентов теоремы упрощается выражение "область(f)". Проверяется, что результат D не содержит f. Выбирается новая переменная y, после чего в антецедентах и консеквенте теоремы переменная f заменяется на "$\lambda_y(a, y \in D)$". Результат упрощается. (Прием описатель - 95).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bn}(n -$ натуральное & числнабор$(b, n) \to$ евклпрямокр(констнабор$(0, n), b) =$
   $\mathrm{set}_x(\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to -b(i) < x(i))$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to x(i) < b(i))$
   & числнабор$(x, n)))$

   из теоремы

   $\forall_{abn}(n-$натуральное & числнабор(a, n) & числнабор$(b, n) \to$ евклпрямокр$(a, b) =$
   $\mathrm{set}_x($числнабор(x, n) & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to a(i)-b(i) < x(i))$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to$
   $x(i) < a(i) + b(i))))$

9. В консеквенте теоремы встречается выражение вида $a(t)$, а в антецедентах - утверждение "кортеж((a, n, A))". Выбирается новая переменная i, после чего в антецедентах и консеквенте теоремы переменная f заменяется на "$\lambda_i(a, i \in \{1, \ldots, n\})$", причем добавляется антецедент "$a \in A$". Результат упрощается. (Прием отображение - 37).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcdfA}(A-$set & $b \in A$ & $c-$натуральное & $d-$натуральное & ассоциативно(f) &
   $2 \le d$ & бинарнооперация$(f, A) \to$ алгстепень$(b, f, cd) =$
   алгстепень(алгстепень$(b, f, c), f, d)$)

   из теоремы

   $\forall_{bcdfA}(A -$ set & $b \in A$ & кортеж$(c, d, \mathbb{N})$ & ассоциативно(f) & $2 \le d$ &
   бинарнооперация$(f, A) \to$ алгстепень$(b, f, \sum_{a=1}^{d} c(a)) =$
   $f(\lambda_a($алгстепень$(b, f, c(a)), a \in \{1, \ldots, d\})))$

10. Примерка определения свойства функции на константную и тождественную функции (указание на функцию в антецедентах). Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$ некоторого свойства A_1 функции f, для которой имеется антецедент "функция(f)". Все параметры антецедентов входят в A_1. Имеется антецедент вида "Val$(f) \subseteq B$". Выбирается новая переменная x, и решается задача на исследование, посылки которой суть антецеденты теоремы и утверждение "$x \in B$". После решения в ее списке посылок находится утверждение $P(x)$, указывающее

тип значения переменной x. Затем выбираются новые переменные a, b, и рассматриваются три случая. В первом из них в качестве f берется "$\lambda_x(b, x \in a)$", во втором - "$\lambda_x(b, P(x))$", в третьем - "$\lambda_x(x, P(x))$". В каждом из случаев результат подстановки указанного выражения вместо f в A_2 упрощается при помощи задачи на описание, неизвестные которой - все параметры ее условий, причем не требуется получить явное описание, а в качестве ответа выдается конъюнкция условий, получаемых по исчерпании средств. Ответ добавляется к антецедентам, а консеквентом становится результат подстановки в A_1 соответствующего выражения для f. Результат упрощается. (Прием определение - 42).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abi}(b - \text{число} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \to \lim_{e \to a \setminus i} b = b)$

из теоремы

$\forall_{abfi}(f - \text{функция} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(f, a, i) \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \text{предел}(f, i, a) = b \leftrightarrow \forall_c(c - \text{число} \ \& \ 0 < c \to \exists_d(0 < d \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \forall_x(x - \text{число} \ \& \ x \in \text{Окрестн}(a, d, i) \to |f(x) - b| < c))))$

11. Примерка использующего описатели свойства функции на константную и тождественную функции. Аналогично предыдущему, но не требуется, чтобы все параметры антецедентов входили в A_1, причем требуется, чтобы в A_2 имелся описатель. (Прием определение - 195).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ad}(a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \to \text{дифференцируема}(\lambda_c(d, c - \text{число}), a))$

    из теоремы

    $\forall_{af}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{локопред}(f, a, b) \ \& \ \text{типпредела}(b) \to \text{дифференцируема}(f, a) \leftrightarrow \lim_{x \to a \setminus b}(f(x) - f(a))/(x - a) - \text{число})$

12. Примерка определения свойства функции на константную и тождественную функции (указание на функцию в определяющей части). Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$ некоторого свойства A_1 функции f, причем A_2 имеет вид "функция(f) & B". Выбираются новые переменные y, M, b, и рассматриваются два случая. В первом из них в качестве f берется "$\lambda_y(b, y \in M)$", во втором - "$\lambda_y(y, y \in M)$". В каждом из них результат R подстановки указанного выражения вместо f в A_2 упрощается при помощи задачи на описание, условия которой - R, "$M -$set", посылки - антецеденты теоремы, неизвестные - y, M, b, причем не требуется получить явное описание, а в качестве ответа выдается конъюнкция условий, получаемых по исчерпании средств. Ответ добавляется к антецедентам, а консеквентом становится результат подстановки в A_1 соответствующего выражения для f. (Прием определение - 245).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_c(\text{перестановка}((c), \{c\}))$

    из теоремы

$\forall_{fA}(A - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(A) \to \text{перестановка}(f, A) \leftrightarrow f - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(f) = \{1, \ldots, \text{card}(A)\}\ \&\ \text{Val}(f) = A)$

13. Примерка кванторного определения свойства последовательности на константную и тождественную последовательности. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$ некоторого свойства A_1 последовательности f, для которой имеется антецедент "последовательность(f, B)". Все параметры антецедентов входят в A_1. Выбирается новая переменная x, и решается задача на исследование, посылки которой суть антецеденты теоремы и утверждение "$x \in B$". После решения в ее списке посылок находится утверждение $P(x)$, указывающее тип значения переменной x. Затем выбирается новая переменная b, и рассматриваются два случая. В первом из них в качестве f берется "$\lambda_x(b, \text{натуральное}(x))$", во втором - "$\lambda_x(x, \text{натуральное}(x))$". В каждом из случаев результат подстановки указанного выражения вместо f в A_2 упрощается при помощи задачи на описание, неизвестные которой - все параметры ее условий, причем не требуется получить явное описание, а в качестве ответа выдается конъюнкция условий, получаемых по исчерпании средств. Не содержащий связанных переменных ответ добавляется к антецедентам, а консеквентом становится результат подстановки в A_1 соответствующего выражения для f. Результат упрощается. (Прием определение - 45).

    Пример: вывод теоремы

    $\lim(\lambda_b(b, b - \text{натуральное})) = \infty$

    из теоремы

    $\forall_f(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \to \lim(f) = \infty \leftrightarrow \forall_a(a - \text{число} \to$
    $\exists_n(n - \text{натуральное}\ \&\ \forall_m(m - \text{натуральное}\ \&\ n < m \to a < f(m)))))$

Подстановка вместо переменной константы, упрощающей выражение

1. Подстановка нуля.

    (a) Попытка подстановки нуля: теорема заменяет элементарное утверждение A на конъюнкцию. Внутри A встречается подвыражение "$p(\ldots t \ldots)$", у которого для операнда t имеется значение e, "зануляющее" все подвыражение. К антецедентам добавляется равенство $t = e$ после чего результат упрощается. (Прием и - 67).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{acd}(a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число} \to a = c + di \leftrightarrow a = c\ \&\ d = 0)$

    из теоремы

    $\forall_{abcd}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число} \to a + bi = c + di \leftrightarrow a = c\ \&\ b = d)$

    (b) Попытка рассмотрения нулевого значения параметра: теорема дает параметрическое описание для значений неизвестной x, используя целочисленный параметр n. При помощи задач на описание определяются условия на множество значений неизвестной x, при которых параметр n равен 0.

Эти условия добавляются к антецедентам, кванторы существования по n исключаются, а вместо n подставляется 0. Результат упрощается. (Прием неизвпарам - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(0 < a + \pi/2 \ \& \ 0 < -a + \pi/2 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow b = \operatorname{tg} a \leftrightarrow a = \operatorname{arctg} b)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ \neg(\cos a = 0) \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \operatorname{tg} a = b \leftrightarrow \exists_n(n - \text{целое} \ \& \ a = \operatorname{arctg} b + \pi n))$

(c) Попытка подставить константу вместо бесповторной переменной заменяемой части для устранения зависимости от варьируемой переменной: теорема - тождество, устраняющее либо упрощающее описатель. В заменяемой части находится описатель "$\lambda_{x_1 \ldots x_n}(Q, P)$". Внутри выражения Q усматривается подтерм вида $f(x, t)$, у которого x - переменная, имеющая единственное вхождение в заменяемую часть (следовательно, отличная от $x_1, \ldots, x_n$); t содержит переменную списка $x_1, \ldots, x_n$. Находится дополнительная теорема с консеквентом вида $f(y, a) = a$, где a - логический символ, и она используется для преобразования подтерма $f(x, t)$. Подстановка вместо связанных переменных $x_1, \ldots, x_n$ блокируется. (Прием описатель - 81).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bn}(b - \text{число} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow \sum_{k=0}^{n}(b^{n-k}C_n^k) = (b+1)^n)$

из теоремы

$\forall_{abn}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow \sum_{k=0}^{n}(a^k b^{n-k}C_n^k) = (a+b)^n)$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow 1^a = 1)$

(d) Попытка подстановки нуля в определяющую часть эквивалентности: теорема - определение с элементарным утверждением в определяемой части. В определяющей части выделяется подвыражение $f(x, t)$, у которого переменная x - параметр определяющей части. Общее число таких подвыражений определяющей части не более 3. Указанное подвыражение имеет ноль e по переменной x. К антецедентам добавляется равенство $x = e$, после чего результат упрощается. (Прием определение - 175).

Пример: вывод теоремы

$\forall_n(n - \text{целое} \rightarrow 0|n \leftrightarrow n = 0)$

из теоремы

$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(k - \text{целое} \ \& \ n = mk))$

(e) Попытка подстановки нулей вместо всех элементов участвующего в определении набора: теорема - определение с элементарным утверждением в определяемой части. Общее число подвыражений определяющей части, имеющих вид $f(x, t)$, у которых переменная x - параметр определяющей

части, больше 3. В определяемой части встречается подвыражение "набор$(x_1 \dots x_n)$", причем для каждой переменной x_i в определяющей части есть подвыражение $f(x_i, t_i)$, имеющее ноль e по переменной x_i. Операция f во всех случаях одна и та же. Тогда к антецедентам добавляются равенства $x_1 = e, \dots, x_n = e$. Результат упрощается. (Прием определение - 201).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{def}(d-\text{число} \;\&\; e-\text{число} \;\&\; f-\text{число} \to \text{пропорцнаборы}((d,e,f),(0,0,0)))$

из теоремы

$\forall_{abcdef}(a-\text{число} \;\&\; b-\text{число} \;\&\; c-\text{число} \;\&\; d-\text{число} \;\&\; e-\text{число} \;\&\; f-\text{число} \to$
$\text{пропорцнаборы}((a,b,c),(d,e,f)) \leftrightarrow \exists_{uv}(u - \text{число} \;\&\; v - \text{число} \;\&$
$\neg(u^2+v^2=0) \;\&\; au+dv=0 \;\&\; bu+ev=0 \;\&\; cu+fv=0))$

(f) Попытка подставить ноль вместо целочисленного параметра: теорема используется для создания приема проверочнго оператора. Имеется антецедент "целое(x)". Оценка сложности антецедентов меньше оценки сложности консеквента. К антецедентам добавляется равенство $x = 0$. Результат упрощается. Проверяется, что новая теорема не утратила самое сложное понятие исходной. (Прием легковидеть - 25).

Пример: вывод теоремы

$\forall_b(b - \text{число} \;\&\; 0 \le b \;\&\; 0 \le \pi - b \to 0 \le \sin b)$

из теоремы

$\forall_{bn}(b - \text{число} \;\&\; n - \text{целое} \;\&\; 0 \le 2\pi n - b + \pi \;\&\; 0 \le b - 2\pi n \to 0 \le \sin b)$

(g) Попытка рассмотрения нулевого значения параметра, от котоого определяющее выражение зависит монотонно: теорема дает параметрическое описание значений неизвестной x. Заменяющая часть имеет вид "$\exists_n(x = t \;\&\; n-\text{целое})$". Переменная n имеет единственное вхождение в выражение t, причем это выражение зависит от n монотонно. В t поочередно подставляются вместо n значения -1 и 1. После упрощения возникают выражения a_1, a_2. Затем в t вместо n подставляется 0. После упрощения получается выражение b. К антецедентам добавляются неравенства $a_1 < x, x < a_2$ в случае монотонного возрастания и $a_2 < x, x < a_1$ в случае монотонного убывания. Консеквентом становится эквивалентность исходной заменяемой части равенству $x = b$. (Прием неизвпарам - 10).

Пример: вывод теоремы

$\forall_x(x < \pi \;\&\; -\pi < x \;\&\; x - \text{число} \to \sin x = 0 \leftrightarrow x = 0)$

из теоремы

$\forall_x(x - \text{число} \to \sin x = 0 \leftrightarrow \exists_n(x = \pi n \;\&\; n - \text{целое}))$

(h) Попытка зануления фрагмента параметрического описания. Теорема - тождество, преобразующее параметрическое описание класса в его явное задание. Выбирается свободная переменная параметрического описания x и выбирается вхождение ее в это описание, имеющее вид $f(x,t)$. По символу

f находится дополнительная теорема - тождество вида $f(a,y)=a$, где y - переменная, a - константа. После необходимой унификации это тождество применяется к подвыражению $f(x,t)$. Связанные переменные параметрического описания унификацией не затрагиваются. Результат упрощается. (Прием парамописание - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcef}(\neg(e^2+f^2=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\rightarrow \text{set}_{xyz}(x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((x-a, y-b, z-c),(0,e,f)))=\text{set}_{xyz}(\exists_g(y=b+eg\ \&\ z=c+fg\ \&\ g-\text{число})\ \&\ x=a))$

из теоремы

$\forall_{abcdef}(\neg(d^2+e^2+f^2=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\rightarrow \text{set}_{xyz}(x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((d,e,f),(x-a,y-b,z-c)))=\text{set}_{xyz}(\exists_g(x=a+dg\ \&\ y=b+eg\ \&\ z=c+fg\ \&\ g-\text{число})))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a-\text{число}\rightarrow a\cdot 0=0)$

2. Подстановка единицы.

   (a) Вывод частного случая при обращении в единицу члена уравнения: среди антецедентов теоремы встречается равенство вида "крд$(A,K)=\text{set}_{x_1\ldots x_n}(t_1=t_2\ \&\ B)$". В равенстве $t_1=t_2$ выбирается переменная y, являющаяся параметром указанного антецедента и параметром консеквента. Других вхождений в этот антецедент переменная y не имеет. Она расположена внутри такого операнда Q некоторой операции, по которому эта операция имеет единицу e. Какой-либо другой операнд данной операции содержит переменную списка $x_1,\ldots,x_n$. Решается задача на описание, условия которой - все содержащие y и отличные от R антецеденты, а также равенство $Q=e$. Посылки - все не содержащие y антецеденты. Ответ преобразуется к виду д.н.ф., и выбирается такой дизъюнктивный член, который имеет вид "$y=c\ \&\ D$"; c - константное выражение. Затем к антецедентам исходной теоремы добавляется равенство $y=c$, а результат упрощается. (Прием Крд - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acKP}(\text{коорд}(P,K)=\text{set}_{xy}(c+ax=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ a-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ \text{Прямая}(P)\ \&\ \text{систкоорд}(K)\rightarrow\neg(a=0))$

   из теоремы

   $\forall_{abcKP}(\text{коорд}(P,K)=\text{set}_{xy}(c+ax+by=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ \text{Прямая}(P)\ \&\ \text{систкоорд}(K)\rightarrow\neg(a^2+b^2=0))$

   (b) Подстановка единицы согласно протоколу "едн". Теорема - тождество, упрощающее некоторое выражение относительно неизвестных. Протокол "едн" указывает, что имеет место специальная стандартизация таких теорем, согласно которой вместо некоторого параметра y терма шаблона A

должна подставляться единица e. Этот шаблон примеряется к текущей теореме, после чего к антецедентам добавляется равенство $y = e$, а результат упрощается. (Прием неизвоценка - 8).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cfghi}(\neg(f-1=0)\ \&\ 0<f\ \&\ 0<g\ \&\ c-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ g-\text{число}\ \&\ h-\text{число}\ \&\ i-\text{число}\to f^h g^i = f^c \leftrightarrow c = h + i\log_f g)$

из теоремы

$\forall_{cfghij}(\neg(j=0)\ \&\ \neg(f-1=0)\ \&\ 0<f\ \&\ 0<g\ \&\ c-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ g-\text{число}\ \&\ h-\text{число}\ \&\ i-\text{число}\ \&\ j-\text{число}\to f^h g^{i/j} = f^c \leftrightarrow c = h+i\log_f g/j)$

и протокола

"едн$(a/b + c = d, a, b)$".

Протокол "едн(A, x, y)" указывает на стандартизацию утверждений с неизвестными, шаблон которых задается термом A, делающую избыточной переменную y, так что вместо нее в теоремах приемов следует подставлять единицу. x - список переменных, хотя бы одна из которых должна идентифицироваться с содержащим неизвестные выражением.

(c) Заменяемая часть тождества общей стандартизации - коммутативная и ассоциативная операция f, имеющая не менее трех членов. Ее операндом служит переменная x, более в заменяемой части не встречающаяся. Находится единица e операции f. Проверяется, что при подстановке e вместо x в антецеденты, содержащие x, получаются утверждения, являющиеся следствиями прочих антецедентов. Содержащие x антецеденты отбрасываются. Из заменяемой части исключается операнд x. В заменяющую часть подставляется e вместо x, и эта часть упрощается. (Прием нормализация - 21).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a-\text{число}\to a-a=0)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\to a+b-a=b)$

(d) Заменяющая часть тождества общей стандартизации имеет вид $f(x, y)$, где x, y - различные переменные. Общее число переменных консеквента равно 3. Операция f имеет единицу e по переменной x. Эта единица подставляется в антецеденты и консеквент, после чего результат упрощается. (Прием нормализация - 56).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{df}(\neg(f=0)\ \&\ d-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\to df/f=d)$

из теоремы

$\forall_{cdf}(\neg(c=0)\ \&\ \neg(f=0)\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\to df/(cf) = d/c)$

(e) В заменяемой части тождества общей стандартизации встречается подвыражение $f(x,t)$, где f - некоммутативная операция, имеющая единицу e по переменной x. Других вхождений в заменяемую часть эта переменная не имеет. В антецедентах и консеквенте переменная x заменяется на e, и результат упрощается. Проверяется, что снова получилось тождество общей стандартизации. (Прием нормализация - 65).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ac}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{rational} \to aa^c = a^{c+1})$

из теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ b - \text{rational}\ \&\ c - \text{rational}\ \&$
$\neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even})\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \to a^b a^c = a^{b+c})$

(f) Подстановка единицы для получения приема справочника "Измзнака": консеквент теоремы имеетв вид $h(t,y) = f(g(x,y))$, причем операция g имеет единицу e по переменной x, а h - ассоциативная и коммутативная операция; выражение t имеет ровно одну переменную, и эта переменная - x. В антецедентах и консеквенте предпринимается подстановка e вместо x. Результат упрощается. Новой теореме передается единственная характеристика - "Измзнака". (Прием нормализация - 73).

Пример: вывод теоремы

$\forall_b(b - \text{число} \to -b = b \cdot (-1))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to -ab = (-a)b)$

(g) Теорема - тождество для изменения заголовка выражения. В заменяемой части усматривается подвыражение $f(x,y)$, причем операция f имеет единицу e по переменной x. Других вхождений в заменяемую часть переменные x, y не имеют. В антецедентах и консеквенте переменная x заменяется на e. Результат упрощается. (Прием нормзаголовок - 13).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ace}(\neg(c = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \to (e + ac)/c = a + c/e)$

из теоремы

$\forall_{abce}(\neg(b = 0)\ \&\ \neg(c = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \to$
$(ac + be)/(bc) = a/b + e/c)$

(h) Подстановка единицы вместо бесповторной переменной консеквента: в консеквенте встречается подвыражение $f(\ldots x \ldots)$, имеющее единицу e по переменной x. Эта переменная не имеет других вхождений в консеквент. Предпринимается подстановка e вместо x в антецеденты и в консеквент. Список антецедентов упрощается; консеквент обрабатывается оператором "упрощединица". (Прием свойства - 7).

Пример: вывод теоремы

$\forall_m(m - \text{целое} \to m - \text{rational})$

из теоремы

$\forall_{mn}(n - \text{натуральное } \& \ m - \text{целое} \to (m/n) - \text{rational})$

(i) Обобщение тождества "склейкаоперандов": подстановка единицы вместо переменной, встречающейся только в бесповторной части заменяемого терма. Консеквент теоремы имеет вид $f(t_1, t_2) = t_3$, где выражение t_1 бесповторное, а t_2 имеет повторные вхождения переменных. Переменная x встречается в t_1 и не входит в t_2. Она является операндом операции, имеющей по данной переменной единицу e. К антецедентам добавляется равенство $x = e$. Результат упрощается. (Прием склейкаоперандов - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdf}(\neg(\cos d = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \to$
$(c \cos d + f \sin d)/\cos d = c + f \operatorname{tg} d)$

из теоремы

$\forall_{bcdf}(\neg(b = 0) \ \& \ \neg(\cos d = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \&$
$f - \text{число} \to (c \cos d + f \sin d)/(b \cos d) = c/b + f \operatorname{tg} d/b)$

(j) Подстановка единицы в заменяющий терм для уменьшения его оценки по сравнению с заменяемым. Теорема - тождество, упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций большей либо равной сложности. В заменяющей части усматривается подвыражение $f(x, t)$, где операция f имеет единицу e по переменной x. Других вхождений в заменяющую часть эта переменная не имеет. В антецедентах и консеквенте предпринимается замена переменной x на e. Результат упрощается. Проверяется, что заменяющая часть новой теоремы имеет меньшую оценку сложности, чем заменяемая. (Прием сокращ - 30).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to a/1 = a)$

из теоремы

$\forall_{abe}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \to e \cdot (a/b) = ae/b)$

(k) Обобщающая подстановка единицы: теорема представляет собой частный случай определения функциональной характеристики. Характеризуемая функция задается описателем A с заголовком "отображение". Внутри последнего операнда этого описателя усматривается подвыражение $f(\ldots x \ldots y \ldots)$, имеющее единицу e по переменной x. При этом x, y - параметры описателя, не имеющие в нем других вхождений. Определяющая часть консеквента имеет вхождение подвыражения $g(\ldots x \ldots)$, имеющего единицу e по переменной x. К антецедентам добавляется равенство $x = e$. Результат упрощается. (Прием функперех - 20).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bh}(\neg(b = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \to$
$\text{первообразная}(\lambda_x(1/(h + bx), x - \text{число}), \lambda_d(\ln|h + bd|/b, d - \text{число})))$

из теоремы

$\forall_{bgh}(\neg(b=0)\ \&\ \neg(g=0)\ \&\ b-$ число $\&\ g-$ число $\&\ h-$ число $\rightarrow$
первообразная$(\lambda_x(1/(gh+bx), x-$ число$), \lambda_d(\ln|(gh+bd)/g|/b, d-$ число$)))$

(l) Подстановка единицы вместо дублирующего параметра: тождество, выражающее сложный числовой атом через более простые. В заменяемой части усматривается подыражение "$f(\ldots x\ldots y\ldots)$", где f - ассоциативная и коммутативная операция, имеющая единицу e, а переменные x, y не имеют в этой части других вхождений. Единственным антецедентом с x служит утверждение $P(x)$, указывающее тип значений, а единственным антецедентом с y - аналогичное утверждение $Q(y)$. Либо $P=Q$, либо Q - надтип типа P. К антецедентам добавляется равенство $x=e$. Результат упрощается. (Прием числатом - 39).

Пример: вывод теоремы

$\forall_c(c-$ комплексное $\rightarrow \mathrm{Im}(ci)=\mathrm{Re}(c))$

из теоремы

$\forall_{ac}(c-$ комплексное $\&\ a-$ число $\rightarrow \mathrm{Im}(aci)=a\mathrm{Re}(c))$

(m) Подстановка единицы для получения теоремы с характеристикой "варприем": теорема - равенство, выполняющее сокращенную переформулировку выражения. Как заменяемая, так и заменяющая части имеют ровно два параметра x и y. Заменяющая часть имеет единственный подтерм максимальной сложности, причем его параметр единственный - переменная x. Каждый максимально сложный подтерм заменяемой части имеет вид $f(x)$, где f - одноместные операции. В заменяемой части встречается подтерм $g(y,t)$, имеющий единицу e по переменной y. К антецедентам добавляется равенство $y=e$, и результат упрощается. Проверяется, что новая теорема получает характеристику "варприем" (другие характеристики не создаются). (Прием свертка - 31).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_f(\neg(\sin f=0)\ \&\ f-$ число $\rightarrow 1+(\mathrm{ctg}\, f)^2=1/(\sin f)^2)$

из теоремы

$\forall_{df}(\neg(\sin f=0)\ \&\ d-$ число $\&\ f-$ число $\rightarrow d+d\,\mathrm{ctg}\, f)^2=d/(\sin f)^2)$

Напомним, что характеристику "варприем(N)" имеет тождество, в одной части которого существует единственное вхождение подтерма A максимальной сложности, а в другой части - одно или несколько вхождений подтермов максимальной сложности $B_1,\ldots,B_k$. При этом A имеет вид $f(t)$, каждое B_j - вид $g_j(x)$, где t - выражение с единственной бесповторной переменной x. Либо t отлично от x, либо $k>1$, либо символы f, g_1 различны. N - направление замены.

(n) Переход от соотношения пропорциональности к равенству числовых атомов. Среди антецедентов теоремы имеется единственное равенство, причем оно имеет вид $xA=yB$, где x, y - переменные; A, B - невырожденные числовые атомы. В антецеденты и консеквент вместо x, y подставляется 1. Проверяется непротиворечивость антецедентов. Результат упрощается. (Прием смпропорц - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDE}(\neg(A = D)\ \&\ \neg(A = E)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(BC))\ \&\ l(AD) = l(BD)\ \&\ C \in \text{прямая}(AE)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(DE) \rightarrow l(AC) = 2l(CE))$

из теоремы

$\forall_{abABCDE}(\neg(A = D)\ \&\ \neg(A = E)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(BC))\ \&\ al(BD) = bl(AD)\ \&\ C \in \text{прямая}(AE)\ \&\ D \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(DE) \rightarrow bl(AC) = (a + b)l(CE))$

3. Прочие случаи.

   (a) Попытка подстановки нуля либо единицы в определяемую часть равенства: в определяемой части встречается подвыражение $f(x, t)$, имеющее ноль либо единицу e по переменной x. К антецедентам добавляется равенство $x = e$, и результат упрощается. (Прием определение - 138).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \text{Re}(a) = a)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow \text{Re}(a + bi) = a)$

   (b) Попытка упростить подвыражение антецедента путем подстановки константы: в некотором антецеденте всречается подвыражение $f(t_1, t_2)$. Справочник поиска теорем определяет дополнительное тождество с консеквентом вида $f(y, a) = t$, где выражение t - либо a, либо y, либо $g(y)$. Это тождество применяется для преобразования подтерма $f(t_1, t_2)$. Результат упрощается. (Прием определение - 81).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(0 < a\ \&\ a - \text{число} \rightarrow \arg(a) = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ 0 < b + \pi\ \&\ 0 \leq \pi - b\ \&\ 0 < a \rightarrow \arg(a(\cos b + \sin bi)) = b)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a + 0 = a)$

   (c) Упрощение примера: теорема без существенных антецедентов имеет своим консеквентом элементарное утверждение, в котором выделяется подтерм $f(t_1, t_2)$. Справочник поиска теорем определяет дополнительное тождество с консеквентом вида $f(y, a) = t$, где выражение t - либо a, либо y, либо $g(y)$. Это тождество применяется для преобразования подтерма $f(t_1, t_2)$. Результат упрощается. (Прием пример - 6).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a - \text{целое} \to a \mid a)$

из теоремы

$\forall_{km}(m - \text{целое} \;\&\; k - \text{целое} \to m \mid km)$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to a \cdot 1 = a)$

(d) Подстановка нуля либо единицы для исключения внешней операции: теорема имеет своим консеквентом утверждение $P(t)$, определяющее тип P значения выражения t. Внутри t усматривается подтерм $f(x, p)$, имеющий единицу либо ноль e для переменной x. В антецеденты и консеквент вместо переменной x подставляется e. Антецеденты упрощаются, а консеквент обрабатывается оператором "упрощединица". (Прием родобъекта - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_x(x - \text{число} \to x - \text{комплексное})$

из теоремы

$\forall_{xy}(x - \text{число} \;\&\; y - \text{число} \to x + iy - \text{комплексное})$

Подстановка вместо переменной специальной константы

1. Фиксация стандартизируемого операнда самой сложной операции заменяющей части константой: теорема имеет характеристику "Начало(t)", определяющую шаблон t для указанной самой сложной операции, с усмотрения которого будет начинаться срсбатывание основанного на теореме приема. Этот шаблон имеет единственную переменную x, встречающуюся в теореме, причем все антецеденты, содержащие x, других переменных не содержат. В заменяемую часть переменная x не входит. Решается задача на описание, подбирающая константный пример A удовлетворяющего этим антецедентам значения x. Содержащие x антецеденты отбрасываются, а в консеквент вместо x подставляется A. Результат упрощается. Пока единственное применение данного приема - остаточный выбор основания логарифма 2 при логарифмировании уравнения. (Прием альтзначения - 3).

   Пример: вывод эквивалентности

   $\forall_{aijk}(0 < i \;\&\; a - \text{число} \;\&\; i - \text{число} \;\&\; j - \text{число} \;\&\; k - \text{число} \to a + ki^j = 0 \leftrightarrow a = 0 \;\&\; k = 0 \vee j \log_2 i - \log_2 a = -\log_2(-k) \;\&\; k < 0 \;\&\; 0 < a \vee j \log_2 i - \log_2(-a) = -\log_2 k \;\&\; a < 0 \;\&\; 0 < k)$

   из эквивалентности

   $\forall_{abijk}(\neg(b - 1 = 0) \;\&\; 0 < b \;\&\; 0 < i \;\&\; a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; i - \text{число} \;\&\; j - \text{число} \;\&\; k - \text{число} \to a + ki^j = 0 \leftrightarrow a = 0 \;\&\; k = 0 \;\vee\; j \log_b i - \log_b a = -\log_b(-k) \;\&\; k < 0 \;\&\; 0 < a \;\vee\; j \log_b i - \log_b(-a) = -\log_b k \;\&\; a < 0 \;\&\; 0 < k)$

   Напомним, что стандартизируемый операнд операции - такой ее операнд, что в задачах целесообразно преобразование всех вхождений операции к одному и тому же значению этого операнда. Например, основание логарифмов.

2. Попытка использовать справочник "ограничитель" для ограничения ответа: теорема дает параметрическое описание A значений неизвестной x, удовлетворяющих условию B. Внутри B усматривается подвыражение $f(x)$. Справочник "ограничитель" определяет типичные контексты использования операции f (например, промежуток от 0 до пи в случае тангенса). Рассматривается один из таких контекстов - C. Список антецедентов теоремы разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. При помощи задачи на описание утверждения S_1, A, C разрешаются относительно неизвестной x. Посылками служат утверждения S_2. Получается ответ D. Затем к антецедентам теоремы добавляются конъюнктивные члены утверждения C, а консеквентом становится $B \leftrightarrow D$. Антецеденты упрощаются. (Прием неизвпарам - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ \neg(\cos a = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \le a \ \& \ 0 \le -a + \pi \to \operatorname{tg} a = b \leftrightarrow a = \pi + \operatorname{arctg} b \ \& \ b \le 0 \ \vee \ a = \operatorname{arctg} b \ \& \ 0 \le b)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ \neg(\cos a = 0) \ \& \ b - \text{число} \to \operatorname{tg} a = b \leftrightarrow \exists_n(n - \text{целое} \ \& \ a = \operatorname{arctg} b + \pi n))$

3. Попытка перейти от операции над малым семейством к обычной операции: теорема представляет собой тождество, преобразующее выражение A с подтермом вида $F(\lambda_x(t(x), A(x))$ в выражение B без связанных переменных. F - операция над конечным семейством, полученная из двуместной ассоциативно-коммутативной операции f. Среди антецедентов встречается утверждение "натуральное(n)", причем $A(x)$ содержит, помимо x, единственную переменную n. Для n выбирается значение N от 1 до 4. Выражение "$\text{set}_x(A(x))$", после подстановки в него N вместо n, преобразуется к виду $\{a_1, \ldots, a_k\}$. В антецеденты и в B вместо n подставляется N, а подтерм $F(\ldots)$ заменяется на $f(t(a_1)...t(a_k))$. Результат упрощается. (Прием описатель - 71).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefghi}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \to \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg)$

   из теоремы

   $\forall_{An}(n - \text{натуральное} \ \& \ \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \to \det(A) = \sum_{p, \text{перестановка}(p,\{1,\ldots,n\})}((-1)^{\text{четность}(p)} \prod_{i=1}^{n} A(i, p(i))))$

Рассмотрение множеств с малым числом элементов

1. Примерка определения на пустое и одноэлементное множества: среди антецедентов встречается утверждение "множество(x)", причем в теореме имеется

подутверждение вида "$t \in x$". К антецедентам добавляется равенство $x = \emptyset$ либо $x = \{y\}$, где y - новая переменная. Результат упрощается. (Прием развертка - 116).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{anx}(n - \text{натуральное } \& \text{ числнабор}(a, n) \to \text{точкаприкосн}(x, \{a\}) \leftrightarrow a = x)$

из теоремы

$\forall_{nxA}(n - \text{натуральное } \& \ A - \text{set } \& \ A \subseteq (\mathbb{R})^n \to \text{точкаприкосн}(x, A) \leftrightarrow$
$\text{числнабор}(x, n) \ \& \ \forall_b(b - \text{число } \& \ 0 < b \to \exists_y(y \in A \ \& \ y \in \text{евклокр}(x, b))))$

Рассмотрение наборов малой длины

1. Рассмотрение кортежей малой длины: теорема - эквивалентность для кванторной расшифровки. Имеется антецедент вида "кортеж(A, n, B)", где n - переменная. Других антецедентов с заголовком "кортеж" нет. К антецедентам добавляется утверждение "$n = 1$" либо "$n = 2$". Результат упрощается. (Прием развертка - 118).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abG}(a \in \text{вершины}(G) \ \& \ b \in \text{вершины}(G) \ \& \ \text{оргграф}(G) \to$
   $\text{вершмаршрут}((a, b), G) \leftrightarrow \exists_r(\text{ведет}(r, a, b, G)))$

   из теоремы

   $\forall_{nGM}(n - \text{натуральное } \& \ \text{кортеж}(M, n, \text{вершины}(G)) \ \& \ \text{оргграф}(G) \to$
   $\text{вершмаршрут}(M, G) \leftrightarrow \forall_i(i \in \{1, \ldots, n-1\} \to \exists_r(\text{ведет}(r, M(i), M(i+1), G))))$

2. Рассмотрение слов длины 0,1 и 2: теорема имеет элементарные антецеденты и бескванторный консеквент с описателем "отображение". Имеется единственный антецедент с заголовком "слово", именно - "слово(a)". В консеквенте переменная a встречается однократно, в контексте "$a(\ldots)$". К антецеденту добавляется утверждение "$a =$ пустоеслово", либо "$a = (x)$", либо "$a = (x, y)$", где x, y - новые переменные. Результат упрощается. (Прием отображение - 36).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{act}(t - \text{число } \& \ \text{Силы}(a, \{c\}, t) \ \& \ \text{мточка}(a) \to \text{Сила}(a, t) = \text{сила}(a, c, t))$

   из теоремы

   $\forall_{abnt}(\text{мточка}(a) \ \& \ t - \text{число } \& \ b - \text{слово } \& \ l(b) = n \ \& \ \text{Силы}(a, \{;b\}, t) \to$
   $\text{Сила}(a, t) = \sum_{i=1}^{n} \text{сила}(a, b(i), t))$

3. Рассмотрение кортежей малой длины: корневое отношение консеквента теоремы - самое сложное из всех ее символов (т.е. теорема позволяет "реализовать" такое отношение). Среди антецедентов встречается утверждение "кортеж(a, n, b)", причем все такие антецеденты имеют одну и ту же переменную n для длины кортежа. К антецедентам добавляется утверждение "$n = 1$" либо "$n = 2$". Результат упрощается. (Прием реализация - 27).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aP}(a - \text{число } \& \text{ верпространство}(P) \rightarrow$
$\text{дискрвеличина}(\text{конст}(\text{элемсобытия}(P), a), P))$

из теоремы

$\forall_{abcP}(\text{различны}(a) \& c\text{—натуральное} \& \text{кортеж}(a, c, \text{события}(P)) \& \text{кортеж}(b, c, \mathbb{R})$
$\& \text{ разбиение}(\text{элемсобытия}(P), \text{Val}(a)) \& \text{ верпространство}(P) \rightarrow$
$\text{дискрвеличина}(\text{таблица}(\{; \lambda_y(\text{конст}(a(y), b(y)), y \in \{1, \ldots, c\})\}), P))$

1.5 Варьирование либо исключение условного выражения

Альтернативами условного выражения в заменяющей части равенства служат константы. Выводится эквивалентность существования значения параметра, при котором выполнено некоторое условие на заменяемую часть, дизъюнкции условий на альтернативные значения заменяющей части

1. Вывод эквивалентности для развертки квантора существования в дизъюнкцию элементарных утверждений из тождества, заменяющая часть которого - условное выражение с константными альтернативами, а заменяемая - элементарное утверждение B. Заменяющая часть имеет вид "$(t_1$ при$A,$ иначе $t_2)$", где выражения t_1, t_2 константные. Проверяется существования удовлетворяющих антецедентам значений переменных, для которых A истинно, а затем - аналогично для "$\neg(A)$". Рассматриваются конъюнкция антецедентов K и список X переменных связывающей приставки теоремы, выбирается новая переменная P, и выводится эквивалентность "$\exists_X(K \ \& \ P(B)) \leftrightarrow P(t_1) \ \vee \ P(t_2)$". (Прием варианты - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(\exists_k(k - \text{целое } \& \ a((-1)^k)) \leftrightarrow a(1) \ \vee \ a(-1))$

   из теоремы

   $\forall_k(k - \text{целое} \rightarrow (-1)^k = (1 \text{ при } k - \text{even}, \text{ иначе } -1)).$

2. Вывод эквивалентности для развертки квантора существования в дизъюнкцию элементарных утверждений из тождества, заменяющая часть которого - условное выражение с константными альтернативами, а заменяемая - элементарное утверждение B. Заменяющая часть имеет вид "$(t_1$ при$A,$ иначе $t_2)$", где выражения t_1, t_2 константные. Связывающая приставка теоремы состоит из единственной переменной x. Рассматривается конъюнкция антецедентов K, выбирается новая переменная P, и выводится эквивалентность "$\exists_x(K \ \& \ P(x, B)) \leftrightarrow$ $\exists_x(K \ \& \ A \ \& \ P(x, t_1)) \ \vee \ \exists_x(K \ \& \ \neg(A) \ \& \ P(x, t_2))$". (Прием варианты - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(\exists_k(a(k, (-1)^k) \ \& \ k - \text{целое}) \leftrightarrow \exists_k(a(2k + 1, -1) \ \& \ k - \text{целое}) \ \vee \ \exists_k(a(2k, 1) \ \&$
   $k - \text{целое}))$

из теоремы

$\forall_k(k - \text{целое} \to (-1)^k = (1 \text{ при } k - \text{even},\ \text{иначе } -1))$.

Исключение условного выражения путем добавления антецедента

1. Расшифровка условия равенства терма, обозначающего условное выражение, первой альтернативе. Консеквент теоремы имеет вид "$B = (t_1$ при A, иначе $t_2)$". Выражение B элементарное, заголовки выражений t_1, t_2 отличны от символа "вариант". К антецедентам добавляется утверждение "$\neg(t_1 = t_2)$", а консеквентом становится эквивалентность "$(B = t_1) \leftrightarrow A$". Результат упрощается. (Прием варианты - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABax}(\neg(a = 0)\ \&\ A - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&\ B \subseteq A\ \&\ x \in A \to$
   $\text{индикатор}(A, B, a)(x) = a \leftrightarrow x \in B)$

   из теоремы

   $\forall_{ABax}(A - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&\ B \subseteq A\ \&\ x \in A \to \text{индикатор}(A, B, a)(x) =$
   $(a \text{ при } x \in B,\ \text{иначе } 0))$.

2. Расшифровка условия равенства терма, обозначающего условное выражение, второй альтернативе. Консеквент теоремы имеет вид "$B = (t_1$ приA, иначе $t_2)$". Выражение B элементарное, заголовки выражений t_1, t_2 отличны от символа "вариант". К антецедентам добавляется утверждение "$\neg(t_1 = t_2)$", а консеквентом становится эквивалентность "$(B = t_2) \leftrightarrow \neg(A)$". Результат упрощается. (Прием варианты - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABax}(\neg(a = 0)\ \&\ A - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&\ B \subseteq A\ \&\ x \in A \to \text{индикатор}(A, B, a)(x) =$
   $0 \leftrightarrow \neg(x \in B))$

   из теоремы

   $\forall_{ABax}(A - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&\ B \subseteq A\ \&\ x \in A \to \text{индикатор}(A, B, a)(x) =$
   $(a \text{ при } x \in B,\ \text{иначе } 0))$.

3. Разбор случаев для тождества с условным выражением в заменяющем терме. В заменяющей части усматривается подвыражение "$(t_1$ приA, иначе $t_2)$", не расположенное внутри другого условного выражения. Рассматриваются два случая. В первом из них к антецедентам добавляется A, а условное подвыражение заменяется на t_1. Во втором случае к антецедентам добавляется $\neg(A)$, а условное подвыражение заменяется на t_2. Результат упрощается пакетными операторами. (Прием варианты - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABb}(A - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&\ B \subseteq A\ \&\ \neg(b = 0) \to \text{слой}(\text{индикатор}(A, B, b), b) = B)$

   из теоремы

$\forall_{ABb}(A - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&\ B \subseteq A \to \text{слой}(\text{индикатор}(A, B, b), b) = (A\ \text{при}\ b = 0,\ \text{иначе}\ B))$

4. Анализ равенства двух операций, определенных одним и тем же условным выражением: консеквент теоремы имеет вид "$f(x) = (t_1\ \text{при}A,\ \text{иначе}\ t_2)$". Он содержит единственную переменную x и является определением одноместной операции f. Пусть S - список антецедентов теоремы. Рассматривается результат переобозначения всех переменных теоремы на новые переменные. Он имеет консеквент "$f(y) = (p_1\ \text{при}B,\ \text{иначе}\ p_2)$" и список антецедентов S_1. Поочередно рассматриваются четыре случая. В каждом из них определяются утверждения A_1, B_1 и выражения t_3, p_3. Если $A_1 = A$, то $t_3 = t_1$; если $A_1 = \neg(A)$ то $t_3 = t_2$. Аналогично, если $B_1 = B$, то $p_3 = p_1$; если $B_1 = \neg(B)$, то $p_3 = p_2$. В каждом случае решается задача на описание с условиями $S, t_3 = p_3$ и посылками S_1. Неизвестной служит x. Если некоторый ответ C встречается более одного раза, то составляется дизъюнкция D соответствующих конъюнкций $A_1\ \&\ B_1$. Она упрощается относительно объединения списков S, S_1 и превращается в элементарное утверждение E. Создается и упрощается итоговая импликация с антецедентами $S, S_1, E, f(x) = f(y)$ и консеквентом C. (Прием варианты - 13).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(|a| = |b|\ \&\ ab < 0\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to a = -b)$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to |a| = (a\ \text{при}\ 0 \le a,\ \text{иначе}\ -a))$

5. Попытка исключения условного выражения под описателем "отображение" путем фиксации истинностного значения переключателя: в консеквенте теоремы встречается описатель "$\lambda_{x_1 \ldots x_k}(t, A)$", причем внутри t выделяется вхождение v условного выражения "$(p_1\ \text{при}B,\ \text{иначе}\ p_2)$", где B содержит хотя бы одну из переменных $x_1, \ldots, x_k$. Рассматриваются два случая. В первом из них создается импликация C вида "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(A \to B)$", во втором C имеет вид "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(A \to \neg(B))$". Соответственно, определяется выражение p_3, равное в первом случае p_1, во втором - p_2. Проверяется, что все параметры импликации C суть параметры консеквента. Эта импликация упрощается и становится элементарным утверждением D. К антецедентам теоремы добавляется утверждение D, а в консеквенте вхождение v заменяется на p_3. Антецеденты упрощаются. (Прием отображение - 31).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cA}(\text{Val}(A) \subseteq \text{события}(c)\ \&\ A - \text{функция}\ \&\ \text{верпространство}(c)\ \&$
   $\text{независобытия}(A, c) \to \text{независобытия}(\lambda_y(\text{элемсобытия}(c) \setminus A(y), y \in \text{Dom}(A)), c))$

   из теоремы

   $\forall_{cdA}(d - \text{set}\ \&\ d \subseteq \text{Dom}(A)\ \&\ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(c)\ \&\ A - \text{функция}\ \&$
   $\text{верпространство}(c)\ \&\ \text{независобытия}(A, c) \to \text{независобытия}(\lambda_y((\text{элемсобытия}(c) \setminus$
   $A(y)\ \text{при}\ y \in d,\ \text{иначе}\ A(y)), y \in \text{Dom}(A)), c))$

6. Исключение условного выражения под описателем "отображение" путем перехода к конкатенации наборов. В консеквенте теоремы встречается описатель "$\lambda_x(t, x \in \mathrm{Dom}(f))$", причем внутри t выделяется условное выражение "$(t_1$ при $x \in y,$ иначе $t_2)$". В антецедентах переменная y встречается лишь как "$y - \mathrm{set}$" либо "$y \subseteq \mathrm{Dom}(f)$". Внутри t переменная f встречается только как $f(x)$. Чтобы избавиться от условного выражения, функция f представляется как конкатенация двух наборов a, b. Для первого набора значения определяются выражением t_1, для второго - t_2. Соответственно, описатель "отображение" заменяется на конкатенацию двух наборов, заданных описателями. (Прием спуск - 49).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\mathrm{Val}(a) \subseteq \text{события}(c)\ \&\ \mathrm{Val}(b) \subseteq \text{события}(c)\ \&\ a - \text{слово}\ \&\ b - \text{слово}\ \&$
   $\text{верпространство}(c)\ \&\ \text{незавсобытия}(a; b, c) \rightarrow$
   $\text{незавсобытия}(\lambda_y(\text{элемсобытия}(c) \setminus a(y), y \in \mathrm{Dom}(a)); b, c))$

   из теоремы

   $\forall_{cdA}(d - \mathrm{set}\ \&\ d \subseteq \mathrm{Dom}(A)\ \&\ \mathrm{Val}(A) \subseteq \text{события}(c)\ \&\ A - \text{функция}\ \&$
   $\text{верпространство}(c)\ \&\ \text{незавсобытия}(A, c) \rightarrow$
   $\text{незавсобытия}(\lambda_y((\text{элемсобытия}(c) \setminus A(y) \text{ при } y \in d,\ \text{иначе } A(y)), y \in \mathrm{Dom}(A)), c))$

Отождествление альтернативных выражений

1. Усмотрение случая равных альтернативных выражений. Консеквент имеет вид "$(t_1$ при$A,$ иначе $t_2) = p$", причем A имеет единственную переменную x. При помощи задачи на описание находится, что равенство $t_1 = t_2$ эквивалентно равенству $x = a$. Определяется общее значение b альтернатив при $x = a$. Проверяется, что, обратно, из "$(t_1$ при$A,$ иначе $t_2) = b$" вытекает $x = a$. Затем консеквент преобразуется в эквивалентность "$(p = b \leftrightarrow x = a)$". Результат упрощается. (Прием свертка - 28).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = 0 \leftrightarrow a = 0)$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = (a \text{ при } 0 \leq a,\ \text{иначе } -a))$

2. Попытка отождествления альтернативных выражений в определении операции. Теорема - определение некоторого выражения t при помощи равенства "$t = (t_1$ при$A,$ иначе $t_2)$". Выбирается переменная x, входящая хотя бы в одно из выражений t_1, t_2. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Решается задача на описание с условиями $S_1, t_1 = t_2$ и посылками S_2. Единственная неизвестная - x. Если получается ответ D, отличный от "ложь", то из антецедентов исключаются утверждения S_1 и вместо них добавляется D. Консеквентом становится равенство $t = p$, где p - то из выражений t_1, t_2, которое короче. (Прием варианты - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to \min(a,a) = a)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to \min(a,b) = (a \text{ при } a \le b,\ \text{иначе } b))$

Вывод общего следствия каждой из альтернатив условного выражения

1. Усмотрение связи определяемого терма с альтернативным выражением: консеквент теоремы имеет вид "$t = (x$ при$A,$ иначе $y)$", где x, y - переменные, входящие в A. Рассматриваются два случая. В первом случае упрощается до элементарного утверждения B дизъюнкция $A \vee x = y$, после чего консеквент заменяется на результат подстановки t вместо x в B. Во втором случае берется дизъюнкция $\neg(A) \vee x = y$, а t подставляется в B вместо y. Результат упрощается. (Прием варианты - 11).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to a \le \max(a,b))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to \max(a,b) = (b \text{ при } a \le b,\ \text{иначе } a))$

2. Вывод общего свойства альтернативных подвыражений. Консеквент имеет вид "$(t_1$ при$A,$ иначе $t_2) = t$". Единственная переменная левой части - x. Список антецедентов - S. Выбирается новая переменная y. Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них решается задача на описание с посылками S, условием $y = t_1$ и неизвестной x. При получении ответа $x = p$ решается задача на исследование с посылками S и результатом замены в A переменной x на p. Во втором случае условием задачи на описание служит $y = t_2$, а в задаче на исследование p подставляется вместо x в $\neg(A)$. Все содержащие y посылки обеих задач на исследование составляются в список T. В списке T выбирается такое утверждение B, что при замене в нем y на t_1 оно оказывается следствием S, A, а при замене y на t_2 - следствием $S, \neg(A)$. Консеквент исходной теоремы заменяется на результат подстановки в B выражения t вместо y. (Прием свертка - 26).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to 0 \le |a|)$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to |a| = (a \text{ при } 0 \le a,\ \text{иначе } -a))$

Обозначение условного выражения новой переменной и выражение через нее старого параметра

1. Перевод условного выражения из заменяемой части в заменяющую. Заменяемая часть тождества содержит описатель "$\lambda_{x_1\dots x_n}((t$ при $x_i = p,$ иначе $f(x_1\dots x_n)), A)$", где $n > 1$ и f - переменная, имеющая единственное вхождение в t - именно, в виде "$f(x_1, \dots, x_{i-1}, p, x_{i+1}, \dots, x_n)$". Выбирается новая переменная g, и формируется выражение t_1, полученное из t заменой подтерма $f(\dots)$ на $g(x_1\dots x_{i-1}x_{i+1}\dots x_n)$. Из рассмотрения о.д.з. терма t_1 находится тип T значений функции g. Рассматривается список S, образованный утверждениями "$g -$ функция", "$\mathrm{Dom}(g) = \mathrm{set}_{x_1\dots x_{i-1}x_{i+1}\dots x_n}((x_1, \dots, x_{i-1}, p, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathrm{Dom}(f))$", "$\mathrm{Val}(g) \subseteq \mathrm{set}_{x_i} T(x_i)$", "$\forall_{x_1\dots x_{i-1}x_{i+1}\dots x_n}((x_1, \dots, x_{i-1}, p, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathrm{Dom}(f) \to f(x_1, \dots, x_{i-1}, p, x_{i+1}, \dots, x_n) = t_1)$". Формируется выражение F вида "$\lambda_{x_1\dots x_n}((g(x_1\dots x_{i-1}x_{i+1}\dots x_n)$ при $x_i = p,$ иначе $f(x_1\dots x_n)), A)$". В качестве списка антецедентов новой теоремы берется результат объединения S с результатом подстановки F вместо f в антецеденты. Консеквентом становится равенство результата такой же подстановки в заменяющую часть теоремы результату замены в заменяемой части описателя "отображение" на переменную f. (Прием описатель - 90).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcnA}(\forall_e(e \in \{1, \dots, n\} \to A(a, e) = bc(e))$ & $b -$ число & $a -$ натуральное & кортеж$(c, n, \mathbb{R})$ & $a \le n$ & матр$(A, \mathbb{R}, n, n) \to \det(A) = b\det(\lambda_{de}((c(e)$ при $a = d,$ иначе $A(d, e)), d \in \{1, \dots, n\}$ & $e \in \{1, \dots, n\})))$

   из теоремы

   $\forall_{abnA}(b -$число & $a -$натуральное & $a \le n$ & матр$(A, \mathbb{R}, n, n) \to \det(\lambda_{det}((bA(a, e)$ при $a = d,$ иначе $A(d, e)), d \in \{1, \dots, n\}$ & $e \in \{1, \dots, n\})) = b\det(A))$

Переход к отрицанию условия и перестановка альтернатив условного выражения

1. Перестановка альтернативных выражений при переходе к отрицанию условия: в заменяемой части встречается условное выражение "$(t_1$ при $A,$ иначе $t_2)$". Утверждение A не имеет своим заголовком отрицание. Находится результат B упрощения относительно антецедентов утверждения $\neg(A)$. Он не имеет своим заголовком отрицание. Тогда выводится теорема, получаемая из исходной заменой условного выражения на "$(t_2$ при$B,$ иначе $t_1)$". (Прием свертка - 23).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(b -$ число $\to |b| = (b$ при $0 < b,$ иначе $-b))$

   из теоремы

   $\forall_b(b -$ число $\to |b| = (-b$ при $b \le 0,$ иначе $b))$

2. Попытка перехода к отрицанию условия и перестановки альтернативных выражений. Заменяющая часть имеет вид "$(t_1$ при $A,$ иначе $t_2)$". Находится результат B упрощения относительно антецедентов утверждения $\neg(A)$. Он не имеет

своим заголовком отрицание. Тогда выводится теорема, получаемая из исходной заменой условного выражения на "(t_2 при B, иначе t_1)". (Прием варианты - 18).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \cdot b = (0 \text{ при } a = 0 \ \vee \ b = 0, \text{ иначе } 1))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \cdot b = (1 \text{ при } a = 1 \ \& \ b = 1, \text{ иначе } 0))$

Вывод условия равенства условного выражения одной из своих альтернатив

1. Равенство условного выражения своей первой альтернативе. Консеквент имеет вид "(t_1 при A, иначе t_2) = p". Левая часть имеет единственный параметр x. Уравнение $t_1 = t_2$ разрешается относительно x. Если получен ответ B, то дизъюнкция $A \vee B$ упрощается до элементарного утверждения C. Консеквент заменяется на эквивалентность $(p = t_1 \leftrightarrow C)$ (Прием свертка - 24).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = a \leftrightarrow 0 \leq a)$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = (a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } -a))$

2. Равенство условного выражения своей второй альтернативе. Консеквент имеет вид "(t_1 при A, иначе t_2) = p". Левая часть имеет единственный параметр x. Уравнение $t_1 = t_2$ разрешается относительно x. Если получен ответ B, то дизъюнкция $\neg(A) \ \vee \ B$ упрощается до элементарного утверждения C. Консеквент заменяется на эквивалентность $(p = t_2 \leftrightarrow C)$ (Прием свертка - 25).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow -a = |a| \leftrightarrow a \leq 0)$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = (a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } -a))$

Вывод эквивалентности для свертки дизъюнкции равенств новой переменной альтернативам условного выражения

1. Вывод эквивалентности свертки дизъюнкции из тождества для условного выражения. Консеквент имеет вид "(t_1 при A, иначе t_2) = t". Единственная переменная левой части - x. Список антецедентов - S. Выбирается новая переменная y. Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них решается задача на описание с посылками S, условием $y = t_1$ и неизвестной x. При получении ответа $x = p$ решается задача на исследование с посылками S и результатом замены в A переменной x на p. Во втором случаев условием задачи на описание

служит $y = t_2$, а в задаче на исследование p подставляется вместо x в $\neg(A)$. Все содержащие y посылки обеих задач на исследование составляются в список T. В списке T выбирается такое утверждение B, что как из $S, B, y = t_1$, так и из $S, B, y = t_2$ вытекает $y = t$. Тогда к антецедентам теоремы добавляются B и указатель типа для y, а консеквент заменяется на эквивалентность $(y = t_1 \ \vee \ y = t_2) \leftrightarrow t = y$. Результат упрощается. (Прием свертка - 27).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(0 < b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a = b \ \vee \ b = -a \leftrightarrow b = |a|)$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = (a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } -a))$

2. Вывод эквивалентности свертки конъюнкции из тождества для условного выражения. Консеквент имеет вид "$(t_1$ при $A,$ иначе $t_2) = t$". Единственная переменная левой части - x. Список антецедентов - S. Выбирается новая переменная y. Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них решается задача на описание с посылками S, условием $y = t_1$ и неизвестной x. При получении ответа $x = p$ решается задача на исследование с посылками S и результатом замены в A переменной x на p. Во втором случаев условием задачи на описание служит $y = t_2$, а в задаче на исследование p подставляется вместо x в $\neg(A)$. Все содержащие y посылки обеих задач на исследование составляются в список T. В списке T выбирается такое утверждение B, что как из $S, B, y = t_1$, так и из $S, B, y = t_2$ вытекает $y = t$. Проверяется, что B - следствие антецедентов и равенства $y = t$. Тогда консеквент заменяется на эквивалентность $(y = t_1 \ \vee \ y = t_2) \ \& \ B \leftrightarrow y = t$, а к антецедентам добавляется указатель типа для y. Результат упрощается. (Прием свертка - 29).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ (a = b \ \vee \ b = -a) \ \& \ b \leq 0 \leftrightarrow b = -|a|)$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow -|a| = (-a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } a))$

3. Дополнительный вывод эквивалентности свертки дизъюнкции из тождества для условного выражения. Консеквент имеет вид "$(t_1$ при $A,$ иначе $t_2) = t$". Единственная переменная левой части - x. Список антецедентов - S. Выбирается новая переменная y. Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них решается задача на описание с посылками S, условием $y = t_1$ и неизвестной x. При получении ответа $x = p$ решается задача на исследование с посылками S и результатом замены в A переменной x на p. Во втором случаев условием задачи на описание служит $y = t_2$, а в задаче на исследование p подставляется вместо x в $\neg(A)$. Все содержащие y посылки обеих задач на исследование составляются в список T. В списке T выбирается такое утверждение B, что как из $S, B, y = t_1$, так и из $S, B, y = t_2$ вытекает $y = t$. Проверяется, что B - следствие антецедентов и равенства $y = t$. Определяются результаты B_1, B_2 упрощения результатов подстановки в B вместо y, соответственно, выражения t_1 и t_2. Затем консеквент заменяется на эквивалентность $(y = t_1 \ \& \ B_1 \ \vee \ y = t_2 \ \& \ B_2) \leftrightarrow t = y$,

а к антецедентам добавляется указатель типа для y. Результат упрощается. (Прием свертка - 30).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \to b = a \ \& \ 0 \leq a \ \vee \ b = -a \ \& \ a \leq 0 \leftrightarrow |a| = b)$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to |a| = (a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } -a))$

Вывод эквивалентности для равенства одной из частей определяющего условное выражение тождества некоторой альтернативе, расположенной в другой его части

1. Извлечение эквивалентности из условного тождества. Консеквент - равенство вида "$t = (t_1$ при A, иначе $t_2)$". Предпринимается разбор случаев "вглубь" условного выражения (возможно, со вложенными условными выражениями) и составляется список пар $(U_1, p_1), \ldots, (U_k, p_k)$, таких, что при выполнении условия U_i значение исходного условного выражения равно p_i. Проверяется, что все значения p_i различны и что условия на о.д.з. любого из них суть следствия антецедентов теоремы. Затем выводятся теоремы, полученные из исходной теоремы заменой консеквента на эквивалентности $(t = p_i \leftrightarrow U_i)$. Результаты упрощаются. (Прием описатель - 91).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \to$
   $\text{card}(\text{set}_e(c + ae + be^2 = 0 \ \& \ e - \text{число})) = 1 \leftrightarrow a^2 - 4bc = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \to$
   $\text{card}(\text{set}_e(c + ae + be^2 = 0 \ \& \ e - \text{число})) = ((1 \text{ при } a^2 - 4bc = 0, \text{ иначе } 2)$
   при $0 \leq a^2 - 4bc$, иначе $0))$

Перенесение операции, применяемой к условному выражению с нулем этой операции, внутрь данного выражения

1. Вывод из тождества "зануления" тождества для группировки внутрь условного выражения. Консеквент теоремы имеет вид "$f(t_1, t_2) = c$", где c - константное выражение, t_2 - неконстантное. Существенных антецедентов нет. Выбираются новые переменные A, b, и консеквент заменяется на $f((t_1 \text{ при } A, \text{ иначе } b), t_2) = (c \text{ при } A, \text{ иначе } f(b, t_2))$. Рассматриваются также три аналогичных теоремы, получающихся при перестановке местами t_1, b и перестановке местами t_1, t_2. К антецедентам добавляются необходимые для сопровождения по о.д.з. утверждения. (Прием нормализация - 24).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \to a \cdot (0 \text{ при } b, \text{ иначе } c) = (0 \text{ при } b, \text{ иначе } ac))$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to a \cdot 0 = 0)$

1.6 Использование параметрического описания

1. Вывод равенства мощностей классов значений параметризуемой переменной до использования параметрического описания и после его использования.

   (a) Извлечение из параметрического описания тождества для мощностей классов: общий случай. Консеквент теоремы имеет вид "$A \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(y = t \,\&\, B)$", где переменная y имеет единственное вхождение в правую часть эквивалентности, причем параметры $x_1, \ldots, x_k$ определяются по y однозначно. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих y, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выбираются новые переменные P, z. Формируется выражение M_1 вида "$\mathrm{card}(\mathrm{set}_{yz}(A \,\&\, P(y,z)))$". Находится список U всех отличных от P параметров выражения M_1, и в этом выражении каждая переменная u списка U заменяется на $u(z)$. Определяется список S_3 результатов подстановки в утверждения S_1 выражения t вместо y, после чего формируется выражение M_2 вида "$\mathrm{card}(\mathrm{set}_{x1 \ldots x_k z}(B \,\&\, S_3 \,\&\, P(t,z)))$". Избыточные указатели типа в S_3 удаляются, а каждая переменная u из U заменяется в M_2 на $u(z)$. Список S_2 упрощается. Затем в каждое его утверждение вместо переменных u из U подставляется $u(z)$. Те утверждения C, которые содержат после этого z, заменяются на "$\forall_z(P(y,z) \to C)$". Затем создается импликация с антецедентами S_2 и консеквентом $M_1 = M_2$. В процессе ее сборки предпринимаются очевидные упрощения. (Прием биекция - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bdf}(\forall_e(d(a,e) \to b(e) \subseteq f(e)) \,\&\, \forall_e(d(a,e) \to b(e) - \mathrm{set}) \,\&\, \forall_e(d(a,e) \to f(e) - \mathrm{set}) \to \mathrm{card}(\mathrm{set}_{ae}(a - \mathrm{set} \,\&\, b(e) \subseteq a \,\&\, a \subseteq f(e) \,\&\, d(a,e))) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_{ce}(c \subseteq f(e)(\underline{e}) \,\&\, c - \mathrm{set} \,\&\, d(b(e) \cup c, e))))$

   из теоремы

   $\forall_{abf}(b \subseteq f \,\&\, b - \mathrm{set} \,\&\, f - \mathrm{set} \to a - \mathrm{set} \,\&\, b \subseteq a \,\&\, a \subseteq f \leftrightarrow \exists_c(a = b \cup c \,\&\, c \subseteq f \setminus b \,\&\, c - \mathrm{set}))$

   (b) Извлечение из параметрического описания тождества для мощностей классов: варьирование характеристики объекта, при фиксации которой мощность явно вычисляется. Консеквент теоремы имеет вид "$A \,\&\, z = p \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(y = t \,\&\, B)$", где переменная y имеет единственное вхождение в правую часть эквивалентности, переменная z - единственное вхождение в левую, p содержит y, причем параметры $x_1, \ldots, x_k$ определяются правой частью по y однозначно. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих z, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выражение "$\mathrm{card}(\mathrm{set}_{x1 \ldots x_k z}(B))$" упрощается до вида m не содержащего символа "мощность" и имеющего численное значение. Выбирается новая переменная P. Утверждения S_1 исключаются из антецедентов теоремы, а консеквентом становится равенство "$\mathrm{card}(\mathrm{set}_y(A \,\&\, P(z)) = m \cdot \mathrm{card}(\mathrm{set}_z(S_1 \,\&\, P(z))))$". Результат упрощается. (Прием биекция - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{dei}(e - \mathrm{set} \,\&\, i - \text{натуральное} \,\&\, 0 \le \mathrm{card}e - i \,\&\, \text{конечное}(e) \to \mathrm{card}(\mathrm{set}_c(\text{перестановка}(c,e) \,\&\, d(c(i)))) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_b(b \in e \,\&\, d(b))) \cdot (\mathrm{card}e - 1)!)$

из теоремы

$\forall_{bcei}(e - \text{set}\ \&\ b \in e\ \&\ i - \text{натуральное}\ \&\ 0 \leq \text{card}e - i\ \&\ \text{конечное}(e) \rightarrow \text{перестановка}(c, e)\ \&\ b = c(i) \leftrightarrow \exists_a(\text{перестановка}(a, e \setminus \{b\})\ \&\ c = \text{Вставка}(a, i, b)))$

(c) Использование параметрического описания для сведения вычисления мощности класса к известной формуле. Консеквент теоремы имеет вид "$A \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(y = t\ \&\ B)$", где переменная y имеет единственное вхождение в правую часть эквивалентности, причем параметры $x_1, \ldots, x_k$ определяются по y однозначно. Создается вспомогательная импликация, полученная из исходной теоремы заменой консеквента на равенство "$(\text{card}(\text{set}_y A) = \text{card}(\text{set}_{x_1 \ldots x_k} B)$". Правая часть этого равенства предварительно упрощается, но сохраняет при этом заголовок "мощность". Справочник поиска теорем "числатом" находит по символу "мощность" тождество, вычисляющее мощность. Это тождество применяется для преобразования правой части вспомогательной импликации. Результат упрощается. (Прием биекция - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bf}(b - \text{set}\ \&\ f - \text{set}\ \&\ b \subseteq f\ \&\ \text{конечное}(f \setminus b) \rightarrow \text{card}(\text{set}_a(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq f\ \&\ b \subseteq a)) = 2^{\text{card}(f \setminus b)})$

из теоремы

$\forall_{abf}(b \subseteq f\ \&\ b - \text{set}\ \&\ f - \text{set} \rightarrow a - \text{set}\ \&\ b \subseteq a\ \&\ a \subseteq f \leftrightarrow \exists_c(a = b \cup c\ \&\ c \subseteq f \setminus b\ \&\ c - \text{set}))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(a) \rightarrow \text{card}(\text{подмножества}(a)) = 2^{\text{card}(a)})$.

2. Усмотрение типа объекта из параметрического определения. Определяемая часть эквивалентности - одноместное отношение $P(x)$. Определяющая часть имеет вид "$\exists_{y_1 \ldots y_k}(x = t\ \&\ A)$". Заголовком выражения t служит некоторый логический символ, для которого удается определить тип Q его значений. К антецедентам добавляется утверждение $P(x)$, а консеквент заменяется на $Q(x)$. Результат упрощается. (Прием определение - 170).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{rational} \rightarrow a - \text{число})$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{rational} \leftrightarrow \exists_{mn}(m - \text{целое}\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ a = m/n))$

3. Извлечение из параметрического определения равенства эквивалентности для упрощения параметрических описаний. Определяемая часть имеет вид "$x = t$", где x - переменная, не входящая в t. Определяющая часть имеет вид "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(y = p\ \&\ A)\ \&\ B$", где y - переменная, не имеющая других вхождений в этой части. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих переменную y, и подсписок S_2 остальных утверждений. Проверяется,

что каждое утверждение списка S_1 является следствием утверждений списка $S_2, B, y = p, A$. При этом утверждение "$\exists_{x_1 \ldots x_k} A$" является следствием утверждений S_2, B. Выбирается новая переменная Q. Затем из антецедентов теоремы удаляются утверждения S_1, а консеквент заменяется на эквивалентность "$\exists_y(S_1 \ \& \ Q(t)) \leftrightarrow \exists_x(B \ \& \ Q(x))$". (Прием определение - 199).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{an}(n - \text{натуральное} \rightarrow \exists_m(m - \text{целое} \ \& \ a(m(\text{mod } n))) \leftrightarrow$
$\exists_k(k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \& \ a(k)))$

из теоремы

$\forall_{mnk}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow m(\text{mod } n) = k \leftrightarrow k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \&$
$\exists_p(p - \text{целое} \ \& \ m = k + np))$

4. Вывод условия равенства значения операции, определяемой через параметрическое описание. Определяемая часть имеет вид "$x = t$", где x - переменная, не имеющая других вхождений в эту часть. Определяющая часть имеет вид Определяющая часть имеет вид "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(y = p \ \& \ A) \ \& \ B$", где y - переменная, не имеющая других вхождений в этой части и имеющая единственное вхождение в t. Выбираются новые переменные $z_1, \ldots, z_k, u$, и решается задача на описание, посылками которой служат антецеденты теоремы, а также утверждения $B, y = p, A$. Условия получаются из утверждений $u = p, A$ подстановкой переменных $z_1, \ldots, z_k$ вместо $x_1, \ldots, x_k$. Единственная неизвестная - u. Известными полагаются все отличные от x параметры посылок, а также переменные $z_1, \ldots, z_k$. После получения ответа C проверяется, что исходные условия задачи - следствия ее посылок и C (проверка необходима из-за специфики цели "известно"). Находится результат D упрощения утверждения "$\exists_{z_1 \ldots z_k} C$" относительно антецедентов теоремы и утверждения A. Проверяется, что D не содержит переменных $x_1, \ldots, x_k$. Находится результат t_1 замены в t переменной y на u. Определяется список S, полученный добавлением к антецедентам теоремы результатов замены y на u в тех антецедентах, которые содержат y. Наконец, создается импликация с антецедентами S и консеквентом "$t_1 = t \leftrightarrow D$". Результат упрощается. (Прием определение - 200).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bmn}(n - \text{натуральное} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \rightarrow b(\text{mod } n) = m(\text{mod } n) \leftrightarrow$
$\exists_a(b = m + an \ \& \ a - \text{целое}))$

из теоремы

$\forall_{mnk}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow m(\text{mod } n) = k \leftrightarrow k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \&$
$\exists_p(p - \text{целое} \ \& \ m = k + np))$

1.7 Специальная стандартизация теоремы

Группировка в одной части всех ненулевых членов двуместного отношения

1. Группировка в левых частях всех ненулевых членов (ослабленное редуцирование). В теореме находятся двуместные отношения $P(t_1, t_2)$, для которых воз-

можна перегруппировка членов t_2 в левую часть, с заменой их "знака" и размещением единицы в правой части. Операция, используемая для соединени t_1 с перегруппированными членами, необходимый для перегруппировки знак и единица операции определяются по P справочником "перегруппировка". Перегруппировки выполняются по всей теореме, пока это возможно. Результат упрощается. (Прием вывод - 45).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cde}(0 < c - e \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e - d \to 0 < c - d)$

из теоремы

$\forall_{cde}(e < c \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \leq e \to d < c)$

2. Группировка в левых частях всех ненулевых членов. Аналогично предыдущему, но перед упрощением все переменные консеквента, которые входят в него только под отрицанием, заменяются в теореме на свои отрицания. Добавляются необходимые по о.д.з. условия на эти переменные. (Прием вывод - 23).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ade}(0 < d - a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d + e \leq 0 \to a + e < 0)$

   из теоремы

   $\forall_{ade}(a < d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \leq e \to a < e)$

3. Группировка в левых частях всех ненулевых членов (усиленное редуцирование). Аналогично предыдущему, но упрощение выполняется дважды - до исключения отрицаний и после него. (Прием вывод - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ade}(0 < a + d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e - d \to 0 < a + e)$

   из теоремы

   $\forall_{ade}(a < d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \leq e \to a < e)$

4. Группировка в левой части разрешаемого двуместного отношения всех ненулевых членов. Теорема - эквивалентность, разрешающая двуместное отношение $P(t, a)$ относительно неизвестной x, входящей в t. Переменная a не входит в t. При помощи справочника "перегруппировка" усматривается возможность перенести все члены в один операнд отношения P, сгруппировав их при помощи операции f, имеющей единицу e, причем при перенесении члена в другой операнд на него навешивается знак N. Определяется результат $P(f(t, a), e)$ такой перегруппировки, причем знак N на переменную a пока не навешивается. Заменяемая часть теоремы преобразуется указанным образом, а затем в антецедентах и заменяющей части переменная a заменяется на $N(a)$. Результат упрощается. (Прием глуб - 50).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(\neg(c=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\rightarrow b+ac=0\leftrightarrow a=-b/c)$

из теоремы

$\forall_{abc}(\neg(c=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\rightarrow b=ac\leftrightarrow a=b/c)$

5. Группировка в левых частях всех ненулевых членов для двуместных отношений под квантором. Теорема - эквивалентность, выполняющая исключение квантора. В ее консеквенте находится та часть эквивалентности, которая представляет собой квантор. Внутри этого квантора предпринимается везде, где это допускает справочник "перегруппировка", группировка ненулевых членов двуместных отношений в левой части. Результат упрощается. (Прием кванторнаясвертка - 17).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{mn}(m-\text{целое}\ \&\ n-\text{целое}\rightarrow m|n\leftrightarrow\exists_k(n-km=0\ \&\ k-\text{целое}))$

   из теоремы

   $\forall_{mn}(m-\text{целое}\ \&\ n-\text{целое}\rightarrow m|n\leftrightarrow\exists_k(k-\text{целое}\ \&\ n=mk))$

6. Группировка в левых частях всех ненулевых членов. Теорема используется для создания приема проверочного оператора. В ней находятся двуместные отношения $P(t_1,t_2)$, для которых возможна перегруппировка членов t_2 в левую часть, с заменой их "знака" и размещением единицы в правой части. Операция, используемая для соединения t_1 с перегруппированными членами, необходимый для перегруппировки знак и единица операции определяются по P справочником "перегруппировка". Перегруппировки выполняются по всей теореме, пока это возможно. Затем все переменные консеквента, которые входят в него только под отрицанием, заменяются в теореме на свои отрицания. Добавляются необходимые по о.д.з. условия на эти переменные. Результат упрощается. (Прием легковидеть - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcf}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ 0\leq f-a\ \&$
   $0\leq c+\min(a,b)\rightarrow 0\leq c+\min(b,f))$

   из теоремы

   $\forall_{abcf}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ a\leq f\ \&\ c\leq\min(a,b)\rightarrow$
   $c\leq\min(b,f))$

7. Группировка в левых частях всех ненулевых членов. Теорема - эквивалентность общей стандартизации. В ней находятся двуместные отношения $P(t_1,t_2)$, для которых возможна перегруппировка членов t_2 в левую часть, с заменой их "знака" и размещением единицы в правой части. Операция, используемая для соединения t_1 с перегруппированными членами, необходимый для перегруппировки знак и единица операции определяются по P справочником "перегруппировка". Перегруппировки выполняются по всей теореме, пока это возможно. Результат упрощается. (Прием общнорм - 64).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to 0 < a - b \ \vee \ 0 < b - a \leftrightarrow \neg(a - b = 0))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to a < b \ \vee \ b < a \leftrightarrow \neg(a = b))$

8. Группировка ненулевых членов в одной части отношения - элементарная заменяемая часть. Теорема - эквивалентность общей стандартизации, в заменяемой части которой расположено двуместное отношение $P(t_1, t_2)$, допускающее перегруппировку ненулевых членов в одной части. Такая перегруппировка выполняется. Если заменяющая часть тоже имеет заголовок P, то и в ней предпринимается аналогичная перегруппировка. Результат упрощается. (Прием общнорм - 16).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq c \to$
   $a^b - c^b = 0 \leftrightarrow a - c = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq c \to$
   $a^b = c^b \leftrightarrow a = c)$

9. Группировка ненулевых членов в одной части отношения - конъюнктивная заменяемая часть. Теорема - эквивалентность общей стандартизации, у которой заменяемая часть представляет собой конъюнкцию. Для каждого ее конъюнктивного члена $P(t_1, t_2)$, допускающего перегруппировку ненулевых членов в одной части, такая перегруппировка выполняется. Результат упрощается. (Прием общнорм - 72).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \to$
   $a^b - c^b = 0 \ \& \ 0 \leq ac \leftrightarrow a = c)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \to$
   $a^b = c^b \ \& \ 0 \leq ac \leftrightarrow a = c)$

10. Группировка в левых частях всех ненулевых членов для антецедентов. Для каждого расположенного в антецедентах двуместного отношения $P(t_1, t_2)$, допускающего перегруппировку ненулевых членов в одной части, такая перегруппировка выполняется. После этого каждый антецедент упрощается относительно оставшихся антецедентов. (Прием попыткаспуска - 14).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ 0 < b - a \ \& \ b - \text{число} \to \neg(a = b))$

    из теоремы

    $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ a < b \ \& \ b - \text{число} \to \neg(a = b))$

11. Группировка в левых частях всех ненулевых членов. Аналогично предыдущему, но дополнительно предпринимается упрощение консеквента. Если он имеет вид $\neg(P)$, то упрощается лишь P, без учета внешнего отрицания. (Прием попыткаспуска - 6).

    Пример: вывод теоремы

    $$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ 0 < b - a \to \neg(0 < a - b))$$

    из теоремы

    $$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ a < b \to \neg(b < a))$$

12. Группировка в левых частях всех ненулевых членов для эквивалентности типа "сборка". Для каждого двуместного отношения $P(t_1, t_2)$, расположенного в консеквенте и допускающего перегруппировку ненулевых членов в одной части, такая перегруппировка выполняется. Проверяется, что заменяемая часть изменилась. Результат упрощается. (Прием сборка - 6).

    Пример: вывод теоремы

    $$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \to 0 < a + b \ \& \ 0 < b - a \leftrightarrow 0 < b - |a|)$$

    из теоремы

    $$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \to a < b \ \& \ -a < b \leftrightarrow |a| < b)$$

13. Группировка в левых частях всех ненулевых членов для эквивалентности типа "связка". Аналогично предыдущему. В конце, после упрощения, предпринимается замена в теореме всех переменных, встречающихся в консеквенте только под операцией типа отрицания, на их отрицания. Затем - повторное упрощение. (Прием связка - 2).

    Пример: вывод теоремы

    $$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \to \exists_c(0 < a + c \ \& \ 0 < b - c \ \& \ c - \text{число}) \leftrightarrow 0 < a + b)$$

    из теоремы

    $$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \to \exists_c(c < b \ \& \ a < c \ \& \ c - \text{число}) \leftrightarrow a < b)$$

14. Группировка в левых частях всех ненулевых членов (усиленное редуцирование). Аналогично предыдущему. (Прием спуск - 24).

    Пример: вывод теоремы

    $$\forall_{ac}(0 < c \ \& \ a - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ 0 \leq a \to 0 < a + c)$$

    из теоремы

    $$\forall_{abcd}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ a \leq b \ \& \ c < d \to a + c < b + d)$$

15. Группировка в левых частях всех ненулевых членов. Аналогично предыдущему, но без упрощения перед переходом к отрицаниям. (Прием спуск - 25).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ac}(c < 0 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ a \leq 0 \rightarrow a + c < 0)$

    из теоремы

    $\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a \leq b \ \& \ c < d \rightarrow a + c < b + d)$

16. Группировка всех ненулевых членов в одной части одного из антецедентов, который будет обрабатываться проверочным оператором. Теорема - обобщенная транзитивность с двуместным отношением в консеквенте и двумя двуместными отношениями в антецедентах. Одно из двуместных отношений антецедента допускает перегруппировку ненйлевых членов в одной части. Такая перегруппировка выполняется. (Прием транзитоперанд - 7).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ade}(0 < d - a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \leq e \rightarrow a < e)$

    из теоремы

    $\forall_{ade}(a < d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \leq e \rightarrow a < e)$

17. Группировка в левой части заменяющего двуместного отношения всех ненулевых членов. Теорема - эквивалентность, уменьшающая оценку сложности. Заменяющая часть имеет вид $P(t_1, t_2)$, причем двуместное отношение P допускает перегруппировку ненулевых членов в одной части. Такая перегруппировка выполняется. (Прием уменьшение - 16).

    Примепр: вывод теоремы

    $\forall_{abc}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a = b/c \leftrightarrow b - ac = 0)$

    из теоремы

    $\forall_{abc}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow b = ac \leftrightarrow a = b/c)$

18. Группировка в левых частях двуместных отношений заменяющей части консеквента всех ненулевых членов. Теорема представляет собой эквивалентность, преобразующую одно утверждение с помощью другого таким образом, что новое утверждение содержит параметры обоих исходных утверждений (Обычно используется для действий типа "сложения уравнений"). Для каждого расположенного в заменяющей части консеквента двуместного отношения $P(t_1, t_2)$, допускающего перегруппировку ненулевых членов в одной части, такая перегруппировка выполняется. (Прием усмгруппа - 2).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a = b \rightarrow c = d \leftrightarrow a + c - b - d = 0)$

    из теоремы

$\forall_{abcd}(a-$число $\&\ b-$число $\&\ c-$число $\&\ d-$число $\&\ a=b \to c=d \leftrightarrow a+c=b+d)$

19. Перегруппировка членов консеквента, имеющего нулевой операнд. Консеквент теоремы - отличное от равенства двуместное отношение вида "$P(f(t_1, N(t_2)), Z)$", где f - коммутативная операция, имеющая единицу Z и допускающая группировку всех ненулевых членов в одной части отношения P с изменением знака N при перенесении в противоположную часть. Консеквент заменяется на "$P(Z, f(t_2, N(t_1)))$". (Прием спуск - 39).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abc}(0 < a-1\ \&\ 0 < c-b\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\to a^b - a^c < 0)$

    из теоремы

    $\forall_{abc}(0 < a-1\ \&\ 0 < c-b\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\to 0 < -a^b + a^c)$

20. Вывод теоремы для усмотрения истинности отношения с помощью пакетного синтезатора. Теорема - обобщенная транзитивность. Консеквент имеет вид "$P(t_1, t_2)$", где P отлично от равенства. Допускаются перегруппировки "$P(t_3, Z)$" и "$P(t_4, Z)$", где Z - единица соответствующей операции. Определяется подстановка S вместо параметров утверждения "$P(t_1, t_2)$", переводящая это утверждение в один из таких результатов перегруппировки, и она применяется ко всем антецедентам, кроме указателей типа данных. Обычно это приводит к появлению антецедентов, допускающих обработку пакетным синтезатором. (Прием транзитоперанд - 8).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{cde}(e < 0\ \&\ c-$ число $\&\ d-$ число $\&\ e-$ число $\&\ d-c \le e \to d < c)$

    из теоремы

    $\forall_{cde}(e < c\ \&\ c-$ число $\&\ d-$ число $\&\ e-$ число $\&\ d \le e \to d < c)$

    В этом примере антецедент "$d - c \le e$" будет обрабатываться синтезатором "верхняяоценка".

21. Группировка одной части отношения заменяемого двуместного отношения всех ненулевых членов. Теорема выполняет кванторную расшифровку двуместного отношения $P(t_1, t_2)$, допускающего перегруппировку ненулевых членов в одной части. Такая перегруппировка выполняется. Результат упрощается. (Прием развертка - 124).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abd}(\neg(a^2 + b^2 = 0)\ \&\ d-$ число $\&\ a-$ целое $\&\ b-$ целое $\to d-$ нод$(a, b) = 0 \leftrightarrow$
    $\forall_f(f-$ натуральное $\&\ f \mid a\ \&\ f \mid b \to f \le d)\ \&\ d-$ атуральное $\&\ d \mid a\ \&\ d \mid b)$

    из теоремы

    $\forall_{abd}(\neg(a^2 + b^2 = 0)\ \&\ a-$ целое $\&\ b-$ целое $\to d =$ нод$(a, b) \leftrightarrow$
    $\forall_f(f-$ натуральное $\&\ f \mid a\ \&\ f \mid b \to f \le d)\ \&\ d-$ атуральное $\&\ d \mid a\ \&\ d \mid b)$

Разнесение членов по разным частям двуместного отношения

1. Варьирование непосредственно идентифицируемого антецедента продукции проверочного оператора: разнесение двух ненулевых членов по разным частям двуместного отношения. Некоторый антецедент имеет вид "$P(f(t_1, N(t_2)), Z)$", где отношение P допускает перегруппировку f-членов с изменением их знака N; Z - единица операции f. Этот антецедент заменяется на "$P(t_1, t_2)$". (Прием легковидеть - 14).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cde}(0 < c - e \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \leq e \to 0 < c - d)$

   из теоремы

   $\forall_{cde}(0 < c - e \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e - d \to 0 < c - d)$

2. Варьирование примера с помощью перенесения константных членов в другую часть двуместного отношения. Консеквент имеет вид "$P(f(a, t), b)$", где a - константное выражение, b - выражение длины 1. Отношение P допускает перегруппировку f - членов с изменением их знака N. Консеквент заменяется на "$P(f(t), f(b, N(a)))$". (Прием элементарно - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_c(c - \text{число} \to c - 1 < c)$

   из теоремы

   $\forall_c(c - \text{число} \to c < c + 1)$

3. Перегруппировка членов заменяющей части в заменяемую для получения тождества общей стандартизации. Консеквент имеет вид "$p = f(t_1 \dots t_n)$". Правая часть имеет не менее двух подтермов максимальной сложности. Операнд t_i содержит ровно одно из них, причем его вхождение в t_i единственное. Определяется тип P значений выражения $f(\dots)$. Проверяется, что для значений такого типа допустима перегруппировка f - членов из одной части равенства в другую с заменой знака N. Консеквент заменяется на "$f(p, N(t_1), \dots, N(t_{i-1}),$ $N(t_{i+1}), \dots, N(t_n)) = t_i$". Результат упрощается. (Прием декомпозиция - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \to a(b + c) - ac = ab)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \to ab + ac = a(b + c))$

4. Переход от равенства для разности координат к равенству, выражающему одну координату через другую. Консеквент имеет вид "$\text{крд}(A, K, i) - \text{крд}(B, K, i) = p$". Он заменяется на "$\text{крд}(A, K, i) = \text{крд}(B, K, i) + p$". Результат упрощается. (Прием нормкрд - 9).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcd}(b-$точка & $c-$точка & прямкоорд(d) & вверх(вектор$(bc), d)$ & Трехмерн$(d) \to$ крд$(c, d, 3) = l(bc) +$ крд$(b, d, 3))$

из теоремы

$\forall_{bcd}(b-$точка & $c-$точка & прямкоорд(d) & вверх(вектор$(bc), d)$ & Трехмерн$(d) \to$ $-$крд$(b, d, 3) +$ крд$(c, d, 3) = l(bc))$

5. Обработка теоремы оператором "нормбин". Оператор рассматривает всевозможные бинарные отношения теоремы "$P(f(t_1, N(t_2)), Z)$", расположенные под некорневым квантором общности, и преобразует их к виду "$P(t_1, t_2)$". Здесь отношение P допускает перегруппировку f - членов с изменением их знака N; Z - единица операции f. Далее он предпринимает попытку замены строгих версий отношений в антецедентах на нестрогие, используя обращения к задачам на доказательство. В посылках таких задач указываются нестрогая версия отношения и отрицание строгой. (Прием развертка - 100).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fga}(a - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \text{неубывает}(f, a) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in a\ \&\ y \in a\ \&\ y \leq x \to f(y) \leq f(x)))$

   из теоремы

   $\forall_{fga}(a - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \text{неубывает}(f, a) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in a\ \&\ y \in a\ \&\ 0 < x - y \to 0 \leq f(x) - f(y)))$

Разбиение старого параметра на два новых и перегруппировка их между членами операндов двуместного отношения

1. Частичная группировка в левой части разрешаемого двуместного отношения членов противоположной части. Эквивалентность "$P(t, y) \leftrightarrow A$" разрешает левую часть относительно неизвестной x. y - отличная от x переменная, имеющая единственное вхождение в левую часть. Отношение P допускает перегруппировку f - членов из одного операнда в другой с изменением знака N. Выбирается новая переменная z. В антецедентах и заменяющей части A переменная y заменяется на $f(z, N(y))$, а заменяемая часть приобретает вид $P(f(t, y), z)$. Добавляются антецеденты, необходимые по о.д.з. Результат упрощается. (Прием глуб - 51).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(c = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число} \to d = b + ac \leftrightarrow a = (d - b)/c)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(c = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to b = ac \leftrightarrow a = b/c)$

2. Разделение переменной в одном из антецедентов. Теорема - обобщенная транзитивность. Некоторый антецедент имеет вид $P(f(x, y), z)$, где отношение P допускает перегруппировку f - членов в другой операнд с изменением знака

N. Z - единица операции f. Каждый существенный антецедент имеет корневой операнд Z. x, y - переменные, причем консеквент имеет вид $Q(f(x,z),Z)$. Выбирается новая переменная u. Антецедент заменяется на $P(f(x,y),u)$, а консеквент - на $Q(f(f(x,N(u)),z),Z)$. Результат упрощается. (Прием транзитоперанд - 9).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acde}(0 < c - e \;\&\; a - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; d - \text{число} \;\&\; e - \text{число} \;\&\; a \leq d + e \rightarrow 0 < c + d - a)$

из теоремы

$\forall_{cde}(0 < c - e \;\&\; c - \text{число} \;\&\; d - \text{число} \;\&\; e - \text{число} \;\&\; 0 \leq d + e \rightarrow 0 < c + d)$

3. Добавление переменной для остаточных неизвестных в левую часть уравнения. Теорема выводит условие на известные параметры уравнения. Некоторый ее антецедент имеет вид $P(f(t_1 \ldots t_n), a)$, где каждое из выражений содержит неизвестную x, a - известный параметр, причем отношение P допускает перегруппировку f - членов в другой операнд с изменением знака N. Выбирается новая переменная y, после чего антецедент заменяется на $P(f(t_1, \ldots, t_n, y), a)$, а в прочие антецеденты и консеквент вместо a подставляется $f(a, N(y))$. Антецеденты упрощаются. (Прием огрзавис - 1).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcde}(a - \text{число} \;\&\; \underline{-}\text{число} \;\&\; e - \text{число} \;\&\; d = c + ae + be^2 \;\&\; c - \text{число} \rightarrow 0 \leq 4b(d - c) + a^2)$

из теоремы

$\forall_{abde}(a - \text{число} \;\&\; \underline{-}\text{число} \;\&\; d - \text{число} \;\&\; e - \text{число} \;\&\; ea + be^2 = d \rightarrow 0 \leq 4bd + a^2)$

Разрешение заменяющей части эквивалентности относительно переменной

1. Попытка разрешения заменяющей части относительно переменной, глубина которой в заменяемой части равна 1. Теорема имеет элементарную заменяемую часть A и конъюнктивную заменяющую часть $B_1 \;\&\; \ldots \;\&\; B_n$. Переменная x, не встречающаяся в антецедентах, имеет в утверждении A глубину 1. Она входит во все утверждения $B_1, \ldots, B_n$ и хотя бы в одном из них ее глубина больше 1. Предпринимается попытка разрешить конъюнкцию $B_1 \;\&\; \ldots \;\&\; B_n$ относительно неизвестной x с помощью задачи на описание. Посылки - антецеденты теоремы. Если получен ответ C, то отбрасываются все его не содержащие x конъюнктивные члены, являющиеся следствиями антецедентов и остальных конъюнктивных членов. Затем консеквент заменяется на $A \leftrightarrow C$. (Прием и - 48).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{mnx}(m - \text{целое} \;\&\; n - \text{целое} \rightarrow x - \text{целое} \;\&\; m \leq x \;\&\; x \leq n \leftrightarrow x \in \{m, \ldots, n\})$

из теоремы

$\forall_{mnx}(m-\text{целое} \,\&\, n-\text{целое} \to x \in \{m,\ldots,n\} \leftrightarrow x-\text{целое} \,\&\, 0 \le x-m \,\&\, 0 \le n-x)$

2. Попытка разрешения заменяющей части относительно переменной - операнда самой сложной операции бесповторной заменяемой части. Теорема имеет бесповторную элементарную заменяемую часть A и конъюнктивную заменяющую часть $B_1 \,\&\, \ldots \,\&\, B_n$. Единственный подтерм максимальной сложности утверждения A имеет своим корневым операндом переменную x. Глубина ее вхождения в A и хотя бы в одно B_i больше 1. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. При помощи задачи на описание утверждения $S_1, B_1, \ldots, B_n$ разрешаются относительно неизвестной x. Посылки - утверждения S_2 Из конъюнктивных членов ответа C отбрасываются все антецеденты. Затем консеквент заменяется на $A \leftrightarrow C$. Результат упрощается. (Прием и - 63).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \to |a| \le b \leftrightarrow a \le b \,\&\, -b \le a)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \to a \le b \,\&\, -a \le b \leftrightarrow |a| \le b)$

3. Определение случаев, в которых ограничения на неизвестную пропадают, и отдельное их рассмотрение в дизъюнктивном члене заменяющей части эквивалентности. Теорема - эквивалентность, разрешающая утверждение A относительно неизвестной x. Других версий неизвестной нет. Заменяющая часть имеет вид дизъюнкции $B_1 \vee \ldots \vee B_n$, причем если какое-либо B_i содержит x, то все его конъюнктивные члены содержат x. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Решается задача на описание с условиями $S_1, \neg(B_1), \ldots, \neg(B_n)$ и несущественной неизвестной x. Посылки - утверждения S_2. Если получается не содержащий x ответ C, то это означает, что при выполнении условия $\neg(C)$ отличных от S_1 ограничений на неизвестную нет. Поэтому консеквент заменяется на $A \leftrightarrow ((B_1 \vee \ldots \vee B_n) \,\&\, C) \vee \neg(C)$. Результат упрощается. (Прием глуб - 46).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \to b \le |a| \leftrightarrow (a \le -b \vee b \le a) \,\&\, 0 < b \vee b \le 0)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \to b \le |a| \leftrightarrow a \le -b \vee b \le a)$

Преобразование теоремы для специального нормализатора

1. Загрубление теоремы для приема нормализатора.

   (a) Загрубление формулы нахождения производной для нормализатора "норм-производная". Если теорема - тождество для вычисления производной, причем символ "производная" не встречается в антецедентах и в заменяющей части, а заменяемая часть имеет вид "производная$(\lambda_x(t(x), A(x)), B)$"

и $A(x)$ отлично от "число(x)", то эта теорема обрабатывается оператором "Нормтеорема" с комментарием "производная". В частности, при этом $A(x)$ заменяется на формальный стандарт "число(x)", на который ориентированы приемы решателя. (Прием описатель - 62).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to d\sin a/da = \cos a$

из теоремы

$\forall_{ab}(b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Квазивнутр}(a,b) \to \text{производная}(\lambda_c(\sin c, c \in b), a) = \cos a)$

Заметим, что в скобочной записи выводимая теорема имеет вид:

"длялюбого(x1 если число(x1) то равно(производная(отображение(x3 число(x3) синус(x3))x1) косинус(x1)))".

Смысл рассматриваемого "загрубления" заключается в том, что во всех шаблонах вычисления производных элементарных функций в решателе вместо указания фактической области определения функции стоит терм "число(x)" для связанной переменной x. Это ничуть не мешает аккуратному рассмотрению той точки, в которой производная вычисляется, и в действительности является лишь условным соглашением, упрощающим идентификацию терма "производная(...)".

(b) Загрубление формулы нахождения первообразной для нормализатора "нормИнтеграл" - случай кванторной импликации. Если теорема имеет своим консеквентом отношение "первообразная(A_1, A_2)", то она обрабатывается оператором "Нормтеорема" с комментарием "норминт". В частности, при этом отбрасываются условия на о.д.з. в описателях "отображение" в A_1, A_2, так что остается только условие "число(x)". (Прием функперех - 13).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcj}(\neg(j = 0)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ j - \text{число}\ \&\ \text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^{b-1},$
$l - \text{число}), c) \to \text{первообразная}(\lambda_x(a(x^j)x^{bj-1}, x - \text{число}),$
$\lambda_d(c(d^j)/j, d - \text{число})))$

из теоремы

$\forall_{abcj}(\neg(j = 0)\ \&\ (0,\infty) \subseteq \text{Dom}(a)\ \&\ a - \text{функция}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ j - \text{число}\ \&$
$\text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^{b-1}, l \in \text{Dom}(a)), c) \to \text{первообразная}(\lambda_x(a(x^j)x^{bj-1},$
$0 < x\ \&\ x - \text{число}), \lambda_d(c(d^j)/j, 0 < d\ \&\ d - \text{число})))$

(c) Загрубление формулы нахождения первообразной для нормализатора "нормИнтеграл" - случай простого отношения. Аналогично предыдущему, но теорема не является кванторной импликацией - указывает первообразную для конкретной функции. (Прием функперех - 14).

Пример: вывод теоремы

$\text{первообразная}(\lambda_f(1/f, f - \text{число}), \lambda_f(\ln|f|, f - \text{число}))$

из теоремы

$\text{первообразная}(\lambda_f(1/f, \neg(f = 0)\ \&\ f - \text{число}), \lambda_f(\ln|f|, f - \text{число}))$

2. Исключение не содержащих варьируемой переменной подтермов с помощью разрешения относительно бесповторной переменной и рассмотрение их как константных. Консеквент теоремы определяет некоторую характеристику функции. Рассматривается операнд консеквента - описатель "$\lambda_x(t(x), A(x))$", задающий характеризуемую функцию. Внутри выражения $t(x)$ находится подвыражение $f(x, p)$, где p - неоднобуквенный терм с непустым списком параметров A, не содержащим переменной x. В списке A выбирается параметр a, имеющий единственное вхождение в описатель. Справочник поиска теорем "констэкв" определяет протокол, указывающий условия U на типичные значения параметра a (например, что показатель степени - целое число). Выбирается новая переменная b. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих a, и подсписок S_2 остальных утверждений. Из S_1 отбрасываются утверждения, заголовок которых совпадает с заголовком консеквента. Затем решается задача на описание с условиями $b = p, U, S_1$ и неизвестной a. Посылки - утверждения S_2. Если получается ответ $a = s$ & B, то в антецедентах и консеквенте переменная a заменяется на s, а к антецедентам добавляются утверждения B. Ответ упрощается. (Прием функперех - 16).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acefj}(\neg(j = 0)$ & $j|(f + 1)$ & $f -$ целое & $j -$ целое &
   первообразная$(\lambda_l(a(l)l^{-1+(f+1)/j}/e(l), l -$ число$), c) \rightarrow$
   первообразная$(\lambda_x(a(x^j)x^f/e(x^j), x -$ число$), \lambda_d(c(d^j)/j, d -$ число$)))$

   из теоремы

   $\forall_{abcej}(\neg(j = 0)$ & $b -$ число & $j -$ число &
   первообразная$(\lambda_l(a(l)l^{b-1}/e(l), l -$ число$), c) \rightarrow$
   первообразная$(\lambda_x(a(x^j)x^{bj-1}/e(x^j), x -$ число$), \lambda_d(c(d^j)/j, d -$ число$)))$

   и протокола "констнорм(a^b, b - целое)".

   Протокол "констнорм($f(x_1 \ldots x_n)A$)", где A - условие на значение некоторого операнда x_i, указывает наиболее "типичную" ситуацию для выражений с заголовком f, у которых данный операнд - константный.

3. Попытка упрощения не заключенного под символом "значение" подвыражения описателя "отображение". Консеквент теоремы определяет некоторую характеристику функции. Рассматривается операнд консеквента - описатель "$\lambda_x(t(x)$, $A(x))$", задающий характеризуемую функцию. Внутри выражения $t(x)$ рассматривается вхождение переменной x, не заключенное внутри какого-либо терма "значение(...)", но расположенное внутри подвыражения вида $f(p, a)$, где a - переменная, отличная от x. Справочник поиска теорем "упрощстанд" находит по f дополнительное тождество, уменьшающее оценку сложности, и это тождество используется для преобразования p с блокировкой подстановки вместо x и с игнорированием дополнительных условий на x, накладываемых применяемым тождеством. Результат упрощается. (Прием функперех - 17).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcej}(\neg(j = 0)$ & $j|(-b + 1)$ & $b -$ целое & $j -$ целое &
   первообразная$(\lambda_l(a(l)l^{-1+(-b+1)/j}/e(l), l -$ число$), c) \rightarrow$
   первообразная$(\lambda_x(a(x^j)/(e(x^j)x^b), x -$ число$), \lambda_d(c(d^j)/j, d -$ число$)))$

из теоремы

$\forall_{acefj}(\neg(j=0)\ \&\ j|(f+1)\ \&\ f-$ целое $\&\ j-$ целое $\&$
первообразная$(\lambda_l(a(l)l^{-1+(f+1)/j}/e(l), l-$ число$), c) \rightarrow$
первообразная$(\lambda_x(a(x^j)x^f/e(x^j), x-$ число$), \lambda_d(c(d^j)/j, d-$ число$)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ \neg(b=0) \rightarrow b^{-a}=1/b^a)$

Получение из параметрического описания теоремы приема для перечисления конечного множества значений

1. Модифицирование параметрического описания для создания приема конечного перечисления значений неизвестной. Консеквент теоремы имеет вид "$A \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_n)$", где утверждение A элементарно. Выбирается такое B_i, которое содержит все параметры утверждения A. Оно имеет единственный максимально сложный подтерм; s - заголовок этого подтерма. Справочник поиска теорем определяет по s протокол "выч(P вход$(u_1 \ldots u_m)$ выход$(v_1 \ldots v_p)$ T)", указывающий наличие вычислительной процедуры, определяющей по входным данным $u_1, \ldots, u_m$ значения $v_1, \ldots, v_p$, удовлетворяющие условию P. Терм T уточняет типы входных данных. Шаблон P унифицируется с B_i. Проверяется, что все его переменные унифицируются с различными переменными терма B_i. Составляется список S - объединение списка антецедентов с утверждениями $B_1, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_n$. Проверяется соответствие типов данных, указанных в протоколе, типам значений переменных теоремы. В списке $y_1, \ldots, y_p$ выходных переменных теоремы выбирается переменная y_j. Выбирается новая переменная z. Определяются результат A_1 замены в A переменной y_j на z и список S_1 результатов замены y_j на z в содержащих y_j антецедентах теоремы. Затем создается импликация с антецедентами S_1 консеквентом "$A_1 \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_p}(B_i\ \&\ z=y_j)$". Она сопровождается единственной характеристикой "перечисление(z Q)", где Q - конъюнкция всех содержащих входные переменные антецедентов исходной теоремы. (Прием развертка - 70).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{an}(a-$ целое $\rightarrow a|n \leftrightarrow \exists_{mk}(n=mk\ \&\ a=m))$

   из теоремы

   $\forall_{mn}(m-$ целое $\&\ n-$ целое $\rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(k-$ целое $\&\ n=mk))$

   Теорема снабжается характеристикой "перечисление(a целое(n) второйтерм)". Соответствующий прием решателя разворачивает квантор существования в конечную дизъюнкцию для значений неизвестной a.

Добавление одной и той же переменной в обеих частях тождества, чтобы использовать ее как операнд вычисления над константными термами

1. Поглощение константного операнда заменяющего выражения внешним константным операндом. Теорема - равенство декомпозирующего типа (например,

раскрывание скобок) с ассоциативным и коммутативным заголовком f заменяющей части. Удается усмотреть, что некоторый операнд t этой части допускает вычисление константного значения при константных значениях входящих в него переменных, имеющих заданные типы. При этом, если добавить еще один операнд заменяющей части - новую переменную x, имеющую подходящий тип константного значения, то можно вычислить также константное значение $f(t,x)$. Тогда к обеим частям равенства в консеквенте добавляется x, и вводится единственная характеристика, ориентирующая новую теорему на указанные вычисления. (Прием декомпозиция - 10).

Пример: вывод теоремы приема

$\forall_{abcd}(d-\text{число}\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число} \rightarrow a(b+c)+d=ab+ac+d)$

из теоремы

$\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число} \rightarrow ab+ac=a(b+c))$

Выводимая теорема предназначена для того, чтобы вычислять константное значение $ab+d$, если a,b,d - десятичные константы.

2. Попытка перегруппировки переменной к корню для вычисления значения операции над константными операндами. Теорема - тождество, переводящее некоторую переменную x, расположенную "глубоко" в заменяемой части, в корневой операнд бесповторной заменяющей части с ассоциативным и коммутативным заголовком f. Усматривается возможность вычисления значения операции f для константных значений, после чего к обеим частям равенства добавляется новая переменная y. Результат сопровождается единственной характеристикой, ориентирующей его на вычисление значения $f(x,y)$ после перегруппировки. (Прием нормализация - 130).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abce}(\neg(c=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ b-\text{число} \rightarrow (e+ac)/c+b=a+(e/c)+b)$

   из теоремы

   $\forall_{ace}(\neg(c=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ e-\text{число} \rightarrow (e+ac)/c=a+(e/c))$

Прочие случаи

1. Вывод из тождества вынесения наружу отрицания тождества двойной перегруппировки. Консеквент теоремы имеет вид "$f(x,t_1)=g(f(x,t_2))$", где переменная x не входит в t_1,t_2; операция коммутативна, а g - операция типа "отрицания", т.е. $g(g(T))=T$. Каждое из выражений t_1,t_2 имеет один и тот же список параметров $y_1,\ldots,y_k$. Выбираются новые переменные $z_1,\ldots,z_k$. Определяются результаты t_3,t_4 замены переменных $y_1,\ldots,y_k$ на $z_1,\ldots,z_k$ в t_1,t_2. Список антецедентов теоремы разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Составляется список S, образованный утверждениями S_2, результатами замены переменных $y_1,\ldots,y_k$ на $z_1,\ldots,z_k$ в S_2, а также результатами подстановки t_3 вместо x в утверждения

S_1 и результатами подстановки t_2 вместо x в эти утверждения. Затем выводится импликация с антецедентами S и консеквентом "$f(t_1, t_3) = f(t_2, t_4)$". Такое тождество, хотя и избыточно для приемов решателя, используется приемами вывода теорем в качестве дополнительной теоремы. (Прием группировки - 6).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ac}(a - \text{число } \& \ c - \text{число} \to (-a) \cdot (-c) = ac)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \to -ab = (-a) \cdot b)$

2. Попытка перегруппировки членов тождества и приведения правой части к заданному заголовку. Консеквент теоремы - тождество, имеющее не менее двух подвыражений максимальной сложности. В одной из частей этого тождества расположена ассоциативная и коммутативная операция f, причем допускается перегруппировка f - членов из одной части тождества в другую с изменением знака N. Составляется список $t_1, \ldots, t_k$ всех f - членов указанной части и взятых со знаком N f-членов противоположной части. Выбирается некоторое t_i, содержащее одно из подвыражений максимальной сложности, причем это подвыражение не входит в остальные t_j. Справочник "заголовки" находит по f азвание нормализатора A приведения к заданным заголовкам, который обычно применяется к выражениям с заголовком f (например, нормализатор разложения на множители - к суммам). Нормализатор A применяется к выражению "$f(N(t_1), \ldots, N(t_{i-1}), N(T_{i+1}), \ldots, N(t_k)$". Проверяется, что результат t имеет заголовок, для приведения к которому служит A (с точностью до внешних одноместных операций, допускаемых A, например, минуса в случае разложения на множители). Затем консеквент заменяется на $t_i = t$. (Прием нормализация - 80).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to (\sin a)^2 = (-\cos a + 1)(1 + \cos a))$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to (\sin a)^2 + (\cos a)^2 = 1)$

1.8 Использование симметрии

Варьирование одной из частей равенства либо эквивалентности в консеквенте путем перестановки симметричных переменных в другой части этого равенства

1. Перестановка симметричных переменных в заменяемой части эквивалентности разрешения относительно переменной. В заменяемой части встречается подтерм $f(x, y)$, где x, y - переменные, не имеющие других вхождений в эту часть, а f - коммутативный символ. При подстановке y, x вместо x, y в антецеденты и переупорядочения операндов коммутативных символов список утверждений не изменяется. Рассматривается результат B подстановки y, x вместо x, y в заменяющую часть A. Если A и B не получаются друг из друга переупорядочением

операндов коммутативных символов, то консеквент заменяется на $A \leftrightarrow B$. Результат упрощается. (Прием глуб - 9).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow b \setminus c \subseteq e \leftrightarrow b \setminus e \subseteq c)$

из теоремы

$\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow b \subseteq c \cup e \leftrightarrow b \setminus c \subseteq e)$

2. Перестановка несимметричных переменных заменяемого утверждения, имеющих симметричные вхождения в заменяющем утверждении. Теорема преобразует бесповторное утверждение так, чтобы выявилась симметрия по переменным. В заменяющей части встречается подтерм $f(x, y)$, где x, y - переменные, не имеющие других вхождений в эту часть, а f - коммутативный символ. Рассматривается результат B подстановки y, x вместо x, y в заменяемую часть A. К антецедентам добавляются результаты применения к ним такой же подстановки, а консеквент заменяется на $A \leftrightarrow B$. Результат упрощается. (Прием коммутатор - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcd}(0 < b \ \& \ 0 < d \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow b < c/d \leftrightarrow d < c/b)$

   из теоремы

   $\forall_{bcd}(0 < d \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow b < c/d \leftrightarrow bd < c)$

3. Использование симметрии двух переменных в заменяемой части для получения эквивалентности, варьирующей заменяющую часть. При помощи оператора "симметричнпары" находится пара переменных x, y, перестановка которых не изменяет заменяемого утверждения (с точностью до перестановок операндов коммутативных символов). Проверяется, что эта же перестановка не изменяет антецеденты, но переводит заменяющую часть A в утверждение B, не получаемое из A перестановками. Тогда консеквент заменяется на $A \leftrightarrow B$. (Прием сборка - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abB}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = B) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow$
   $B \in \text{прямая}(ab) \leftrightarrow b \in \text{прямая}(aB))$

   из теоремы

   $\forall_{abB}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = B) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow$
   $\text{прямая}(ab) = \text{прямая}(aB) \leftrightarrow B \in \text{прямая}(ab))$

4. Использование циклической симметрии числового атома. Теорема - тождество, выражающее сложный числовой атом через более простые. В заменяемой части встречается подтерм $f(x_1 \ldots x_n)$, не изменяющий своего значения при произвольных циклических перестановках переменных $x_1, \ldots, x_n$, причем вне этого подтерма в заменяемой части переменных нет. Рассматриваются все отличные

от $x_1, \ldots, x_n$ параметры антецедентов $y_1, \ldots, y_m$. Выбираются новые переменные $z_1, \ldots, z_m$. К антецедентам добавляются результаты подстановки в них переменных $x_2, \ldots, x_n, x_1, z_1, \ldots, z_m$ место $x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_m$. Определяется результат B применения такой же подстановки к заменяющей части A, и консеквент заменяется на равенство $A = B$. Результат упрощается. (Прием числатом - 10).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abABCDEF}(a \in$ прямая(CD) & $b \in$ прямая(AB) & $E \in$ прямая(BC) &
$F \in$ прямая(AD) & параллелограмм$(ABCD)$ & $a -$ точка & $b -$ точка &
$A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка & $F -$ точка &
прямая$(ab) \perp$ прямая(AB) & прямая$(AD) \perp$ прямая$(EF) \rightarrow$
$l(AD)l(EF) = l(ab)l(AB))$

из теоремы

$\forall_{ABCDEF}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка &
$F -$ точка & параллелограмм$(ABCD)$ & прямая$(EF) \perp$ прямая(AD) &
$E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая$(AD) \rightarrow S($фигура$(ABCD)) = l(AD)l(EF))$

5. Использование симметричности заменяемого числового атома. Теорема - тождество, выражающее некоторый невырожденный числовой атом A через другие числовые атомы, количество которых в заменяющей части t не менее двух. Все переменные заменяющей части встречаются в заменяемой. Оператор "симметричнпары" усматривает пару переменных x, y заменяемой части, перестановка которых не изменяет ее (с точностью до перестановок). Перестановка данных переменных в выражении t дает выражение t_1, не получаемое из t перестановками. К антецедентам добавляются результаты перестановки в них переменных x, y, а консеквент заменяется на $t = t_1$. Результат упрощается. (Прием числзнач - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(A -$ set & $B -$ set & $A \in$ события(C) & $B \in$ события(C) &
   верпространство$(C) \rightarrow$ вероятность(A, C)услвероятн$(B, A, C) =$
   вероятность(B, C)услвероятн$(A, B, C))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A -$ set & $B -$ set & $A \in$ события(C) & $B \in$ события(C) &
   верпространство$(C) \rightarrow$ вероятность$(A \cap B, C) =$
   вероятность(A, C)услвероятн$(B, A, C))$

Определение класса симметрично относительно одного из параметров и связанной переменной, и перестановка их дает либо равенство двух классов, либо эквивалентность условий принадлежности классам

1. Усмотрение симметрии для параметра и связанной переменной. Теорема имеет своим консеквентом равенство "$t = \text{set}_x(A_1$ & $\ldots$ & $A_n)$". Некоторое утверждение A_i не изменяется при перестановке его параметров x и y. Проверяется, что переменная y не встречается в конъюнкции "A_1 & $\ldots$ & A_{i-1} & A_{i+1} & $\ldots$ & A_n".

Определяется результат P подстановки в эту конъюнкцию переменной y вместо x и устанавливается, что P есть следствие антецедентов теоремы. К антецедентам теоремы добавляются результаты замены в них переменной y на x. Находится результат t_1 замены в t переменной y на x, после чего консеквент заменяется на эквивалентность "$x \in t \leftrightarrow y \in t_1$". (Прием определение - 67).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow$
$C \in \text{окружность}(AB) \leftrightarrow B \in \text{окружность}(AC))$

из теоремы

$\forall_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B) \rightarrow \text{окружность}(AB) =$
$\text{set}_C(C - \text{точка}\ \&\ l(AC) = l(AB)))$

2. Использование симметрии операндов транзитивного отношения в определении класса. Теорема имеет своим консеквентом равенство "$t = \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n)$". Некоторое утверждение A_i имеет вид $P(t_1, t_2)$, отношение P ранзитивно и симметрично, t_1 содержит переменные списка $x_1, \ldots, x_k$, а t_2 не содержит. Существует такое переобозначение переменных $x_1, \ldots, x_k$ на различные переменные $y_1, \ldots, y_k$, при котором t_1 переходит в t_2. Переменные $y_1, \ldots, y_k$ не встречаются в остальных утверждениях A_j. Определяется результат t_1 замены в t переменных $y_1, \ldots, y_k$ на $x_1, \ldots, x_k$. К антецедентам добавляется утверждение "$(x_1, \ldots, x_k) \in t$", а консеквент заменяется на "$t = t_1$". (Прием определение - 69).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ C \in \text{окружность}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \rightarrow$
$\text{окружность}(AB) = \text{окружность}(AC))$

из теоремы

$\forall_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B) \rightarrow \text{окружность}(AB) =$
$\text{set}_C(C - \text{точка}\ \&\ l(AC) = l(AB)))$

Вывод эквивалентности из импликации, у которой антецедент и консеквент отличаются переобозначением переменных

1. Усмотрение эквивалентности консеквента антецеденту из соображений симметрии. Консеквент имеет вид $P(t, s)$, а некоторый антецедент - вид $P(t, r)$. Выражения s, r элементарны, причем r и s переводятся друг в друга путем переобозначения некоторых переменных без отождествлений. При таком же переобозначении остальных антецедентов они оказываются следствиями исходных антецедентов. Тогда утверждение $P(t, r)$ исключается из антецедентов, а консеквент заменяется на $P(t, r) \leftrightarrow P(t, s)$. (Прием отношение - 43).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdefklm}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0)\ \&\ \neg(k^2 + l^2 + m^2 = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&$
$c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ k - \text{число}\ \&\ l - \text{число}\ \&$

m – число & пропорцнаборы$((d,e,f),(k,l,m)) \to$
пропорцнаборы$((a,b,c),(d,e,f)) \leftrightarrow$ пропорцнаборы$((a,b,c),(k,l,m))$

из теоремы

$\forall_{abcdefklm}(\neg(d^2+e^2+f^2=0)$ & $\neg(k^2+l^2+m^2=0)$ & a – число & b – число & c – число & d – число & e – число & f – число & k – число & l – число & m – число & пропорцнаборы$((a,b,c),(d,e,f))$ & пропорцнаборы$((d,e,f),(k,l,m)) \to$ пропорцнаборы$((a,b,c),(k,l,m))$

2. Усмотрение симметрии: консеквент и антецедент получаются друг из друга переобозначением переменных. Аналогично предыдущему. (Прием попыткаспуска - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abrG}(\text{граф}(G) \to \text{ведет}(r,b,a,G) \leftrightarrow \text{ведет}(r,a,b,G))$

   из теоремы

   $\forall_{Gabr}(\text{граф}(G)$ & $\text{ведет}(r,a,b,G) \to \text{ведет}(r,b,a,G))$

Переобозначение переменных сохраняет антецеденты, но варьирует консеквент

1. Использование симметрии антецедентов для вывода конъюнкции равенств. Консеквент - равенство двух атомарных выражений. Антецеденты содержат все переменные теоремы. Рассматриваются всевозможные переобозначения переменных, переводящие антецеденты в себя. Составляется список соответствующих переобозначенных консеквентов (включая исходную версию). Если этот список более чем одноэлементный, то консеквент исходной теоремы заменяется на конъюнкцию его утверждений. (Прием равны -35).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdeAB}(c$ – точка & b – точка & d – точка & a – точка & $\neg(A=B)$ &
   B – точка & A – точка & $\neg(a=c)$ & $\neg(a=d)$ & $\neg(b=c)$ & $\neg(b=d)$ &
   $a \in$ окружность(AB) & $b \in$ окружность(AB) & $c \in$ окружность(AB) &
   $d \in$ окружность(AB) & $e \in$ отрезок(ad) & $e \in$ отрезок$(bc) \to$
   $\angle(acb)=\angle(adb)$ & $\angle(cad)=\angle(cbd))$

   из теоремы

   $\forall_{abcdeAB}(c$ – точка & b – точка & d – точка & a – точка & $\neg(A=B)$ &
   B – точка & A – точка & $\neg(a=c)$ & $\neg(a=d)$ & $\neg(b=c)$ & $\neg(b=d)$ &
   $a \in$ окружность(AB) & $b \in$ окружность(AB) & $c \in$ окружность(AB) &
   $d \in$ окружность(AB) & $e \in$ отрезок(ad) & $e \in$ отрезок$(bc) \to$
   $\angle(acb)=\angle(adb))$

2. Использование симметрии посылок для усмотрения альтернативного соотношения пропорциональности - первый подслучай. Теорема выводит соотношение

пропорциональности из двух других соотношений пропорциональности. Некоторая перестановка переменных сохраняет прочие антецеденты. Это позволяет получить вывод другого соотношения пропорциональности из двух других соотношений пропорциональности, при тех же значениях переменных, отличных от коэффициентов пропорциональности. Консеквент одного из двух соотношений пропорциональности унифицируется с антецедентом другого, после чего составляется уравнение для вывода нового соотношения пропорциональности. Снова получается теорема, выводящая соотношение пропорциональности из двух других. (Прием смпропорц - 8).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abefABCDEF}(\neg(A=C)\ \&\ \neg(A=E)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(B=D)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AC)=\text{прямая}(BC))\ \&\ al(AF)=bl(DF)\ \&\ el(BF)=fl(EF)\ \&\ D\in\text{отрезок}(BC)\ \&\ E\in\text{отрезок}(AC)\ \&\ F\in\text{прямая}(AD)\ \&\ F\in\text{прямая}(BE)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\rightarrow(bf-ae)l(CD)=e(a+b)l(BD))$

из теоремы

$\forall_{abefABCDEF}(\neg(A=C)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(B=D)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AC)=\text{прямая}(BC))\ \&\ al(AF)=bl(DF)\ \&\ cl(BD)=dl(CD)\ \&\ D\in\text{отрезок}(BC)\ \&\ E\in\text{отрезок}(AC)\ \&\ F\in\text{прямая}(AD)\ \&\ F\in\text{прямая}(BE)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ -\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\rightarrow bdl(CE)=(ac+ad)l(AE))$

В этом примере переставляются местами переменные A, B, а также D, E.

3. Использование симметрии посылок для усмотрения альтернативного соотношения пропорциональности - второй подслучай. Аналогично предыдущему, но из уравнения извлекается соотношение пропорциональности для других атомов. (Прием смпропорц - 9).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdABCDEF}(\neg(A=C)\ \&\ \neg(A=E)\ \&\ \neg(A=F)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(B=D)\ \&\ \neg(B=F)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AC)=\text{прямая}(BC))\ \&\ al(AF)=bl(DF)\ \&\ cl(CE)=dl(AE)\ \&\ D\in\text{отрезок}(BC)\ \&\ E\in\text{отрезок}(AC)\ \&\ F\in\text{прямая}(AD)\ \&\ F\in\text{прямая}(BE)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\rightarrow a(c+d)l(EF)=(bd-ac)l(BF))$

из теоремы

$\forall_{abcdABCDEF}(\neg(A=C)\ \&\ \neg(A=F)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(B=D)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AC)=\text{прямая}(BC))\ \&\ al(AF)=bl(DF)\ \&\ cl(CE)=dl(AE)\ \&\ D\in\text{отрезок}(BC)\ \&\ E\in\text{отрезок}(AC)\ \&\ F\in\text{прямая}(AD)\ \&\ F\in\text{прямая}(BE)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ -\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\rightarrow(bd-ac)(BD)=acl(CD))$

1.9 Переход к эквивалентности с квантором существования

Эквивалентность для решения уравнения позволяет получить условие существования этого решения

1. Определение условия существования решения. Теорема - эквивалентность, разрешающая утверждение A относительно неизвестной x. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 утверждений, не содержащих x. Решается задача на описание, условиями которой служат утверждения S_1 и конъюнктивные члены заменяющей части. Посылки - утверждения S_2. Единственная неизвестная - x. Она несущественная и из ответа B исключается. Антецедентами становятся утверждения S_2, а консеквентом - эквивалентность "$\exists_x(S_1\ \&\ A) \leftrightarrow B$". (Прием глуб - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abd}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{число} \rightarrow \exists_e(ae+be^2=d\ \&\ e-\text{число}) \leftrightarrow 0 \le 4bd+a^2)$

   из теоремы

   $\forall_{abde}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число} \rightarrow ae+be^2 = d \leftrightarrow 0 \le 4bd+a^2\ \&\ (e=-(a+\sqrt{4bd+a^2})/(2b)\ \vee\ e=(-a+\sqrt{4bd+a^2})/(2b)))$

2. Попытка извлечения параметрического описания из эквивалентности для решения уравнения. Теорема - эквивалентность с консеквентом вида "$x=t \leftrightarrow (y_1=p_1\ \&\ \ldots\ \&\ y_n=p_n\ \&\ A)$". Здесь $x, y_1, \ldots, y_n$ различные переменные, причем x не входит в t. Либо утверждение A имеет связанные переменные, либо его сложность достаточно велика. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих параметры $y_1, \ldots, y_n$, и подсписок S_2 утверждений, не содержащих этих параметров. Проверяется, что из S_2 и правой части консевкента выводятся утверждения S_1. Затем создается импликация с антецедентами S_2 и консеквентом "$\exists_{y_1 \ldots y_n}(x=t\ \&\ S_1) \leftrightarrow A$". (Прием глуб - 24).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_c(\forall_i(i \in \{1,\ldots,l(c)\} \rightarrow l(c(i))=2\ \&\ c(i)-\text{слово})\ \&\ c-\text{слово} \leftrightarrow$
   $\exists_{ab}(c=\text{кортежпар}(a,b)\ \&\ l(a)=l(b)\ \&\ a-\text{слово}\ \&\ b-\text{слово}))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(l(a)=l(b)\ \&\ a-\text{слово}\ \&\ b-\text{слово} \rightarrow c=\text{кортежпар}(a,b) \leftrightarrow$
   $\forall_i(i \in \{1,\ldots,l(c)\} \rightarrow l(c(i))=2\ \&\ c(i)-\text{слово})\ \&\ a=\lambda_i(c(i)(1), i \in \{1,\ldots,l(c)\})$
   $\&\ b=\lambda_i(c(i)(2), i \in \{1,\ldots,l(c)\})\ \&\ c-\text{слово})$

3. Получение параметрического описания с конечным отрезком целых чисел, ориентированного на развертку в дизъюнкцию. Теорема разрешает некоторое утверждение A относительно неизвестной x, имеющей единственное вхождение как в A, так и в заменяющую часть B. Внутри B выделяется подутверждение B_1 вида "$x \in \{t_1,\ldots,t_2\}$". Внутри A рассматривается подвыражение p, содержащее

x, причем такое, что оно имеет единственный параметр y, общий с t_1. Вхождение y в A - единственное. Относительно y решается уравнение $t_1 = 0$. Найденное значение r подставляется вместо y в p, а результат q такой подстановки обозначается новой переменной z. Заменяющая часть преобразуется к виду "$\exists_x(z = q\ \&\ B_1)$", где B_1 - результат подстановки в B выражения r вместо y и упрощения. Результат упрощается. Условие принадлежности "$x \in \{0, \ldots, t\}$"в заменяющей части позволяет компилятору создать прием, разворачивающий квантор существования в конечную дизъюнкци. (Прием глуб - 53).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cmn}(m - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое} \to c \in \{m, \ldots, n\} \leftrightarrow \exists_a(c = a + m\ \&$
$a \in \{0, \ldots, n - m\}))$

из теоремы

$\forall_{abmn}(a - \text{целое}\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ m - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое} \to a + b \in \{m, \ldots, n\} \leftrightarrow$
$a \in \{m - b, \ldots, n - b\})$

4. Попытка извлечения параметрического описания из декомпозирующей эквивалентности для равенства. Консеквент теоремы имеет вид "$(x = t \leftrightarrow A\ \&\ B$", где A - конъюнкция всех членов, содержащих параметры $y_1, \ldots, y_k$ выражения t; переменная x не входит в t. Список антецедентов разбивается на список S_1 всех утверждений, содержащих хотя бы одну переменную $y_1, \ldots, y_k$, и список S_2 остальных утверждений. Проверяется, что утверждение "$\exists_{y_1 \ldots y_k}(S_1\ \&\ A)$" - следствие утверждений S_2, B. Затем создается импликация с антецедентами S_2 и консеквентом "$B \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_k}(x = t\ \&\ S_1)$". (Прием и - 52).

Пример: вывод теоремы

$\forall_c(\text{Dom}(c) = \{1, 2\}\ \&\ c - \text{функция} \leftrightarrow \exists_{ab}(c = (a, b)))$

из теоремы

$\forall_{abc}(c = (a, b) \leftrightarrow a = c(1)\ \&\ b = c(2)\ \&\ \text{Dom}(c) = \{1, 2\}\ \&\ c - \text{функция})$

5. Вывод параметрического описания условия непустоты множества. Теорема - определение условия принадлежности "$x \in t$", где t не содержит x. Определяющая часть A - конъюнкция элементарных утверждений, среди которых встречается равенство некоторой переменной не содержащему ее выражению. Эта переменная других вхождений в A не имеет. Консеквент заменяется на эквивалентность "$(\neg(t = \emptyset) \leftrightarrow \exists_x(A))$". (Прием определение - 104).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{af}(f - \text{функция} \to \neg(\text{слой}(f, a) = \emptyset) \leftrightarrow \exists_x(x \in \text{Dom}(f)\ \&\ a = f(x)))$

из теоремы

$\forall_{afx}(f - \text{функция} \to x \in \text{слой}(f, a) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(f)\ \&\ a = f(x))$

Эквивалентность для решения уравнения позволяет заменить сложное подвыражение в параметрическом описании на новый параметр

1. Исключение простой операции в параметрическом описании. Консеквент теоремы - эквивалентность равенства "$a = f(b_1 \dots b_n)$" утверждению вида "$x = t$ & A". Здесь x - неизвестная, относительно которой разрешается левая часть, a - другая переменная, выражения $b_1, \dots, b_n$ однобуквенные. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих a, и подсписок S_2 остальных утверждений. Проверяется, что утверждения списка S_1 суть следствия утверждений S_2 и "$a = f(b_1 \dots b_n)$". Список S_2 подразбивается на список S_3 утверждений, содержащих x, и список S_4 остальных утверждений. Составляется список S_5, состоящий из утверждений S_1 и конъюнктивных членов утверждения A. Проверяется, что утверждения этого списка не содержат x. Проверяется, что из утверждений S_5, S_4 и $x = t$ выводятся утверждения списка S_3. Затем выбираются новые переменные P, Q, y. Определяется список S_6 результатов замены в утверждениях S_5 переменной a на x, после чего создается импликация с антецедентами S_4 и консеквентом "$\exists_{xy}(P(f(b_1 \dots b_n), y)$ & S_3 & $Q(y)) \leftrightarrow \exists_{xy}(P(x, y)$ & S_6 & $Q(y))$". (Прием глуб - 36).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bde}(b - \text{число}$ & $\neg(b = 0) \rightarrow \exists_{af}(d(a^b)$ & $a - \text{число}$ & $0 < a$ & $e(f)) \leftrightarrow \exists_{af}(d(a)$ & $0 < a$ & $a - \text{число}$ & $e(f)))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}$ & $b - \text{число}$ & $\neg(b = 0)$ & $0 < a$ & $c - \text{число} \rightarrow a^b = c \leftrightarrow a = c^{1/b}$ & $0 < c)$

Квантор существования навешивается на обе части эквивалентности, после чего в одной из частей он исключается

1. Попытка усмотрения условия существования значения переменной. Теорема - определение утверждения A. Определяющая часть - конъюнкция элементарных утверждений. Все параметры антецедентов содержатся в A. Выбирается переменная x определяющей части, и эта часть представляется как конъюнкция B & C, где в B сгруппированы все содержащие x члены. При этом остаток C - следствия из условий на о.д.з. для B. Утверждение A содержит отличную от x переменную. Список антецедентов разбивается на список S_1 всех утверждений, содержащих x, и список S_2 остальных утверждений. Составляется список S_3, полученный добавлением к S_2 онъюнктивных членов B и всех не содержащих x утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. определяющей части. Решается задача на описание с условиями A, S_1 и единственной несущественной неизвестной x. Если ответ C по-прежнему содержит x, предпринимается попытка упростить утверждение $\exists_x(C)$, и C заменяется на результат упрощения. Проверяется, что после этого C не содержит связанных переменных. Затем создается импликация с антецедентами S_3 и консеквентом "$\exists_x(A) \leftrightarrow C$". (Прием определение - 31).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{AB}(B - \text{set} \rightarrow \exists_f(\text{Отображение}(f, A, B)) \leftrightarrow \neg(B = \emptyset)$ & $A - \text{set} \ \vee \ A = \emptyset)$

из теоремы

$\forall_{ABf}(\text{Отображение}(f,A,B) \leftrightarrow f - \text{функция } \& \ \text{Dom}(f) = A \ \& \ B - \text{set } \& \ \text{Val}(f) \subseteq B)$

Вывод параметрического описания при переходе от переменной для набора длины 2 к явному выражению для пары

1. Консеквент теоремы имеет вид "слово(x) & $l(x) = 2$ & $A \leftrightarrow B$". Глубина вхождений x в B равна 1. Выбираются новые переменные a, b. Проверяется, что каждое вхождение переменной x в A имеет вид $x(1)$ либо $x(2)$. Находится результат A_1 замены в A каждого вхождения $x(1)$ на a, а каждого вхождения $x(2)$ - на b. Эатем консеквент заменяется на эквивалентность "$\exists_{ab}(A_1 \ \& \ x = (a,b)) \leftrightarrow B$". (Прием сборка - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abf}(a - \text{set } \& \ b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow \exists_{cd}(f = (c,d) \ \& \ c \in a \ \& \ d \in b))$

   из теоремы

   $\forall_{abf}(a - \text{set } \& \ b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово})$

1.10 Переход к эквивалентности с квантором общности

1. Вывод из определения принадлежности эквивалентности для равенства множеству. Консеквент теоремы имеет вид "$x \in t \leftrightarrow A$". Выбирается новая переменная a, к антецедентам добавляется утверждение "$a - \text{set}$", а консеквент заменяется на "$a = t \leftrightarrow \forall_x(A \leftrightarrow x \in a)$". (Прием принадлежит - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcd}(d - \text{set } \& \ b - \text{set } \& \ c - \text{set } \& \ d = b \cap c \leftrightarrow \forall_a(a \in b \ \& \ a \in c \leftrightarrow a \in d))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(b - \text{set } \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$

2. Вывод из определения принадлежности эквивалентности для включения множества. Консеквент теоремы имеет вид "$x \in t \leftrightarrow A$". Выбирается новая переменная a, к антецедентам добавляется утверждение "$a - \text{set}$", а консеквент заменяется на "$t \subseteq a \leftrightarrow \forall_x(A \rightarrow x \in a)$". Результат упрощается. (Прием принадлежит - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abf}(a - \text{set } \& \ b - \text{set } \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \text{образ}(f,a) \subseteq b \leftrightarrow \forall_y(y \in a \rightarrow f(y) \in b))$

   из теоремы

$\forall_{afx}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \to x \in \text{образ}(f, a)$
$\leftrightarrow \exists_y(y \in a \ \& \ x = f(y)))$

3. Вывод из определения принадлежности эквивалентности для включения в множество. Консеквент теоремы имеет вид "$x \in t \leftrightarrow A$". Выбирается новая переменная a, к антецедентам добавляется утверждение "$a - \text{set}$", а консеквент заменяется на "$a \subseteq t \leftrightarrow \forall_x(x \in a \to A)$". Результат упрощается. (Прием принадлежит - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \to b \subseteq \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow b \subseteq \text{Dom}(f) \ \&$
   $\text{образ}(f, b) \subseteq a)$

   из теоремы

   $\forall_{afx}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \to x \in \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f(x) \in a)$

4. Вывод из определения принадлежности эквивалентности для непересечения с множеством. Консеквент теоремы имеет вид "$x \in t \leftrightarrow A$". Выбирается новая переменная a, к антецедентам добавляется утверждение "$a - \text{set}$", а консеквент заменяется на "$\text{непересек}(a, t) \leftrightarrow \forall_x(A \to \neg(x \in a))$". Результат упрощается. (Прием принадлежит - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcd}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \to \text{непересек}(d, b \cap c) \leftrightarrow \forall_a(a \in b \ \& \ a \in c \to \neg(a \in d)))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \to a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$

1.11 Несколько применений одной и той же теоремы

Усматривается, что можно так проварьировать некоторые переменные теоремы, что часть подвыражений консеквента не изменяют своих значений. Это используется для усмотрения связи между другими подвыражениями консеквента в исходной и проварьированной теоремах

1. Использование неоднозначной определимости объектов для двукратного применения соотношения пропорциональности. Теорема - соотношение пропорциональности. При помощи дополнительной теоремы усматривается возможность некоторый объект антецедентов обозначить по-другому, используя новые переменные (например, выбрать для задания прямой новую точку вместо старой). При соответствующем переобозначении переменных во всей теореме получается ее двойник, дающий новое соотношение пропорциональности. При этом часть переменных исходной теоремы и двойника - общие. Соотношения пропорциональности применяются последовательно и дают новое соотношение пропорциональности. Антцеденты исходной теоремы и ее двойника объединяются. (Прием пропорция - 17).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{abABCDE}(\neg(a = A)\ \&\ \neg(a = D)\ \&\ \neg(b = B)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = D)\ \&$
$\neg(A = E)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AD) = \text{прямая}(AE))\ \&\ a \in \text{прямая}(DE)\ \&$
$b \in \text{прямая}(aA)\ \&\ b \in \text{прямая}(BC)\ \&\ B \in \text{прямая}(AD)\ \&\ C \in \text{прямая}(AE)\ \&$
$a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&$
$E - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(DE) \to l(bB)l(DE) = l(aD)l(BC))$

из теоремы

$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$\neg(A = E)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ B \in \text{прямая}(AD)\ \&$
$\text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC)\ \&\ C \in \text{прямая}(AE)\ \&$
$\neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(AD)) \to l(AB)l(DE) = l(AD)l(BC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&$
$A \in \text{прямая}(BC) \to \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC))$

2. Рассмотрение двух различных конфигураций, дающих одно и то же значение невырожденного числового атома. Консеквент теоремы - равенство невырожденного числового атома A выражению B, содержащему невырожденные числовые атомы. Все они не сложнее атома A. Отсутствуют более чем двуместные отношения в антецедентах. Список $x_1, \ldots, x_k$ переменных выражения B, не входящих в A, непуст. Выбираются новые переменные $y_1, \ldots, y_k$, и определяется результат B_1 переобозначения переменных $x_1, \ldots, x_k$ на $y_1, \ldots, y_k$ в B. Консеквент заменяется на "$(B - B_1 = 0$", а к антецедентам добавляются результаты замены в них переменных $x_1, \ldots, x_k$ на $y_1, \ldots, y_k$. (Прием числзнач - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aABC}(a \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ C \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
   $B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \to -l(aA) - l(aB) + l(AC) + l(BC) = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(C \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \to$
   $l(AB) = l(AC) + l(BC))$

3. Усмотрение сохранения значения выражения при варьировании параметра. В антецедентах теоремы встречается утверждение "$x \in t$", где t не содержит переменной x. Рассматривается список всех прочих содержащих x антецедентов. Каждый из них имеет вид равенства, левая часть которого не содержит x. Рассматривается список $A_1, \ldots, A_k$ этих левых частей и находится список $y_1, \ldots, y_n$ их параметров. Проверяется, что $n > 0$ и переменные y_i не входят в t. Консеквент теоремы имеет вид $p = q$, где q не содержит переменных y_i, а p содержит. Выбираются новые переменные $z_1, \ldots, z_n, s$. К антецедентам добавляются результаты замены в них переменных $y_1, \ldots, y_n, x$ на $z_1, \ldots, z_n, s$ Находится результат p_1 такой же замены в p, и консеквент заменяется на $p = p_1$. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 75).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdestABT}(c = \text{Место}(a, e)$ & $d = \text{Место}(a, e)$ & $A = \text{Место}(a, t)$ &
$B = \text{Место}(b, t)$ & $e \in T$ & $t \in T$ & гибкаясвязь(a, b, s, T) & мточка(a) &
мточка(b) & Числотр$(T) \to l(AB) = l(cd))$

из теоремы

$\forall_{abstAB}(\text{мточка}(a)$ & мточка(b) & Числотр(T) & гибкаясвязь(a, b, s, T) &
$t \in T$ & $A = \text{Место}(a, t)$ & $B = \text{Место}(b, t) \to l(AB) = \text{длина}(s))$

4. Варьирование параметра для получения соотношения с двумя саммыми сложными числовыми атомами. Консеквент теоремы - равенство A, содержащее невырожденные числовые атомы $B_1, \ldots, B_k$; $k \geq 4$. Среди этих атомов имеется такой атом B_i, который имеет три параметра, в то время как каждый из остальных - не более двух. Все операнды атома B_i - переменные. Среди них выбирается такая переменная P, что некоторый атом B_j имеет своими параметрами все отличные от P параметры атома B_i. При этом атом B_j имеет единственное вхождение в консеквент A. Выбирается новая переменная Q, и рассматривается двойник исходной теоремы, полученный из нее заменой переменной P на Q. Составляется объединение S список антецедентов исходной теоремы и ее двойника. Выбирается новая переменная x, и решается задача на исследование, посылки которой - утверждения S, "число(x)", а также результаты замены в консеквентах исходной теоремы и ее двойника вхождения атома B_j на переменную x. Задача решается с целью вывода следствий, не содержащих x. Среди выведенных утверждений выбирается не содержащее x равенство R, в котором встречается как атом B_i, так и результат замены в B_i переменной P на Q. Проверяется, что все параметры R имеются в списке S. Затем создается импликация с антецедентами S и консеквентом R. (Прием числовойатом - 59).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aABC}(\neg(a = B)$ & $\neg(a = C)$ & $\neg(A = B)$ & $\neg(A = C)$ & $a -$ точка &
   $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка $\to 2\cos(\angle(BAC))l(AB)l(AC) - l(AB)^2 -$
   $l(AC)^2 + l(aB)^2 + l(aC)^2 = 2\cos(\angle(BaC))l(aB)l(aC))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $\neg(A = C)$ & $\neg(A = B) \to$
   $2l(AB)l(AC)\cos(\angle(BAC)) = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)$

5. Варьирование элементов, встречающихся в существенных антецедентах лишь внутри заданного терма. Консеквент теоремы - соотношение A для невырожденных числовых атомов. Находится такое бесповторное подвыражение T существенных антецедентов, имеющее непустой список переменных, что эти переменные встречаются в существенных антецедентах только внутри T. По заголовку T находится дополнительная теорема - равенство двух выражений t_1, t_2 с таким заголовком. Переменные ее отличны от переменных исходной теоремы. Выражение t_1 не встречается в антецедентах дополнительной теоремы, а t_2 - встречается. Параметры выражений t_1, t_2 различны. Усматривается, что T получается из t_2 подстановкой P - некоторым переобозначением переменных. Составляется список S, полученный добавлением к антецедентам исходной теоремы результатов применения подстановки P к антецедентам дополнительной теоремы. Выражение t_1 получается из t_2 некоторым переобозначением

переменных. Определяется результат A_1 переобозначения в A тех переменных, которые подставлялись подстановкой P вместо переменных выражения t_1, на соответствующие переменные выражения t_2. Выбирается переменная X, имеющая единственное вхождение как в A, так и в A_1. Затем решается задача на исследование с посылками S, A, A_1, в которой требуется выводить следствия, не содержащие X. Выбирается некоторое такое следствие B - равенство, не содержащее X, при получении которого использовались A и A_1. Для определения списка антецедентов решается еще одна задача на исследование, посылки которой - утверждения S, причем в ней требуется исключить переменную X. После получения результата S_1 к нему добавляются необходимые для сопровождения по о.д.з. утверждения, и выдается результат - импликация с антецедентами S_1 и консеквентом B. Предварительно эта импликация упрощается. (Прием числовойатом - 45).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abABC}(\neg(A = B)\ \&\ a \in \text{прямая}(AB)\ \&\ b \in \text{прямая}(AB)\ \&\ a - \text{точка}\ \&$
$b - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow$
$l(AB)S(\text{фигура}(abC)) = l(ab)S(\text{фигура}(ABC)))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D)\ \&$
$\neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB) \rightarrow$
$2S(\text{фигура}(ABC)) = l(AB)l(CD))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D)\ \&$
$A \in \text{прямая}(CD)\ \&\ B \in \text{прямая}(CD)\ \&\ \neg(A = B) \rightarrow$
$\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD))$

Часть параметров числовых атомов варьируются, к антецедентам добавляются равенства либо соотношения пропорциональности для исходных и проварьированных атомов одной из частей тождества. Они позволяют связать противоположные части тождества

1. Двукратное применение соотношения пропорциональности с отождествлением двух пар числовых атомов. Консеквент теоремы - соотношение пропорциональности для двух невырожденных числовых атомов. Выбирается один из них - некоторый атом A. В противоположной части пропорции один из множителей - функция от более сложного числового атома B. Рассматривается параметр P атома B, не входящий в A, и выбирается новая переменная Q. Вводится двойник теоремы, в котором переменная P переобозначена на Q. Находится новая пропорция R - результат последовательного применения двух исходных, с исключением ненулевого атома A. В каждой ее части - три множителя. Определяется результат B_1 замены в B переменной P на Q. Списки антецедентов исходной теоремы и двойника объединяются, причем добавляются равенство $P = Q$ и необходимое для возможности сокращения пропорции R с использованием указанного равенства условие отличие от 0. Консеквент заменяется на R, и результат упрощается. (Прием пропорция - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aABC}(\neg(a = B)\ \&\ \neg(a = C)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B \in \text{прямая}(AC))\ \&$
$\angle(BaC) = \angle(BAC)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow$
$\sin(\angle(aBC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(aC))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
$\neg(A = C) \rightarrow \sin(\angle(BAC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$

2. Двукратное применение соотношения пропорциональности с отождствлением внутренних числовых атомов и фиксацией отношения внешних. Аналогично предыдущему, но вместо одного сложного числового атома внутри сложного сомножителя пропорции их имеется два. Сокращение не выполняется. К антецедентам добавляется соотношение пропорциональности для двух других числовых атомов, коэффициенты которого обозначены новыми переменными и используются в консеквенте. (Прием пропорция - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdef}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = c)\ \&\ \neg(a = d)\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ \neg(c = d)\ \&$
   $el(bc) = fl(cd)\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&$
   $c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ \text{точкалуча}(c, d, b) \rightarrow f\sin(\angle(acd) + \angle(adc)) \cdot$
   $\sin(\angle(acd) + \angle(bac)) = e\sin(\angle(adc))\sin(\angle(bac)))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = c)\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка} \rightarrow$
   $\sin(\angle(acb) + \angle(bac))l(bc) = \sin(\angle(bac))l(ac))$

3. Усмотрение равенства числовых атомов, выразимых через равные числовые атомы. Теорема выражает невырожденный числовой атом через некоторые другие невырожденные числовые атомы. Рассматривается ее двойник, с полностью переобозначенными переменными. Из равенств числовых атомов заменяющей части их двойникам выводится равенство заменяемого атома его двойнику. (Прием числзнач - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcABC}(l(ab) = l(AB)\ \&\ l(bc) = l(BC)\ \&\ c \in \text{отрезок}(ab)\ \&\ C \in \text{отрезок}(AB)\ \&$
   $a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow$
   $l(AC) = l(ac))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(C \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow$
   $l(AC) = -l(BC) + l(AB))$

4. Усмотрение равенства числовых атомов, выразимых через равные числовые атомы. Аналогично предыдущему, но теорема выражает один атом через другие неявно, через некоторое соотношение. Проверяется, что это соотношение

однозначно разрешается относительно данного атома, и далее - как в предыдущем пункте. (Прием числовойатом - 71).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcABCDE}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(a=c)\ \&\ \neg(b=c)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&$
$\neg(C=E)\ \&\ \neg(D=E)\ \&\ \angle(aAb)=\angle(CAD)\ \&\ a\in$ окружность$(AB)\ \&$
$b\in$ окружность$(AB)\ \&\ c\in$ окружность$(AB)\ \&\ C\in$ окружность$(AB)\ \&$
$D\in$ окружность$(AB)\ \&\ E\in$ окружность$(AB)\ \&\ a-$ точка $\&\ b-$ точка $\&$
$c-$ точка $\&\ A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&\ D-$ точка $\&\ E-$ точка $\&$
разныестороны$(c,A,$ прямая$(ab))\ \&$ разныестороны$(E,A,$ прямая$(CD))\rightarrow$
$\angle(CED)=\angle(acb))$

из теоремы

$\forall_{ABCDE}(A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&\ D-$ точка $\&\ E-$ точка $\&$
$\neg(D=E)\ \&\ \neg(C=E)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ C\in$ окружность$(AB)\ \&$
$D\in$ окружность$(AB)\ \&\ E\in$ окружность$(AB)\ \&$
разныестороны$(E,A,$ прямая$(CD))\rightarrow 2\angle(CED)+\angle(CAD)=2\pi)$

Один из параметроы заменяемой части переобозначается на новую переменную. Затем предпринимается попытка вывести при помощи задачи на исследование из объединенных контекстов исходной и проварьированной теорем следствие, симметричное относительно старого и нового параметров

1. Попытка усмотреть симметричное следствие из двух версия заменяемого утверждения, отличающихся варьированием переменной. Теорема - эквивалентность элементарного утверждения A конъюнкции кванторной импликации B и группы утверждений C. При подстановке вместо переменных связывающей приставки X импликации B в некоторый элементарный антецедент P_1 той импликации получается элементарное утверждение P_2, входяще в группу C. Выбирается переменная x, входящая в A и в некоторое выражение, подставляемое указанной подстановкой вместо переменной списка X. Выбирается новая переменная y Составляется список S, образованный антецедентами исходной теоремы, результатами переобозначения в них x на y, а также утверждениями B, C результатом замены в них x на y. Решается задача на исследование с посылками S. Если в ее списке посылок обнаруживается утверждение R, в которое x, y входят симметрично, то формируется импликация, антецеденты которой - антецеденты исходной теоремы, утверждение A, а также результаты переобозначения в этих утверждениях x на y. Консеквентом служит R. (Прием развертка - 39).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abd}(b-$ set $\&\ b\subseteq\mathbb{R}\ \&$ наименьший$(a,b)\ \&$ наименьший$(d,b)\rightarrow d=a)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(b-$ set $\&\ b\subseteq\mathbb{R}\rightarrow$ наименьший$(a,b)\leftrightarrow a\in b\ \&\ \forall_c(c\in b\rightarrow a\leq c))$

Тождество несколько раз применяется последовательно, каждый раз - к заменяющей части предыдущего результата

1. Попытка повторного применения тождества, разбивающего числовой атом в сумму двух других числовых атомов. Консеквент теоремы имеет вид $A_1 = A_2 + A_3$, где A_1, A_2, A_3 - невырожденные числовые атомы. Теорема применяется для преобразования атома A_2, в результате чего возникает тождество вида $B_1 = B_2 + B_3 + B_4$. (Прием числзнач - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcB}(b \in \text{отрезок}(aB)\ \&\ c \in \text{отрезок}(ab)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \rightarrow l(aB) = l(ac) + l(bc) + l(bB))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(C \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow l(AB) = l(AC) + l(BC))$

2. Исключение промежуточного числового атома при двукратном применении тождества (тождество с двумя атомами). Консеквент теоремы имеет вид $A = B$, где A - невырожденный числовой атом, B - выражение с единственным числовым атомом, отличным от A. Рассматривается заголовок P атома A, и находится дополнительная теорема с консеквентом вида $P(\ldots) = P(\ldots)$. Рассматривается также двойник исходной теоремы, в котором все переменные переобозначены на новые. У этого двойника консеквент имеет вид $A_1 = B_1$. Предпринимается двойная унификация - A с левой частью дополнительной теоремы, а A_1 с правой. Новым консеквентом становится то равенство, в которое $B = B_1$ переводится унифицирующей подстановкой. Список антецедентов комплектуется из списков антецедентов исходной теоремы, ее двойника и дополнительной теоремы, с применением унифицирующей подстановки. Результат упрощается. (Прием числзнач - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cgBCD}(\neg(c = B)\ \&\ \neg(g = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(B = D)\ \&\ B \in \text{отрезок}(cD)\ \&\ B \in \text{отрезок}(gC)\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ g - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \rightarrow \angle(cBg) = \angle(CBD))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(B = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ B \in \text{отрезок}(AC) \rightarrow \angle(ABD) = -\angle(CBD) + \pi)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \neg(A = E)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ \text{точкалуча}(A, B, C)\ \&\ \text{точкалуча}(A, D, E) \rightarrow \angle(BAD) = \angle(CAE))$

3. Исключение промежуточного числового атома при двукратном применении тождества (ождество с более чем двумя атомами). Начало приема аналогично предыдущему приему, но выражение B имеет более одного числового атома.

При этом у дополнительной теоремы лишь одна переменная X встречается одновременно в правой и левой частях равенства. Находится переменная Y, соответствующая при унификации переменной X. Далее предпринимается попытка переформулировать консеквент $B = B_1$ с исключением переменной Y при помощи задачи на исследование. Затем при помощи задачи на описание с несущественной неизвестной Y эта переменная исключается из антецедентов. Результат упрощается. (Прием числзнач - 15).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ghAC}(\neg(g = C)\ \&\ \neg(h = A)\ \&\ \neg(g \in \text{прямая}(hA))\ \&\ \neg(h \in \text{прямая}(gC))\ \&$
$\neg(A \in \text{прямая}(gC))\ \&\ \neg(C \in \text{прямая}(hA))\ \&\ g - \text{точка}\ \&\ h - \text{точка}\ \&$
$A - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \text{разныестороны}(g, C, \text{прямая}(hA))\ \&$
$\text{разныестороны}(h, A, \text{прямая}(gC)) \rightarrow$
$-\angle(gCA) - \angle(hAC) + \angle(ghA) + \angle(hgC) = 0)$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&$
$\neg(A = B) \rightarrow \angle(ABC) = -\angle(ACB) - \angle(BAC) + \pi)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$\neg(A = E)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ A \in \text{отрезок}(BE)\ \&$
$A \in \text{отрезок}(CD) \rightarrow \angle(BAC) = \angle(DAE))$

4. Развязка импликации для вывода равенства, извлеченной из декомпозирующей эквивалентности. Консеквент теоремы имеет вид "$t_1 = t_2 \leftrightarrow A_1\ \&\ \ldots\ A_n$". Списки переменных выражений t_1, t_2 не пересекаются. Каждая переменная списка $x_1, \ldots, x_k$ параметров выражения t_1 встречается в правой части эквивалентности только внутри подвыражения t_1. Подвыражение t_2 в правой части эквивалентности не встречается. Выбираются новые переменные $y_1, \ldots, y_k$, к антецедентам добавляются утверждения $A_1, \ldots, A_n$, а также результаты подстановки $y_1, \ldots, y_k$ вместо $x_1, \ldots, x_k$ во все эти антецеденты и утверждения. Консеквентом становится равенство $t_1 = t_3$, где t_3 - результат подстановки $y_1, \ldots, y_k$ вместо $x_1, \ldots, x_k$ в t_1. (Прием и - 44).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abABCD}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ A \in \text{прямая}(ab)\ \&\ A \in \text{прямая}(CD)$
$\&\ B \in \text{прямая}(ab)\ \&\ B \in \text{прямая}(CD)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
$B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(CD) = \text{прямая}(ab))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D)\ \&$
$\neg(A = B) \rightarrow \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD) \leftrightarrow A \in \text{прямая}(CD)\ \&$
$B \in \text{прямая}(CD))$

5. Вывод из дистрибутивности простейших формул типа "разложения на множители". Теорема - соотношение дистрибутивности. Рассматриваются случаи раскрывания скобок для "произведений", каждый множитель которых имеет от двух до трех "слагаемых". (Прием дистрибразвертка - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abdef}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ e - \text{число } \& \ f - \text{число} \to ad + ae + af + bd + be + bf = (a + b)(d + e + f))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число} \to ab + ac = a(b + c))$

   Заметим, что теоремы такого вида являются отправными пунктами циклов вывода менее тривиальных формул для разложения на множители. Соответствующие приемы пытаются унифицировать пару слагаемых заменяемой части таким образом, чтобы они взаимно уничтожались. Например, из указанной выше теоремы можно после ряда переходов извлечь формулу для суммы либо разности кубов. В случае произведения двух сумм по три слагаемых возникают еще более любопытные разложения, например, для $a^5 - b^5 - ab^4$.

6. Варьирование переменной, входящей в одну часть равенства и не входящей в другую. Консеквент имеет вид $t_1 = t_2$. Некоторая переменная x входит в t_1 и не входит в t_2. Выбирается новая переменная y, к антецедентам добавляются результаты замены в них x на y, а консеквентом становится равенство $t_1 = t_3$, где t_3 получено из t_1 заменой x на y. Результат упрощается. (Прием равны - 36).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aABC}(\neg(a = A) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{окружность}(Aa) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \ a - \text{точка } \& \ A - \text{точка } \& \ B - \text{точка} \to \text{окружность}(AB) = \text{окружность}(Aa))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \ A - \text{точка } \& \ B - \text{точка} \to \text{окружность}(AB) = \text{окружность}(AC))$

Консеквент - равенство двух версий одного и того же выражения, отличающихся тем, что в одном из них параметр для множества T заменен параметром элемента t этого множества. Антецедент "$t \in T$" заменяется на "$S \subseteq T$", и такая же замена t на S выполняется в консеквенте

1. Развязка условия принадлежности в антецедентах. Имеется антецедент вида "$x \in y$", где x, y - переменные. Переменная x в других антецедентах не встречается. Консеквент - равенство $A = B$, причем A содержит y и не содержит x, а B содержит x и не содержит y. Выбирается новая переменная z, условие принадлежности заменяется в антецедентах на включение "$x \subseteq y$, к антецедентам добавляются результаты замены y на z в прочих антецедентах, а консеквент заменяется на $A = A_1$, где A_1 - результат замены в A переменной y на z. Проверяется непустота z. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 74).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abT}(b \subseteq T$ & мточка(a) & равндвиж(a,T) & Числотр(b) & Числотр$(T) \rightarrow$ скорость$(a,b) =$ скорость$(a,T))$

из теоремы

$\forall_{atT}($мточка(a) & Числотр(T) & равндвиж(a,T) & $t \in T \rightarrow$ скорость$(a,T) =$ скорость$(a,t))$

2. Развязка условия принадлежности в антецедентах. Так же, как в предыдущем пункте. Отличие лишь в другой стартовой характеристике теоремы. (Прием Атомарное - 19).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abKT}(b \subseteq T$ & неподв(K,T) & мточка(a) & Равндвиж(a,T) & Числотр(b) & Числотр$(T) \rightarrow$ Скорость$(a,K,b) =$ скорость$(a,K,T))$

из теоремы

$\forall_{aKTt}($мточка(a) & Числотр(T) & неподв(K,T) & Равндвиж(a,T) & $t \in T \rightarrow$ Скорость$(a,K,T) =$ Скорость$(a,K,t))$

Заменяющая часть - кванторная импликация, которая остается истинной при некотором несложном преобразовании. Заменяемая часть исходной теоремы разворачивается в заменяющую, преобразуется указанным образом и снова сворачивается

1. Сохранение свойства функции при навешивании внешней операции. Теорема - эквивалентность, определяющая некоторое свойство P функции f. В антецедентах встречаются утверждения "$f-$функция", "Val$(f) \subseteq A$", где A не содержит f. В прочих антецедентах переменная f встречается только в виде "Dom(f)". В определяющей части функция f встречается либо в виде "Dom(f)", либо в виде "$f(t_1) = f(t_2)$"(быть может, с перегруппировкой ненулевых членов в одной части). Выбираются новые переменные x, g, после чего формируется выражение F вида "$\lambda_x(g(f(x)), x \in$ Dom$(f))$". К антецедентам импликации добавляются утверждения "$g-$функция", "Val$(f) \subseteq$ Dom(g)", "Val$(g) \subseteq A$", а также определяемое утверждение P. Консеквентом становится результат замены в P переменной f на F (Прием определение - 44).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{af}(f-$функция & Dom$(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $a-$функция & Val$(f) \subseteq$ Dom(a) & Val$(a) \subseteq \mathbb{R}$ & четнаяфункция$(f) \rightarrow$ четнаяфункция$(\lambda_b(a(f(b)), b \in$ Dom$(f))))$

из теоремы

$\forall_f(f-$функция & Dom$(f) \subseteq \mathbb{R}$ & Val$(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow$ четнаяфункция$(f) \leftrightarrow$ $\forall_x(x \in$ Dom$(f) \rightarrow -x \in$ Dom(f) & $f(-x) - f(x) = 0))$

2. Перенесение свойства функции на ее сужение. Теорема - эквивалентность, определяющая некоторое свойство P функции f. Определяющая часть - кванторная импликация "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n \to B$". Для каждой переменной x_i некоторое A_j имеет вид "$x_i \in \mathrm{Dom}(f)$" либо "$x_i \subseteq \mathrm{Dom}(f)$". Все остальные A_k содержат f только в виде $f(x_i)$. В антецедентах f встречается либо в виде "$f-$функция", либо в условии включения для ее области определения или множества значений. Внутри B переменная f встречается только в виде $f(y)$, где y - либо некоторое x_i, либо переменная внешнего описателя вида "$\lambda_y(Q, y \in x_i)$". Выбирается новая переменная M, к антецедентам добавляются утверждения "$M - \mathrm{set}$", "$M \subseteq \mathrm{Dom}(f)$" и определяемое утверждение P. Консеквентом становится результат замены в P переменной f на выражение "сужение(f, M)". (Прием развертка - 82).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{af}(a - \mathrm{set} \ \& \ a \subseteq \mathrm{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \to$
   $\text{взаимнооднозначно}(\text{сужение}(f, a)))$

   из теоремы

   $\forall_f(f - \text{функция} \to \text{взаимнооднозначно}(f) \leftrightarrow \forall_{xy}(f(x) = f(y) \ \& \ x \in \mathrm{Dom}(f) \ \&$
   $y \in \mathrm{Dom}(f) \to x = y))$

3. Перенесение свойства семейства на эквивалентное семейство. Теорема - определение некоторого свойства $P(f)$ функции f. Если рассматривать f как семейство, то истинность кванторной импликации в заменяющей части сохраняется при произвольном взаимно-однозначном переобозначении индексов данного семейства (проверяется совокупность условий, накладывающих достаточно сильные ограничения на вхождения f в теорему). Выбирается новая переменная g, к антецедентам теоремы добавляются утверждения "эквсемейства(f, g)" и $P(f)$, а консеквентом становится $P(g)$. (Прием развертка - 83).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aAC}(\mathrm{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ A - \text{функция} \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \&$
   $\text{незавсобытия}(A, C) \ \& \ \text{эквсемейства}(a, A) \to \text{незавсобытия}(a, C))$

   из теоремы

   $\forall_{AC}(A - \text{функция} \ \& \ \mathrm{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \to$
   $\text{незавсобытия}(A, C) \leftrightarrow \forall_x(x \subseteq \mathrm{Dom}(A) \ \& \ x - \mathrm{set} \ \& \ \text{конечное}(x) \ \& \ \neg(x = \emptyset) \to$
   $\text{вероятность}(\bigcap_{y, y \in x} A(y), C) = \prod_{y, y \in x} \text{вероятность}(A(y), C)))$

4. Перенесение определяемого понятия на семейство операций над семействами. Теорема - определение некоторого свойства $P(f)$ функции f. Кванторная импликация в заменяющей части содержит операцию G над конечными подсемействами семейства f, являющуюся обобщением двуместной ассоциативно-коммутативной операции g на наборы произвольной длины. Это инициирует попытку усмотреть из истинности $P(f)$ истинность $P(F)$, где F - семейство результатов применения G к некоторым непересекающимся подсемействам семейства f. Фактически проверяется совокупность достаточно сильных ограничений на теорему, обеспечивающих успех данной попытки. (Прием развертка - 81).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{dAC}(\neg(\emptyset \in \mathrm{Val}(d))$ & $\mathrm{set}_{ab}(a \in \mathrm{Dom}(d)$ & $b \in d(a)) = \mathrm{Dom}(A)$ &
$\mathrm{Val}(A) \subseteq$ события(C) & $A -$ функция & семействомножеств(d) &
верпространство(C) & независобытия(A, C) & конечные$(\mathrm{Val}(d)) \rightarrow$
независобытия$(\lambda_a(\bigcap_{b,b\in d(a)} A(a,b), a \in \mathrm{Dom}(d)), C))$

из теоремы

$\forall_{AC}(A -$ функция & $\mathrm{Val}(A) \subseteq$ события(C) & верпространство$(C) \rightarrow$
независобытия$(A, C) \leftrightarrow \forall_x(x \subseteq \mathrm{Dom}(A)$ & $x -$ set & конечное(x) &
$\neg(x = \emptyset) \rightarrow$ вероятность$(\bigcap_{y,y\in x} A(y), C) = \prod_{y,y\in x}$ вероятность$(A(y), C)))$

5. Перенесений определяемого понятия на семейство операций над двумя наборами. Теорема - определение некоторого свойства $P(f)$ функции f. Кванторная импликация в заменяющей части содержит операцию G над конечными подсемействами семейства f, являющуюся обобщением двуместной ассоциативно-коммутативной операции g на наборы произвольной длины. В предположении, что f - конкатенация двух наборов A, B равной длины, предпринимается попытка усмотреть из истинности $P(f)$ истинность $P(F)$, где F - семейство результатов применения g к элементам наборов A и B, имеющим одинаковые номера. Фактически проверяется совокупность достаточно сильных ограничений на теорему, обеспечивающих успех данной попытки. (Прием развертка - 84).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abC}(\mathrm{Dom}(a) = \mathrm{Dom}(b)$ & $\mathrm{Val}(a) \subseteq$ события(C) & $\mathrm{Val}(b) \subseteq$ события(C) &
   $a -$ слово & $b -$ слово & верпространство(C) & независобытия$(a; b, C) \rightarrow$
   независобытия$(\lambda_d(a(d) \cap b(d), d \in \mathrm{Dom}(b)), C))$

   из теоремы

   $\forall_{AC}(A -$ функция & $\mathrm{Val}(A) \subseteq$ события(C) & верпространство$(C) \rightarrow$
   независобытия$(A, C) \leftrightarrow \forall_x(x \subseteq \mathrm{Dom}(A)$ & $x -$ set & конечное(x) &
   $\neg(x = \emptyset) \rightarrow$ вероятность$(\bigcap_{y,y\in x} A(y), C) = \prod_{y,y\in x}$ вероятность$(A(y), C)))$

6. Перенесение свойства семейства на подсемейство. Теорема - определение некоторого свойства $P(f)$ функции f. Определяющая часть - кванторная импликация. По виду теоремы усматривается, что она сохраняет свою истинность при переходе от f к сужениям f. Выбирается новая переменная a и к антецедентам добавляются утверждения "$a -$ set", "$a \subseteq \mathrm{Dom}(f)$", $P(f)$. Консеквентом становится утверждений вида "$P(\lambda_x(f(x), x \in a))$". (Прием развертка - 90).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{af}($семействомножеств(f) & $a -$ set & $a \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ & несовместны$(f) \rightarrow$
   несовместны$(\lambda_x(f(x), x \in a)))$

   из теоремы

   $\forall_f($семействомножеств$(f) \rightarrow$ несовместны$(f) \leftrightarrow$
   $\forall_{xy}(x \in \mathrm{Dom}(f)$ & $y \in \mathrm{Dom}(f)$ & $\neg(x = y) \rightarrow$ непересек$(f(x), f(y))))$

Усматривается однозначная определимость одного из подвыражений консеквента через другие подвыражения. Из этого выводится равенство копий данного подвыражения при условии равенств копий прочих подвыражений

1. Усмотрение равенства числовых атомов, выразимых с помощью пропорций через равные числовые атомы. Теорема имеет своим консеквентом соотношение пропорциональности "$A \cdot t = B \cdot s$", где t, s - невырожденные числовые атомы; A, B некоторые выражения, содержащие другие невырожденные числовые атомы $p_1, \ldots, p_k$. Выбираются новые переменные - двойники переменных теоремы, входящих в $t, s, p_1, \ldots, p_k$. К антецеденту добавляются двойники условий на исходные переменные, равенства атомов $p_1, \ldots, p_k$ их двойникам, равенство атома s его двойнику и условие отличия от нуля выражения A. Консеквентом становится равенство атома t его двойнику. (Прием пропорция - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdef}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = c)\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ \neg(d = f)\ \&\ \neg(e \in \text{прямая}(df))\ \&$
   $l(ac) = l(df)\ \&\ \angle(acb) = \angle(dfe)\ \&\ \angle(bac) = \angle(edf)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&$
   $c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ f - \text{точка} \rightarrow l(bc) = l(ef))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = c)\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка} \rightarrow$
   $\sin(\angle(acb) + \angle(bac))l(bc) = \sin(\angle(bac))l(ac))$

2. Вывод равенства числовых атомов, однозначно определяемых прочими параметрами. Теорема - определение некоторого объекта A через равенство R в консеквенте,причем фактически определяется лишь некоторая численная характеристика B объекта A. B - невырожденный числовой атом, имеющий единственный параметр x, встречающийся в консеквенте лишь однократно. Проверяется, что равенство R позволяет однозначно определить значение B. Выбирается новая переменная y, и вводится числовой атом B_1, полученный из B заменой x на y. К антецедентам теоремы добавляются результаты замены в них переменной x на y, после чего консеквент заменяется на равенство $B = B_1$. (Прием определение - 205).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{KTab}(\text{неподв}(b, T)\ \&\ \text{неподв}(K, T)\ \&\ \text{мточка}(a)\ \&\ \text{Числотр}(T)\ \&\ \text{мтело}(b)\ \&$
   $\text{мтело}(K) \rightarrow \text{длина}(\text{Скорость}(a, K, T)) = \text{длина}(\text{Скорость}(a, b, T)))$

   из теоремы

   $\forall_{KTast}(s - \text{число}\ \&\ t - \text{число}\ \&\ \text{мточка}(a)\ \&\ \text{Числотр}(T)\ \&\ \text{мтело}(K)\ \&$
   $T = [t, s]\ \&\ \text{неподв}(K, T) \rightarrow l(\text{Место}(a, t)\text{Место}(a, s)) =$
   $\text{длина}(\text{Скорость}(a, K, T))\text{длина}(T))$

Преобразование заменяющей части тождества и обратная свертка

1. Попытка "домножить" один из членов семейства на константный параметр при вычислении операции над конечным семейством. Теорема - равенство с операцией над семейством в определяющей части. Внутри этой части расположена

еще одна операция f над конечным семейством P. Операция f - обобщение двуместной ассоциативно- коммутативной операции g на наборы произвольной длины. Общий член $P(i)$ семейства P заменяется на условное выражение "$(g(b, P(i))$ при $i = a,$ иначе $P(i))$". Здесь a, b - новые переменные. После упрощения новую определяющую часть удается свернуть с помощью исходного определения. (Прием описатель - 75).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abnA}(b -$ число & $a -$ натуральное & $a \leq n$ & матр$(A, \mathbb{R}, n, n) \rightarrow$
$\det(\lambda_{de}((bA(a, e)$ при $a = d,$ иначе $A(d, e)), d \in \{1, \ldots, n\}$ & $e \in \{1, \ldots, n\})) =$
$b\det(A))$

из теоремы

$\forall_{An}(n -$ натуральное & матр$(A, \mathbb{R}, n, n) \rightarrow \det(A) =$
$\sum_{p,\text{перестановка}(p,\{1,\ldots,n\})}((-1)^{\text{четность}(p)} \prod_{i=1}^{n} A(i, p(i))))$

2. Попытка замены варьируемой переменной в операции над конечным семейством и обратной свертки. Теорема - равенство с операцией над семейством Q в определяющей части. Внутри этой части расположена еще одна операция f над конечным семейством P. Операция f - обобщение двуместной ассоциативно-коммутативной операции g на наборы произвольной длины. Общий член семейства P содержит неоднобуквенный подтерм t, содержащий как варьируемую переменную x семейства P, так и варьируемую переменную семейства Q, причем x входит в t однократно. Выбирается новая переменная y, и для перехода во внутреннем семействе P к новоум параметру y решается уравнение $t = y$ с неизвестной x. После замены переменной и упрощений результат сворачивается при помощи исходного определения. (Прием описатель - 77).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{nA}(\text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \rightarrow \det(A) = \det(\lambda_{bd}(A(d, b), b \in \{1, \ldots, n\}$ & $d \in \{1, \ldots, n\})))$

из теоремы

$\forall_{An}(n -$ натуральное & матр$(A, \mathbb{R}, n, n) \rightarrow \det(A) =$
$\sum_{p,\text{перестановка}(p,\{1,\ldots,n\})}((-1)^{\text{четность}(p)} \prod_{i=1}^{n} A(i, p(i))))$

3. Попытка использовать дистрибутивность при вычислении операции над конечным семейством. Теорема - равенство с операцией F над семейством Q в определяющей части. Внутри этой части расположена еще одна операция G над конечным семейством P. Операции F, G - обобщения двуместынх ассоциативно-коммутативных операций f, g на наборы произвольной длины. При этом имеет место дистрибутивность g относительно f. Некоторый элемент семейства g представляется как результат применения операции f к двум объектам, после чего используется дистрибутивность, и после упрощений предпринимается свертка исходным определением каждого из двух корневых f - членов. (Прием описатель - 78).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcdnA}(\forall_e(e \in \{1,\ldots,n\} \to A(e,d) = b(e)+c(e))$ & $d-$натуральное & кортеж$(b,n,\mathbb{R})$ & кортеж$(c,n,\mathbb{R})$ & $d \le n$ & матр$(A,\mathbb{R},n,n) \to \det(A) = \det(\lambda_{fh}((b(f)$ при $d = h,$ иначе $A(f,h)), f \in \{1,\ldots,n\}$ & $h \in \{1,\ldots,n\})) + \det(\lambda_{gj}((c(g)$ при $d = j,$ иначе $A(g,j)), g \in \{1,\ldots,n\}$ & $j \in \{1,\ldots,n\})))$

из теоремы

$\forall_{An}(n -$ натуральное & матр$(A,\mathbb{R},n,n) \to \det(A) = \sum_{p,\text{перестановка}(p,\{1,\ldots,n\})}((-1)^{\text{четность}(p)} \prod_{i=1}^{n} A(i,p(i))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число $\to ab + ac = a(b + c))$

4. Попытка применить перестановку индексов для конечной операции и поглотить ее внешней варьируемой перестановкой. Теорема - равенство с операцией F над семейством Q в определяющей части. Индексами семейства Q служат перестановки. Предпринимается попытка замены семейства индексов путем домножения варьируемых перестановок на фиксированную перестановку. После упрощений выполняется обратная свертка по определению. (Прием описатель - 74).

5. Использование тождества с бесповторной переменной - корневым операндом ассоциативно-коммутативной операции. Тождество в консеквенте имеет вид "$f(\ldots x \ldots) = A$", где x - переменная, не имеющая других вхождений в левую часть и имеющая единственное вхождение в правую. Операция f ассоциативная и коммутативная. Выбирается новая переменная y Находятся результаты A_1 и A_2 подстановки в A вместо x, соответственно, выражения $f(x,y)$ и y. Консеквентом становится равенство $A_1 = f(x,A_2)$, а к антецедентам добавляются утверждения, необходимые для двукратного применения исходного тождества. Результат упрощается. (Прием нормализация - 148).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a -$ целое & $b -$ целое $\to$ нод$(a,b) =$ нод$(b,|a|))$

   из теоремы

   $\forall_b(\neg(b = 0)$ & $b -$ целое $\to$ нод$(b,0) = |b|)$

Определяемое понятие применяеся к некоторой стандартной операции над своим аргументом, после чего заменяющая часть упрощается и сворачивается обратно

1. Рассмотрение обратной функции. Определяется характеристика функции. Предпринимается попытка применить это определение к обратной функции и, после упрощений, выразить определяющую часть через ту же характеристику исходной функции. (Прием описатель - 16).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{an}($перестановка$(a,\{1,\ldots,n\})$ & $n -$ целое & $0 \le n \to$ числоинверсий(обрфункция$(a)) =$ числоинверсий$(a))$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{слово } \& \ \text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R} \to \text{числоинверсий}(a) = \text{card}(\text{set}_{ij}(i \in \{1, \ldots, l(a)\} \ \& \ j \in \{i+1, \ldots, l(a)\} \ \& \ a(j) < a(i))))$

Прочие случаи

1. Усмотрение эквивалентности, сводящей равенство значений операции к равенству ее аргументов. Консеквент теоремы имеет вид "$a = t \leftrightarrow x = p \ \& \ A$", где x - неизвестная, a - переменная, не встречающаяся в антецедентах, единственный параметр неоднобуквенного выражения t - переменная x, а единственный параметр p - переменная a. Вводится двойник исходной теоремы, полученный переобозначением переменных на новые переменные. Его консеквент - "$a_1 = t_1 \leftrightarrow x_1 = p_1 \ \& \ A_1$". Выводится импликация, антецеденты которой - объединение антецедентов исходной теоремы и ее двойника, а консеквент - "$t = t_1 \leftrightarrow x = x_1$". (Прием глуб - 29).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ac}(a - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ 0 \le a+1 \ \& \ 0 \le c+1 \ \& \ 0 \le -a+1 \ \& \ 0 \le -c+1 \to \arcsin a = \arcsin c \leftrightarrow a = c)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ 0 \le a+1 \ \& \ 0 \le -a+1 \to b = \arcsin a \leftrightarrow a = \sin b \ \& \ b - \text{число } \& \ 0 \le b + \pi/2 \ \& \ 0 \le -b + \pi/2)$

2. Получение перестановочного тождества при альтернативной общей стандартизации. Заменяемая часть тождества общей стандартизации имеет подтерм вида $f(x, t(y))$, где f - ассоциативная и коммутативная операция, x - уникальная переменная, $t(y)$ - выражение с некоторой другой уникальной переменной y. Выбирается новая переменная z, подтерм $f(x, t(y))$ заменяется на $f(x, t(z), t(y))$, и исходное тождество применяется двумя разными способами - относительно $t(y)$ либо $t(z)$. Равенство двух полученных результатов становится консеквентом новой теоремы. (Прием нормализация - 54).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acde}(\neg(d-1=0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < e \ \& \ a - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ e - \text{число} \to e^{c \log_d a} = a^{c \log_d e})$

   из теоремы

   $\forall_{cde}(\neg(d-1=0) \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < e \ \& \ c - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ e - \text{число} \to d^{c \log_d e} = e^c)$

3. Усмотрение монотонности определяемого предиката относительно включения множеств. Определяющая часть эквивалентности содержит кванторную импликацию, некоторый антецедент которой имеет вид "$x \in y$" либо "$x \subseteq y$". Это инициирует проверку того, что определяющая часть сохраняет истинность при переходе от y к подмножествам y. Выбирается новая переменная z, к антецедентам добавляются утверждение "$z \subseteq y$" и определяемое утверждение

A. Консеквентом становится результат замены в A переменной y на z. (Прием определение - 213).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abd}(a-\text{set}\ \&\ d-\text{set}\ \&\ a \subseteq \mathbb{R}\ \&\ d \subseteq a\ \&\ \text{нижняягрань}(b,a) \to \text{нижняягрань}(b,d))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a-\text{set}\ \&\ a \subseteq \mathbb{R} \to \text{нижняягрань}(b,a) \leftrightarrow b-\text{число}\ \&\ \forall_c(c \in a \to b \leq c))$

4. Усмотрение сохранения истинности определяемого утверждения при переходе к надмножеству. В определяющей части встречается подутверждение вида "$t \in x$" либо "$t \subseteq x$", где x - переменная, входящая в определяемую часть A. Проверяется, что определяющая часть остается истинной при переходе от x к надмножеству x. Выбирается новая переменная y, к антецедентам добавляются утверждения A, "$y \subseteq z$", а консеквентом становится результат замены в A переменной x на y. Список антецедентов упрощается. (Прием определение - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(b-\text{set}\ \&\ c-\text{set}\ \&\ d-\text{set}\ \&\ a \in b \cap c\ \&\ b \subseteq d \to a \in d \cap c)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(b-\text{set}\ \&\ c-\text{set} \to a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b\ \&\ a \in c)$

1.12 Переход к импликации от эквивалентности

1.12.1 Эквивалентность для конъюнкции

Заменяемая часть эквивалентности переводится в антецеденты, а консеквентом становится один из конъюнктивных членов заменяющей части либо его простое следствие

1. Извлечение из декомпозирующей эквивалентности импликации для приема вывода. Теорема - эквивалентность некоторого утверждения A конъюнкции B_1 & ... & B_n таких утверждений, что их сложности не превосходят сложности утверждения A. Утверждение A добавляется к антецедентам, а консеквентом становится некоторое B_i. Результат упрощяется. (Прием и - 46).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(b-\text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{наименьший}(a,b) \to \text{нижняягрань}(a,b))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(b-\text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R} \to \text{наименьший}(a,b) \leftrightarrow a \in b\ \&\ \text{нижняягрань}(a,b))$

2. Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, заменяемая часть которой имеет вид конъюнкции, импликации для приема вывода конъюнктивного члена (с нормализацией теоремы). Выбирается такой конъюнктивный член A

заменяемой части, оценка сложности которого не превосходит оценки сложности заменяющей части. Заменяющая часть добавляется к антецедентам, а консеквентом становится A. Результат упрощается. (Прием общнорм - 43).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABC}(C \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow$
$l(AB) = l(AC) + l(BC))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \rightarrow C \in \text{отрезок}(AB) \leftrightarrow C - \text{точка}\ \&$
$l(AB) = l(AC) + l(BC))$

3. Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, заменяемая часть которой имеет вид конъюнкции, импликации для приема вывода конъюнктивного члена (без нормализацией теоремы). Аналогично предыдущему, но вместо упрощения всей результирующей импликации упрощаются только ее антецеденты. Проверяется, что среди упрощенных антецедентов нет равенства переменной не содержащему ее выражению и нет консеквента A. (Прием общнорм - 63).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_d(d - \text{число}\ \&\ \sin d \leq 0\ \&\ \cos d \leq 0\ \&\ \neg(\sin(2d) = 0) \rightarrow \cos d < 0)$

   из теоремы

   $\forall_d(d - \text{число}\ \&\ \sin d \leq 0\ \&\ \cos d \leq 0 \rightarrow 0 < \sin(2d) \leftrightarrow \sin d < 0\ \&\ \cos d < 0)$

4. Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, заменяемая часть которой имеет вид конъюнкции, импликации с конъюнктивным членом заменяемой части в консеквенте. Проверяется, что оценка сложности заменяющей части не больше, чем заменяемой. Выбирается такой имеющий единственную переменную конъюнктивный член A заменяемой части, для усмотрения истинности которого существует проверочный оператор. Заменяющая часть добавляется к антецедентамЮ а консеквентом становится A. Результат упрощается. (Прием общнорм - 78).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_n(n - \text{натуральное} \rightarrow 0 \leq n - 1)$

   из теоремы

   $\forall_n(n - \text{целое}\ \&\ 0 \leq n - 1 \leftrightarrow n - \text{натуральное})$

5. Извлечение из эквивалентности с конъюнкцией в заменяющей части импликации для усмотрения конъюнктивного члена определяющей части. Теорема - определение элементарного утверждения A. Определяющая часть имеет своим конъюнктивным членом элементарное утверждение B, не являющееся равенством. Утверждение A добавляется к антецедентам, а консеквентом становится B. Результат упрощается. (Прием определение - 197).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{afx}(a - \text{set} \ \& \ x \in \text{прообраз}(f, a) \ \& \ f - \text{функция} \to x \in \text{Dom}(f))$

из теоремы

$\forall_{afx}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \to x \in \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f(x) \in a)$

6. Вывод утверждения о типе значения переменной - надтипе явно указанного в определении типа. Теорема - определение утверждения A. Среди конъюнктивных членов определяющей части встречается утверждение $p(t)$, где p - тип объекта. Для каждого надтипа q типа p создается импликация, полученная из исходной добавлением к антецедентам утверждения A и заменой консеквента на $q(t)$. (Прием определение - 163).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ f \in a \times b \to f - \text{функция})$

   из теоремы

   $\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \to f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово})$

7. Конъюнктивный член определяющей части эквивалентности - равенство двух множеств A, B. Условие принадлежности новой переменной x множеству B разворачивается в квантор существования. К антецедентам добавляются все подкванторные утверждения и определяемое утверждение. Консеквентом становится утверждение "$x \in A$". Результат упрощается. (Прием определение - 227).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(a - \text{set} \ \& \ c \in d \ \& \ d \in b \ \& \ \text{разбиение}(a, b) \to c \in a)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set} \to \text{разбиение}(a, b) \leftrightarrow \text{классмножеств}(b) \ \& \ \text{Разделимы}(b) \ \& \ a = \bigcup_{x, x \in b} x)$

8. Конъюнктивный член определяющей части эквивалентности - равенство двух множеств A, B. Условие принадлежности новой переменной x множеству B разворачивается в квантор существования. К антецедентам добавляются не содержащие x подкванторные утверждения и определяемое утверждение. Создается импликация "$\forall_x(C_1 \ \& \ \ldots \ \& \ C_n \to x \in A)$", где $C_1, \ldots, C_n$ - все содержащие x подкванторные утверждения квантора существования. Эта импликация сворачивается задачей на преобразование в элементарное утверждение, которое и становится консеквентом новой теоремы. Результат упрощается. (Прием определение - 228).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abd}(a - \text{set} \ \& \ d \in b \ \& \ \text{разбиение}(a, b) \to d \subseteq a)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set} \to \text{разбиение}(a, b) \leftrightarrow \text{классмножеств}(b) \ \& \ \text{Разделимы}(b) \ \& \ a = \bigcup_{x, x \in b} x)$

9. Вывод условия принадлежности значения функции ее области значений. Теорема - определение некоторого утверждения A. Определяющая часть имеет конъюнктивные члены "$f -$ функция", "$\mathrm{Dom}(f) = B$", "$\mathrm{Val}(f) \subseteq C$". Выбирается новая переменная x. К антецедентам добавляются утверждения A, "$x \in B$", а консеквентом становится "$f(x) \in C$". (Прием определение - 203).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{afAB}(a \in A \ \&\ \text{Отображение}(f, A, B) \to f(a) \in B)$

   из теоремы

   $\forall_{fAB}(\text{Отображение}(f, A, B) \leftrightarrow f - \text{функция} \ \&\ \mathrm{Dom}(f) = A \ \&\ B - \text{set} \ \&\ \mathrm{Val}(f) \subseteq B)$

10. Эквивалентность для кванторной расшифровки с конъюнкцией в заменяющей части порождает кванторную импликацию с кванторным консеквентом. Теорема - эквивалентность элементарного утверждения A конъюнкции, среди членов которой имеется утверждение B с кванторным заголовком. К антецедентам теоремы добавляется A, а консеквентом становится B. (Прием развертка - 21).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_a(\text{убывмножества}(a) \to \forall_{ij}(i \in \mathbb{N} \ \&\ j \in \mathbb{N} \ \&\ i < j \to a(j) \subseteq a(i)))$

    из теоремы

    $\forall_a(\text{убывмножества}(a) \leftrightarrow \text{семействомножеств}(a) \ \&\ \mathrm{Dom}(a) = \mathbb{N} \ \&\ \forall_{ij}(i \in \mathbb{N} \ \&\ j \in \mathbb{N} \ \&\ i < j \to a(j) \subseteq a(i)))$

11. Извлечение простой импликации из эквивалентности для кванторной расшифровки, имеющей элементарный конъюнктивный член заменяющей части. Теорема - эквивалентность элементарного утверждения A конъюнкции, среди членов которой имеется элементарное утверждение B. В прочих членах данной конъюнкции встречаются кванторы. К антецедентам теоремы добавляется A, а консеквентом становится B. (Прием развертка - 36).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ab}(b - \text{set} \ \&\ b \subseteq \mathbb{R} \ \&\ \text{наименьший}(a, b) \to a \in b)$

    из теоремы

    $\forall_{ab}(b - \text{set} \ \&\ b \subseteq \mathbb{R} \to \text{наименьший}(a, b) \leftrightarrow a \in b \ \&\ \forall_c(c \in b \to a \leq c))$

12. Теорема - эквивалентность элементарного утверждения A утверждению B, содержащему кванторы. Конъюнктивным членом утверждения B служит кванторная импликация K, консеквент Q которой имеет лишь часть переменных связывающей приставки. При помощи задачи на исследование определяется список C следствий антецедентов импликации K, содержащих переменные связывающей приставки этой импликации, причем только такие, которые входят в Q. Формируется импликация с антецедентами C и отрицанием Q в качестве консеквента. Она сворачивается в бесквантное утверждение и добавляется

к антецедентам теоремы вместе с A. Новым консеквентом становится отрицание конъюнкции антецедентов импликации K. Результат упрощается. (Прием развертка - 92).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(\text{card}(\text{вершины}(a)) = 1 \ \& \ \text{простграф}(a) \rightarrow \text{ребра}(a) = \emptyset)$

из теоремы

$\forall_a(\text{простграф}(a) \leftrightarrow \text{граф}(a) \ \& \ \forall_{pbc}(\text{ведет}(p, b, c, a) \rightarrow \neg(b = c)) \ \&$
$\forall_{pqbc}(\text{ведет}(p, b, c, a) \ \& \ \text{ведет}(q, b, c, a) \rightarrow p = q))$

Заменяющая часть эквивалентности переносится в антецеденты, а консеквентом становится заменяемая часть

1. Извлечение из эквивалентности конъюнктивной декомпозиции, заменяемая часть которой есть равенство, тождества общей стандартизации. Заменяемая часть теоремы - равенство либо отрицание равенства. В первом случае заменяюшая часть, а во втором - отрицание заменяющей части добавляется к антецедентам, причем консеквентом становится равенство. Результат упрощается; проверяется, что после этого возникает тождество общей стандартизации. (Прием и - 58).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \&$
   $\text{точкалуча}(B, A, C) \rightarrow \angle(ABC) = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow$
   $\angle(ABC) = 0 \leftrightarrow C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \neg(B \in \text{интервал}(AC)))$

2. Извлечение из декомпозирующей эквивалентности импликации для проверочного оператора. Теорема - эквивалентность элементарного утверждения A конъюнкции утверждений $B_1, \ldots, B_n$. В качестве консеквента C новой теоремы выбирается либо A, либо отрицание A. Проверяется, что для усмотрения истинности C существует проверочный оператор. Если C равно A, то к антецедентам добавляются утверждения $B_1, \ldots, B_n$. Иначе - отрицание некоторого B_i. Антецеденты упрощаются. Проверяется неизбыточность теоремы для создания приема проверочного оператора. (Прием и - 31).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ \neg(a \in b) \rightarrow \neg(a \in b \cap c))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$

3. Извлечение из декомпозирующей эквивалентности импликации для приема вывода. Заменяемая часть - бесповторное утверждение A, оценка сложности которого не меньше оценки сложности заменяющей части. Либо теорема является определением, либо среди конъюнктивных членов заменяющей части нет ни одного, содержащего все параметры утверждения A. Конъюнктивные члены заменяющей части добавляются к антецедентам, а консеквентом становится A. Результат упрощается. Теорема ориентируется на создание только приемов вывода. (Прием и - 59).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ A\in\text{прямая}(CD)\ \&\ B\in\text{прямая}(CD)\ \&$
   $A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\rightarrow\text{прямая}(AB)=\text{прямая}(CD))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\neg(C=D)\ \&$
   $\neg(A=B)\rightarrow\text{прямая}(AB)=\text{прямая}(CD)\leftrightarrow A\in\text{прямая}(CD)\ \&$
   $B\in\text{прямая}(CD))$

4. Извлечение из декомпозирующей эквивалентности импликации для вывода равенства. Заменяемая часть - равенство. Конъюнктивные члены заменяющей части добавляются к антецедентам, а консеквентом становится заменяемая часть. Результат упрощается. Теорема ориентируется на создание только приемов вывода. (Прием и - 30).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABD}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=D)\ \&\ l(AB)=l(AD)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&$
   $D-\text{точка}\rightarrow\text{окружность}(AB)=\text{окружность}(CD)$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \neg(C=D)\ \&$
   $\neg(A=B)\rightarrow\text{окружность}(AB)=\text{окружность}(CD)\leftrightarrow A=C\ \&\ l(AB)=l(CD))$

5. Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, заменяемая часть которой имеет вид конъюнкции элементарных утверждений, импликации с заменяющей частью в консеквенте (с предобработкой антецедентов). Проверяется, что оценка сложности заменяемой части не меньше оценки сложности заменяющей. Конъюнктивные члены заменяемой части добавляются к антецедентам, которые после этого упрощаются. Консеквентом становится заменяющая часть. Теорема еще раз упрощается. (Прием общнорм - 48).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_d(\sin d<0\ \&\ \cos d<0\ \&\ d-\text{число}\rightarrow 0<\sin(2d))$

   из теоремы

   $\forall_d(d-\text{число}\ \&\ \sin d\leq 0\ \&\ \cos d\leq 0\rightarrow 0<\sin(2d)\leftrightarrow\sin d<0\ \&\ \cos d<0)$

6. Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, заменяемая часть которой имеет вид конъюнкции элементарных утверждений, импликации с заменяющей частью в консеквенте (без предобработки антецедентов). Аналогично предыдущему, но предварительного упрощения новых антецедентов не происходит. (Прием общнорм - 77).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(0 < a \ \& \ a - \text{целое} \rightarrow a - \text{натуральное})$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{целое} \ \& \ 0 < a \leftrightarrow a - \text{натуральное})$

7. Извлечение из эквивалентности с конъюнкцией в заменяющей части импликации для усмотрения определяемого отношения. Конъюнктивные члены заменяющей части добавляются к антецедентам, причем предпринимается переобозначение связанных переменных кванторных импликаций в антецедентах на новые переменные. Консеквентом становится заменяемая часть. Результат упрощается. (Прием определение - 137).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \in b \ \& \ \text{нижняягрань}(a, b) \rightarrow \text{наименьший}(a, b))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{наименьший}(a, b) \leftrightarrow a \in b \ \& \ \forall_c(c \in b \rightarrow a \leq c))$

8. Переход от эквивалентности, у которой в заменяющей части находится конъюнкция равенств для параметров заменяемой части, к импликации с заменяемой частью в консеквенте. Заменяющая часть импликации - конъюнкция равенств, определяющих значения некоторых параметров заменяемой части. Все эти равенства добавляются к антецедентам, а консеквентом становится заменяемая часть. (Прием уменьшение - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abfAB}(f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{C} \ \& \ A - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ B - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \lim_{(x,y)\rightarrow(a,b)}\text{вещчастьфунк}(f)(x, y) = A \ \& \ \lim_{(x,y)\rightarrow(a,b)}\text{мнимчастьфунк}(f)(x, y) = B \rightarrow \lim_{z\rightarrow a+b\imath} f(z) = A + B\imath)$

   из теоремы

   $\forall_{abfAB}(f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{C} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{C} \ \& \ A - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ B - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \lim_{z\rightarrow a+b\imath} f(z) = A + B\imath \leftrightarrow \lim_{(x,y)\rightarrow(a,b)}\text{вещчастьфунк}(f)(x, y) = A \ \& \ \lim_{(x,y)\rightarrow(a,b)}\text{мнимчастьфунк}(f)(x, y) = B)$

Отрицание конъюнктивного члена заменяющей части переносится в антецеденты, а консеквентом становится отрицание заменяемой части

1. Фиксация переменной посредством равенства из декомпозирующей части эквивалентности. Конъюнктивным членом заменяющей части служит утверждение вида "$\neg(x = t)$", где t не содержит x. Равенство $x = t$ добавляется к антецедентам, а консеквентом становится отрицание заменяемой части. Результат упрощается. (Прием и - 34).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{BC}(B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \neg(\triangle(BBC)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \triangle(ABC) \leftrightarrow \neg(A = B) \ \& \ \neg(C \in \text{прямая}(AB)))$

Конъюнктивный член заменяющей части разворачивается в кванторную импликацию, а заменяемая часть добавляется к антецедентам

1. Попытка кванторной расшифровки конъюнктивного члена заменяющей части эквивалентности. Выбирается конъюнктивный член заменяющей части, который при помощи задачи на описание разворачивается в кванторную импликацию "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n \rightarrow A_0)$". Утверждения $A_1, \ldots, A_n$ и заменяемая часть добавляются к антецедентам. Список антецедентов упрощается. Консеквентом становится A_0. (Прием и - 54).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aABCD}(\neg(C = D) \ \& \ \neg(A \in \text{прямая}(CD)) \ \& \ \neg(B \in \text{прямая}(CD)) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \ \& \ a \in \text{прямая}(CD) \rightarrow \neg(a \in \text{отрезок}(AB)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(C = D) \ \& \ \neg(A \in \text{прямая}(CD)) \ \& \ \neg(B \in \text{прямая}(CD)) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \leftrightarrow B \in \text{плоскость}(ACD) \ \& \ \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(AB)))$

Конъюнктивный член заменяющей части становится консеквентом, а заменяемая часть переводится в антецеденты

1. Вывод условий на известные параметры, при которых решение существует. Теорема - эквивалентность, разрешающая некоторое утверждение A относительно переменной x. Выбирается конъюнктивный член заменяющей части, не содержащий x. Этот член становится консеквентом, а к антецедентам добавляется A. (Прием глуб - 57).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abde}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ ea + be^2 = d \rightarrow 0 \leq 4bd + a^2)$

из теоремы

$\forall_{abde}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\rightarrow$
$ea+be^2=d\leftrightarrow 0\leq 4bd+a^2\ \&\ (e=-(a+\sqrt{4bd+a^2})/2b\vee e=(-a+\sqrt{4bd+a^2})/2b))$

Попытка подбора значений, опровергающих квантор существования в конъюнктивных членах заменяющей части, после чего выводится отрицание заменяемой части

1. Конъюнктивным членом заменяющей части служит квантор существования. Рассматривается конъюнктивный член A подкванторного утверждения U, и находится дополнительная теорема, выводящая такое утверждение $\neg(B)$, что некоторая подстановка S переводит A в B. При этом переменные связывающей приставки квантора существования преобразуются в некоторые переменные $x_1,\ldots,x_k$. Вводится кванторная импликация по $x_1,\ldots,x_k$, антецедентами которой служат результаты применения S к отличным от A членам утверждения U, а консеквентом - конъюнкция содержащих $x_1,\ldots,x_k$ антецедентов дополнительной теоремы. Эта импликация упрощается и возникает элементарное утверждение R. Антецеденты исходной теоремы обрабатываются подстановкой S, к ним добавляются не содержащие $x_1,\ldots,x_k$ антецеденты дополнительной теоремы и утверждение R. Консеквентом становится отрицание заменяемой части исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием развертка - 93).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{de}(\text{граф}(e)\ \&\ \text{ациклический}(e)\rightarrow\neg(\text{смежны}(d,d,e)))$

   из теоремы

   $\forall_{abG}(\text{граф}(G)\rightarrow\text{смежны}(a,b,G)\leftrightarrow a\in\text{вершины}(G)\ \&\ b\in\text{вершины}(G)\ \&$
   $\exists_r(r\in\text{ребра}(G)\ \&\ \text{ведет}(r,a,b,G)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(\text{граф}(c)\ \&\ \text{ациклический}(c)\rightarrow\neg(\text{ведет}(a,b,b,c)))$

В антецеденты переносятся отрицание заменяемой части и все конъюнктивные члены заменяющей, кроме одного. Консеквентом становится отрицание этого последнего конъюнктивного члена

1. Извлечение из декомпозирующей эквивалентности импликации для вывода с использованием контрапозиции. Консеквент теоремы имеет вид "$(A\leftrightarrow B_1\ \&\ B_2)$". Оценка сложности левой части не меньше оценки сложности правой. Число параметров утверждения B_1 не более 4. К антецедентам добавляются утверждения $\neg(A), B_1$, а консеквентом становится $\neg(B_2)$. (Прием и - 77).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(b-\text{set}\ \&\ c-\text{set}\ \&\ \neg(a\in b\cap c)\ \&\ a\in c\rightarrow\neg(a\in b))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(b-\text{set}\ \&\ c-\text{set}\rightarrow a\in b\cap c\leftrightarrow a\in b\ \&\ a\in c)$

Отрицание конъюнктивного члена заменяющей части переносится в антецеденты, а консеквентом становится отрицание заменяемой части

1. Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, заменяемая часть которой имеет вид конъюнкции, импликации для приема усмотрения отрицание заменяющей части из отрицание конъюнктивного слена заменяемой. Заменяемая часть имеет вид конъюнкции. Рассматривается ее конъюнктивный член A, оценка сложности которого не превосходит оценки сложности заменяемой части B. Отрицание A добавляется к антецедентам, а консеквентом становится отрицание B. Результат упрощается. (Прием общнорм - 80).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ < -l(AB) + l(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \rightarrow$
   $\neg(C \in \text{отрезок}(AB)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B) \rightarrow C \in \text{отрезок}(AB) \leftrightarrow$
   $C - \text{точка}\ \&\ \text{точкалуча}(A, B, C)\ \&\ l(AC) \leq l(AB))$

Заменяющая часть эквивалентности переносится в антецеденты, а консеквентом становится результат свертки в элементарное утверждение квантора существования, навешенного на заменяемую часть по некоторому ее параметру

1. Усмотрение непустоты множества. Теорема - определение условия принадлежности "$x \in t$". Конъюнктивные члены определяющей части добавляются к антецедентам, а консеквентом становится утверждение "$\neg(t = \emptyset)$". (Прием определение - 103).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(b - \text{set}\ \&\ c - \text{set}\ \&\ a \in b\ \&\ a \in c \rightarrow \neg(b \cap c = \emptyset))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(b - \text{set}\ \&\ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b\ \&\ a \in c)$

Выбираются два параметра теоремы и предпринимается попытка вывести следствия из их равенства, в предположении истинности антецедентов и заменяющей части. Отрицание некоторого такого следствия вместе с заменяемой частью добавляется к антецедентам теоремы, а ее консеквентом становится отрицание равенства указанных параметров

1. Усмотрение неотождествляемых параметров определяемого утверждения. Теорема - определение некоторого бесповторного утверждения A, имеющего 3 либо 4 параметра. Выбираются два различных его параметра x и y. Составляется объединенный список S антецедентов теоремы и конъюнктивных членов определяющей части. Проверяется, что $\neg(x = y)$ не является следствием S. Решается задача на исследование с посылками S и $x = y$. После решения проверяется отсутствие посылки "ложь", и в списке посылок находится утверждение

B, не входящее в S и не имеющее своим заголовком равенство, причем такое, при выводе которого использовалось $x = y$. Проверяется, что B не является следствием S. К антецедентам добавляются A и отрицание B. Консеквентом становится $\neg(x = y)$. Результат упрощается так, чтобы консеквент сохранился. (Прием определение - 115).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ \neg(C \in \text{прямая}(AB))\ \&\ \text{биссектриса}(BACD)$
$\&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \to \neg(B = D))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
$\neg(A = D)\ \&\ \neg(A = C) \to \text{биссектриса}(BACD) \leftrightarrow \angle(CAD) = \angle(DAB)\ \&$
$\text{разныестороны}(B, C, \text{прямая}(AD))\ \&\ \angle(CAD) \leq \pi/2)$

При помощи задачи на описание подбираются примеры объектов, реализующих одну из частей. Консеквентом становится другая часть

1. Попытка подобрать примеры определяемых объектов при помощи вспомогательной задачи на описание. Теорема - эквивалентность, определяющая утверждение A при помощи конъюнкции B (возможно, вырожденной) элементарных утверждений. Список X переменных утверждения A, не входящих в антецеденты, непуст. Решается задача на подбор примера значений переменных X, при которых все содержащие эти переменные конъюнктивные члены B истинны. Задача решается в режиме перечисления. Для каждого найденного ответа C создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы утверждения C, а консеквент прежний. Предварительно предпринимается попытка явно разрешить не содержащие X антецеденты относительно их параметров. Результирующая импликация упрощается. (Прием определение - 91).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 \leq c - b \to (b + c)/2 \in [b, c])$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to a \in [b, c] \leftrightarrow a - \text{число}\ \&\ 0 \leq a - b\ \&\ 0 \leq c - a)$

2. Попытка реализовать утверждение под квантором существования в заменяемой части при помощи другого утверждения из той же теоремы. Теорема - определение некоторого утверждения A, причем определяющая часть имеет своим конъюнктивным членом B утверждение, содержащее квантор существования "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(C_1\ \&\ \ldots\ \&\ C_n)$". Прочие конъюнктивные члены определяющей части элементарны. Рассматривается такое A_i, что в области вхождения квантора существования имеется утверждение D, получающееся из A_i заменой некоторого некорневого выражения t_1 на t_2. Составляется список S антецедентов теоремы и отличных от B конъюнктивных членов определяющей части. Решается задача на описание, условиями которой служат A_j, отличные от A_i, а также

равенство $t_1 = t_2$. Несущественные неизвестные - $x_1, \ldots, x_k$. Получение явного описания не требуется. Проверяется, что ответ E не содержит связанных переменных. Находится результат F упрощения утверждения, полученного из B заменой квантора существования на константу "истина". Проверяется, что F не содержит связанных переменных. Затем создается импликация с антецедентами S, E, F и консеквентом A. Результат упрощается. (Прием связпарам - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{xA}(A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \ \& \ x \in A \rightarrow \text{точкаприкосн}(x, A))$

из теоремы

$\forall_{xA}(A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{точкаприкосн}(x, A) \leftrightarrow x - \text{число} \ \& \ \forall_b(b - \text{число} \ \& \ 0 < b \rightarrow \exists_y(y \in A \ \& \ |x - y| < b)))$

Усматривается существование значения некоторого параметра одной из частей эквивалентности, при котором эта часть истинна. Консеквентом становится результат навешивания квантора существования по данной переменой на конъюнкцию заменяемой части и некоторых конъюнктивных членов заменяющей части

1. Извлечение из конъюнктивного определения равенства утверждения существования. Теорема - определение равенства $x = t$, где переменная x не входит в t. Определяющая часть имеет своим конъюнктивным членом утверждение A, содержащее x и не являющееся равенством. Консеквент заменяется на утверждение "$\exists_x(x = t \ \& \ A)$". (Прием определение - 198).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow \exists_k(m(\text{mod } n) = k \ \& \ k \in \{0, \ldots, n-1\}))$

   из теоремы

   $\forall_{mnk}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow m(\text{mod } n) = k \leftrightarrow k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \& \ \exists_p(p - \text{целое} \ \& \ m = k + np))$

1.12.2 Эквивалентность для дизъюнкции

Один из дизъюнктивных членов заменяющей части переносится в антецеденты, а консеквентом становится заменяемая часть

1. Извлечение из декомпозирующей эквивалентности импликации для проверочного оператора. Консеквент теоремы - эквивалентность утверждения A дизъюнкции $B_1 \vee \ldots \vee B_n$ Рассматриваются два случая. В первом случае к антецедентам добавляются отрицания утверждений B_i, а консеквентом становится $\neg(A)$. Во втором случае к антецедентам добавляется некоторое B_i, а консеквентом становится A. Список антецедентов упрощается. В обоих случаях проверяется, что теорема неизбыточным образом может быть использована для создания приема проверочного оператора. (Прием или - 19).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ a \in b \to a \in b \cup c)$

из теоремы

$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \to a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$

2. Извлечение из эквивалентности с дизъюнкцией в определяющей части импликаций для усмотрения определяемого понятия в частных случаях. Теорема - определение утверждения A. Определяющая часть содержит символ "или". После преобразования ее к виду д.н.ф. получается дизъюнкция, некоторым дизъюнктивным членом которой служит конъюнкция K элементарных утверждений. Далее рассматриваются два случая. Если K - равенство $x = t$, где переменная x не входит в t и имеет единственное вхождение в A, то консеквентом становится результат подстановки в A выражения t вместо x. Иначе к антецедентам теоремы добавляются конъюнктивные члены K, а консеквентом становится A. (Прием определение - 117).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(C = D) \ \& \ B \in \text{плоскость}(ACD) \ \& \ \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{прямая}(AB)) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \to \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \to \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \leftrightarrow \text{непересек}(\text{отрезок}(AB), \text{прямая}(CD)) \ \& \ B \in \text{плоскость}(ACD) \ \vee \ A \in \text{прямая}(CD) \ \vee \ B \in \text{прямая}(CD))$

3. Фиксация переменной посредством равенства из декомпозирующей части эквивалентности. Консеквент имеет вид "$A \leftrightarrow (x = t \ \vee \ B)$", где A - элементарное утверждение, x - переменная, не входящая в t, B - остаточная дизъюнкция. В антецеденты вместо x подставляется t, а консеквентом становится результат такой же подстановки в A. Результат упрощается. (Прием или - 64).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bc}(c - \text{слово} \to b \in \{b; c\})$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(c - \text{слово} \to a \in \{b; c\} \leftrightarrow a = b \ \vee \ a \in \{; c\})$

4. Получение простой импликации для проверочного оператора из эквивалентности для свертки дизъюнкции путем перенесения дизъюнктивного члена в антецеденты. Консеквент имеет вид "$(A \ \vee \ B) \leftrightarrow C$", где A, B, C - элементарные утверждения. К антецедентам добавляется A, а консеквентом становится C. Проверяется, что полученная импликация может быть использована для создания приема проверочного оператора. (Прием общнорм - 39).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \to a \leq b)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to a < b \ \vee \ a = b \leftrightarrow a \leq b)$

5. Эквивалентность для сборки, в заменяемой части которой находится дизъюнкция с равенством для переменной: извлечение примера. Консеквент имеет вид "$A \leftrightarrow (x = t \ \vee \ B)$", где A - заменяющая часть; x - переменная, не входящая в t; B - остаточная дизъюнкция. В антецеденты вместо x подставляется t, а консеквентом становится результат такой же подстановки в A. Результат упрощается. (Прием сборка - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ce}(c - \text{set} \to e \in c \cup \{e\})$

   из теоремы

   $\forall_{cde}(c - \text{set} \to d = e \ \vee \ d \in c \leftrightarrow d \in c \cup \{e\})$

6. Вывод импликации с заменяемой частью в консеквенте. Теорема дает параметрическое описание значений неизвестной x, удовлетворяющих условию A. Заменяющая часть приводится к виду д.н.ф. Выбирается произвольный дизъюнктивный член B, который добавляется к антецедентам, а консеквентом становится A. Результат упрощается. (Прием неизвпарам - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abn}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ b \leq 2\pi n - \arcsin(a) + \pi \ \& \ 2\pi n + \arcsin(a) \leq b \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq 1 - a \to a \leq \sin b)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to a \leq \sin b \leftrightarrow 1 + a \leq 0 \ \vee \ 0 \leq 1 - a \ \& \ 0 \leq 1 + a \ \& \ \exists_n(n - \text{целое} \ \& \ 2\pi n + \arcsin(a) \leq b \ \& \ b \leq 2\pi n - \arcsin(a) + \pi))$

Отрицания всех дизъюнктивных членов заменяющей части, кроме одного, и заменяемая часть переносятся в антецеденты, а консеквентом становится конъюнктивный член оставшегося дизъюнктивного члена

1. Перенесение отрицаний всех элементарных дизъюнктивных членов определяющей части в антецеденты и выбор единственного конъюнктивного члена единственного оставшегося дизъюнктивного члена в качестве консеквента выводимой импликации. Теорема - определение утверждения A посредством дизъюнкции, в которой единственный дизъюнктивный член B представляет собой конъюнкцию, а остальные дизъюнктивные члены элементарны. Отрицания всех элементарных дизъюнктивных членов и утверждение A добавляются к антецедентам, а консеквентом становится конъюнктивный член утверждения B. (Прием определение - 126).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(C = D) \ \& \ \neg(A \in \text{прямая}(CD)) \ \& \ \neg(B \in \text{прямая}(CD)) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \to \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \to \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(AB)))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \& \ C - \text{точка } \& \ D - \text{точка } \& \ \neg(C = D) \rightarrow$ однасторона$(A, B, \text{прямая}(CD)) \leftrightarrow$ непересек(отрезок$(AB), \text{прямая}(CD)) \ \&$ $B \in \text{плоскость}(ACD) \ \vee \ A \in \text{прямая}(CD) \ \vee \ B \in \text{прямая}(CD))$

1.12.3 Эквивалентность двух утверждений произвольного вида

Одна часть эквивалентности либо ее отрицание переносится в антецеденты, а консеквентом становится другая часть либо ее отрицание

1. Извлечение из эквивалентности общей стандартизации импликации для проверочного оператора без использования контрапозиции. Заменяемая часть A элементарна. Рассматриваются два случая. В первом случае к антецедентам добавляются конъюнктивные члены заменяющей части, а консеквентом становится A. Во втором случае к антецедентам добавляются конъюнктивные члены отрицания заменяющей части, а консеквентом становится отрицание A. В обоих случаях список антецедентов упрощается. Проверяется, что новая импликация может быть использована для создания приема проверочного оператор. (Прием общнорм - 17).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{mn}(m - \text{целое } \& \ n - \text{целое} \rightarrow m + n - \text{целое})$

   из теоремы

   $\forall_{mn}(n - \text{число } \& \ m - \text{целое} \rightarrow m + n - \text{целое} \leftrightarrow n - \text{целое})$

2. Вывод импликации из эквивалентности. Теорема позволяет сгруппировать в одном операнде двуместного отношения переменные, ранее расположенные в разных операндах. Обе части эквивалентности не имеют своим заголовком отрицания, причем их отрицания после упрощения сохраняют заголовок "не". К антецедентам добавляется отрицание одной части эквивалентности, а консеквентом становится отрицание другой. (Прием группировка - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bce}(b - \text{set } \& \ c - \text{set } \& \ e - \text{set } \& \ \neg(b \setminus c \subseteq e) \rightarrow \neg(b \subseteq c \cup e))$

   из теоремы

   $\forall_{bce}(b - \text{set } \& \ c - \text{set } \& \ e - \text{set} \rightarrow b \subseteq c \cup e \leftrightarrow b \setminus c \subseteq e)$

3. Извлечение из перегруппировочной эквивалентности простой импликации, позволяющей усматривать истинность либо ложность утверждения с помощью проверочного оператора. Теорема не имеет существенных антецедентов. Рассматриваются два случая. В первом случае к антецедентам добавляется одна из частей эквивалентности, а консеквентом становится другая. Во втором случае к антецедентам добавляется отрицание одной из частей эквивалентности, а консеквентом становится отрицание другой. В каждом случае проверяется, что

добавленный антецедент допускает обработку проверочным оператором и что новая импликация неизбыточна для создания приема проверочного оператора. (Прием группировки - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ b \leq a \to \neg(a < b))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to \neg(a < b) \leftrightarrow b \leq a)$

4. Извлечение из перегруппировочной эквивалентности простой импликации для проверочного оператора. Рассматриваются два случая. В первом случае к антецедентам добавляется одна из частей эквивалентности, а консеквентом становится другая. Во втором случае к антецедентам добавляется отрицание одной из частей эквивалентности, а консеквентом становится отрицание другой. Список антецедентов упрощается. В каждом случае проверяется, что новая импликация позволяет создать прием проверочного оператора, причем этот прием неизбыточен. (Прием группировки - 11).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ c - a < 0 \to 0 < a - c)$

   из теоремы

   $\forall_{ac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \to c - a < 0 \leftrightarrow 0 < a - c)$

5. Извлечение из перегруппировочной эквивалентности с равенством в одной части тождества общей стандартизации. Консеквент теоремы имеет вид "$A \leftrightarrow t_1 = t_2$". Утверждение A добавляется к антецедентам, а консеквентом становится $t_1 = t_2$. Проверяется, что новая теорема позволяет создать прием общей стандартизации. (Прием группировки - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - c = 0 \to c - b = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \to c - b = 0 \leftrightarrow b - c = 0)$

6. Переход к импликации. Теорема - эквивалентность, позволяющая переходить в уравнении к более простым выражениям с неизвестными. Обе части эквивалентности - равенства. Заменяемая часть переносится в антецеденты, а консеквентом становится заменяющая часть. Полученная теорема ориентируется на создание приемов вывода следствий в задачах на исследование. (Прием неизвоценка - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cfghi}(\neg(f - 1 = 0) \ \& \ 0 < f \ \& \ 0 < g \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ c = h + i \log_f g \to f^h g^i = f^c)$

из теоремы

$\forall_{cfghi}(\neg(f-1=0)\ \&\ 0<f\ \&\ 0<g\ \&\ c-$число $\&\ f-$число $\&\ g-$число $\&$
$h-$число $\&\ i-$число $\rightarrow f^h g^i = f^c \leftrightarrow c = h + i\log_f g)$

Здесь из теоремы, порождающей прием эквивалентного преобразования уравнения, выводится теорема, дающая прием вывода следствия в задаче на исследование. В обоих случаях достигается исключение неизвестного логарифма.

7. Вывод импликации из эквивалентности. Теорема - эквивалентность двух неравенств с невырожденными числовыми атомами. Одна часть эквивалентности переносится в антецеденты, а другая становится консеквентом. (Прием неравенства - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&$
   $C-$точка $\&\ 0 \le -l(AB) + l(BC) \rightarrow 0 \le -\angle(ACB) + \angle(BAC))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&$
   $C-$точка $\&\ 0 \le -l(AB) + l(BC) \leftrightarrow 0 \le -\angle(ACB) + \angle(BAC))$

8. Вывод импликации с перенесением отрицания в антецеденты. Теорема представляет собой эквивалентность, заменяемая часть которой есть элементарное утверждение с заголовком "отрицание", заменяющая - элементарное утверждение без отрицания, причем глубина вхождения некоторой переменной в заменяемое и заменяющее утверждения (без учета отрицания) равна 1, а число ее вхождений в каждое из этих утверждений равно 1. Заменяющая часть имеет параметры, не входящие в заменяемую. Заменяемая часть переносится в антецеденты, а консеквентом становится заменяющая часть. (Прием нормотр - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abGH}(\neg(a=b)\ \&\ \neg($смежны$(a,b,G))\ \&\ a \in$ вершины$(G)\ \&\ b \in$ вершины$(G)\ \&$
   простграф$(G)\ \&$ дополнграф$(G,H) \rightarrow$ смежны$(a,b,H))$

   из теоремы

   $\forall_{abGH}($простграф$(G)\ \&\ a \in$ вершины$(G)\ \&\ b \in$ вершины$(G)\ \&\ \neg(a=b)\ \&$
   дополнграф$(G,H) \rightarrow$ смежны$(a,b,H) \leftrightarrow \neg($смежны$(a,b,G)))$

9. Извлечение из эквивалентности двух элементарных утверждений простой импликации для идентифицирующего оператора (прямой ход). Теорема - эквивалентность общей стандартизации с элементарными утверждениями в обеих частях. По заголовку заменяемой части усматривается существование идентифицирующего оператора для шаблона с таким заголовком. Заменяющая часть переносится в антецеденты, а заменяемая часть становится консеквентом. Результат упрощается. (Прием общнорм - 45).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{aA}(\neg(a = A)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка} \to \text{точкалуча}(A, a, a))$

из теоремы

$\forall_{aA}(a - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка} \to \text{точкалуча}(A, a, a) \leftrightarrow \neg(a = A))$

10. Извлечение из эквивалентности двух элементарных утверждений простой импликации для идентифицирующего оператора (обратный ход). Аналогично предыдущему, но с перестановкой заменяемой и заменяющей частей. (Прием общнорм - 60).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \angle(ABC) = \pi\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \to B \in \text{отрезок}(AC))$

    из теоремы

    $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C) \to \angle(ABC) = \pi \leftrightarrow B \in \text{отрезок}(AC))$

11. Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, заменяемая часть которой есть равенство, тождества общей стандартизации. Заменяемая часть эквивалентности - равенство $t_1 = t_2$ либо отрицание такого равенства. В первом случае к антецедентам добавляется заменяющая часть, во втором случае - отрицание заменяющей части. Консеквентом в каждом случае становится равенство $t_1 = t_2$. Антецеденты упрощаются. Проверяется отсутствие в их списке дизъюнкций и равенств переменных не содержащим этих переменных выражениям. Проверяется, что t_1, t_2 при обработке относительно новых антецедентов нормализаторами общей стандартизации не переводятся в одно и то же выражение. Проверяется, что новая теорема позволяет создать прием общей стандартизации выражений. (Прием общнорм - 18).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{de}(d - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&\ d \subseteq e \to d \setminus e = \emptyset)$

    из теоремы

    $\forall_{de}(d - \text{set}\ \&\ e - \text{set} \to d \setminus e = \emptyset \leftrightarrow d \subseteq e)$

12. Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, заменяющая часть которой есть равенство, тождества общей стандартизации. Заменяемая часть элементарная. Заменяющая часть эквивалентности - равенство $t_1 = t_2$ либо отрицание такого равенства. В первом случае к антецедентам добавляется заменяемая часть, во втором случае - отрицание заменяемой части. Проверяется, что либо добавленный антецедент - равенство, либо для усмотрения его истинности имеется проверочный оператор. Консеквентом в каждом случае становится равенство $t_1 = t_2$. Антецеденты упрощаются. Проверяется отсутствие в их списке равенств переменных не содержащим этих переменных выражениям. Проверяется, что t_1, t_2 при обработке относительно новых антецедентов нормализаторами общей стандартизации не переводятся в одно и то же выражение.

Проверяется, что новая теорема позволяет создать прием общей стандартизации выражений. (Прием общнорм - 19).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a - \text{set } \& \text{ card}(a) = 0 \to a = \emptyset)$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{set} \to \text{card}(a) = 0 \leftrightarrow a = \emptyset)$

13. Извлечение из эквивалентности общей стандартизации импликации для проверочного оператора с усложненным антецедентом. Заменяемая часть - элементарное утверждение A. Рассматриваются два случая. В первом из них консеквентом становится заменяющая часть, а к антецедентам добавляется A. Во втором случае консеквентом становится отрицание заменяющей части, а к антецедентам добавляется отрицание A. В каждом случае проверяется, что консеквент и добавленный антецедент допускают обработку проверочным оператором. Антецеденты упрощаются. Проверяется отсутствие в их списке равенств переменных не содержащим этих переменных выражениям. Проверяется неизбыточность новой теоремы для создания приема проверочного оператора. (Прием общнорм - 51).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a - \text{set } \& \neg(\text{card}(a) = 0) \to \neg(a = \emptyset))$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{set} \to \text{card}(a) = 0 \leftrightarrow a = \emptyset)$

14. Извлечение простой импликации из эквивалентноси общей стандартизации, одна из частей которой есть равенство, фиксирующее значение переменной. Заменяемая часть A элементарна. Заменяющая - равенство переменной x не содержащему x выражению t, либо отрицание такого равенства. К антецедентам добавляется $x = t$, консеквентом становится: в первом случае - A, во втором - $\neg(A)$. Антецеденты упрощаются и проверяются на непротиворечивость. Новая теорема упрощается с использованием уже имеющихся в списке вывода теорем. (Прием общнорм - 20).

Пример: вывод теоремы

$\forall_f(f - \text{функция} \to \text{образ}(f, \emptyset) = \emptyset)$

из теоремы

$\forall_{bf}(b - \text{set } \& \ b \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \to b = \emptyset \leftrightarrow \text{образ}(f, b) = \emptyset)$

15. Извлечение константного тождества из эквивалентности общей стандартизации, одна из частей которой есть равенство, фиксирующее значение переменной. Если упрощение импликации R с использованием списка вывода, предпринятое предыдущим приемом, дало константу "истина", то импликация R упрощается оператором общей стандартизации кванторных импликаций "нормдлялюбого". Если в итоге возникает бесквантворное тождество $t_1 = t_2$, то обе части

его упрощаются нормализатором общей стандартизации, и при несовпадении частей выдается результат. (Прием общнорм - 89).

Пример: вывод теоремы

$|0| = 0$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = 0 \leftrightarrow a = 0)$

16. Вывод импликации из эквивалентности. Теорема предствляет собой эквивалентность двух утверждений вида $P(A, B)$ и $P(A, C)$, причем P - самый сложный символ теоремы. Одна из частей эквивалентности переносится в антецеденты, другая становится консеквентом. (Прием подстзамена - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bde}(d|b \ \& \ d|(b + e) \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \rightarrow d|e)$

из теоремы

$\forall_{bde}(d|b \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \rightarrow d|(b + e) \leftrightarrow d|e)$

17. Извлечение из эквивалентности типа "раздпарам" кванторного тождества, позволяющего исключать неизвестные с помощью равенства, идентифицированного с антецедентом. Теорема представляет собой эквивалентность, в заменяющей части которой расположено такое равенство $A = B$, что некоторые две переменные имеются в A, но отсутствуют в B, и обратно, некоторые две переменные имеются в B, но отсутствуют в A. Заменяемая часть имеет вид равенства, содержащего все указанные переменные, причем обе части равенства неоднобуквенные. Заменяемая часть переносится в антецеденты, а консеквентом становится заменяющая часть. Дополнительно выводится версия, в которой предпринятая перегруппировка в один операнд ненулевых членов двуместных отношений в антецедентах. (Прием раздпарам - 1).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abdf}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ af = bd \rightarrow a/d = b/f)$

из теоремы

$\forall_{abdf}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow af = bd \leftrightarrow a/d = b/f)$

Прием, основанный на выводимой теореме, преобразует содержащую неизвестные дробь a/d в дробь b/f, не содержащую неизвестных.

18. Извлечение из эквивалентности сборки импликации для проверочного оператора без использования контрапозиции. Заменяемая часть эквивалентности элементарная. Рассматриваются два случая. В первом случае к антецедентам добавляется заменяющая часть, а консеквентом становится заменяемая. Во втором случае к антецедентам добавляется отрицание заменяющей части, а консеквентом становится отрицание заменяемой. В каждом случае проверяется, что

новая импликация позволяет создать прием проверочного оператора, причем этот прием неизбыточен. (Прием сборка - 13).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ 0 < -l(AB) + l(BC) \to \angle(ACB) < \angle(BAC))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = C) \to l(AB) < l(BC) \leftrightarrow \angle(ACB) < \angle(BAC))$

19. Извлечение из эквивалентности, переформулирующей нечисленное отношение в виде соотношения для числовых атомов, импликации для вывода численного соотношения. Заменяемая часть добавляется к антецедентам, а консеквентом становится заменяющая часть (т.е. соотношение для числовых атомов). Результат упрощается. (Прием числвыраз - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC) \to \angle(ABC) = \pi/2)$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = B) \to \angle(ABC) = \pi/2 \leftrightarrow \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC))$

20. Извлечение из эквивалентности, переформулирующей нечисловое отношение в виде равенства двух числовых атомов, импликации для вывода нечисленного соотношения. Заменяющая часть (равенство числовых атомов) добавляется к антецедентам, а консеквентом становится заменяемая часть. Результат упрощается. (Прием числвыраз - 10).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ l(AB) = l(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \to C \in \text{окружность}(AB))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \to C \in \text{окружность}(AB) \leftrightarrow l(AB) = l(AC))$

21. Переход к импликации, усматривающей свойство объекта. Теорема - эквивалентность, выражающая свойство объекта через параметры координат. Соотношение для параметров координат переносится в антецеденты, а консеквентом становится утверждение, выражающее свойство объекта. Результат упрощается. (Прием числопред - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdefEK}(\text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(f + ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ (a+c)(4acf + bde - ae^2 - cd^2 - fb^2) < 0\ \&\ 0 < 4ac - b^2\ \&\ a - \text{число}\ \&$

$b-$ число & $c-$ число & $d-$ число & $e-$ число & $f-$ число & прямкоорд$(K) \to$ эллипс$(E))$

из теоремы

$\forall_{EKabcdef}(a-$ число & $b-$ число & $c-$ число & $d-$ число & $e-$ число & $f-$ число & прямкоорд(K) & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f = 0$ & $x-$ число & $y-$ число$) \to$ эллипс$(E) \leftrightarrow b^2-4ac<0$ & $(a+c)(4acf+bde-ae^2-cd^2-fb^2)<0)$

22. Переход к импликации, выводящей соотношение для параметров уравнения. Теорема - эквивалентность, выражающая свойство объекта через параметры координат. Утверждение, выражающее свойство объекта, переносится в антецеденты, а консеквентом становится соотношение для параметров координат, предварительно упрощенное. (Прием числопред - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdxyABCK}(\neg(A=B)$ & коорд$(A,K)=(a,b)$ & коорд$(B,K)=(c,d)$ & коорд$(C,K)=(x,y)$ & $C \in$ прямая(AB) & $A-$ точка & $B-$ точка & $C-$ точка & систкоорд$(K) \to (c-a)(y-b)-(d-b)(x-a)=0)$

из теоремы

$\forall_{ABCKabcdxy}(A-$ точка & $B-$ точка & $C-$ точка & систкоорд(K) & $\neg(A=B)$ & коорд$(A,K)=(a,b)$ & коорд$(B,K)=(c,d)$ & коорд$(C,K)=(x,y) \to C \in$ прямая$(AB) \leftrightarrow (c-a)(y-b)=(d-b)(x-a))$

23. Переход к импликации, выводящей из отрицания утверждения соотношение для параметров уравнения. Теорема - эквивалентность, выражающая свойство объекта через параметры координат. Отрицание утверждения, выражающего свойство объекта, переносится в антецеденты, а консеквентом становится отрицание соотношения для параметров координат, предварительно упрощенное. (Прием числопред - 8).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdxyABCK}(A-$ точка & $B-$ точка & $C-$ точка & систкоорд(K) & $\neg(A=B)$ & коорд$(A,K)=(a,b)$ & коорд$(B,K)=(c,d)$ & коорд$(C,K)=(x,y)$ & $\neg(C \in$ прямая$(AB)) \to \neg((c-a)(y-b)-(d-b)(x-a)=0))$

из теоремы

$\forall_{ABCKabcdxy}(A-$ точка & $B-$ точка & $C-$ точка & систкоорд(K) & $\neg(A=B)$ & коорд$(A,K)=(a,b)$ & коорд$(B,K)=(c,d)$ & коорд$(C,K)=(x,y) \to C \in$ прямая$(AB) \leftrightarrow (c-a)(y-b)=(d-b)(x-a))$

24. Получение импликации для вывода одного равенства двух числовых атомов из другого. Теорема - эквивалентность двух равенств невырожденных числовых атомов. Одно из этих равенств переносится в антецеденты, а консеквентом становится другое. Результат упрощается. (Прием эквуглы - 1).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ l(AB) = l(BC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \to \angle(BAC) = \angle(ACB))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \triangle(ABC) \to l(AB) = l(BC) \leftrightarrow \angle(BAC) = \angle(BCA))$

25. Переход к импликации от эквивалентности двух равенств. Теорема - эквивалентность, разрешающая утверждение относительно некоторой переменной. Заменяющая часть имеет вид равенства с переменной в одной части, заменяемая - равенство, обе части которого отличны от переменных. Заменяемая часть переносится в антецеденты, а консеквентом становится заменяющая часть. Результат упрощается. (Прием глуб - 59).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abdx}(b = \text{операция}(a)\ \&\ b(x, d) = \text{единица}(b)\ \&\ d \in \text{носитель}(a)\ \&\ x \in \text{носитель}(a)\ \&\ \text{группа}(a) \to x = \text{обрэлемент}(d, b))$

из теоремы

$\forall_{abdx}(b = \text{операция}(a)\ \&\ d \in \text{носитель}(a)\ \&\ x \in \text{носитель}(a)\ \&\ \text{группа}(a) \to b(x, d) = \text{единица}(b) \leftrightarrow x = \text{обрэлемент}(d, b))$

26. Извлечение простой импликации из перегруппировочной эквивалентности двух элементарных утверждений глубины 1. Консеквент теоремы - эквивалентность двух элементарных утверждений, корневыми операндами которых служат переменные. Оценки сложности этих утверждений равны и больше оценок сложности антецедентов. Одна из частей эквивалентности, не являющаяся равенством, переносится в антецеденты, а другая становится консеквентом. (Прием группировки - 16).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abn}(\neg(a \in b)\ \&\ b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R}^n\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ \text{предельныточка}(a, b) \to \text{точкаприкосн}(a, b))$

из теоремы

$\forall_{abn}(\neg(a \in b)\ \&\ b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R}^n\ \&\ n - \text{натуральное} \to \text{предельныточка}(a, b) \leftrightarrow \text{точкаприкосн}(a, b))$

27. Извлечение из эквивалентности двух элементарных утверждений реализующей импликации. Эквивалентность выполняет общую стандартизацию. Заменяющая часть добавляется к антецедентам, а консеквентом становится заменяемая часть. Результат упрощается. (Прием общнорм - 102).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{an}(n - \text{целое}\ \&\ 0 \leq n\ \&\ \text{двнабор}(a, n) \to \text{кортеж}(a, n, \{0, 1\}))$

из теоремы

$\forall_{an}(n - \text{целое}\ \&\ 0 \leq n \to \text{двнабор}(a, n) \leftrightarrow \text{кортеж}(a, n, \{0, 1\}))$

28. Перенесение в антецеденты той части эквивалентности, которая представляет собой равенство для переменной. Заменяющая часть эквивалентности - равенство переменной не содержащему ее выражению. Эта часть добавляется к антецедентам, а консеквентом становится заменяемая часть. Результат упрощается, причем допускается использование уже имеющихся в списке вывода теорем. (Прием усиление - 7).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ab}(a = \text{операция}(b)\ \&\ \text{группа}(b) \to \text{левединица}(\text{единица}(a), a))$

    из теоремы

    $\forall_{abc}(c = \text{операция}(b)\ \&\ \text{группа}(b) \to \text{левединица}(a, c) \leftrightarrow a = \text{единица}(c))$

29. Вывод импликации из эквивалентности. Заменяемая часть эквивалентности содержит описатели, а заменяющая - не имеет связанных переменных. Ее сложность не превосходит сложности заменяемой части. Каждый конъюнктивный член заменяющей части - элементарное утверждение. Эти конъюнктивные члены добавляются к антецедентам, а консеквентом становится заменяемая часть. Предварительно проверяется, что эта часть не является равенством, отрицанием, конъюнкцией либо дизъюнкцией. Результат упрощается. (Прием нормсвязок - 3).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_b(0 < b + 1\ \&\ 0 < 1 - b\ \&\ b - \text{число} \to \text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} b^i, n - \text{натуральное})))$

    из теоремы

    $\forall_b(b - \text{число}\ \&\ \neg(b - 1 = 0) \to \text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} b^i, n - \text{натуральное})) \leftrightarrow$
    $0 < b + 1\ \&\ 0 < 1 - b)$

В антецеденты переносится одна из частей эквивалентности и отрицание другой части, а консеквентом становится отрицание одного из старых антецедентов

1. Извлечение из эквивалентности общей стандартизации импликации для проверочного оператора с использованием контрапозиции. Обе части эквивалентности - элементарные утверждения A, B. Рассматривается некоторый существенный антецедент C и проверяется, что $\neg(C)$ может обрабатываться проверочным оператором. После этого к антецедентам добавляются вместо C утверждения $A, \neg(B)$, либо утверждения $\neg(A), B$. Консеквентом становится $\neg(C)$. (Прием общнорм - 21).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ade}(a - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&\ a \subseteq d \cup e\ \&\ \neg(a \subseteq e) \to \neg(\text{непересек}(a, d)))$

    из теоремы

    $\forall_{ade}(a - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&\ \text{непересек}(a, d) \to a \subseteq d \cup e \leftrightarrow a \subseteq e)$

В антецеденты переносится одна из частей эквивалентности либо ее отрицание, а консеквентом становится простое следствие другой части либо ее отрицания

1. Переход от эквивалентности для указания на тип объекта к импликации, усматривающей отрицание подтипа данного типа. Заменяемая часть эквивалентности общей стандартизации - утверждение вида $P(t)$, где P - название типа объектов, t неоднобуквенное. Заменяющая часть элементарна. Рассматривается такой тип объектов Q, что P - его надтип. Проверяется, что отрицание заменяющей части может обрабатываться проверочным оператором, и это отрицание добавляется к антецедентам. Консеквентом становится $\neg(Q(t))$. (Прием общнорм - 68).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{число } \&\ d - \text{число } \&\ \neg(d = 0) \to \neg(c + di - \text{целое}))$

   из теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{число } \&\ d - \text{число} \to c + di - \text{число} \leftrightarrow d = 0)$

Усмотрение взаимной однозначности отображения из сокращающей эквивалентности

1. Усмотрение взаимно-однозначного отображения из сокращающей эквивалентности. Эквивалентность имеет вид "$P = Q \leftrightarrow x = y$", где x, y - переменные; выражение Q получается из P заменой переменной x на y. P содержит x и не содержит y. Антецеденты разбиваются на три группы: содержащие x и не содержащие y утверждения S_1; содержащие y и не содержащие x утверждения S_2, и не содержащие ни x, ни y утверждения S_3. S_2 получается из S_1 заменой x на y. Список S_1 непуст. Выводится импликация с антецедентами S_3 и консеквентом "взаимнооднозначно($\lambda_x(P, S_1)$)". (Прием общнорм - 103).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to \text{взаимнооднозначно}(\lambda_b(a + b, b - \text{число})))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число } \&\ b - \text{число } \&\ c - \text{число} \to a + b = a + c \leftrightarrow b = c)$

Частичная свертка и вывод импликации

1. Свертка квантора существования по переменной - одной из частей равенства в заменяемой части. Теорема - эквивалентность равенства $x = t$ содержащему кванторы утверждению A. Здесь x - переменная, не входящая в t. Список антецедентов теоремы разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Проверяется, что S_1 не является следствием $S_2, x = t$. Утверждение "$\exists_x(S_1\ \&\ x = t)$" преобразуется в бескванторное утверждение B, не содержащее самого сложного символа выражения t. Антецедентами становятся утверждения S_2 и конъюнктивные члены B, а консеквентом - результат подстановки t вместо x в заменяющую часть. Список антецедентов упрощается. (Прием развертка - 108).

Пример: вывод теоремы

$\forall_b(b - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(b) \to \exists_f(l(f) = \text{card}(b)\ \&\ \text{Val}(f) = b\ \&$
$\text{взаимнооднозначно}(f)\ \&\ f - \text{слово}))$

из теоремы

$\forall_{bn}(b - \text{set}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ 0 \leq n \to n = \text{card}(b) \leftrightarrow \exists_f(l(f) = n\ \&$
$\text{Val}(f) = b\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f)\ \&\ f - \text{слово}))$

1.12.4 Эквивалентность, среди конъюнктивных членов заменяющей части которой встречается кванторная импликация

Заменяемая часть эквивалентности и антецеденты заменяющей кванторной импликации переносятся в антецеденты, а консеквентом становится конъюнктивный член консеквента заменяющей импликации

1. Эквивалентность для кванторной расшифровки порождает импликацию. Теорема - эквивалентность элементарного утверждения A кванторной импликации B с элементарными антецедентами и консеквентом. Рассматриваются различные версии импликации B, получаемые контрапозициями, включая саму исходную импликацию B. Проверяется, что консеквент K такой версии допускает обработку проверочным оператором. Тогда ее антецеденты и утверждение A добавляются к антецедентам теоремы, а консеквентом теоремы становится K. Антецеденты результата упрощаются. (Прием развертка - 19).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abfy}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{образ}(f, a) \subseteq b\ \&\ y \in a \to$
   $f(y) \in b)$

   из теоремы

   $\forall_{abf}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция} \to \text{образ}(f, a) \subseteq b \leftrightarrow$
   $\forall_y(y \in a \to f(y) \in b))$

2. Эквивалентность для кванторной расшифровки порождает импликацию. Теорема - эквивалентность элементарного утверждения A конъюнкции, конъюнктивным членом которой служит кванторная импликация B. Утверждение A и антецеденты импликации B добавляются к антецедентам, а консеквентом становится консеквент импликации B. (Прием развертка - 35).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R}\ \&\ c \in b\ \&\ \text{наименьший}(a, b) \to a \leq c)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R} \to \text{наименьший}(a, b) \leftrightarrow a \in b\ \&\ \forall_c(c \in b \to a \leq c))$

3. Эквивалентность для кванторной расшифровки порождает импликацию. Теорема - эквивалентность элементарного утверждения A кванторной импликации B с элементарными антецедентами и конъюнкцией в консеквенте. Среди конъюнктивных членов этой конъюнкции выбирается элементарное утверждение C. К антецедентам добавляются утверждение A и антецеденты импликации B, а консеквентом становится C. Результат упрощается. (Прием развертка - 87).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{atKT}(t \in T$ & точка(a) & одномерндвиж(a, K, T) & Трехмерн(K) & Числотр$(T) \to$ Место$(a, t) \in$ осьабсцисс$(K))$

   из теоремы

   $\forall_{aKT}($точка(a) & Числотр(T) & Трехмерн$(K) \to$ одномерндвиж$(a, K, T) \leftrightarrow \forall_t(t \in T \to$ Место$(a, t) \in$ осьабсцисс(K) & одномерный(Скорость$(a, K, t), K)$ & одномерный(Ускорение$(a, K, t), K)))$

4. Вывод импликации из эквивалентности с квантором общности в одной части. Теорема - эквивалентность общей стандартизации, преобразующая кванторную импликацию A в элементарное утверждение B. К антецедентма теоремы добавляются утверждение B и антецеденты импликации A. Консеквентом теоремы становится консеквент импликации B. (Прием общнорм - 95).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fx}(x \in \mathrm{Dom}(f)$ & $f -$ функция & семействомножеств$(f) \to f(x) - \mathrm{set})$

   из теоремы

   $\forall_f(f -$ функция $\to$ семействомножеств$(f) \leftrightarrow \forall_x(x \in \mathrm{Dom}(f) \to f(x) - \mathrm{set}))$

Антецеденты и отрицание консеквента заменяющей импликации переносятся в антецеденты теоремы, а ее консеквентом становится отрицание заменяемой части

1. Эквивалентность для кванторной расшифровки порождает импликацию. Консеквент имеет вид эквивалентности элементарного утверждения A квантору общности либо существования B. Если B - квантор общности, формируется его отрицание - квантор существования C; иначе полагается $C = B$. Проверяется, что все подкванторные утвержденияя квантора существования C суть элементарные утверждения, и они добавляются к антецедентам. Если B - квантор общности, то консеквентом становится отрицание A, иначе - само A. Результат упрощается. (Прием развертка - 20).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a - \mathrm{set}$ & $b - \mathrm{set}$ & $c \in a$ & $c \in b \to \neg($непересек$(a, b)))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \mathrm{set}$ & $b - \mathrm{set} \to$ непересек$(a, b) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \to \neg(c \in b)))$

Все конъюнктивные члены заменяющей части, включая кванторные импликации, переносятся в антецеденты, а консеквентом становится заменяемая часть

1. Эквивалентность для кванторной расшифровки порождает импликацию с квантором общности в антецедентах. Теорема - определение элементарного утверждения A с кванторной импликацией B в определяющей части. Все антецеденты и консеквент импликации B элементарны, причем консеквент допускает обработку проверочным оператором. Импликация B добавляется к антецедентам, а утверждение A становится консеквентом. (Прием развертка - 91).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(\text{классмножеств}(a)\ \&\ \forall_x(x \in a \to \text{конечное}(x)) \to \text{конечные}(a))$

   из теоремы

   $\forall_a(\text{классмножеств}(a) \to \text{конечные}(a) \leftrightarrow \forall_x(x \in a \to \text{конечное}(x)))$

Кванторная импликация в заменяющей части определяет значения функции, упоминаемой в заменяемой части. Это позволяет полностью определить функцию через описатель "отображение" и получить импликацию, у которой консеквентом служит заменяемая часть исходной теоремы с подставленным в нее описателем

1. Усмотрение явного выражения функции через параметры. Теорема - эквивалентность, определяющая элементарное утверждение A при помощи конъюнкции B. Среди антецедентов теоремы встречается утверждение "функция(f)", где f - переменная. Среди конъюнктивных членов утверждения B встречаются утверждение "$\text{Dom}(f) = D$", "$\forall_x(x \in D \to f(x) = t\ \&\ E)$". Здесь допускается отсутствие прочих конъюнктивных членов E, причем эти члены, если они есть, не содержат f. Предполагается, что такие члены возникают в определении при необходимости уточнить о.д.з. для t. Рассматривается выражение g вида "$\lambda_x(t, x \in D)$". Составляется список S, образованный результатами подстановки в антецеденты теоремы выражения g вместо f. Если E непусто, то к S добавляется импликация "$\forall_x(x \in D \to E)$". Кроме того, к S добавляются результаты подстановки g вместо f в конъюнктивные члены утверждения B, отличные от двух рассмотренных выше. Наконец, создается импликация с антецедентами S, консеквентом которой служит результат подстановки g вместо f в определяемое утверждение A. Результат упрощается и снабжается единственной характеристикой "функ", означающей, что теорема получена из определения путем явного выражения функции через прочие параметры. (Прием определение - 70).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_g(\forall_x(x \in \text{Dom}(g) \to \text{дифференцируема}(g, x))\ \&\ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}\ \&$
   $g - \text{функция} \to \text{первообразная}(\lambda_x(\text{производная}(g, x), x \in \text{Dom}(g)), g))$

   из теоремы

$\forall_{fg}(f - \text{функция } \&\ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \text{первообразная}(f, g) \leftrightarrow g - \text{функция } \&\ \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)\ \&\ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \forall_x(x \in \text{Dom}(g) \to \text{дифференцируема}(g, x)\ \&\ \text{производная}(g, x) = f(x)))$

Заменяемая часть переносится в антецеденты. Кванторная импликация в заменяющей части при помощи задач на описание частично сворачивается, и часть ее антецедентов добавляется к антецедентам теоремы, а остаток - превращается в консеквент теоремы

1. Двухэтапная свертка заменяющей части. Теорема - эквивалентность элементарного утверждения U кванторной импликации "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n \to A_0)$", причем k не менее 2. Выбирается переменная x_i, и список $A_1, \ldots, A_n$ разбивается на подсписок $B_1, \ldots, B_m$ утверждений, содержащих x_i, а также подсписок $C_1, \ldots, C_p$ прочих утверждений. Проверяется, что утверждения $B_1, \ldots, B_m$ содержат все переменные $x_1, \ldots, x_k$. Выбирается утверждение B_j, такое, что ни одно из прочих утверждений $B_1, \ldots, B_m$ не содержит всех переменных $x_1, \ldots x_k$. Составляется список S антецедентов теоремы и утверждений $C_1, \ldots, C_p$. Импликация "$\forall_{x_i}(B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_{j-1}\ \&\ B_{j+1}\ \&\ \ldots\ \&\ B_m \to B_j)$" сворачивается при помощи задачи на описание с посылками S в элементарное утверждение D. Составляется список S_1, полученные добавлением к S утверждений U, D. Относительно этого списка импликация "$\forall_{x_i}(B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_{j-1}\ \&\ B_{j+1}\ \&\ \ldots\ \&\ B_m \to A_0)$" сворачивается в элементарное утверждение E. В качестве результата выдается импликация с антецедентами S_1 и консеквентом E. Предварительно она упрощается. (Прием развертка - 101).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{afx}(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ f - \text{функция } \&\ \text{неубывает}(f, a)\ \&\ \text{наибольший}(x, a) \to \text{наибольший}(f(x), \text{образ}(f, a)))$

   из теоремы

   $\forall_{fga}(a - \text{set}\ \&\ f - \text{функция } \&\ a \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \text{неубывает}(f, a) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in a\ \&\ y \in a\ \&\ y \leq x \to f(y) \leq f(x)))$

2. Разрешение относительно одной из переменных кванторной приставки и последующая свертка. Теорема - эквивалентность элементарного утверждения U кванторной импликации "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n \to A_0)$", причем k не менее 2. Выбирается переменная x_i, и список $A_1, \ldots, A_n$ разбивается на подсписок $B_1, \ldots, B_m$ утверждений, содержащих x_i, а также подсписок $C_1, \ldots, C_p$ прочих утверждений. Составляется список S антецедентов теоремы и утверждений $C_1, \ldots, C_p$. Список утверждений $B_1, \ldots, B_m$ разрешается задачей на описание относительно неизвестной x_i. Посылками служат утверждения S. Для полученного ответа D составляется импликация "$\forall_{x_i}(D \to A_0)$". При помощи задачи на описание с посылками S она сворачивается в элементарное утверждение E. Затем создается результирующая импликация, антецедентами которой служат S, U, а консеквентом - E. Она упрощается. (Прием развертка - 102).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{xG}(x \in \text{вершины}(G)\ \&\ \text{граф}(G)\ \&\ \text{связный}(G) \to \text{компсвязн}(G, x) = \text{вершины}(G))$

из теоремы

$\forall_G(\text{граф}(G) \to \text{связный}(G) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in \text{вершины}(G)\ \&\ y \in \text{вершины}(G)\ \&\ \neg(x = y) \to \exists_z(\text{вершмаршрут}(z, G)\ \&\ \text{начало}(z) = x\ \&\ \text{конец}(z) = y)))$

Предпринимается попытка найти условие, при котором антецеденты квантора общности в заменяющей части становятся ложными. Это условие добавляется к антецедентам, а консеквентом становится бесквантороная часть исходной эквивалентности

1. Попытка определить условие на параметры, при котором антецеденты квантора общнсоти в заменяющей части становятся тождественно ложными. Внутр заменяющей части теоремы встречается кванторная импликация K вида "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n \to A_0)$". Список $y_1, \ldots, y_m$ параметров этой кванторной импликации, являющихся одновременно параметрами всей заменяющей части, непуст. Список всех имеющихся в контексте вхождения импликации K в теорему утверждений (он включает в себя, в том числе, антецеденты теоремы) разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих параметры $y_1, \ldots, y_m$, и подсписок S_2 остальных утверждений. Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения S_2, а условиями - S_1 и "$\neg(\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n))$". Неизвестные - $y_1, \ldots, y_m$. В задаче требуется получить явный ответ. Если полученный ответ R не имеет связанных переменных, то к антецедентам добавляется R, а в консеквенте импликация K заменяется на константу "истина". Результат упрощается. (Прием развертка - 117).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to \text{изолирточка}(a, \{a\}))$

   из теоремы

   $\forall_{aA}(A \subseteq \mathbb{R} \to \text{изолирточка}(a, A) \leftrightarrow a \in A\ \&\ \exists_b(b - \text{число}\ \&\ 0 < b\ \&\ \forall_x(x \in A\ \&\ \neg(x = a) \to b < |x - a|)))$

1.12.5 Эквивалентность, среди конъюнктивных членов заменяющей части которой встречается квантор существования

Утверждение под квантором существования и прочие конъюнктивные члены заменяющей части переносятся в антецеденты, а консеквентом становится заменяемая часть

1. Извлечение из явного параметрического описания простых импликаций. Консеквент теоремы - эквивалентность некоторого утверждения A квантору существования, представляющему собой явное параметрическое описание. Этот квантор существования переносится в антецеденты, а консеквентом становится произвольный элементарный конъюнктивный член утверждения A. (Прием параметризация - 6).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcd}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ c \in a\ \&\ d \in b \to (c,d) \in a \times b)$

из теоремы

$\forall_{abf}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set} \to f \in a \times b \leftrightarrow \exists_{cd}(f = (c,d)\ \&\ c \in a\ \&\ d \in b))$

2. Эквивалентность для кванторной расшифровки порождает импликацию. Консеквент теоремы - эквивалентность элементарного утверждения A конъюнкции $B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_n$. Некоторое B_i - квантор существования, остальные - элементарны. К антецедентам теоремы добавляются конъюнктивные члены утверждения под квантором существования и все утверждения $B_1, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_n$. Консеквентом становится A. (Прием развертка - 57).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{afA}(\text{Dom}(f) = \{1, \ldots, a\}\ \&\ a - \text{целое}\ \&\ 0 \le a\ \&\ \text{Val}(f) = A\ \&\ f - \text{функция}\ \&$ $\text{взаимнооднозначно}(f) \to \text{перестановка}(f, A))$

   из теоремы

   $\forall_{fA}(A - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(A) \to \text{перестановка}(f, A) \leftrightarrow \exists_a(\text{Dom}(f) = \{1, \ldots, a\}\ \&$ $a - \text{целое}\ \&\ 0 \le a)\ \&\ A = \text{Val}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{заимнооднозначно}(f))$

3. Извлечение вспомогательной импликации из определения типа объекта. Консеквент теоремы имеет вид "$P(x) \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(x = t\ \&\ A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n)$", где P - название типа объекта, причем значения выражения t допускают данный тип. Утверждения $A_1, \ldots, A_n$ добавляются к антецедентам, а консеквентом становится $P(t)$. (Прием развертка - 30).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{xy}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число} \to x + iy - \text{комплексное})$

   из теоремы

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z = x + iy))$

4. Извлечение приема усмотрения вида множества по его координатам. Эквивалентность определяет общий вид уравнения для координат точек множества заданного типа. Заменяемая часть - элементарное утверждение A, указывающее тип множества, заменяющая - квантор существования, выражающий уравнение для координат множества через некоторые параметры. Заменяющая часть добавляется к антецедентам, а консеквентом становится заменяемая часть. (Прием уравнкрив - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcKP}(\neg(a^2 + b^2 = 0)\ \&\ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&$ $y - \text{число})\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \text{систкоорд}(K) \to \text{Прямая}(P))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCKP}(\text{систкоорд}(K)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ P \subseteq \text{плоскость}(ABC) \to$ $\text{Прямая}(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \neg(a^2 + b^2 = 0)\ \&$ $\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ ax + by + c = 0)))$

5. Извлечение из явного параметрического описания простой импликации путем перенесения в антецеденты условий на параметры и подстановкой параметризуемого значения. Заменяемая часть эквивалентности - квантор существования либо общности. Формируется утверждение A, в первом случае - совпадающее с заменяемой частью, а во втором - являющееся ее отрицанием. Проверяется, что A имеет вид "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(y = t \ \& \ B_1 \ \& \ \ldots \ \& \ B_n)$", где переменная y не входит в t и отлична от переменных $x_1, \ldots, x_k$. В антецеденты теоремы подставляется t вместо y. К антецедентам добавляются утверждения $B_1, \ldots, B_n$. Консеквентом становится результат подстановки t вместо y в заменяющую часть теоремы (если заменяемая часть имела заголовок "длялюбого", то - в отрицание заменяющей части). Антецеденты упрощаются. Для упрощения консеквента используются нормализаторы общей стандартизации. Результат обрабатывается нормализатором общей стандартизации кванторных импликаций. (Прием кванторнаясвертка - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{km}(m - \text{целое} \ \& \ k - \text{целое} \rightarrow m|km)$

   из теоремы

   $\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(k - \text{целое} \ \& \ n = mk))$

6. Вывод импликации, консеквентом которой служит параметризуемое утверждение. Теорема дает параметрическое описание "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n)$" для элементарного утверждения B. Утверждения $A_1, \ldots, A_n$ добавляются к антецедентам, а консеквентом становится B. Результат упрощается. (Прием параметризация - 27).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{an}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \{1, \ldots, n\} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \rightarrow$
   $\text{линфал}(\lambda_x(\neg \sum_{i,i \in a} x(i), \text{двнабор}(x, n))) \ \& \ \text{линфал}(\lambda_x(\sum_{i,i \in a} x(i), \text{двнабор}(x, n))))$

   из теоремы

   $\forall_f(\text{линфал}(f) \leftrightarrow \exists_{abn}(f = \lambda_x(b + \sum_{i,i \in a} x(i), \text{двнабор}(x, n)) \ \& \ a - \text{set} \ \&$
   $a \subseteq \{1, \ldots, n\} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \ \& \ b - \text{boolean}))$

Заменяемая часть переносится в антецеденты, а консеквентом становится квантор существования - конъюнктивный член заменяющей части

1. Извлечение импликации для вывода параметрического описания. Консеквент теоремы - эквивалентность элементарного утверждения A некоторому параметрическому описанию B. Утверждение A добавляется к антецедентам, а консеквентом становится B. (Прием параметризация - 16).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a \subseteq b \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow \exists_c(c - \text{set} \ \& \ a = b \cap c))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow a \subseteq b \leftrightarrow \exists_c(c - \text{set} \ \& \ a = b \cap c))$

2. Перенесение заменяющей части в антецеденты. Консеквент теоремы - эквивалентность квантора существования A элементарному утверждению B, которую можно использовать для исключения несущественных неизвестных. Утверждение B добавляется к антецедентам, а консеквентом становится A. Результат упрощается. (Прием связка - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{AB}(\neg(B = \emptyset)\ \&\ A - \text{set}\ \&\ B - \text{set} \rightarrow \exists_f(\text{Отображение}(f, A, B)))$

   из теоремы

   $\forall_{AB}(B - \text{set} \rightarrow \exists_f(\text{Отображение}(f, A, B)) \leftrightarrow \neg(B = \emptyset)\ \&\ A - \text{set}\ \vee\ A = \emptyset)$

3. Переход к импликации, дающей общий вид уравнения. Консеквент теоремы - эквивалентность, определяющая общий вид уравнения для координат точек множества заданного типа. Тип множества задается заменяемой элементарной частью A, общий вид уравнения - квантором существования B в заменяющей части. Утверждение A переносится в антецеденты, а консеквентом становится B. (Прием уравнкрив - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCKP}(K = (A, B, C)\ \&\ P \subseteq \text{плоскость}(ABC)\ \&\ \text{Прямая}(P)\ \&\ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \exists_{abc}(\neg(a^2 + b^2 = 0)\ \&\ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCKP}(\text{систкоорд}(K)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ P \subseteq \text{плоскость}(ABC) \rightarrow \text{Прямая}(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \neg(a^2 + b^2 = 0)\ \&\ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ ax + by + c = 0))$

4. Получение импликации, выводящей утверждение существования. Теорема - эквивалентность для свертки квантора существования A в бескванторное утверждение B. Утверждение B добавляется к антецедентам, а консеквентом становится A. (Прием кванторнаясвертка - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{огрсверху}(a) \rightarrow \exists_b(\text{верхняягрань}(b, a)))$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{огрсверху}(a) \leftrightarrow \exists_b(\text{верхняягрань}(b, a)))$

5. Извлечение из эквивалентности с квантором существования среди конъюнктивных членов заменяющей части кванторной импликации для вывода квантора существования. Теорема - эквивалентность, опредедяющая некоторое утверждение A посредством утверждения B. Среди конъюнктивных членов B имеется квантор существования (возможно, совпадающий с B). Этот квантор становится консеквентом, а к антецедентам добавляется A. (Прием определение - 38).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&$ $D-$ точка $\&$ внешкасаются(окружность(AB), окружность$(CD)) \rightarrow$ $\exists_E(E \in$ отрезок$(AC)\ \&\ E \in$ окружность$(AB)\ \&\ E \in$ окружность$(CB)\ \&$ $E-$ точка$))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&$ $D-$ точка $\rightarrow$ внешкасаются(окружность(AB), окружность$(CD)) \leftrightarrow$ $\exists_E(E \in$ отрезок$(AC)\ \&\ E \in$ окружность$(AB)\ \&\ E \in$ окружность$(CB)\ \&$ $E-$ точка$))$

Находится некоторое следствие подкванторных утверждений квантора существования в заменяющей части. Его отрицание добавляется к антецедентам, а консеквентом становится отрицание заменяемой части

1. Извлечение из эквивалентности кванторной свертки простой импликации для проверочного оператора путем ослабления условия существования. Теорема - эквивалентность элементарного утверждения A квантору B. Рассматривается квантор существования B_1, совпадающий с B, если B - квантор существования, и равный отрицанию B, если B - квантор общности. B_1 имеет вид "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(C_1\ \&\ \ldots\ \&\ C_n)$". Решается задача на исследование, посылками которой служат антецеденты теоремы и утверждения $C_1, \ldots, C_n$. Целью является вывод следствий, не содержащих переменных $x_1, \ldots, x_k$. После этого в списке посылок выбирается элементарное утверждение D, не содержащее переменных $x_1, \ldots, x_k$ и не являющееся следствием антецедентов теоремы. Отрицание D добавляется к антецедентам, а консеквентом становится отрицание A, если B - квантор существования, и само A в противном случае. Результат упрощается. (Прием развертка - 23).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bce}(\neg(b=c)\ \&\ b-$ точка $\&\ c-$ точка $\&\ e-$ точка $\&$ коллинеарны(вектор(bc), вектор$(be)) \rightarrow e \in$ прямая$(bc))$

   из теоремы

   $\forall_{bce}(\neg(b=c)\ \&\ b-$ точка $\&\ c-$ точка $\&\ e-$ точка $\rightarrow$ коллинеарны(вектор(bc), вектор$(be)) \leftrightarrow \exists_y(y$вектор$(bc) =$ вектор$(be)\ \&\ y-$ число$))$

Отрицание квантора существования в заменяющей части сворачивается в элементарное утверждение, добавляемое к антецедентам. Консеквентом становится отрицание заменяемой части

1. Свертка квантора существования в элементарное утверждение и вывод импликации для отрицания заменяемого утверждения. Теорема - эквивалентность элементарного утверждения A квантору существования. Отрицание этого квантора преобразуется при помощи задачи на упрощение в элементарное утверждение B. Проверяется, что B не совпадает с отрицанием A, после чего B

добавляется к антецедентам, а консеквентом становится отрицание A. (Прием развертка - 88).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D)\ \&$
$\text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(AB)) \to \neg(\text{разныестороны}(A, B, \text{прямая}(CD))))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D) \to$
$\text{разныестороны}(A, B, \text{прямая}(CD)) \leftrightarrow \exists_E(E - \text{точка}\ \&\ E \in \text{отрезок}(AB)\ \&$
$E \in \text{прямая}(CD)))$

Вывод следствий из теоремы, дающей общий вид уравнения для координат множеств точек заданного типа

1. Извлечение приема усмотрения ограничения на коэффициенты уравнения. Теорема - эквивалентность элементарного утверждения A квантору существования "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_n)$", определяющему общий вид уравнения для координат множества точек, удовлетворяющего условию A. Некоторое B_i - равенство с описателем "класс" в правой части Q, представляющее указанное уравнение. Выбирается такое B_j, представляющее собой неравенство либо отрицание равенства, которое не используется для сопровождения B_i по о.д.з. Выбираются новые переменные $y_1, \ldots, y_k$. Составляется список S, получаемый добавлением к антецедентам теоремы результата замены в $\neg(B_j)$ переменных $x_1, \ldots, x_k$ на $y_1, \ldots, y_k$, а также результатов такой замены во всех B_p, используемых для сопровождения B_i по о.д.з. Определяется результат Q_1 замены в Q переменных $x_1, \ldots, x_k$ на $y_1, \ldots, y_k$. Устанавливается, что утверждение "$\neg(\exists_{x_1 \ldots x_k}(B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_{i-1}\ \&\ B_{i+1}\ \&\ \ldots\ \&\ B_n\ \&\ Q = Q_1)$" является следствием S. Наконец, к антецедентам теоремы добавляются все необходимые для сопровождения B_i по о.д.з. утверждения B_p, а также A и B_i. Консеквентом становится B_j. Результат упрощается. (Прием уравнкрив - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcKP}(\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&$
   $a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \text{Прямая}(P)\ \&\ \text{систкоорд}(K) \to \neg(a^2 + b^2 = 0))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCKP}(\text{систкоорд}(K)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ P \subseteq \text{плоскость}(ABC) \to$
   $\text{Прямая}(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \neg(a^2 + b^2 = 0)\ \&$
   $\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ ax + by + c = 0)))$

2. Извлечение приема усмотрения существования множества заданного типа, имеющего заданные координаты. Теорема - эквивалентность утверждения $P(y)$ квантору существования "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_n)$", определяющему общий вид уравнения для координат множества y точек, имеющего тип P. Некоторое B_i - равенство с описателем "класс" в правой части, представляющее указанное уравнение. Объединение списка антецедентов теоремы с утверждениями

$B_1, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_n$ разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Проверяется, что каждое утверждение списка S_1 является следствием утверждений $S_2, P(y), B_i$. Создается импликация с антецедентами S_2 и консеквентом $\exists_y(P(y)\ \&\ A_i)$. После упрощения она выдается как результат. (Прием уравнкрив - 7).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcK}(\neg(a^2+b^2=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ \text{систкоорд}(K) \rightarrow$
$\exists_P(\text{коорд}(P,K)=\text{set}_{xy}(c+ax+by=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ \text{число})\ \&\ \text{Прямая}(P)))$

из теоремы

$\forall_{ABCKP}(\text{систкоорд}(K)\ \&\ K=(A,B,C)\ \&\ P\subseteq\text{плоскость}(ABC) \rightarrow$
$\text{Прямая}(P)\leftrightarrow\exists_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ \neg(a^2+b^2=0)\ \&$
$\text{коорд}(P,K)=\text{set}_{xy}(x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ ax+by+c=0)))$

3. Использование явного параметрического описания рассматриваемых объектов. Теорема - эквивалентность утверждения $P(y)$ квантору существования A, определяющему общий вид уравнения для координат множества y точек, имеющего тип P. Справочник поиска теорем "парамописание" находит дополнительную теорему, дающую параметрическое описание "$\exists_{z_1\ldots z_m}(y=t\ \&\ B)$" для множеств точек y, имеющих тип P. После необходимого переобозначения переменных формируется объединенный список S антецедентов исходной и дополнительной теорем, а также конъюнктивных членов утверждения B. В этом списке вместо y подставлено t. Консеквентом становится результат подстановки в A выражения t вместо y. Результат упрощается. (Прием уравнкрив - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{efK}(\neg(e=f)\ \&\ e\in\text{плоскоорд}(K)\ \&\ f\in\text{плоскоорд}(K)\ \&\ e-\text{точка}\ \&$
   $f-\text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \text{Двумерн}(K)\rightarrow\exists_{abc}(\neg(a^2+b^2=0)\ \&$
   $\text{коорд}(\text{прямая}(ef),K)=\text{set}_{xy}(c+ax+by=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&$
   $a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCKP}(\text{систкоорд}(K)\ \&\ K=(A,B,C)\ \&\ P\subseteq\text{плоскость}(ABC)\rightarrow$
   $\text{Прямая}(P)\leftrightarrow\exists_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ \neg(a^2+b^2=0)\ \&$
   $\text{коорд}(P,K)=\text{set}_{xy}(x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ ax+by+c=0)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_A(\text{Прямая}(A)\leftrightarrow\exists_{BC}(B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ A=\text{прямая}(BC)))$

Из реализуемости квантора существования в заменяющей части выводится реализуемость заменяемой части

1. Усмотрение существования объектов, находящихся в отношении, определенном с помощью квантора существования. Теорема - определение утверждения A при помощи квантора существования "$\exists_{x_1\ldots x_k}(B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_n)$". Список $y_1, \ldots, y_m$ параметров утверждения A, не входящих в антецеденты теоремы, непуст. Решается задача на подбор примера значений неизвестных $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_m$,

при которых все утверждения $B_1, \ldots, B_n$ истинны. Если получен положительный ответ, выводится импликация, полученная из исходной теоремы заменой консеквента на $\exists_{y_1 \ldots y_m} A$. (Прием определение - 164).

Пример: вывод теоремы

$\exists_a(a - \text{rational})$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{rational} \leftrightarrow \exists_{mn}(m - \text{целое } \& \ n - \text{натуральное } \& \ a = m/n))$

Рассматривается некоторая подстановка вместо переменных, связанных квантором существования, и подкванторные утверждения добавляются к антецедентам, а заменяемая часть становится консеквентом

1. Примерка тождественной и константной функций, если квантор существования берется по переменной для функций. Теорема - определение утверждения A при помощи квантора существования "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(B_1 \ \& \ \ldots \ \& \ B_n)$". Некоторое B_i имеет вид "$f -$ функция", где f - переменная списка $x_1, \ldots, x_k$. Выбираются новые переменные y, C, a. Поочередно рассматриваются два случая. В первом случае создается выражение T вида "$\lambda_y(y, y \in C)$", во втором случае T имеет вид "$\lambda_y(a, y \in C)$". К антецедентам теоремы добавляются утверждения $B_1, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_n, C - \text{set}, f = T$. Консеквентом становится A. Результат упрощается. (Прием развертка - 106).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cB}(c - \text{set } \& \ B - \text{set } \& \ c \subseteq B \rightarrow \text{card}(c) \leq \text{card}(B))$

   из теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{set } \& \ B - \text{set} \rightarrow \text{card}(A) \leq \text{card}(B) \leftrightarrow \exists_f(f - \text{функция } \&$
   $\text{взаимнооднозначно}(f) \ \& \ \text{Dom}(f) = A \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq B))$

2. Попытка рассмотреть конечный набор в качестве функции, по которой навешен квантор существования. Теорема - определение утверждения A при помощи квантора существования "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(B_1 \ \& \ \ldots \ \& \ B_n)$". Некоторое B_i имеет вид "$f -$ функция", где f - переменная списка $x_1, \ldots, x_k$. К антецедентам добавляются утверждения $B_1, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_n, \text{слово}(f)$. Консеквентом становится A. Результат упрощается. (Прием развертка - 107).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fB}(B - \text{set } \& \ \text{Val}(f) \subseteq B \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \ \& \ f - \text{слово} \rightarrow l(f) \leq \text{card}(B))$

   из теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{set } \& \ B - \text{set} \rightarrow \text{card}(A) \leq \text{card}(B) \leftrightarrow \exists_f(f - \text{функция } \&$
   $\text{взаимнооднозначно}(f) \ \& \ \text{Dom}(f) = A \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq B))$

3. Рассмотрение малых значений натурального параметра. Консеквент теоремы имеет вид "$A \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}$(натуральное$(x_i)$ & $y = t$ & B_1 & ... & B_n)", где $k > 1$, y - переменная, не входящая в $x_1, \ldots, x_k$, выражение t не содержит x_i, а утверждения B_i не являются равенствами. Рассматриваются три случая, в которых K - константа 1,2 либо 3. Решается задача на описание, условиями которой служат результаты подстановки константы K вместо x_i в утверждения $B_1, \ldots, B_n$. Посылки - антецеденты теоремы. Неизвестными служат переменные $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k$, причем ответ C выдается, даже если явного описания получить не удалось. Проверяется, что C имеет своим конъюнктивным членом квантор существования D с элементарными подкванторынми утверждениями $Q_1, \ldots, Q_r$, причем остальные конъюнктивные члены $E_1, \ldots, E_p$ утверждения C (если они есть) элементарны. Проверяется, что для любой переменной списка $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_k$ среди утверждений E_j, Q_j имеется равенство с этой переменной в левой части. Наконец, к антецедентам теоремы добавляются утверждения $E_j, Q_j, y = t$, а консеквент заменяется на утверждение A. (Прием развертка - 98).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcG}$(граф(G) & ведет$(a, b, c, G) \rightarrow$ маршрут$(((b, c), (a)), G)$)

   из теоремы

   $\forall_{GM}$(граф$(G) \rightarrow$ маршрут$(M, G) \leftrightarrow \exists_{ABn}(n -$ натуральное &
   кортеж$(A, n,$ вершины$(G))$ & $M = (A, B)$ & кортеж$(B, n-1,$ ребра$(G))$ &
   $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n-1\} \rightarrow$ ведет$(B(i), A(i), A(i+1), G))))$

Предпринимается попытка найти бескванторное условие, при котором квантор существования в заменяющей части становится истинным. Оно добавляется к антецедентам, после чего эта часть упрощается и тоже добавляется к антецедентам. Консеквентом становится заменяемая часть

1. Попытка реализовать утверждение под квантором существования в заменяемой части при помощи другого утверждения из той же теоремы. Теорема - определение утверждения A посредством утверждения вида B_1 & ... & Bm; $m > 1$. Некоторое B_i содержит квантор существования "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(C_1$ & ... & $C_n)$", прочие B_j элементарны. Составляется список S, образованный антецедентами теоремы и отличными от B_i утверждениями B_j. Усматривается, что в области вхождения некоторого C_p либо в списке S имеется утверждение C с тем же заголовком, что C_p и отличающееся от него лишь заменой некоторого своего подвыражения t_1 на t_2. Проверяется, что все параметры равенства $t_1 = t_2$ содержатся среди параметров списка S и переменных $x_1, \ldots, x_k$. Решается задача на описание с условиями $C_1, \ldots, C_{p-1}, C_{p+1}, \ldots, C_n, t_1 = t_2$ и посылками S. Неизвестные - $x_1, \ldots, x_k$, причем все они несущественные. Получение явного ответа не требуется. Ответ D не имеет связанных переменных. Определяется результат замены в B_i квантора существования на константу "истина", который после упрощения превращается в утверждение E без связанных переменных. Антецедентами новой теоремы становятся утверждения S, D, E, а консеквентом - утверждение A. (Прием связпарам - 5).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{xA}(A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \ \& \ x \in A \to \text{точкаприкосн}(x, A))$

из теоремы

$\forall_{xA}(A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \to \text{точкаприкосн}(x, A) \leftrightarrow x - \text{число} \ \& \ \forall_b(b - \text{число} \ \& \ 0 < b \to \exists_y(y \in A \ \& \ |x - y| < b)))$

1.13 Переход к эквивалентности от импликации

Расшифровка косвенного определения объекта: переход от импликации для определяющего объект свойства к эквивалентности для равенства этому объекту

1. Вывод из косвенного определения эквивалентности для равенства определяемому выражению. Теорема - косвенное определение выражения t. Это выражение является корневым операндом консеквента, а сам консеквент - не равенство и не эквивалентность. Выбирается новая переменная x. Консеквент заменяется на эквивалентность равенства $x = t$ результату замены в старом консеквенте операнда t на переменную x. (Прием определение - 121).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ac}(a - \text{set} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ \neg(a = \emptyset) \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \to c = \inf(a) \leftrightarrow \text{наибольший}(c, \text{set}_b(\text{нижняягрань}(b, a))))$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{set} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ \neg(a = \emptyset) \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \to \text{наибольший}(\inf(a), \text{set}_b(\text{нижняягрань}(b, a))))$

Вывод из импликации эквивалентности ее консеквента дизъюнкции этого консевкента и некоторого антецедента; последний из списка антецедентов эквивалентности исключается

1. Вывод эквивалентности, отбрасывающей избыточный дизъюнктивный член с неизвестной. Теорема - утверждение обобщенной транзитивности с двумя существенными антецедентами и элементарным консеквентом A. Выбирается существенный антецедент B. Он исключается из антецедентов, а консеквентом становится эквивалентность $(A \ \vee \ B \leftrightarrow A)$. (Прием транзитоперанд - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ d \subseteq e \to a \subseteq d \ \vee \ a \subseteq e \leftrightarrow a \subseteq e)$

   из теоремы

   $\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ a \subseteq d \ \& \ d \subseteq e \to a \subseteq e)$

Ослабление антецедента и получение эквивалентности исходного консеквента дизъюнкции двух условий - отрицания добавленной при ослаблении ситуации и результата преобразования консеквента при наличии такой ситуации

1. Попытка получения эквивалентности для дизъюнктивной декомпозиции путем оалсбления антецедента. Теорема имеет элементарный консеквент A, допускающий обработку проверочным оператором. Выбирается некоторый существенный антецедент $P(t_1 \dots t_n)$, имеющий единственный параметр. Справочник "ослабление" позволяет найти ослабленную версию Q отношения P. Составляется список S антецедентов теоремы, отличных от $P(t_1 \dots t_n)$. При помощи задачи на описание с посылками S упрощается конъюнкция $Q(t_1 \dots t_n)$ & $\neg(P(t_1 \dots t_n))$. Результат B - элементарное утверждение. Консеквент A прощается другой задачей на описание относительно посылок S, B. Результат C - элементарное неконстантное утверждениея, параметры которого не входят в B. Проверяется непротиворечивость о.д.з. для C. Затем утверждение $P(t_1 \dots t_n)$ в антецедентах теоремы заменяется на $Q(t_1 \dots t_n)$, а консеквентом становится эквивалентность $A \leftrightarrow (\neg(B) \ \vee \ C)$. (Прием спуск - 33).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq c \rightarrow 0 < a + c \leftrightarrow \neg(c = 0) \ \vee \ \neg(a = 0))$

   из теоремы

   $\forall_{ac}(0 < c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow 0 < a + c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \rightarrow a \leq b)$

Консеквентом импликации служит утверждение, связывающее значения "входных" объектов с однозначно определяемыми по ним значениями "выходных" объектов. Консеквент преобразуется в эквивалентность, одной из частей которой служит исходный консеквент с новыми выходными переменными, а другой - список равенств новых выходных переменных старым выходным объектам

1. Преобразование импликации в эквивалентность, определяющую значения выходных переменных. Предикатный символ P в консеквенте $P(t_1 \dots t_n)$ однозначно определяет значения корневых операндов $t_{i_1}, \dots, t_{i_k}$ по значениям своих остальных операндов. Выбираются новые переменные $x_1, \dots, x_k$. Находится результат A замены в консеквенте операндов $t_{i_1}, \dots, t_{i_k}$ на новые переменные $x_1, \dots, x_k$, после чего консеквент заменяется на эквивалентность "$A \leftrightarrow$ $t_{i_1} = x_1 \ \& \ \dots \ \& \ t_{i_k} = x_k$". (Прием опредзнач - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcde}(d - \text{set} \ \& \ d \subseteq \text{Dom}(c) \ \& \ \text{Dom}(c) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(c) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ c - \text{функция} \ \&$ $\text{неубывает}(c, d) \ \& \ \text{наибольший}(a, d) \rightarrow \text{Max}(c, d, b, e) \leftrightarrow b = d \cap \text{слой}(c, c(a)) \ \&$ $e = c(a))$

   из теоремы

$\forall_{acd}(d - \text{set}\ \&\ d \subseteq \text{Dom}(c)\ \&\ \text{Dom}(c) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(c) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ c - \text{функция}\ \&$
$\text{неубывает}(c, d)\ \&\ \text{наибольший}(a, d) \to \text{Max}(c, d, d \cap \text{слой}(c, c(a)), c(a)))$

Вывод эквивалентности для самого сложного антецедента с разбором случаев по дизъюнктивному консеквенту

1. Раздельное упрощение самого сложного антецедента для каждого подсоучая и вывод эквивалентности этому антецеденту. Консеквент - дизъюнкция $A_1 \vee \ldots \vee A_n$ попарно несовместных утверждений. Максимальную слождность имеет единственный антецедент B. Он содержит все параметры консеквента. Составляется список S антецедентов, отличных от B. При помощи обращений к задачам на преобразование составляется список $C_1, \ldots, C_n$ результатов упрощения B относительно посылок S, A_i: $i = 1, \ldots, n$. Проверяется, что каждый такой результат либо имеет сложность, меньшую сложности B, либо содержит не все параметры B. Затем из антецедентов теоремы исключается B, а консеквент заменяется на "$B \leftrightarrow (A_1\ \&\ C_1)\ \vee\ \ldots\ \vee\ (A_n\ \&\ C_n)$". Результат упрощается. (Прием альтернатива - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{натуральное}\ \&\ a - \text{rational} \to \text{простое}(ab) \leftrightarrow a - 1 = 0\ \&\ \text{простое}(b)\ \vee$
   $b - 1 = 0\ \&\ \text{простое}(a))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{натуральное}\ \&\ a - \text{rational}\ \&\ \text{простое}(ab) \to a - 1 = 0\ \vee\ b - 1 = 0)$

Усмотрение эквивалентности консеквента антецеденту

1. Усмотрение эквивалентности консеквента тому антецеденту, который переводится в другой антецедент подстановкой, определяемой равенством в консеквенте. Консеквент теоремы имеет вид $x = t$, где переменная x не входит в неконстантный терм t. Выбирается имеющий максимальную сложность и содержащий x антецедент A. Находится другой антецедент B с тем же заголовком. Проверяется, что он получается из A заменой x на t. Из антецедентов теоремы исключается B, а консеквентом ставновится эквивалентность $B \leftrightarrow x = t$. (Прием значениепеременной - 11).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abd}(b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{наименьший}(a, b) \to \text{наименьший}(d, b) \leftrightarrow d = a)$

   из теоремы

   $\forall_{abd}(b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{наименьший}(a, b)\ \&\ \text{наименьший}(d, b) \to d = a)$

2. Если консеквент - равенство двух переменных, то усматривается его эквивалентность некоторому равенству в антецедентах. Теорема - кванторная импликация с консеквентом вида $x = y$, где x, y - переменные. Имеется антецедент $t_1 = t_2$, такой, что при взаимном переобозначении в t_1 переменных x, y получается t_2. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность

"$(t_1 = t_2 \leftrightarrow x = y$". Антецеденты - антецеденты исходной теоремы, отличные от $t_1 = t_2$. (Прием вывод - 34).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{fxy}(x \in \mathrm{Dom}(f)\ \&\ y \in \mathrm{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow f(x) = f(y) \leftrightarrow x = y)$

из теоремы

$\forall_{fxy}(f(x) = f(y)\ \&\ x \in \mathrm{Dom}(f)\ \&\ y \in \mathrm{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&$
$\text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow x = y)$

3. Попытка усмотрения эквивалентности консеквента самому сложному антецеденту с помощью задачи на доказательство. Теорема - кванторная импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Наиболее сложный подтерм антецедентов единственный и встречается только в антецеденте A. Оценки сложности этого антецедента и консеквента больше 10. При помощи задачи на доказательство удается усмотреть, что A - следствие остальных антецедентов и консеквента. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность утверждения A консеквенту исходной теоремы. Ее антецеденты - отличные от A антецеденты исходной теоремы. (Прием вывод - 52).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bc}(\neg(c = \emptyset)\ \&\ c - \text{set}\ \&\ c \subseteq \mathbb{R}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \text{огрснизу}(c) \rightarrow b \leq \inf(c) \leftrightarrow \text{нижняягрань}(b, c))$

   из теоремы

   $\forall_{bc}(\neg(c = \emptyset)\ \&\ c - \text{set}\ \&\ c \subseteq \mathbb{R}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ b \leq \inf(c)\ \&\ \text{огрснизу}(c) \rightarrow \text{нижняягрань}(b, c))$

4. Попытка усмотреть эквивалентность консеквента одному из антецедентов. Консеквент теоремы имеет вид $x = t$, где x - переменная, не входящая в отличное от переменной выражение t. Выбирается элементарный антецедент A, содержащий все параметры консеквента и не используемый для сопровождения по о.д.з. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что этот антецедент - следствие прочих антецедентов и консеквента. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность утверждения A консеквенту исходной теоремы, антецедентами - отличные от A антецеденты исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием значениепеременной - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ ab \leq 0 \rightarrow |a| = |b| \leftrightarrow a = -b)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(|a| = |b|\ \&\ ab \leq 0\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow a = -b)$

5. Переход к эквивалентности, если конъюнкция определяет набор параметров правой части равенства в антецедентах. Теорема - кванторная импликация с элементарными антецедентами и консеквентом, имеющим вид конъюнкции. Среди конъюнктивных членов консеквента выделяются равенства $x_1 = t_1, \ldots,$ $x_n = t_n$, у которых переменные x_i не входят в выражения t_i. Имеется антецедент $r_1 = r_2$, такой, что параметры r_1 включаются в список $x_1, \ldots, x_n$, а выражение r_2 не содержит переменных $x_1, \ldots, x_n$. Утверждение "$\exists_{x_1 \ldots x_n}(r_1 = r_2)$" - следствие отличных от $r_1 = r_2$ антецедентов. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность равенства $r_1 = r_2$ консеквенту исходной теоремы. Антецеденты - отличные от $r_1 = r_2$ антецеденты исходной теоремы. (Прием конъюнкция - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{AKabc}(\text{Трехмерн}(K)\ \&\ \text{Вектор}(A) \to \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \leftrightarrow \text{крд}(A, K, 1) = a\ \&\ \text{крд}(A, K, 2) = b\ \&\ \text{крд}(A, K, 3) = c)$

   из теоремы

   $\forall_{AKabc}(\text{Трехмерн}(K)\ \&\ \text{Вектор}(A)\ \&\ \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \to \text{крд}(A, K, 1) = a\ \&\ \text{крд}(A, K, 2) = b\ \&\ \text{крд}(A, K, 3) = c)$

6. Усмотрение эквивалентности консеквента имеющему те же параметры антецеденту с помощью задачи на доказательство. Консеквент теоремы - отличный от равенства нечисловой двуместный предикат. Выбирается существенный антецедент A, не имеющий заголовка "не" и не содержащий параметров, не входящих в консеквент. Число его параметров не менее 2, причем не существует другого антецедента, параметры которого - собственное надмножество параметров A и включаются в параметры консеквента. Создается список S, образованный отличными от A антецедентами и консеквентом. Если стартовая теоремы цикла вывода - определение понятия, являющегося заголовком некоторого антецедента, то этот антецедент "расшифровывается" при помощи данного определения, и результат добавляется к списку S. Кроме того, к списку S добавляются утверждения, необходимые для сопровождения по о.д.з. С помощью задачи на доказательство устанавливается, что A - следствие S. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность утверждения A консеквенту исходной теоремы. Антецеденты - отличные от A антецеденты исходной теоремы и утверждения, необходимые для сопровождения по о.д.з. Результат упрощается. (Прием отношение - 46).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(a = d)\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ a \in \text{окружность}(bc)\ \&\ d \in \text{окружность}(bc)\ \&$
   $a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка} \to d \in \text{прямая}(ab) \leftrightarrow$
   $b \in \text{отрезок}(ad))$

   из теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(a = d)\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ a \in \text{окружность}(bc)\ \&\ d \in \text{прямая}(ab)\ \&$
   $d \in \text{окружность}(bc)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка} \to$
   $b \in \text{отрезок}(ad))$

7. Попытка усмотреть эквивалентность консеквента одному из антецедентов. Теорема имеет бесповторный консеквент вида $P(t)$ и несколько антецедентов $P(x_1)$, $\ldots, P(x_n)$, таких, что $x_1, \ldots, x_n$ - все параметры неоднобуквенного выражения t. Выбирается некоторый параметр x_i, и выбирается новая переменная y. Составляется список S остальных антецедентов, и решается задача на описание, условия которой - содержащие x_i утверждения списка S, равенство $t = y$ и необходимые для сопровождения по о.д.з. выражения t утверждения. Посылки - не содержащие x_i утверждения списка S, утверждения $P(x_1), \ldots, P(x_{i-1}), P(x_{i+1})$, $\ldots, P(x_n)$ и $P(y)$. Единственная неизвестная - x_i. После решения ответ преобразуется к виду д.н.ф. D. Рассматривается некоторый дизъюнктивный член D_1 утверждения D (возможно, совпадающий с D), и среди его конъюнктивных членов выделяется равенство $x_i = r$. Остальные конъюнктивные члены образуют список Q. Среди утверждений этого списка нет равенств, и они не содержат переменной x_i. Из Q и исходных посылок задачи на описание вытекает отрицание любого отличного от D_1 дизъюнктивного члена утверждения D. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что $P(r)$ - следствие Q и исходных посылок задачи на описание. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $P(t) \leftrightarrow P(x_i)$. Антецеденты - отличные от $P(x_i)$ антецеденты исходной теоремы, утверждения Q и утверждения, необходимые для сопровождения t по о.д.з. Список антецедентов упрощается. (Прием свойства - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{число } \& \ c - \text{rational} \rightarrow (b + c) - \text{rational} \leftrightarrow b - \text{rational})$

   из теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{rational } \& \ c - \text{rational} \rightarrow (b + c) - \text{rational})$

8. Попытка усмотреть эквивалентность консеквента одному из антецедентов. Консеквент теоремы - равенство двух переменных $a = b$. Выбирается элементарный антецедент A, содержащий a и b. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что он является следствием прочих антецедентов и консеквента. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $A \leftrightarrow a = b$. Антецеденты - отличные от A антецеденты исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием равно - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ 0 \leq ab \rightarrow |a| = |b| \leftrightarrow a = b)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(|a| = |b| \ \& \ 0 \leq ab \ \& \ a - \text{число } \& \ b - \text{число} \rightarrow a = b)$

9. Усмотрение эквивалентности консеквента антецеденту, если оба он содержат все переменные теоремы. Консеквент теоремы - равенство двух атомарных выражений, включающее все переменные теоремы. Количество этих переменных не менее 3. Имеется единственный антецедент A, содержащий все параметры консеквента. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что он

является следствием остальных антецедентов и консеквента. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность антецедента A консеквенту исходной теоремы. Антецеденты - отличные от A антецеденты исходной теоремы. (Прием равны - 37).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
$D - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \leftrightarrow$
$\text{расстдопрямой}(A, \text{прямая}(CD)) = l(AB))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
$D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \rightarrow$
$\text{расстдопрямой}(A, \text{прямая}(CD)) = l(AB))$

10. Попытка усмотрения эквивалентности консеквента единственному антецеденту, содержащему все его переменные. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Имеется единственный антецедент A, включающий все параметры консеквента. Прочие антецеденты имеют каждый единственную переменную. Составляется список S антецедентов, отличных от A. Если A - равенство $x = t$ переменной x некоторому отличному от переменной выражению, причем удается усмотреть тип P значения t, то к S добавляется утверждение $P(x)$. При помощи задачи на доказательство усматривается, что A - следствие S, консеквента и утверждений, необходимых для сопровождения консеквента по о.д.з. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность A конъюнкции консеквента исходной теоремы и всех необходимых для сопровождения его по о.д.з.утверждений. Антецеденты - утверждения S. Результат упрощается. (Прием вывод - 94).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{boolean}\ \&\ b - \text{boolean} \rightarrow \neg(a = b) \leftrightarrow (b = \neg(a)))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{boolean}\ \&\ \neg(a) = b \rightarrow \neg(a = b))$

11. Попытка усмотреть эквивалентность консеквента, имеющего вид равенства с переменной в одной из частей, некоторому антецеденту. Теорема - тождество общей стандартизации вида $t = x$, где x - переменная (она может входить в t). Выбирается антецедент A, содержащий все параметры консеквента и не используемый для сопровождения консеквента по о.д.з. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что результат подстановки в A выражения t вместо x - следствие отличных от A антецедентов. При доказательстве разрешается использовать уже имеющиеся в списке вывода теоремы. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность A консеквенту исходной теоремы. Антецеденты - отличные от A антецеденты исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием нормализация - 139).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ac}(c - $ натуральное $\&\ a -$ целое $\to$ нод$(a, c) = c \leftrightarrow c \mid a)$

из теоремы

$\forall_{ac}(c - $ натуральное $\&\ c \mid a\ \&\ a -$ целое $\to c =$ нод$(a, c))$

12. Попытка доказать эквивалентность консеквента единственному существенному антецеденту, содержащему все его параметры. Теорема - тождество, обеспечивающее переход к более простым в смысле справочника "оценка" термам. Рассматриваются существенные антецеденты, и для каждого из них предпринимается попытка пополнить список параметров за счет переменных x других антецедентов вида $x = t$, где все параметры терма t уже входят в список, а x - еще нет. Обнаруживается единственный антецедент A, для которого такой список содержит все параметры консеквента. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что он является следствием других антецедентов и консеквента. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность утверждения A консеквенту исходной теоремы. Антецеденты - отличные от A антецеденты исходной теоремы. (Прием упрощение - 31).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abgh}(a =$ операция$(h)\ \&\ g \in$ носитель$(h)\ \&\ b -$ натуральное $\&$
порядокэлемента$(g, h) -$ натуральное $\&$ группа$(h) \to$
порядокэлемента$(g, h) \mid b \leftrightarrow$ алгстепень$(g, a, b) =$ единица$(a))$

из теоремы

$\forall_{abgh}(a =$ операция$(h)\ \&\ g \in$ носитель$(h)\ \&\ b -$ натуральное $\&$
порядокэлемента$(g, h) -$ натуральное $\&$ порядокэлемента$(g, h) \mid b\ \&$
группа$(h) \to$ алгстепень$(g, a, b) =$ единица$(a))$

13. Усмотрение эквивалентности для свойства функции, отбрасывающей внешнюю операцию типа отрицания. Консеквент теоремы имеет вид "$P(\lambda_x(Q(f(x)), A))$", где Q - операция типа отрицания (двукратное применение сохраняет исходной значение). Имеется антецедент "$P(f)$". Переменная f имеет единственное вхождение в консеквент. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что области определения отображений f, $\lambda_x(Q(f(x)), A)$ совпадают. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность "$P(f) \leftrightarrow P(\lambda_x(Q(f(x)), A))$". Антецеденты - все антецеденты исходной теоремы, отличные от $P(f)$. Результат упрощается. (Прием отображение - 24).

Пример: вывод теоремы

$\forall_f($последовательность$(f, \mathbb{R}) \to$ сходится$(\lambda_n(-f(n), n -$ натуральное$)) \leftrightarrow$
сходится$(f))$

из теоремы

$\forall_f($сходится$(f)\ \&$ последовательность$(f, \mathbb{R}) \to$ сходится$(\lambda_n(-f(n),$
$n -$ натуральное$)))$

14. Усмотрение эквивалентности для свойства функции, отбрасывающей внешнюю операцию. Консеквент теоремы имеет вид "$P(\lambda_x(A_2, A_1))$". Наиболее сложный подтерм консеквента - он сам. Имеется антецедент $P(f)$. Переменная f имеет единственное вхождение в консеквент; это вхождение имеет вид $f(x)$. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что области определения отображений f, $\lambda_x(A_2, A_1)$ совпадают. Находится непустой список $a_1, \ldots, a_n$ отличных от x, f параметров выражения A_2. Выбираются новые переменные $c, b_1, \ldots, b_n$. Определяется результат R_1 замены в A_2 вхождения $f(x)$ на c и последующей замены переменных $a_1, \ldots, a_n$ на $b_1, \ldots, b_n$. Определяется также результат R_2 замены в A_2 вхождения $f(x)$ на R_1. Решается задача на описание, условия которой - равенство $R_2 = c$ и результаты замены в отличных от $P(f)$ и содержащих переменные $a_1, \ldots, a_n$ антецедентах указанных переменных на $b_1, \ldots, b_n$. Посылки - отличные от $P(f)$ антецеденты и утверждение "$c \in \mathrm{Val}(f)$". Неизвестные - $b_1, \ldots, b_n$, причем все они несущественные. После получения ответа Q предпринимается упрощение утверждения "$\exists_{b_1 \ldots b_n}(Q)$". Для произвольного не содержащего $b_1, \ldots, b_n, c$ дизъюнктивного члена E результата упрощения создается теорема с консеквентом "$P(\lambda_x(A_2, A_1)) \leftrightarrow P(f)$". Антецеденты ее - отличные от $P(f)$ антецеденты исходной теоремы и E. Результат упрощается. (Прием отображение - 25).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ag}(a - \text{число}\ \&\ \text{последовательность}(g, \mathbb{R}) \to \text{сходится}(\lambda_c(a + g(c)), c - \text{натуральное}) \leftrightarrow \text{сходится}(g))$

    из теоремы

    $\forall_{ag}(a - \text{число}\ \&\ \text{сходится}(g)\ \&\ \text{последовательность}(g, \mathbb{R}) \to$
    $\text{сходится}(\lambda_c(a + g(c), c - \text{натуральное})))$

Усмотрение эквивалентности консеквента конъюнкции части антецедентов

1. Усмотрение эквивалентности консеквента конъюнкции антецедентов, выразимых через его части. Консеквент теоремы - равенство $A_1 = A_2$ двух атомарных выражений. Составляется непустой список S существенных антецедентов, параметры которых включаются в параметры консеквента. Проверяется, что каждое вхождение переменной в любое утверждение списка S расположено внутри вхождения A_1 либо A_2. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что S - следствие остальных антецедентов и консеквента. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность конъюнкции S равенству $A_1 = A_2$. Антецеденты - не вошедшие в список S антецеденты исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием равны - 24).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{BCD}(\neg(B = C)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \to \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(CD) \leftrightarrow \text{прямая}(BC) = \text{прямая}(CD))$

    из теоремы

$\forall_{BCD}(\neg(B=C)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&\ D-$ точка $\&$ прямая$(BC) \parallel$ прямая$(CD) \to$ прямая$(BC) =$ прямая$(CD))$

2. Попытка усмотреть эквивалентность консеквента части антецедентов из декомпозирующей импликации обратного вывода. Теорема - простая импликация с бесповторным консеквентом, которую можно использовать для создания приема проверочного оператора. Составляется список S существенных антецедентов. Проверяется, что он является декомпозицией консеквента относительно его параметров. Проверяется, что каждое утверждение списка S является следствием консеквента и не вошедших в S антецедентов. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность консеквента исходной теоремы конъюнкции утверждений S. Антецеденты ее - все не вошедшие в S антецеденты исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием спуск - 44).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a-\text{set}\ \&\ b-\text{set} \to \text{конечное}(a\cup b) \leftrightarrow \text{конечное}(a)\ \&\ \text{конечное}(b))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a-\text{set}\ \&\ b-\text{set}\ \&\ \text{конечное}(a)\ \&\ \text{конечное}(b) \to \text{конечное}(a\cup b))$

3. Попытка вывести эквивалентность консеквента подмножеству антецедентов. Консеквент теоремы имеет вид "$\exists_{x_1\ldots x_k}(A)$", причем $k \le 3$. Составляется непустой список S антецедентов, являющихся следствиями A и остальных антецедентов. Утверждения S имеют параметр, не встречающийся в антецедентах, не принадлежащих S. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность конъюнкции утверждений S онъюнкции консеквента исходной теоремы и утверждений, сопровождающих этот консеквент по о.д.з. Антецеденты - не вошедшие в S антецеденты исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием допконтекст - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(b-\text{set} \to a\subseteq b\ \&\ a-\text{set} \leftrightarrow \exists_c(c-\text{set}\ \&\ a=b\cap c))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a\subseteq b\ \&\ b-\text{set}\ \&\ a-\text{set} \to \exists_c(c-\text{set}\ \&\ a=b\cap c))$

Попытка вывести эквивалентность консеквента результату навешивания квантора существования на часть антецедентов

1. Попытка вывести из простой импликации, консеквент которой не содержит некоторых параметров антецедентов, эквивалентность для свертки квантора существования. Теорема - простая импликация с существенными антецедентами, у которой консквент содержит не все параметры антецедентов, но каждый параметр консеквента встречается в антецедентах. Находится список $x_1,\ldots,x_k$ параметров антецедентов, не входящих в консеквент. Все они встречаются в существенных антецедентах. Составляется список $A_1,\ldots,A_n$ антецедентов, содержащих переменную списка $x_1,\ldots,x_k$, а также список S остальных антецедентов. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что утверждение "$\exists_{x_1\ldots x_k}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n)$" - следствие S и консеквента. Консеквентом новой

теоремы становится эквивалентность утверждения "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_1$ & $\ldots$ & $A_n)$" консеквенту исходной теоремы. Антецеденты - утверждения S. Проверяется неизбыточность этой теоремы. (Прием исключ - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ae}(a - \text{set}$ & $e - \text{set} \to \exists_d(a \subseteq d$ & $d \subseteq e$ & $d - \text{set}) \leftrightarrow a \subseteq e)$

из теоремы

$\forall_{ade}(a - \text{set}$ & $d - \text{set}$ & $e - \text{set}$ & $a \subseteq d$ & $d \subseteq e \to a \subseteq e)$

Попытка вывести эквивалентность антецедента результату навешивания квантора существования на консеквент и часть других антецедентов

1. Попытка вывести эквивалентность для условия на множество точек. Консеквент теоремы имеет вид "коорд$(A_1, K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A_2)$". Имеются антецеденты "коорд$(B_1, K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(B_2)$", "$C \in B_1$", "коорд$(C, K) = (a_1, \ldots, a_k)$", где $a_1, \ldots, a_k$ - различные переменные, не встречающиеся в других антецедентах. Список P параметров A_1 не содержит C. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, не содержащих ни P, ни C; непустой подсписок S_2 утверждений, содержащих P и подсписок S_3 остальных утверждений. Все антецеденты, содержащие C, суть указанные выше два антецедента либо некоторые элементы списка S_2. Существует утверждение списка S_2, содержащее подтерм A_1. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что утверждение "$\exists_P(S_2)$" - следствие S_1, S_3 и консеквента. Определяется результат B_3 подстановки в B_2 переменных $a_1, \ldots, a_k$ место $y_1, \ldots, y_k$, и формируется утверждение R_1 вида "$\exists_{a_1 \ldots a_k}(B_3$ & коорд$(A_1, K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A_2))$". Формируется также непустая конъюнкция R_2 элементов списка S_2, не содержащих C и содержащих переменные списка P только внутри вхождений подтерма A_1. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $R_1 \leftrightarrow R_2$. Антецеденты - не вошедшие в R_2 и не содержащие C антецеденты исходной теоремы. (Прием уравнмножество - 24).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{fghijknpAB}(\neg(A = B)$ & коорд$(n, p) = \text{set}_{lm}(k + fl^2 + glm + hm^2 + il + jm = 0$ & $l -$ число & $m -$ число) & $n \subseteq$ плоскоорд(p) & $f -$ число & $g -$ число & $h -$ число & $i -$ число & $j -$ число & $k -$ число & $A -$ точка & $B -$ точка & прямкоорд(p) & линвторпорядка$(n) \to$ прямая$(AB) -$ касательная к$n \leftrightarrow$ $\exists_{uv}(k+fu^2+guv+hv^2+iu+jv = 0$ & $u-$число & $v-$число & коорд(прямая$(AB), p) =$ $\text{set}_{xy}(iu+jv+2k+x(i+2fu+gv)+y(j+gu+2hv) = 0$ & $x-$число & $y-$число$)))$

из теоремы

$\forall_{fghijknpuvABC}(\neg(A = B)$ & коорд$(n, p) = \text{set}_{lm}(k + fl^2 + glm + hm^2 + il + jm =$ 0 & $l-$число & $m-$число) & коорд$(C, p) = (u, v)$ & $n \subseteq$ плоскоорд(p) & $C \in n$ & $C \in$ прямая(AB) & $f -$ число & $g -$ число & $h -$ число & $i -$ число & $j -$ число & $k-$число & $A-$точка & $B-$точка & прямая$(AB)-$касательная кn & прямкоорд(p) & линвторпорядка$(n) \to$ коорд(прямая$(AB), p) = \text{set}_{xy}(iu+jv+2k+x(i+2fu+$ $gv) + y(j + gu + 2hv) = 0$ & $x -$ число & $y -$ число$))$

Попытка извлечь из простой импликации явное параметрическое описание

1. Попытка непосредственного извлечения явного параметрического описания. Теорема - кванторная импликация без существенных антецедентов, консеквент которой имеет вид $P(t_1 \dots t_n)$, причем некоторое t_i неоднобуквенное, а остальные t_j - попарно различные переменные. Имеется единственный параметр x выражения t_i, не входящий в прочие t_j. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 антецедентов, параметры которых включаются в параметры выражений $t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выбирается новая переменная y, и при помощи задачи на доказательство устанавливается, что "$\exists_x(S_2 \ \& \ y = P(t_1 \dots t_n))$" - следствие утверждений S_1, утверждения $P(t_1 \dots t_{i-1} y t_{i+1} \dots t_n)$ и утверждений, необходимых для сопровождения последнего утверждения по о.д.з. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность "$P(t_1 \dots t_{i-1} y t_{i+1} \dots t_n) \leftrightarrow \exists_x(S_2 \ \& \ y = P(t_1 \dots t_n))$". Антецеденты - S_1 и утверждения, необходимые для сопровождения левой части консеквента по о.д.з. (Прием пример - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow a \subseteq b \leftrightarrow \exists_c(c - \text{set} \ \& \ a = b \cap c))$

   из теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow b \cap c \subseteq b)$

Попытка получить эквивалентность для конъюнкции консеквента и одного из антецедентов

1. Вывод из обобщенной транзитивности эквивалентности для дизъюнктивного объединения двух утверждений, разрешенных относительно неизвестной. Теорема имеет вид обобщенной транзитивности: два бесповторных существенных антецедента A_1, A_2 и бесповторный консеквент A_3, каждый не более чем с 2 переменными; переменные консеквента - симметрическая разность множеств переменных антецедентов. Список S несущественных антецедентов непуст. Утверждения A_1 и A_3 имеют единственную общую переменную. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что A_1 - следствие $S, A_3, \neg(A_2)$. Находится результат R упрощения утверждения A_2 относительно посылок S. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность "$A_1 \ \& \ A_3 \leftrightarrow (A_1 \ \& \ R \ \vee \ \neg(R) \ \& \ A_3)$". (Прием транзитоперанд - 4).

   Пример: вывод теоремы:

   $\forall_{cde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d \leq e \ \& \ d < c \leftrightarrow d \leq e \ \&$
   $0 < c - e \ \vee \ \neg(0 < c - e) \ \& \ d < c)$

   из теоремы

   $\forall_{cde}(e < c \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \leq e \rightarrow d < c)$

1.14 Переход к теореме с функциональными переменными

Вместо переменной для множества подставляется описатель "$\mathrm{set}_x A(x)$"

1. Получение эквивалентности, использующей описатель "класс" для свертки кванторной импликации с неизвестной. В заменяемой части эквивалентности расположена кванторная импликация "$\forall_x(x \in y \to A)$", где A элементарно, не содержит переменной y и содержит переменную, отличную от x. Заменяющая часть - утверждение B. Выбираются новые переменные P, Q. Находится результат B_1 подстановки в B вместо y выражения "$\mathrm{set}_x(P(x)\ \&\ \neg(Q(x))$". Затем консеквент теоремы заменяется на "$\forall_x(P(x)\ \&\ \neg(A) \to Q(x)) \leftrightarrow B_1$". Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей на ее применение для создания приема, исключающего неизвестную в кванторной импликации путем перехода к описателям "класс". Следствия из нее не выводятся. (Прием кванторнаясвертка - 16).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdf}(a - \mathrm{set}\ \&\ b - \mathrm{set}\ \&\ a \subseteq \mathrm{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция} \to \forall_y(c(y)\ \&\ f(y) \in b \to d(y)) \leftrightarrow \text{непересек}(b, \text{образ}(f, \mathrm{set}_y(c(y)\ \&\ \neg(d(y))))))$

   из теоремы

   $\forall_{abf}(a - \mathrm{set}\ \&\ b - \mathrm{set}\ \&\ a \subseteq \mathrm{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция} \to \text{непресек}(b, \text{образ}(f, a)) \leftrightarrow \forall_y(y \in a \to \neg(f(y) \in b)))$

2. Переход к функциональной переменной при наличии подутверждения - принадлежности набора переменной. Теорема - тождество с описателями. В консеквенте встречается подутверждение вида "$(a_1, \ldots, a_n) \in x$", причем в антецедентах имеется утверждение A вида "$x \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$". Проверяется, что прочие антецеденты, отличные от "$x - \mathrm{set}$", переменной x не содержат. Выбираются новые переменные $P, y_1, \ldots, y_n$. В консеквенте каждое подутверждение "$(t_1, \ldots, t_n) \in x$" заменяется на $P(t_1 \ldots t_n)$, после чего каждое оставшееся вхождение x заменяется на "$\mathrm{set}_{y_1 \ldots y_n}(P(y_1 \ldots y_n)\ \&\ y_1 \in A_1\ \&\ \ldots\ \&\ y_n \in A_n)$". Из списка антецедентов исключаются утверждения A, $x - \mathrm{set}$. Результат упрощается. Следствия из теоремы не выводятся. (Прием описатель - 38).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(\text{комплформа}(\mathrm{set}_{bc}(a(b, c)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число})) = \mathrm{set}_z(z - \text{комплексное}\ \&\ a(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z))))$

   из теоремы

   $\forall_A(A - \mathrm{set}\ \&\ A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \text{комплформа}(A) = \mathrm{set}_z(z - \text{комплексное}\ \&\ (\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) \in A))$

3. Переход к функциональной переменной при наличии подутверждения - принадлежности набора переменной (вырожденный случай). Теорема - тождество с описателями. В консеквенте встречается подутверждение вида "$(a_1, \ldots, a_n) \in x$", причем в антецедентах имеется утверждение A вида "$x \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$".

Проверяется, что прочие антецеденты, отличные от "$x - \text{set}$", переменной x не содержат. Выбираются новые переменные $f, y_1, \ldots, y_n$. Выбирается i из $1, \ldots, n$. В консеквенте каждое подутверждение "$(t_1, \ldots, t_n) \in x$" заменяется на "$t_i = f(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n)$", после чего каждое оставшееся вхождение x заменяется на "$\text{set}_{y_1 \ldots y_n}(y_i = f(y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n)$ & $y_1 \in A_1$ & $\ldots$ & $y_{i-1} \in A_{i-1}$ & $y_{i+1} \in A_{i+1}$ & $\ldots$ & $y_n \in A_n)$". Из списка антецедентов исключаются утверждения A, $x - \text{set}$. Результат упрощается. Следствия из теоремы не выводятся. (Прием описатель - 39).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(\text{комплформа}(\text{set}_{bc}(c = a(b)$ & $b - \text{число})) = \text{set}_z(a(Re(z)) = Im(z)$ & $z - \text{комплексное}))$

из теоремы

$\forall_A(A - \text{set}$ & $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \text{комплформа}(A) = \text{set}_z(z - \text{комплексное}$ & $(\text{Re}(z), \text{Im}(z)) \in A))$

4. Исключение описателя в группе посылок с помощью вспомогательной задачи на описание (случай пересечения). Консеквент теоремы имеет вид "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A_1$ & $\ldots$ & $A_n) = B$", причем среди утверждений A_i имеется утверждение вида "$t \in x$" либо "$t \subseteq x$". Переменная x имеет единственное вхождение в каждой из частей равенства. Выбираются новые переменные y, z, P, Q, a. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Антецедентами новой теоремы становятся утверверждения S_2, результаты замены в утверждениях S_1 переменной x на $\text{set}_y(P(y))$, результаты замены в утверждениях S_1 переменной x на $\text{set}_y(Q(y))$, а также равенство "$\text{set}_y(P(y)$ & $Q(y)) = a$". Определяются результаты B_1, B_2, B_3 замены в B переменной x, соответственно, на $\text{set}_y(P(y))$, $\text{set}_y(Q(y))$ и на переменную a. Консеквентом становится эквивалентность "$z \in B_1$ & $z \in B_2 \leftrightarrow z \in B_3$". Список антецедентов упрощается. Единственная характеристика теоремы указывает, что по ней должен быть создан прием, разрешающий условие под описателем "класс" в антецедентах с помощью вспомогательной задачи на описание. (Прием описатель - 45).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcdeK}(\text{set}_a(c(a)$ & $d(a)) = e$ & $\text{систкоорд}(K) \to b \in \text{точки}(\text{set}_a(c(a)), K)$ & $b \in \text{точки}(\text{set}_a(d(a)), K) \leftrightarrow b \in \text{точки}(e, K))$

из теоремы

$\forall_{AK}(\text{систкоорд}(K)$ & $A - \text{set} \to \text{точки}(A, K) = \text{set}_x(x - \text{точка}$ & $\text{коорд}(x, K) \in A))$

5. Исключение описателя в группе посылок с помощью вспомогательной задачи на описание (случай разности). Консеквент теоремы имеет вид "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A_1$ & $\ldots$ & $A_n) = B$", причем среди утверждений A_i имеется утверждение вида "$t \in x$". Переменная x имеет единственное вхождение в каждой из частей равенства. Выбираются новые переменные y, z, P, Q, a. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных

утверждений. Антецедентами новой теоремы становятся утверверждения S_2, результаты замены в утверждениях S_1 переменной x на $\mathrm{set}_y(P(y))$, результаты замены в утверждениях S_1 переменной x на $\mathrm{set}_y(Q(y))$, а также равенство "$\mathrm{set}_y(P(y)\ \&\ \neg(Q(y))) = a$". Определяются результаты B_1, B_2, B_3 замены в B переменной x, соответственно, на $\mathrm{set}_y(P(y))$, $\mathrm{set}_y(Q(y))$ и на переменную a. Консеквентом становится эквивалентность "$z \in B_1\ \&\ \neg(z \in B_2) \leftrightarrow z \in B_3$". Список антецедентов упрощается. Единственная характеристика теоремы указывает, что по ней должен быть создан прием, разрешающий условие под описателем "класс" в антецедентах с помощью вспомогательной задачи на описание. (Прием описатель - 46).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcdeK}(\mathrm{set}_a(c(a)\ \&\ \neg d(a)) = e\ \&\ \text{систкоорд}(K) \to b \in \text{точки}(\mathrm{set}_a(c(a)), K)\ \&$
$\neg(b \in \text{точки}(\mathrm{set}_a(d(a)), K)) \leftrightarrow b \in \text{точки}(e, K))$

из теоремы

$\forall_{AK}(\text{систкоорд}(K)\ \&\ A - \mathrm{set} \to \text{точки}(A, K) = \mathrm{set}_x(x - \text{точка}\ \&$
$\text{коорд}(x, K) \in A))$

6. Переход к описателям "класс" и попытка вычислить операции над ними. Теорема - тождество, в левой части которого расположено выражение $f(A)$, а в правой - такое выражение B, в котором функция множества f применяется к переменным выражения A. Имеется антецедент "$x \subseteq y$"; внутри выражения A встречается $y \setminus x$. Теорема не имеет переменных, отличных от x, y. Выбираются новые переменные P, Q, z, a, b. Составляется список S антецедентов новой теоремы. Он образован результатами подстановки в отличные от "$x \subseteq y$" антецеденты исходной теоремы выражений $\mathrm{set}_z(P(z)\ \&\ Q(z))$, $\mathrm{set}_z(P(z))$ вместо переменных x, y, а также равенствами "$f(\mathrm{set}_z(P(z))) = a, f(\mathrm{set}_z(P(z)\ \&\ Q(z))) = b$". Консеквентом новой теоремы становится равенство "$f(\mathrm{set}_z(P(z)\ \&\ \neg(Q(z))) = B_1$", где B_1 - результат замены в B подвыражений $f(x), f(y)$ на b, a. Список антецедентов новой теоремы упрощается. Теорема снабжается характеристикой, указывающей, что она определяет последовательность промежуточных вычислений. (Прием подмнож - 1).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdfg}(f - \text{число}\ \&\ \mathrm{card}(\mathrm{set}_e(c(e))) = f\ \&\ \mathrm{card}(\mathrm{set}_e(c(e)\ \&\ d(e))) = g \to$
$\mathrm{card}(\mathrm{set}_e(c(e)\ \&\ \neg(d(e)))) = -g + f)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \mathrm{set}\ \&\ b - \mathrm{set}\ \&\ \text{конечное}(b)\ \&\ a \subseteq b \to \mathrm{card}(b \setminus a) = \mathrm{card}(b) - \mathrm{card}(a))$

7. Попытка получить пару непересекающихся множеств с помощью условного выражения. Теорема - тождество, выражающее функцию множества через значения этой функции на подмножествах. Левая часть равенства содержит выражение "$x \cup y$", где переменные x, y не встречаются как операнды одной и той же операции в правой части равенства. Имеется антецедент "непересек(x, y)". Выбираются новые переменные z, P, Q, R, S. В консеквенте теоремы все вхождения подвыражения "$x \cup y$" заменяются на "$\mathrm{set}_z P(z, (R(z)\ \text{при}\ Q(z),\ \text{иначе}\ S(z)))$".

Остальные вхождения x заменяются на "$\mathrm{set}_z(P(z,R(z))\ \&\ Q(z))$", а вхождения y - на "$\mathrm{set}_z(P(z,S(z))\ \&\ \neg(Q(z)))$". Такая же подстановка вместо x,y реализуется в антецедентах. Предварительно исключается антецедент "$\text{непересек}(x,y)$". Список антецедентов упрощается. (Прием подмножества - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{defg}(\text{конечное}(\mathrm{set}_c(f(c)\ \&\ g(c,d(c))))\ \&\ \text{конечное}(\mathrm{set}_c(\neg(f(c))\ \&\ g(c,e(c))))\ \rightarrow$
$\mathrm{card}(\mathrm{set}_c(g(c,(d(c)\ \text{при}\ f(c),\ \text{иначе}\ e(c)))))=\mathrm{card}(\mathrm{set}_c(g(c,d(c))\ \&\ f(c)))+$
$\mathrm{card}(\mathrm{set}_c(g(c,e(c))\ \&\ \neg f(c))))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a-\text{set}\ \&\ b-\text{set}\ \&\ \text{непересек}(a,b)\ \&\ \text{конечное}(a)\ \&\ \text{конечное}(b)\rightarrow$
$\mathrm{card}(a\cup b)=\mathrm{card}(a)+\mathrm{card}(b))$

8. Вывод тождества для группировки под описатель. Теорема - эквивалентность, которая может рассматриваться как определение принадлежности множеству. Заменяемая часть эквивалентности имеет вид "$x\in t$", где x - переменная. Правая часть имеет вид "$x\in y\ \&\ A$", где y - переменная. Выбираются новые переменные z,v,P,Q,R. Консеквентом новой теоремы становится равенство, левая часть которого - результат замены перемнной y в выражении t на выражение B вида "$\mathrm{set}_z(\exists_v(z=P(v)\ \&\ Q(v)))$", а правая часть - "$\mathrm{set}_z(\exists_v(z=P(v)\ \&\ R))$". В антецедентах предпринимается такая же замена y на B, после чего к ним добавляется равенство "$Q(v)\ \&\ A_1=R$". Здесь A_1 - результат подстановки в A выражения $P(v)$ вместо x. Связывающая приставка новой теоремы формируется из параметров консеквента. Список антецедентов упрощается. Теорема снабжается характеристикой, указывающей, что по ней должен быть создан прием для группировки описателей "класс". (Прием принадлежит - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cfgh}(c-\text{set}\ \&\ (h(e)\ \&\ \neg(f(e)\in c))=g\rightarrow\mathrm{set}_d(\exists_e(d=f(e)\ \&\ h(e)))\setminus c=$
$\mathrm{set}_d(\exists_e(d=f(e)\ \&\ g)))$

из теоремы

$\forall_{abc}(b-\text{set}\ \&\ c-\text{set}\rightarrow a\in b\setminus c\leftrightarrow a\in b\ \&\ \neg(a\in c))$

9. Извлечение из эквивалентности кванторной расшифровки эквивалентности, позволяющей свернуть квантор с помощью вспомогательного описателя. Заменяемая часть эквивалентности - элементарное утверждение A, заменяющая имеет вид "$\forall_{x_1\ldots x_k}(x_i\in a\ \&\ B\rightarrow C)\ \&\ D$", где переменная a не имеет других вхождений в кванторную импликацию заменяющей части и имеет единственное вхождение в A, все конъюнктивные члены D элементарны и могут отсутствовать, переменная x_i не входит в B. Имеется антецедент "$a-\text{set}$". Выбираются новые переменные y,z,f. Консеквентом теоремы становится эквивалентность кванторной импликации "$\forall_{x_1\ldots x_{i-1}x_{i+1}\ldots x_kz}(B\ \&\ a(z)\rightarrow C_1)$" результату замены в A переменной a на выражение K вида "$\mathrm{set}_y(\exists_z(a(z)\ \&\ y=f(z)))$". Здесь C_1 - упрощенный при помощи задачи на преобразование результат подстановки $f(z)$ вместо x_i в C. Антецеденты - отличные от "$a-\text{set}$" антецеденты исходной теоремы и конъюнктивные члены утверждения D, в которые вместо переменной

a подставлено выражения K. Результирующая теорема упрощается. (Прием развертка - 31).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abe}(\forall_f(a(f) \to e(f) - \text{число}) \ \&\ b - \text{число} \to \forall_f(a(f) \to 0 \le -b + e(f)) \leftrightarrow \text{нижняягрань}(b, \text{set}_d(\exists_f(d = e(f) \ \&\ a(f)))))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \&\ a \subseteq \mathbb{R} \to \text{нижняягрань}(b, a) \leftrightarrow b - \text{число} \ \&\ \forall_c(c \in a \to b \le c))$

10. Переход от объединения двух переменных к объединению классов. Теорема - равенство, выражающее сложный числовой атом A через более простые. Внутри A встречается подвыражение $x \cup y$, где x, y - переменные. Выбираются новые переменные z, P, Q, R. В консеквенте теоремы подвыражение $x \cup y$ заменяется на "$\text{set}_z((P(z) \ \vee \ Q(z)) \ \&\ R(z))$". Остальные вхождения переменных x, y в антецеденты и в консеквент заменяются, соответственно, на "$\text{set}_z(P(z) \ \&\ R(z))$" и "$\text{set}_z(Q(z) \ \&\ R(z))$". Список антецедентов упрощается. (Прием числатом - 6).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{def}(\forall_c(d(c) \ \&\ f(c) \to \neg e(c)) \ \&\ \text{конечное}(\text{set}_c(d(c) \ \&\ f(c))) \ \&\ \text{конечное}(\text{set}_c(e(c) \ \&\ f(c))) \to \text{card}(\text{set}_c((d(c) \ \vee \ e(c)) \ \&\ f(c))) = \text{card}(\text{set}_c(d(c) \ \&\ f(c))) + \text{card}(\text{set}_c(e(c) \ \&\ f(c))))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \&\ b - \text{set} \ \&\ \text{непересек}(a, b) \ \&\ \text{конечное}(a) \ \&\ \text{конечное}(b) \to \text{card}(a \cup b) = \text{card}(a) + \text{card}(b))$

11. Переход от объединения двух переменных к конечному списку. Теорема - равенство, выражающее сложный числовой атом A через более простые. Внутри A встречается подвыражение $x \cup y$, где x, y - переменные. Выбираются новые переменные z, v, P, Q, R. В консеквенте теоремы подвыражение $x \cup y$ заменяется на "$\text{set}_{zv}(z \in \text{перечень}(\text{префикс}(P(v), Q(v))) \ \&\ R(z, v))$". Остальные вхождения переменных x, y в антецеденты и в консеквент заменяются, соответственно, на "$\text{set}_{zv}(z = P(v) \ \&\ R(z, v))$" и "$\text{set}_{zv}(z \in \text{перечень}(Q(v)) \ \&\ R(z, v))$". Результат упрощается. (Прием числатом - 8).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{efg}(\forall_d(e(f(d), d) \to \neg(f(d) \in \{; g(d)\})) \ \&\ \text{конечное}(\text{set}_{cd}(c \in \{; g(d)\} \ \&\ e(c, d))) \ \&\ \text{конечное}(\text{set}_d(e(f(d), d))) \to \text{card}(\text{set}_{cd}(c \in \{f(d); g(d)\} \ \&\ e(c, d))) = \text{card}(\text{set}_{cd}(c \in \{; g(d)\} \ \&\ e(c, d))) + \text{card}(\text{set}_d(e(f(d), d))))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \&\ b - \text{set} \ \&\ \text{непересек}(a, b) \ \&\ \text{конечное}(a) \ \&\ \text{конечное}(b) \to \text{card}(a \cup b) = \text{card}(a) + \text{card}(b))$

Тождество выражает один из параметров антецедента через другие его параметры. Создается тождество для мощности класса, заданного параметрическим описанием с квантором существования, навешенным на однозначно определяемый параметр. В этом описании класса переменная из квантора существования переводится в связывающую приставку описателя "класс"

1. Вывод тождества для исключения внутреннего квантора существования в описании класса при определении его мощности. Теорема имеет своим консеквентом равенство переменной x не содержащему ее выражению t. Имеется единственный существенный антецедент A. Его параметры включают все параметры консеквента. Список $x_1, \ldots, x_m$ параметров выражения t непуст. Пусть $y_1, \ldots, y_k$ - все параметры антецедента A, не входящи в консеквент (возможно, $k = 0$). Выбираются новые переменные z, P, Q. Если $k > 0$, товсе переменные $y_1, \ldots, y_k$ заменяются в A на выражения $y_1(z), \ldots, y_k(z)$. После этого выводится равенство "$\mathrm{card}(\mathrm{set}_{x_1 \ldots x_m z}(\exists_x(P(x_1, \ldots,\ x_m, x, z)\ \&\ A)\ \&\ Q(x_1 \ldots x_m z))) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_{x_1 \ldots x_m z x}(P(x_1, \ldots,\ x_m, x, z)\ \&\ A\ \&\ Q(x_1 \ldots x_m z)))$". Эта теорема антецедентов не имеет. (Прием значениепеременной - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abB}(\mathrm{card}(\mathrm{set}_{fc}(\exists_A(a(f, A, c)\ \&\ \text{Отображение}(f, A, B(c)))\ \&\ b(f, c))) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_{fcA}(\exists_A(a(f, A, c)\ \&\ \text{Отображение}(f, A, B(c)))\ \&\ b(f, c))))$

   из теоремы

   $\forall_{fAB}(\text{Отображение}(f, A, B) \to \mathrm{Dom}(f) = A)$

Замена обычных переменных функциональными с добавлением антецедентов, фиксирующих значения характеристик этих переменных, встречающихся в заменяющей части тождества

1. Обобщение тождества для мощности класса путем варьирования множеств с сохранением их мощности. Консеквент теоремы имеет вид "$\mathrm{card}(\mathrm{set}_{x_1 \ldots x_k} A) = t$". Составляется непустой список $y_1, \ldots, y_m$ параметров левой части равенства, которые встречаются в его правой части, причем только в виде "$y_i - \mathrm{set}$", либо "конечное(y_i), либо "card(y_i)". Выбираются новые переменные $z_1, \ldots, z_m, v, P$. Внутри утверждения A все вхождения переменных y_i заменяются на "$y_i(v)$)". Определяется результат t_1 замены в t всех вхождений подвыражений "card(y_i)" на z_i. Консеквентом новой теоремы становится равенство "$\mathrm{card}(\mathrm{set}_{x_1 \ldots x_k v}(A\ \&\ P(v))) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_v(P(v)))t_1$". Антецеденты "$y_i - \mathrm{set}$" отбрасываются, антецеденты "конечное(y_i)" заменяются на "целое(z_i)", вхождения в них подвыражений "card(y_i)" заменяются на z_i. Добавляются антецеденты "$\forall_v(P(v) \to \mathrm{card}(y_i(v)) = z_i)$". Через характеристики теоремы приему передаются фильтры, обеспечивающие непересечение списка переменных v с параметрами выражений z_i. (Прием описатель - 20).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abB}(\forall_c(b(c) \to \mathrm{card}(B(c)) = a)\ \&\ a - \text{целое} \to \mathrm{card}(\mathrm{set}_{fc}(\text{перестановка}(f, B(c))\ \&\ b(c))) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_c(b(c))) \cdot a!)$

из теоремы

$\forall_B(B - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(B) \to \text{card}(\text{set}_f(\text{перестановка}(f, B))) = \text{card}(B)!)$

2. Варьирование свободного параметра в тождестве вычисления мощности класса. Консеквент теоремы имеет вид "$\text{card}(\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(x = t\ \&\ A)) = B$". Переменная x имеет единственное вхождение в левую часть равенства и не входит в правую. Список антецедентов теоремы разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. К утверждениям списка S_1 применяется подстановка t вместо x. После этого S_1 разбивается на подсписок S_3 утверждений, для которых удается доказать, что они суть следствия утверждений S_2, A, и подсписок S_4 остальных утверждений. Выбираются новые переменные y, P. В утверждениях S_3, S_4 переменная x заменяется на y. Консеквентом новой теоремы становится равенство "$\text{card}(\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A\ \&\ P(t))) = B \cdot \text{card}(\text{set}_y(P(y)\ \&\ S_3))$". Антецеденты ее составляются из утверждений S_2 и утверждений C списка S_4, преобразованных в кванторные импликации "$\forall_y(P(y) \to C)$". (Прием описатель - 21).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abn}(b - \text{set}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ \forall_d(a(d) \to \text{card}(d) = n) \to \text{card}(\text{set}_f(\text{кортеж}(f, n, b)\ \&\ a(\text{Val}(f)))) = n!\text{card}(\text{set}_d(a(d)\ \&\ d - \text{set}\ \&\ d \subseteq b)))$

из теоремы

$\forall_{bcn}(\text{card}(c) = n\ \&\ b - \text{set}\ \&\ c - \text{set}\ \&\ c \subseteq b\ \&\ n - \text{целое} \to$
$\text{card}(\text{set}_f(c = \text{Val}(f)\ \&\ \text{кортеж}(f, n, b!))) = n!)$

Выражение переменных для функций через описатели "отображение"

1. Переформулировка определения операции над функциями через операнды, заданные с помощью описателя "отображение". Теорема - определение выражения A посредством равенства "$A = \lambda_x(B, x \in P(f, \ldots))$". Составляется список $f_1, \ldots, f_n$ всех переменных f_i, для которых в антецедентах имеется утверждение "$f_i - \text{функция}$". f - некоторая переменная f_j. Все переменные $f_1, \ldots, f_n$ встречаются в A. Каждая из этих переменных входит в B только в виде "$f_i(\ldots)$". Выбираются новые переменные $P_1, \ldots, P_n$. Проверяется, что каждый содержащий переменную f_i антецедент либо имеет вид "$f_i - \text{функция}$", либо вид "$\text{Dom}(f_i) = \text{Dom}(f_k)$" (в этом случае в качестве P_k далее берется P_i), либо вид "$\text{Val}(f_i) \subseteq C$" (в этом случае проверяется, что для каждого подтерма "$f_i(D)$" терма B из о.д.з. последнего терма выводится "$f_i(D) \in C$"). Консеквентом теоремы становится равенство результата замены в A переменных f_i на выражения "$\lambda_x(f_i(x), P_i(x))$" выражению "$\lambda_x(B, P_j(x))$". Из антецедентов удаляются все утверждения, содержащие переменные $f_1, \ldots, f_n$. (Прием определение - 93).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bfg}(\lambda_x(f(x), b(x)) + \lambda_x(g(x), b(x)) = \lambda_x(f(x) + g(x), b(x)))$

из теоремы

$\forall_{fg}(f - \text{функция}\ \&\ g - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&$
$\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \to f + g = \lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f)))$

Объекты теоремы представляются как значения каких-то функций, и на аргументы этих функций навешивается квантор общности

1. Вывод эквивалентности для декомпозиции импликации из определения функции через условное выражение. Теорема - определение выражения A посредством равенства "$A = \lambda_x(C, B)$". Внутри выражения C, определяющего значение отображения, расположено условное выражение "(t_1 при D, иначе t_2)". Переменная x входит в D. Выбираются новые переменные y, P, Q. Определяются выражения C_1, C_2, полученные из C заменой условного выражения "(t_1 при D, иначе t_2)", соответственно, на t_1 и t_2 с последующим переобозначением их связанных переменных на новые переменные. Консеквентом теоремы становится эквивалентность утверждения "$\forall_{xy}(P(y,x) \to Q(y, A(x)))$" конъюнкции утверждений "$\forall_{yx}(P(y,x)\ \&\ D \to Q(y, C_1(x)))$", "$\forall_{yx}(P(y,x)\ \&\ \neg(D) \to Q(y, C_2(x)))$". (Прием определение - 214).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acdAB}(A - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&\ B \subseteq A \to \forall_{bx}(c(b,x) \to d(b, \text{индикатор}(A,B,a)(x)))$
   $\leftrightarrow \forall_{bx}(\neg(x \in B)\ \&\ c(b,x) \to d(b,0))\ \&\ \forall_{bx}(x \in B\ \&\ c(b,x) \to d(b,a)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABa}(A - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&\ B \subseteq A \to \text{индикатор}(A,B,a) =$
   $\lambda_x((a \text{ при } x \in B, \text{ иначе } 0), x \in A))$

2. Контрапозиция кванторной импликации для исключения отрицания в консеквенте. Теорема - эквивалентность вида $\neg(A) \leftrightarrow B$, где A, B - элементарные утверждения с одними и теми же параметрами $y_1, \ldots, y_n$. Существенные антецеденты отсутствуют. Выбираются новые переменные x, P, Q, и определяются результаты A_1, B_1 подстановки в A, B выражений $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ вместо $y_1, \ldots, y_n$. Выводится кванторная импликация без антецедентов, консеквентом которой служит эквивалентность "$\forall_x(P(x)\ \&\ A_1 \to \neg(Q(x))) \leftrightarrow \forall_x(P(x)\ \&\ Q(x) \to B_1)$". Она снабжаетя характеристикой, указывающей на создание приема для стандартизирующей контрапозиции кванторной импликации, являющейся условием задачи на доказательство. (Прием нормотр - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abde}(\forall_c(d(c)\ \&\ a(c) < b(c) \to \neg e(c)) \leftrightarrow \forall_c(d(c)\ \&\ e(c) \to b(c) \le a(c)))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to \neg(a < b) \leftrightarrow b \le a)$

3. Получение теоремы для использования кванторной посылки, выражающей свойство функции. Консеквент теоремы имеет вид "$\text{set}_x(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n) = B$". Некоторое A_i элементарно и содержит подвыражение $f(x)$. Выбирается новая переменная P. Из антецедентов исключается утверждение "$f - $ функция", и к ним добавляется утверждение "$\forall_x(P(x) \to A_i)$". Консеквентом ствновится утверждение "$\text{set}_x(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_{i-1}\ \&\ A_{i+1}\ \&\ldots\ \&\ A_n\ \&\ P(x)) \subseteq B$". Единственная характеристика указывает на создание приема, выводящего следствие из кванторной импликации для значения функции. (Прием описатель - 30).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abf}(\forall_x(b(x) \to a = f(x)) \to \text{set}_x(x \in \text{Dom}(f)\ \&\ b(x)) \subseteq \text{слой}(f, a))$

из теоремы

$\forall_{af}(f - \text{функция} \to \text{слой}(f, a) = \text{set}_x(x \in \text{Dom}(f)\ \&\ a = f(x)))$

4. Переход от класса к объединению семейства. Теорема - равенство описателя "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n)$" элементарному выражению B. Обе части равенства имеют один и тот же непустой список параметров $y_1, \ldots, y_m$. Список $A_1, \ldots, A_n$ разбивается на подсписок S_1 утверждений, не содержащих $y_1, \ldots, y_m$, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выбираются новые переменные x, a. Описатель "set(...)" заменяется в теореме на выражение "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(S1\ \&\ \exists_x(x \in a\ \&\ S_3))$", где S_3 - список результатов замены в S_2 переменных y_i на $y_i(x)$. Такая же замена y_i на $y_i(x)$ предпринимается в антецедентах. Если после этого антецедент Q содержит x, то предпринимается попытка упростить импликацию "$\forall_x(x \in a \to Q)$". Если получается элементарное утверждение, то оно замещает в антецедентах Q. Иначе применение приема отменяется. Далее к антецедентам добавляются утверждения "$a - \text{set}$", "$y_i - \text{функция}$", "$\text{Dom}(y_i) = a$". Наконец, утверждение B в консеквенте теоремы заменяется на выражение "$\bigcup_{x, x \in a} B_1$". Здесь B_1 - результат замены в B переменных y_i на $y_i(x)$. (Прием описатель - 31).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bce}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{функция}\ \&\ c - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(b) = e\ \&\ \text{Dom}(c) = e\ \&$
$\text{семействомножеств}(b)\ \&\ \text{семействомножеств}(c) \to \text{set}_a(\exists_d(d \in e\ \&\ a \in b(d)\ \&$
$a \in c(d))) = \bigcup_{d, d \in e}(b(d) \cap c(d)))$

из теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{set}\ \&\ c - \text{set} \to b \cap c = \text{set}_a(a \in b\ \&\ a \in c))$

Из эквивалентности для квантора существования выводится эквивалентность для развертки квантора существования в конечную дизъюнкцию. Для ограничения области развертки вводятся вспомогательные функциональные переменные

1. Переход к теореме развертки квантора существования. Теорема - эквивалентность для преобразования элементарного утверждения A в квантор существования "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(y = t\ \&\ B)$", подлежащий развертке в дизъюнкцию. Вхождение переменной y в квантор существования единственное. Выбирается новая переменная P. консеквентом теоремы становится эквивалентность "$\exists_y(A\ \&\ P(y)) \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(B\ \&\ P(t))$". Результат упрощается. Теорема сопровождается характеристикой, указывающей на создание по ней приема, выполняющего развертку квантора существования в дизъюнкцию. (Прием перечисл - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bmn}(m - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое} \to \exists_c(c \in \{m, \ldots, n\}\ \&\ b(c)) \leftrightarrow$
$\exists_a(a \in \{0, \ldots, n - m\}\ \&\ b(a + m)))$

из теоремы

$\forall_{cmn}(m - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое} \to c \in \{m, \ldots, n\} \leftrightarrow$
$\exists_a(c = a + m\ \&\ a \in \{0, \ldots, n - m\}))$

Выводимая теорема порождает прием для развертки квантора существования в ее левой части в дизъюнкцию, определяемую правой частью.

Параметрическое описание семейства функций

1. Переход к заданию функции двумя наборами - значений аргументов и значений функции на этих аргументах. Консеквент C отличен от равенства и эквивалентности. Среди антецедентов имеются утверждения "f – функция", "$\mathrm{Dom}(f) \subseteq A$", "$\mathrm{Val}(f) \subseteq B$", "конечное($\mathrm{Dom}(f)$)". Каждое вхождение переменной f в теорему - либо вхождение в корневую связывающую приставку, либо имеет вид "f – функция", или "$\mathrm{Dom}(f)$", или "$\mathrm{Val}(f)$", или является вхождением в антецедент утверждения "взаимнооднозначно(f)", или имеет вид $f(y)$ и расположено под квантором существования по y. Составляется список S антецедентов, отличных от перечисленных выше. Проверяется, что из S вытекает непустота области определения функции f. Выбираются новые переменные a, b, n. Создается список S_1, состоящий из утверждений "кортеж(a, n, A)", "кортеж(b, n, B)", "натуральное(n)", "взаимнооднозначно(a)". Если в S имеется утверждение "взаимнооднозначно(f)", то оно удаляется из S, а в S_1 заносится утверждение "различны(b)". Повсюду в S и в консеквенте C выражение "$\mathrm{Dom}(f)$" заменяется на "$\mathrm{Val}(a)$", а "$\mathrm{Val}(f)$" - на "$\mathrm{Val}(b)$". Если встречается квантор существования K. внутри которого расположено выражение $f(y)$ для связанной переменной данного квантора, то все вхождения $f(y)$ внутри квантора заменяются на $b(y)$, а прочие вхождения y - на $a(y)$. К подкванторным утверждениям добавляется "$y \in \{1, \ldots, n\}$". После указанных преобразований консеквента и списка S новым списком антецедентов становится объединение S и S_1. Результат упрощается. (Прием реализация - 25).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcP}(\text{различны}(a)\ \&\ c - \text{натуральное}\ \&\ \text{кортеж}(a, c, \text{события}(P))\ \&$
   $\text{кортеж}(b, c, \mathbb{R})\ \&\ \text{разбиение}(\text{элемсобытия}(P), \mathrm{Val}(a))\ \&\ \text{верпространство}(P) \to$
   $\text{дискрвеличина}(\text{таблица}(\{; \lambda_y(\text{конст}(a(y), b(y)), y \in \{1, \ldots, c\})\}), P))$

   из теоремы

   $\forall_{gP}(\mathrm{Dom}(g) \subseteq \text{события}(P)\ \&\ \mathrm{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ g - \text{функция}\ \&\ \text{конечное}(\mathrm{Dom}(g))$
   $\&\ \text{разбиение}(\text{элемсобытия}(P), \mathrm{Dom}(g))\ \&\ \text{верпространство}(P) \to$
   $\text{дискрвеличина}(\text{таблица}(\mathrm{set}_x(\exists_y(x = \text{конст}(y, g(y))\ \&\ y \in \mathrm{Dom}(g)))), P))$

1.15 Эквивалентное преобразование консеквента

Нормализатор "нормчисл" выполняет эквивалентное преобразование консеквента для исключения сложных операций

1. Попытка преобразования консеквента для получения соотношения с исключенными сложными операциями. Теорема - равенство, выражающее невырожден-

ный числовой атом через параметры координат. Консеквент обрабатывается нормализатором "нормчисл", исключающим в равенствах дробные выражения и радикалы. Сравниваются наборы оценок сложности подвыражений исходного и нового консеквентов. Проверяется, что после исключения одинаковых фрагментов этих наборов максимальная оценка сложности подвыражений нового консеквента меньше такой оценки для старого. Если новый консеквент - конъюнкция, то для каждого конъюнктивного члена, имеющего вид равенства, создается отдельная теорема. (Прием значпарам - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abpqABK}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(A,K) = (a,b)\ \&\ \text{коорд}(B,K) = (p,q) \to l(AB)^2 = (a-p)^2 + (b-q)^2)$

из теоремы

$\forall_{abpqABK}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(A,K) = (a,b)\ \&\ \text{коорд}(B,K) = (p,q) \to l(AB) = \sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2})$

2. Попытка преобразования консеквента для получения соотношения с исключенными сложными операциями. Теорема - равенство, в одной части которого находится невырожденный числовой атом, а другая часть содержит невырожденные числовые атомы. Действия те же, что в предыдущем пункте. (Прием числзнач - 20).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABK}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \to l(AB)^2 = (\text{крд}(A,K,1) - \text{крд}(B,K,1))^2 + (\text{крд}(A,K,2) - \text{крд}(B,K,2))^2 + (\text{крд}(A,K,3) - \text{крд}(B,K,3))^2)$

   из теоремы

   $\forall_{ABK}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \to l(AB) = ((\text{крд}(A,K,1) - \text{крд}(B,K,1))^2 + (\text{крд}(A,K,2) - \text{крд}(B,K,2))^2 + (\text{крд}(A,K,3) - \text{крд}(B,K,3))^2)^{1/2})$

3. Попытка преобразования консеквента для получения соотношения с исключенными сложными операциями. Теорема - равенство, связывающее невырожденный числовой атом с параметрами координат. Действия те же, что в предыдущих пунктах. (Прием числкоэфф - 21).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cefghijkK}(\text{коорд}(e,K) = (g,h,i)\ \&\ \text{коорд}(k,K) = (c,f,j)\ \&\ \text{Вектор}(e)\ \&\ \text{Вектор}(k)\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \to (cg + fh + ij)^2 = (c^2 + f^2 + j^2)(g^2 + h^2 + i^2)(\cos(\text{уголмежду}(e,k)))^2)$

   из теоремы

   $\forall_{cefghijkK}(\text{коорд}(e,K) = (g,h,i)\ \&\ \text{коорд}(k,K) = (c,f,j)\ \&\ \text{Вектор}(e)\ \&\ \text{Вектор}(k)\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \to cg + fh + ij = \sqrt{c^2 + f^2 + j^2}\sqrt{g^2 + h^2 + i^2}\cos(\text{уголмежду}(e,k)))$

Попытка свертки заменяющей части при помощи вспомогательной задачи

1. Попытка альтернативной свертки заменяющей части. Теорема - эквивалентность вида "$A \leftrightarrow B_1$ & ... & B_n". Решается задача на описание с условиями $B_1, \ldots, B_n$, посылками которой служат антецеденты теоремы. Цели задачи - "редакция", "редуцирование", "свертка". Если в итоге возникает элементарное утверждение, то правая часть эквивалентности заменяется на это утверждение. Результат упрощается. (Прием и - 41).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B)$ & $\neg(B = C)$ & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка $\rightarrow$
   $\angle(ABC) = 0 \leftrightarrow$ точкалуча$(B, A, C))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $\neg(B = C)$ & $\neg(A = B) \rightarrow$
   $\angle(ABC) = 0 \leftrightarrow C \in$ прямая(AB) & $\neg(B \in$ интервал$(AC)))$

2. Попытка альтернативной свертки конъюнктивного члена заменяющей части. Теорема - эквивалентность элементарного утверждения A конъюнкции, содержащей квантор B. Решается задача на описание с единственным условием B, посылками которой служат антецеденты теоремы. Цели задачи - "редакция", "редуцирование", "свертка". Если в итоге возникает элементарное утверждение, то квантор B в консеквенте заменяется на это утверждение. Результат упрощается. (Прием развертка - 37).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(b -$ set & $b \subseteq \mathbb{R} \rightarrow$ наименьший$(a, b) \leftrightarrow a \in b$ & нижняягрань$(a, b))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(b -$ set & $b \subseteq \mathbb{R} \rightarrow$ наименьший$(a, b) \leftrightarrow a \in b$ & $\forall_c(c \in b \rightarrow a \leq c))$

3. Попытка свернуть определяющий квантор существования в бескванторное утверждение. Теорема - определение утверждения A посредством квантора существования "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_1$ & ... & $A_n)$". Решается задача на описание для явного разрешения утверждений $A_1, \ldots, A_n$ относительно несущественных неизвестных $x_1, \ldots, x_k$. Если получается ответ $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ (возможно, $m = 1$), то рассматривается не содержащее переменных $x_1, \ldots, x_k$ утверждение B_i. Если $m > 1$, то проверяется наличие такого конъюнктивного члена $\neg(D)$ утверждения B_i, что D - конъюнктивный член каждого из остальных B_j. В этом случае $\neg(D)$ добавляется к антецедентам и исключается из B_i. В любом случае далее консеквент теоремы заменяется на $A \leftrightarrow B_i$. Результат упрощается. (Прием определение - 173).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{mn}(\neg(m = 0)$ & $m -$ целое & $n -$ целое $\rightarrow m|n \leftrightarrow (n/m) -$ целое$)$

   из теоремы

   $\forall_{mn}(m -$ целое & $n -$ целое $\rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(k -$ целое & $n = mk))$

4. Попытка свертки в бесквантерный консеквент. Теорема представляет собой кванторную импликацию с квантором существования в консеквенте, причем все конъюнктивные члены подкванторного утверждения элементарны, кроме единственного, представляющего собой кванторную импликацию с элементарными антецедентами и консеквентом. Предпринимается попытка упростить теорему при помощи задачи на преобразование, ориентированной на свертку кванторов в бесквантерные утверждения. Если в консеквенте возникает элементарное утверждение, то результат регистрируется в списке вывода. (Прием локхаракт - 16).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abfi}(\text{предел}(f,i,a)=b \ \&\ \text{Dom}(f)\subseteq\mathbb{R} \ \&\ \text{Val}(f)\subseteq\mathbb{R} \ \&\ f-\text{функция} \ \&$
   $b-\text{число} \ \&\ \text{Число}(a) \ \&\ \text{типпредела}(i) \ \&\ \text{Локопред}(f,a,i)\rightarrow \text{локогрснизу}(f,a,i))$

   из теоремы

   $\forall_{abfi}(\text{предел}(f,i,a)=b \ \&\ \text{Dom}(f)\subseteq\mathbb{R} \ \&\ \text{Val}(f)\subseteq\mathbb{R} \ \&\ f-\text{функция} \ \&$
   $b-\text{число} \ \&\ \text{Число}(a) \ \&\ \text{типпредела}(i) \ \&\ \text{Локопред}(f,a,i)\rightarrow \exists_{de}(e-\text{число} \ \&$
   $\forall_x(x\in\text{Окрестн}(a,d,i) \ \&\ x-\text{число}\rightarrow e<f(x) \ \&\ 0<d \ \&\ d-\text{число})))$

5. Попытка свертки тождества в консеквенте. Теорема - определение выражения A посредством равенства $A=B$. Решается задача на преобразование этого равенства относительно антецедентов теоремы, ориентированная на компактную переформулировку термов (свертку). Если полученный результат R короче исходного равенства, то он замещает консеквент теоремы. (Прием определение - 250).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abn}(n-\text{натуральное} \ \&\ \text{числнабор}(a,n) \ \&\ \text{числнабор}(b,n)\rightarrow \text{set}_x(\forall_i(i\in\{1,\ldots,n\}$
   $\rightarrow |x(i)-a(i)|<b(i)) \ \&\ \text{числнабор}(x,n))=\text{евклпрямокр}(a,b))$

   из теоремы

   $\forall_{abn}(n-\text{натуральное} \ \&\ \text{числнабор}(a,n) \ \&\ \text{числнабор}(b,n)\rightarrow \text{евклпрямокр}(a,b)=$
   $\text{set}_x(\text{числнабор}(x,n) \ \&\ \forall_i(i\in\{1,\ldots,n\}\rightarrow a(i)-b(i)<x(i) \ \&\ x(i)<a(i)+b(i))))$

6. Попытка свертки квантора в заменяющей части эквивалентности. Теорема - определение некоторого утверждения. Если в определяющей части встречается квантор K, то предпринимается попытка его упрощения задачей на преобразование относительно всех утверждений из контекста данного квантора. Если получается бесквантерное утверждение, то квантор заменяется на него. Результат упрощается. (Прием определение - 251).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_f(\text{последовательность}(f,\mathbb{R})\rightarrow \text{сходится}(f)\leftrightarrow \lim(f)-\text{число})$

   из теоремы

   $\forall_f(\text{последовательность}(f,\mathbb{R})\rightarrow \text{сходится}(f)\leftrightarrow \exists_a(a-\text{число} \ \&\ a=\lim(f)))$

7. Попытка свертки утверждения под квантором существования. Теорема - определение утверждения A посредством квантора существования "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(B)$". Утверждение B обрабатывается задачей на описание, имеющей цели "редакция" и "свертка". Если получается более короткое утверждение C, то B заменяется на C. (Прием развертка - 109).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{set}\ \&\ B - \text{set} \to \text{card}(A) \leq \text{card}(B) \leftrightarrow \exists_f(\text{Отображение}(f, A, B)\ \&$ взаимнооднозначно$(f)))$

   из теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{set}\ \&\ B - \text{set} \to \text{card}(A) \leq \text{card}(B) \leftrightarrow \exists_f(f - \text{функция}\ \&$ взаимнооднозначно$(f)\ \&\ \text{Dom}(f) = A\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq B))$

8. Попытка исключения описателей при помощи свертки задачей на преобразование. Консеквент теоремы содержит описатели "отображение", не являющиеся операндами одноместных операций - обобщений ассоциативно-коммутативной операции на конечные наборы. Эти описатели не расположены друг в друге. Для их упрощения решаются задачи на преобразование с целью "свертка". Если во всех случаях возникают выражения без связанных переменных, то описатели заменяются на такие выражения. Результат упрощается. (Прием отображение - 34).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{set} \to$ взаимнооднозначно(тождфунк$(a)))$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{set} \to$ взаимнооднозначно$(\lambda_x(x, x \in a)))$

Попытка развертка заменяющей части при помощи задачи на описание

1. Попытка развертки заменяющего утверждения. Теорема - эквивалентность, дающая параметрическое описание значений неизвестной. Заменяющая часть обрабатывается задачей на описание, имеющей цели "редакция" и "развертка". Такие цели ориентируют на расшифровку по определениям. Если получается результат, отличный от исходного утверждения, то он замещает заменяющую часть. Полученная теорема упрощается. (Прием неизвпарам - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ax}(a - \text{число}\ \&\ x - \text{число} \to a = \cos x \leftrightarrow (\exists_n(x = 2\pi n - \arccos a\ \&\ n - \text{целое})\ \vee$ $\exists_n(x = 2\pi n + \arccos a\ \&\ n - \text{целое})\ \&\ 0 \leq a + 1\ \&\ 0 \leq -a + 1))$

   из теоремы

   $\forall_{xa}(a - \text{число}\ \&\ x - \text{число} \to \cos x = a \leftrightarrow |a| \leq 1\ \&\ \exists_n(n - \text{целое}\ \&$ $(x = 2\pi n + \arccos a\ \vee\ x = 2\pi n - \arccos a)))$

2. Попытка развертки определяющей части эквивалентности. Теорема - определение некоторого утверждения. Определяющая часть не имеет связанных переменных. Она обрабатывается задачей на описание, имеющей цели "редакция", "развертка". Если получается результат, заголовком которого служит квантор либо дизъюнкция, содержащая кванторную импликацию, то этот результат замещает определяющую часть. Характеристика "определение(...)" передается от старой теоремы новой. (Прием определение - 255).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{nA}(n - \text{натуральное } \& \ A - \text{set } \& \ A \subseteq \mathbb{R}^n \to \text{замкнутое}(A) \leftrightarrow$
   $\forall_a(\text{точкаприкосн}(a, A) \to a \in A))$

   из теоремы

   $\forall_{nA}(n - \text{натуральное } \& \ A - \text{set } \& \ A \subseteq \mathbb{R}^n \to \text{замкнутое}(A) \leftrightarrow A = \text{замыкание}(A))$

3. Попытка кванторной расшифровки консеквента. Теорема - простая импликация, выражающая свойства некоторого объекта t. Ее консеквент обрабатывается задачей на описание, имеющей цели "редакция", "развертка". Среди конъюнктивных членов результата встречается кванторная импликация "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1$ & ... & $A_n \to A_0)$". Утверждение A_0 содержит подвыражение t. Утверждения $A_1, \ldots, A_n$ добавляются к антецедентам исходной теоремы, а консеквентом становится A_0 (Прием свойства - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set } \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ b \in a \to \inf(a) \leq b)$

   из теоремы

   $\forall_a(\neg(a = \emptyset) \ \& \ a - \text{set } \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \to \text{нижняягрань}(\inf(a), a))$

Последовательные развертка и свертка заменяющей части при помощи задачи на описание

1. Попытка развертки и свертки заменяющего утверждения для получения эквивалентности альтернативной кванторной расшифровки. Теорема - эквивалентность, уменьшающая сложность утверждения. Заменяющая часть не содержит кванторов. Эта часть сначала обрабатывается задачей на описание, ориентированной на расшифровку по определениям, а затем - задачей на описание, ориентированной на обратную свертку. Если результат содержит кванторы, то он замещает заменяющую часть эквивалентности. (Прием уменьшение - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ac}(a - \text{set } \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ \neg(a = \emptyset) \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \to c = \inf(a) \leftrightarrow c - \text{число } \&$
   $\text{нижняягрань}(c, a) \ \& \ \forall_e(c < e \ \& \ e - \text{число} \to \exists_d(d < e \ \& \ d \in a)))$

   из теоремы

   $\forall_{ac}(a - \text{set } \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ \neg(a = \emptyset) \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \to c = \inf(a) \leftrightarrow$
   $\text{наибольший}(c, \text{set}_b(\text{нижняягрань}(b, a))))$

Навешивание отрицания на обе части эквивалентности

1. Получение эквивалентности свертки конъюнкции из дизъюнктивной декомпозирующей эквивалентности. Консеквент имеет вид "$A \leftrightarrow B_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ B_n$", где $B_1, \ldots, B_n$ элементарны. Он заменяется на "$\neg(A) \leftrightarrow \neg(B_1)$ & $\ldots$ & $\neg(B_n)$". Результат упрощается. (Прием или - 59).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow \neg(a \in b \cup c) \leftrightarrow \neg(a \in b) \ \& \ \neg(a \in c))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$

Переход от вывода включения к выводу принадлежности

1. Консеквент теоремы имеет вид "$A(x_1 \ldots x_n) \subseteq B(y_1 \ldots y_m)$", где x_i, y_i - переменные; A, B - стандартные обозначения объектов некоторых типов ("прямая", "плоскость" и т.п.). Выбирается новая переменная z. К антецедентам добавляется утверждение "$z \in A(x_1 \ldots x_n)$", а консеквентом становится "$z \in B(y_1 \ldots y_m)$". (Прием вывод - 28).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ACabcd}(\neg(b = c) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(d \in \text{прямая}(bc)) \ \& \ A \in \text{плоскость}(bcd) \ \&$
   $C \in \text{плоскость}(bcd) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ a \in \text{прямая}(AC) \rightarrow$
   $a \in \text{плоскость}(bcd))$

   из теоремы

   $\forall_{ACbcd}(\neg(b = c) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(d \in \text{прямая}(bc)) \ \& \ A \in \text{плоскость}(bcd) \ \&$
   $C \in \text{плоскость}(bcd) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(AC) \subseteq$
   $\text{плоскость}(bcd))$

Попытка преобразовать заменяющую часть нормализатором приведения к заданным заголовкам

1. Попытка обработки заменяющего выражения нормализатором преобразования к заданным заголовкам. Тождество упрощает выражение под корневой сложной операцией и не вводит новых операций большей либо равной сложности. По заголовку s заменяющей части определяется название нормализатора приведения к заданным заголовкам, обычно применяемому к выражениям с заголовкам s (например, "плюс" в случае нормализатора разложения на множители). Этот нормализатор применяется к заменяющей части. Если результат имеет требуемый новый заголовок, то он замещает заменяющую часть тождества. (Прием сокращ - 26).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \cos(2a) = (\cos a - \sin a)(\sin a + \cos a))$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \cos(2a) = (\cos a)^2 - (\sin a)^2)$

Общая стандартизация заменяющей части задачей на описание

1. Редактирование конъюнктивной заменяющей части эквивалентности разрешения относительно неизвестных. Теорема - эквивалентность "$A \leftrightarrow B_1$ & ... & B_n", разрешающая утверждение A относительно переменной x. Список утверждений B_i, не содержащих x, непуст. Заменяющая часть обрабатывается задачей на описание, имеющей цели "редакция", "неизвестная x". Если получается результат, отличный от исходного утверждения, то он замещает заменяющую часть. (Прием глуб - 27).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ 0 \le a+1 \ \& \ 0 \le -a+1 \to b = \arcsin a \leftrightarrow a = \sin b \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \le 2b+\pi \ \& \ 0 \le -2b+\pi)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ 0 \le a+1 \ \& \ 0 \le -a+1 \to b = \arcsin a \leftrightarrow a = \sin b \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \le b+\pi/2 \ \& \ 0 \le -b+\pi/2)$

Преобразование отрицания квантора существования в квантор общности

1. Преобразование отрицания квантора существования в заменяемой части в квантор общности. Теорема - определение некоторого утверждения, причем определяющая часть имеет вид "$\neg(\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A)n) \ \& \ B_1 \ \& \ \ldots \ \& \ B_m$", где $m > 0$. Выбирается A_i с максимальной оценкой сложности, после чего отрицание квантора существования заменяется на "$\forall_{x_1 \ \ldots \ x_k}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_{i-1} \ \& \ A_{i+1} \ \& \ \ldots \ \& \ A(n) \to A_i)$". Характеристика "определение(...)" сохраняется. (Прием связпарам - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_m(\text{простое}(m) \leftrightarrow m - \text{натуральное} \ \& \ 1 < m \ \& \ \forall_n(n - \text{натуральное} \ \& \ \neg(n = 1) \ \& \ \neg(n = m) \to \neg(n \mid m)))$

   из теоремы

   $\forall_m(\text{простое}(m) \leftrightarrow m - \text{натуральное} \ \& \ 1 < m \ \& \ \neg(\exists_n(n - \text{натуральное} \ \& \ n \mid m \ \& \ \neg(n = 1) \ \& \ \neg(n = m))))$

1.16 Повторное упрощение теоремы

Повторное упрощение подтерма теоремы

1. Попытка упростить сложное подвыражение без неизвестной. Теорема представляет собой эквивалентность, заменяемая часть которой есть дизъюнктивно-конъюнктивная конструкция из элементарных утверждений, глубина вхождения в которые неизвестной x (с отбрасыванием внешнего отрицания) равна 1; заменяющая часть имеет вид $P(x,t)$, где t неоднобуквенное и не содержит x. Предпринимается попытка упростить t при помощи задачи на преобразование. Если результат отличен от t, то он замещает t. Новая теорема упрощается. (Прием сокращнеизв - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abn}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(b=0)\ \&\ n-$ натуральное $\&\ a-$ целое $\&\ b-$ целое $\rightarrow a \mid n\ \&\ b \mid n \leftrightarrow \text{нок}(a,b) \mid n)$

из теоремы

$\forall_{abn}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(b=0)\ \&\ n-$ натуральное $\&\ a-$ целое $\&\ b-$ целое $\rightarrow a \mid n\ \&\ b \mid n \leftrightarrow ab/\text{нод}(a,b) \mid n)$

Повторное упрощение теоремы с разблокировкой приемов, основанных на уже имеющихся в списке вывода теоремах

1. Попытка упростить теорему с разблокировкой ранее выведенных теорем. В конце цикла вывода предпринимается попытка повторного обращения к процедуре упрощения теоремы. Все приемы, основанные на теоремах, уже полученных в текущем цикле вывода, деблокируются. Проверяется, что результат либо короче исходной теоремы, либо не содержит символа "значение", имевшегося в исходной теореме. (Прием Контроль - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{GM}(\text{орграф}(G)\ \&\ \text{маршрут}(M,G) \rightarrow l(M(1))-1 = \text{мдлина}(M))$

   из теоремы

   $\forall_{GM}(M-\text{слово}\ \&\ M(1)-\text{слово}\ \&\ M(2)-\text{слово}\ \&\ \text{орграф}(G)\ \&\ \text{маршрут}(M,G) \rightarrow l(M(1))-1 = \text{мдлина}(M))$

2. Попытка повторной стандартизации теоремы. Теорема - эквивалентность общей стандартизации. В особых случаях (после применения некоторого другого приема вывода теорем) предпринимается повторное обращение к процедуре упрощения теоремы. Разблокируются приемы, основанные на уже имеющихся в списке вывода теоремах. (Прием общнорм - 99).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abdx}(b = \text{операция}(a)\ \&\ d \in \text{носитель}(a)\ \&\ x \in \text{носитель}(a)\ \&\ \text{группа}(a) \rightarrow \text{обрэлемент}(d,b) = \text{обрэлемент}(x,b) \leftrightarrow d = x)$

   из теоремы

   $\forall_{abdx}(b = \text{операция}(a)\ \&\ d \in \text{носитель}(a)\ \&\ x \in \text{носитель}(a)\ \&\ \text{группа}(a) \rightarrow b(\text{обрэлемент}(d,b),x) = \text{единица}(b) \leftrightarrow d = x)$

3. Повторное упрощение после подстановки минимальной константы. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, уменьшающее оценку сложности. (Прием упрощение - 27)

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{afA}(A-\text{set}\ \&\ a \in A\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&\ \text{обратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f,A) \rightarrow \text{алгстепень}(a,f,-2) = \text{алгстепень}(\text{обрэлемент}(a,f),f,2))$

из теоремы

$\forall_{afA}(A-\text{set}\ \&\ a \in A\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&\ \text{обратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f,A) \rightarrow \text{алгстепень}(a,f,-2) = f(\text{обрэлемент}(a,f), \text{обрэлемент}(a,f)))$

Повторное упрощение теоремы с использованием уже имеющихся в списке вывода теорем

1. Попытка повторной обработки тождества ранее выведенными упрощающими тождествами. Теорема - тождество, исключающее описатели. В заменяемой его части имеется более одного описателя "отображение" и нет описателей "класс". Предпринимается попытка упрощения теоремы с непосредственным использованием уже имеющихся в текущем списке вывода теорем. (Прием описатель - 28).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cd}(c-\text{целое}\ \&\ d-\text{целое}\ \&\ 0 \le d-c \rightarrow d+3\cdot\sum_{x=c}^{d} x^2-c+1+3(c+d)(d-c+1)/2 = -c^3+(d+1)^3)$

   из теоремы

   $\forall_{cd}(c-\text{целое}\ \&\ d-\text{целое}\ \&\ 0 \le d-c \rightarrow d+3\cdot\sum_{x=c}^{d} x+3\cdot\sum_{x=c}^{d} x^2-c+1 = -c^3+(d+1)^3)$

Попытка специальной стандартизации

1. Попытка общей стандартизации определения. Теорема - тождество, определяющее невырожденный числовой атом. Предпринимается обращение к процедуре упрощения теорем, которой передается дополнительная установка на стандартизацию равенств с числовыми атомами. (Прием определение - 97).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(\text{вероятность}(A,C)=0)\ \&\ A-\text{set}\ \&\ B-\text{set}\ \&\ A \in \text{события}(C)\ \&\ B \in \text{события}(C)\ \&\ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{вероятность}(A \cap B, C) = \text{вероятность}(A,C)\text{услвероятн}(B,A,C))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A-\text{set}\ \&\ B-\text{set}\ \&\ \neg(\text{вероятность}(A,C)=0)\ \&\ B \in \text{события}(C)\ \&\ A \in \text{события}(C)\ \&\ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{услвероятн}(B,A,C) = \text{вероятность}(A \cap B, C)/\text{вероятность}(A,C))$

2. Упрощение теоремы в предположении планиметрической ситуации. Теорема верная в предположении, что все точки лежат на общей плоскости. Предпринимается обращение к процедуре упрощения теорем, которой передается дополнительная установка на применение планиметрических приемов. (Прием планиметрия - 2).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{ACEF}(\neg(A=E)\ \&\ \neg(C=F)\ \&\ l(AC)=l(AF)\ \&\ A\in$ прямая$(CF)\ \&$
$A-$точка $\&\ C-$точка $\&\ E-$точка $\&\ F-$точка $\&$ прямая$(AE)\perp$ прямая$(CF)\rightarrow$
$l(CE)=l(EF))$

из теоремы

$\forall_{ACEF}(\neg(A=E)\ \&\ \neg(A=F)\ \&\ l(AC)=l(AF)\ \&\ A-$ точка $\&\ C-$ точка $\&$
$E-$ точка $\&\ F-$ точка $\&$ прямая$(AC)\perp$ прямая$(AE)\ \&$
прямая$(AE)\perp$ прямая$(AF)\rightarrow l(CE)=l(EF))$

3. Попытка стандартизации исходной теоремы для исключения понятия, входящего в антецеденты. Теорема - тождество для числовых атомов. Предпринимается обращение к процедуре упрощения теорем. Проверяется, что после этого из антецедентов исчезает некоторое понятие, ранее в антецедентах имевшееся. (Прием числовойатом - 27).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(E=F)\ \&\ E\in$ окружность$(AB)\ \&$
   $E\in$ окружность$(CD)\ \&\ F\in$ окружность$(AB)\ \&\ F\in$ окружность$(CD)\ \&$
   $A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&\ D-$ точка $\&\ E-$ точка $\&\ F-$ точка $\&$
   разныестороны$(A,C,$ прямая$(EF))\rightarrow$
   $2l(AC)=\sqrt{4l(AB)^2-l(EF)^2}+\sqrt{4l(CD)^2-l(EF)^2})$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&\ D-$ точка $\&\ E-$ точка $\&$
   $F-$ точка $\&\ \neg(E=F)\ \&\ \neg(A=F)\ \&\ \neg(A=E)\neg(C=D)\ \&\ \neg(A=B)\ \&$
   $F\in$ окружность$(AB)\ \&\ E\in$ окружность$(AB)\ \&\ E\in$ окружность$(CD)\ \&$
   $F\in$ окружность$(CD)\ \&\ C\in$ плоскость$(AEF)\ \&$
   разныестороны$(A,C,$ прямая$(EF))\rightarrow$
   $2l(AC)=\sqrt{4l(AB)^2-l(EF)^2}+\sqrt{4l(CD)^2-l(EF)^2})$

4. Попытка усмотреть из антецедентов дополнительные соотношения, позволяющие упростить консеквент. Теорема - уравнение либо дизъюнкция уравнений для координат множества точек. В антецедентах имеется уравнение для координат некоторого другого множества точек A. Имеются также условие "$B\in A$" и равенство для координат точки B. Параметры уравнения для A, а также параметры координат точки B встречаются в консеквенте. Предпринимается попытка упростить условие под описателем "класс" в консеквенте относительно антецедентов. Если полученный терм короче исходного, то он замещает его в консеквенте. Результат упрощается. (Прием уравнмножество - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fghijknpuvABC}(\neg(A=B)\ \&$ коорд$(n,p)=\mathrm{set}_{lm}(k+fl^2+glm+hm^2+il+jm=$
   $0\ \&\ l-$ число $\&\ m-$ число$)\ \&$ коорд$(C,p)=(u,v)\ \&\ n\subseteq$ плоскоорд$(p)\ \&$
   $C\in n\ \&\ C\in$ прямая$(AB)\ \&\ f-$ число $\&\ g-$ число $\&\ h-$ число $\&$
   $i-$ число $\&\ j-$ число $\&\ k-$ число $\&\ A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&$ прямая$(AB)-$
   касательная к$n\ \&$ прямкоорд$(p)\ \&$ линвторпорядка$(n)\rightarrow$ коорд$($прямая$(AB),p)=$
   $\mathrm{set}_{xy}(iu+jv+2k+x(i+2fu+gv)+y(j+gu+2hv)=0\ \&\ x-$число $\&\ y-$число$))$

из теоремы

$\forall_{fghijknpuvABC}(\neg(A=B)$ & коорд$(n,p)=\text{set}_{lm}(k+fl^2+glm+hm^2+il+jm=0$ & $l-$число & $m-$число) & коорд$(C,p)=(u,v)$ & $n\subseteq$ плоскоорд(p) & $C\in n$ & $C\in$ прямая(AB) & $f-$число & $g-$число & $h-$число & $i-$число & $j-$число & $k-$число & $A-$точка & $B-$точка & прямая$(AB)-$касательная кn & прямкоорд(p) & линвторпорядка$(n)\rightarrow$ коорд(прямая$(AB),p)=\text{set}_{xy}(x(i+2fu+gv)+y(j+gu+2hv)-2fu^2-2guv-2hv^2-iu-jv=0$ & $x-$число & $y-$число))

Попытка упрощения антецедентов

1. Попытка свертки нескольких антецедентов в один. Консеквент теоремы - квантор существования. Предпринимается обращение к процедуре упрощения списка антецедентов. Если полученный список короче исходного, он берется в качестве нового списка антецедентов. (Прием допконтекст - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fA}(\neg(A=\emptyset)$ & $A-$set & асоциативно(f) & обратимо(f) & бинарнооперация$(f,A)\rightarrow\exists_z($левединица$(x,f)))$

   из теоремы

   $\forall_{fA}(\neg(A=\emptyset)$ & $A-$set & асоциативно(f) & правобратимо(f) & левобратимо(f) & бинарнооперация$(f,A)\rightarrow\exists_z($левединица$(x,f)))$

1.17 Переход к эквивалентности от тождества

Тождество используется для эквивалентного преобразования равенства

1. Извлечение из тождества сокращения эквивалентности для решения уравнения. Консеквент теоремы имеет вид "$f(x,t)=a$", где x - единственная переменная теоремы, f - символ ассоциативной и коммутативной операции, a - единица этой операции. Выражение t содержит x. Выбираются новые переменные y,z, и консеквент заменяется на эквивалентность "$f(x,y)=z\leftrightarrow y=f(z,t)$". Добавляются антецеденты, необходимые для сопровождения по о.д.з. (Прием нормализация - 97).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}($Вектор(a) & Вектор(b) & Вектор$(c)\rightarrow b=a+c\leftrightarrow a=b-c)$

   из теоремы

   $\forall_c($Вектор$(c)\rightarrow c-c=$ вектор0$)$

2. Извлечение из тождества сокращения эквивалентности для группировки всех членов равенства в одной части. Консеквент теоремы имеет вид "$f(x,t)=a$, где x - единственная переменная теоремы, f - символ ассоциативной и коммутативной операции, a - единица этой операции. Выражение t содержит x.

Выбирается новая переменная y, и консеквент заменяется на эквивалентность "$x = y \leftrightarrow f(y,t) = a$". Добавляются антецеденты, необходимые для сопровождения по о.д.з. (Прием нормализация - 98).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ac}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Вектор}(c) \to a = c \leftrightarrow a - c = \text{вектор0})$

из теоремы

$\forall_{c}(\text{Вектор}(c) \to c - c = \text{вектор0})$

Подвыражение t одной из частей тождества обозначается вспомогательной переменной x, и выводится эквивалентность измененного таким образом равенства равенству $x = t$. Предварительно в тождество может быть выполнена упрощающая подстановка

1. Извлечение из тождества для обратной операции эквивалентности для двух встречных равенств. Консеквент имеет вид "$f(\ldots,t,\ldots) = x$", где x - переменная, имеющая единственное вхождение в корневой операнд t левой части равенства и не имеющая других вхождений в этой части. Выбираются новые переменные y, z. Консеквент заменяется на эквивалентность "$f(\ldots,y,\ldots) = x \leftrightarrow y = t$". К антецедентам добавляется элементарный результат упрощения утверждения "$\exists_z(y = t_1\ \&\ S)$", где t_1 - результат замены в t переменной x на z, S - конъюнкция результатов такой же замены в содержащих x антецедентах теоремы. Новая теорема упрощается, причем допускается использование уже имеющихся в списке вывода других теорем. (Прием нормализация - 44).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{afx}(a \in \text{Val}(f)\ \&\ x \in \text{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \to$
   $x = \text{обрфункция}(f)(a) \leftrightarrow a = f(x))$

   из теоремы

   $\forall_{fx}(x \in \text{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \to$
   $\text{обрфункция}(f)(f(x)) = x)$

2. Извлечение из тождества для повторной операции эквивалентности для решения уравнения. Консеквент имеет вид "$f(f(x,y),z) = f(x,g(y,z))$", где x, y, z - различные переменные; операция g ассоциативна и коммутативна. Операция $f(x,y)$ имеет единицу e по переменной y. Существенных антецедентов теорема не имеет. Справочник поиска теорем "констврхожд" находит п символу g дополнительную теорему с консеквентом вида "$g(u,h(u,v)) = v$", где u, v - различные переменные. Выбирается новая переменная w, и консеквентом становится эквивалентность "$f(x,y) = w \leftrightarrow x = f(w,h(y,e))$". Список антецедентов новой теоремы составляется из результатов подстановки в антецеденты дополнительной теоремы выражений y, e вместо u, v; результатов подстановки в антецеденты исходной теоремы переменной w вместо z, а также результатов подстановки в антецеденты исходной теоремы выражений $w, h(y,e), y$ вместо x, y, z. Новая теорема упрощается. (Прием нормализация - 96).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abd}(\neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even})\ \&\ \neg(\text{числитель}(b) - \text{even})\ \&\ a - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ b - \text{rational} \to d = a^b \leftrightarrow a = d^{1/b})$

из теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ b - \text{rational}\ \&\ c - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even})\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \to (a^b)^c = a^{bc})$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \neg(b = 0) \to (a/b) \cdot b = a)$

3. Извлечение параметрического описания для значений неизвестной из неявного определения. Теорема - неявное определение выражения T посредством равенства $A = x$, определяющая часть A которого содержит собственное подвыражение T, а x - переменная. Выбираются новые переменные y, P, после чего консеквент заменяется на эквивалентность "$P(T) \leftrightarrow \exists_y(P(y)\ \&\ x = A_1$". Здесь A_1 - результат замены в A подвыражения T на переменную y. (Прием определение - 135).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abd}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ 0 < a\ \&\ \neg(a - 1 = 0)\ \&\ 0 < b \to d(\log_a b) \leftrightarrow \exists_c(d(c)\ \&\ b = a^c))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ 0 < a\ \&\ \neg(a - 1 = 0)\ \&\ 0 < b \to a^{\log_a b} = b)$

4. Вывод из тождества для самодвойственной операции эквивалентности для равенства с этой операцией. Теорема имеет вид "$f(f(x)) = x$". Выбирается новая переменная y, после чего выводятся две теоремы: "$x = f(y) \leftrightarrow f(x) = y$" и "$f(x) = f(y) \leftrightarrow x = y$". (Прием отр - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ac}(c - \text{комплексное}\ \&\ a - \text{комплексное} \to c = \text{сопряженное}(a) \leftrightarrow \text{сопряженное}(c) = a)$

   из теоремы

   $\forall_c(c - \text{комплексное} \to \text{сопряженное}(\text{сопряженное}(c)) = c)$

Вывод из условия равенства множеств эквивалентности для принадлежности этим множествам

1. Вывод из определения класса условия принадлежности классу. Консеквент имеет вид "класс$_{x_1 \ldots x_k}(A) = B$". Он заменяется на эквивалентность "$(x_1 \ldots x_k) \in B \leftrightarrow A$". (Прием описатель - 8).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{afx}(a - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f) \to x \in \text{образ}(f, a) \leftrightarrow \exists_y(y \in a\ \&\ x = f(y)))$

из теоремы

$\forall_{af}(a - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f) \to \text{set}_x(\exists_y(y \in a\ \&\ x = f(y))) = \text{образ}(f, a))$

2. Упрощение условия принадлежности определяемому множеству. Теорема - определение выражения A посредством равенства $A = B$. Определяющая часть имеет тип значения "множество". Выбирается новая переменная x, и утверждение "$x \in B$" упрощается относительно антецедентов. Если результат C не имеет заголовка "принадлежит", то консеквент теоремы заменяется на эквивалентность "$x \in A \leftrightarrow C$". Результат упрощается. (Прием определение - 35).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABa}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \to a \in \text{интервал}(AB) \leftrightarrow \neg(a = A)\ \&\ \neg(a = B)\ \&\ a \in \text{отрезок}(AB))$

   из теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \to \text{интервал}(AB) = \text{отрезок}(AB) \setminus \{A, B\})$

Использование равенства множеств "$A(x) = B(x)$" для вывода условий равенства, включения либо непересечения множеств $A(x), A(y)$

1. Упрощение условий включения, непересечения или равенства двух определяемых множеств, отличающихся единственным параметром. Теорема - определение выражения A посредством равенства $A = B$. Определяющая часть имеет тип значения "множество". Рассматривается переменная x, входящая в A, и выбирается новая переменная y. Определяются результаты A_1, B_1 замены в A, B переменной x на y, а также объединение S списка антецедентов со списком результатов замены в них x на y. Далее рассматриваются три случая. В первом случае создается список S_1, полученный добавлением к S утверждения "$B \subseteq B_1$", во втором - утверждения "непересек(B, B_1)", в третьем - "$B = B_1$". Предпринимается попытка явного разрешения списка S_1 относительно его параметров. Если это удалось сделать, то из конъюнктивных членов ответа отбрасываются утверждения списка S, а конъюнкция оставшихся членов упрощается относительно S. Если результат C не имеет связанных переменных, то создается импликация с антецедентами S и консеквентом $A_2 \leftrightarrow C$, где A_2 - утверждение "$A \subseteq A_1$" в первом случае, "непересек(A, A_1)" во втором и "$A = A_1$"в третьем. (Прием определение - 215).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ c - \text{set} \to a \triangle b \subseteq c \triangle b \leftrightarrow a \subseteq b \cup c\ \&\ b \cap c \subseteq a)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set} \to a \triangle b = a \setminus b \cup b \setminus a)$

Вывод эквивалентности равенства объектов равенству их координат. Стартовая теорема - произвольный элемен группы утверждений, определяющих данные координаты

1. Замена условия равенства точек на конъюнкцию равенств координат. Теорема - определение координат точки A с консеквентом вида "коорд$(A,K) = (t_1,\ldots,t_k)$". Здесь A,K - переменные. Выбираются новые переменные $B, y_1,\ldots, y_k, z_1,\ldots,z_k$. Составляется список S, образованный антецедентами теоремы, содержащими только переменные A,K; результатами замены в этих антецедентах A на B, а также утверждениями "коорд$(A,K) = (y_1,\ldots,y_k)$", "коорд$(B,K) = (z_1,\ldots,z_k)$". Новая теорема имеет антецеденты S и консеквент "$A = B \leftrightarrow y_1 = z_1$ & $\ldots$ & $y_k = z_k$". (Прием определение - 133).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{DKabcde}$(систкоорд(K) & коорд$(D,K) = (b,c)$ & коорд$(a,K) = (d,e) \rightarrow$ $D = a \leftrightarrow b = d$ & $c = e$)

   из теоремы

   $\forall_{ABCDK}$(систкоорд(K) & $K = (A,B,C)$ & $D \in$ прямая(AB) & точкалуча$(A,B,D) \rightarrow$ коорд$(D,K) = (l(AD)/l(AB), 0))$

   Эта теорема определяет терм "коорд(D,K)". В действительности данный терм определяется не одной теоремой, а группой теорем, для различных частных случаев расположения точки D относительно координатных прямых. Так как описываемому приему достаточно лишь понимать, что символ "коорд" обозначает координату, причем по умолчанию объект должен однозначно определяться своими координатами, то выбор конкретной теоремы из группы не важен. Любая из таких теорем лишь запускает работу приема. В нашем примере рассматривается частный случай, когда точка лежит на оси абсцисс вправо от начала координат.

Усмотрение эквивалентности равенства в консеквенте кванторной импликации конъюнкции группы антецедентов

1. Извлечение из определения операции, использующего вспомогательные параметры, эквивалентности для устранения данной операции от выражений с неизвестными. Теорема - равенство $A = x$, определяющее некоторую операцию A через вспомогательную переменную x, входящую в антецеденты и не входящую в A. Для любых значений переменных определяемой части, удовлетворяющих всем содержащим только такие переменные антецедентам, существует подходящее значение x. Все переменные теоремы встречаются в консеквенте. Список антецедентов разбивается на непустые подсписок S_1, образованный утверждениями, параметры которых включаются в параметры A, и подсписок S_2 остальных утверждений. Новая теорема имеет антецеденты S_1 и консеквент "$A = B \leftrightarrow S_2$"Она сопровождается единственной характеристикой "неизвоценка", указывающей, что теорема позволяет получить более простые выражения с неизвестными. Роль неизвестных играют параметры A. (Прием определение - 177).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{an}(a - \text{число} \to [a] = n \leftrightarrow n - \text{целое}\ \&\ n \le a\ \&\ a < n + 1)$

из теоремы

$\forall_{an}(a - \text{число}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ n \le a\ \&\ a < n + 1 \to [a] = n)$

Вывод условия эквивалентности определения объекта через свои координаты определению его без использования координат. Стартовая теорема - выражение для координат объекта

1. Вывод эквивалентности для явного задания объекта через координаты в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". Консеквент теоремы имеет вид "коорд$(A, K) = (t_1, \ldots, t_n)$". Рассматриваются все антецеденты вида "коорд$(B, K) = (s_1, \ldots, s_n)$". Консеквент приобретает вид "$Q \leftrightarrow A =$ тчкоорд$(K, (t_1, \ldots, t_n))$", где Q - конъюнкция антецедентов, содержащих переменную A. Эти антецеденты из списка антецедентов исключаются, причем проверяется, что из оставшихся антецедентов следует существование такого A, что Q истинно. Новая теорема упрощается. (Прием систкоорд - 24).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdepCK}(\neg(e + p = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&$
   $e - \text{число}\ \&\ p - \text{число}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \text{Двумерн}(K) \to e \cdot l(C\ \text{тчкоорд}(K, (a, b)))$
   $= p \cdot l(C\ \text{тчкоорд}(K, (c, d)))\ \&\ C \in \text{отрезок}(\text{тчкоорд}(K, (a, b))\ \text{тчкоорд}(K, (c, d)))$
   $\leftrightarrow C = \text{тчкоорд}(K, ((ae + cp)/(e + p), (be + dp)/(e + p))))$

   из теоремы

   $\forall_{abcdepABCK}(\text{коорд}(A, K) = (a, b)\ \&\ \text{коорд}(B, K) = (c, d)\ \&\ C \in \text{отрезок}(AB)\ \&$
   $p - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\text{систкоорд}(K)\ \&\ el(AC) =$
   $pl(BC)\ \&\ e - \text{число}\ \&\ \neg(e + p = 0) \to \text{коорд}(C, K) = ((ae + cp)/(e + p),$
   $(be + dp)/(e + p)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abK}(\text{систкоорд}(K)\ \&\ \text{Двумерн}(K)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to$
   $\text{коорд}(\text{тчкоорд}(K, (a, b)), K) = (a, b))$

Вывод сокращающей эквивалентности из обращающего тождества

1. Усмотрение возможности сокращения бинарной ассоциативной операции. Консеквент имеет вид $f(a, t) = p$, причем в антецедентах имеется утверждение "бинарнаяоперация(f, A)". Переменная a не имеет других вхождений в консеквент; список переменных выражения p включается в список $z_1, \ldots, z_m$ переменных выражения p. Выбираются новые переменные $x, y, u_1, \ldots, u_m$. Утверждение "$\forall_{ay}(y \in A\ \&\ a \in A \to \exists_x(f(x, y) = a\ \&\ x \in A))$" сворачивается в элементарное утверждение B (в зависимости от номера операнда a в консеквенте - левая либо правая обратимости). Определяются результаты t_1, p_1 подстановки в t, p переменных $u_1, \ldots, u_m$ вместо $z_1, \ldots, z_m$, и консеквентом становится эквивалентность "$f(x, t) = f(x, t_1) \leftrightarrow p = p_1$". К списку антецедентов добавляются результаты подстановки в антецеденты переменных $u_1, \ldots, u_m$ вместо $z_1, \ldots, z_m$,

а также условия "ассоциативно(f)" и "$x \in A$". Результат упрощается. (Прием значперем - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcfxA}(A-\text{set} \,\&\, b \in A \,\&\, c \in A \,\&\, x \in A \,\&\, \text{ассоциативно}(f) \,\&\, \text{левединица}(a, f) \,\&\, \text{левобратимо}(f) \,\&\, \text{бинарнооперация}(f, A) \to f(b, c) = f(b, x) \leftrightarrow c = x)$

из теоремы

$\forall_{afxA}(A-\text{set} \,\&\, \text{бинарнооперация}(f, A) \,\&\, x \in A \,\&\, \text{левединица}(a, f) \to f(a, x) = x)$

2. Извлечение из тождества для обратной операции сокращающей эквивалентности. Консеквент тождества общей стандартизации имеет вид "$f(\ldots, t, \ldots) = x$", где x - переменная, входящая в t и не имеющая других вхождений в левую часть. Выбирается новая переменная y. Консеквентом становится эквивалентность "$t_1 = t \leftrightarrow x = y$", где t_1 - результат замены в t переменной x на y. К антецедентам добавляются результаты примененной к ним такой же замены. Результат упрощается. (Прием нормализация - 137).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abn}(n - \text{натуральное} \to \text{констнабор}(a, n) = \text{констнабор}(b, n) \leftrightarrow a = b)$

   из теоремы

   $\forall_{anx}(n - \text{натуральное} \,\&\, x \in \{1, \ldots, n\} \to \text{констнабор}(a, n)(x) = a)$

3. Использование зануляющего тождества для вывода эквивалентности двух равенств. Консеквент тождества общей стандартизации имеет вид "$f(\ldots, x, \ldots) = a$", где f - ассоциативная и коммутативная операция, a - ее единица, x - переменная. Выбираются новые переменные y, z, и консеквент заменяется на эквивалентность "$f(y, x) = f(z, x) \leftrightarrow y = z$". Добавляются антецеденты, необходимые для сопровождения консеквента по о.д.з. Результат упрощается. (Прием нормализация - 149).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \,\&\, c - \text{число} \to a + b = a + c \leftrightarrow b = c)$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to a - a = 0)$

Попытка установить эквивалентность равенства двух версий сложного числового атома, встречающегося в одной части консеквента, кванторной эквивалентности для двух версия другой части консеквента

1. Вывод эквивалентности для кванторной развертки равенства двух числовых атомов. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выполняющее переформулировку нечислового отношения A_1 через отношение A_2 для числовых атомов (возможно, вырожденных). Внутри A_2 выбирается невырожденный числовой атом t. Выбирается параметр a атома t, имеющий единственное вхождение в A_2. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих a, и подсписок

S_2 остальных утверждений. В списке S_1 выбирается утверждение "$a \in B$", где выражение B не содержит a. Проверяется, что во всех остальных утверждениях списка S_1 переменная a встречается только внутри вхождений терма t. Составляется непустой список X параметров A_2, не входящих в t, и список антецедентов разбивается на подсписок Q_1 утверждений, содержащих X, а также подсписок Q_2 остальных утверждений. Проверяется, что утверждения Q_1 не содержат параметров атома t. Выбирается новая переменная b, и при помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство выражения t результату r замены в t переменной a на b - следствие Q_2, результатов замены в утверждениях S_1 переменной a на b, а также утверждения "$\forall_X(Q_1 \to (A_2 \leftrightarrow A_3))$". Здесь A_3 - результат замены в A_2 переменной a на b. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность "$t = r \leftrightarrow \forall_X(Q_1 \to (A_1 \leftrightarrow A_4))$", где A_4 - результат замены в A_1 переменной a на b. Антецеденты - исходные посылки задачи на доказательство. (Прием числвыраз - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acgh}(a = \text{операция}(h)\ \&\ c \in \text{носитель}(h)\ \&\ g \in \text{носитель}(h)\ \&$
$\text{порядокэлемента}(c,h) - \text{натуральное}\ \&\ \text{порядокэлемента}(g,h) - \text{натуральное}\ \&$
$\text{группа}(h) \to \text{порядокэлемента}(c,h) = \text{порядокэлемента}(g,h) \leftrightarrow$
$\forall_b(b - \text{натуральное} \to (\text{алгстепень}(c,a,b) = \text{единица}(a) \leftrightarrow \text{алгстепень}(g,a,b) =$
$\text{единица}(a))))$

из теоремы

$\forall_{abgh}(a = \text{операция}(h)\ \&\ g \in \text{носитель}(h)\ \&\ b - \text{натуральное}\ \&$
$\text{порядокэлемента}(g,h) - \text{натуральное}\ \&\ \text{группа}(h) \to$
$\text{порядокэлемента}(g,h) \mid b \leftrightarrow \text{алгстепень}(g,a,b) = \text{единица}(a))$

1.18 Переход к тождеству от эквивалентности

Эквивалентность для условий принадлежности множествам порождает равенство для множеств либо мощностей множеств

1. Вывод условия, когда определяемое подмножество совпадает с множеством. Теорема - определение условия принадлежности "$x \in t$"; t не содержит переменной x. Определяющая часть имеет вид "$x \in s\ \&\ A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n$", где все A_i элементарные, а выражение s не содержит x. Кванторная импликация "$\forall_x(x \in s \to A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n)$" упрощается и становится бесквантором утверждением B. Это утверждение добавляется к антецедентам, а консеквентом становится равенство $t = s$. (Прием определение - 106).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{af}(a - \text{set}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq a\ \&\ f - \text{функция} \to \text{Dom}(f) = \text{прообраз}(f,a))$

   из теоремы

   $\forall_{afx}(f - \text{функция}\ \&\ a - \text{set} \to x \in \text{прообраз}(f,a) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(f)\ \&\ f(x) \in a)$

2. Вывод из определения принадлежности равенства для определяемого множества. Консеквент теоремы имеет вид "$x \in t \leftrightarrow A$", где переменная x не входит в t и в антецеденты, а заголовок A отличен от "или". Консеквент заменяется на равенство "$t = \mathrm{set}_x(A)$". (Прием принадлежит - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $$\forall_{bc}(b - \mathrm{set}\ \&\ c - \mathrm{set} \to b \cap c = \mathrm{set}_a(a \in b\ \&\ a \in c))$$

   из теоремы

   $$\forall_{abc}(b - \mathrm{set}\ \&\ c - \mathrm{set} \to a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b\ \&\ a \in c)$$

3. Попытка альтернативной свертки класса, определяющего операцию. Консеквент теоремы имеет вид "$x \in t \leftrightarrow A$", где переменная x не входит в t и в антецеденты, а заголовок A отличен от "или". Выражение "$\mathrm{set}_x(A)$" упрощается относительно антецедентов и превращается в элементарное утверждение B. Консеквент заменяется на равенство $t = B$. Новая теорема упрощается. (Прием принадлежит - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $$\forall_f(f - \text{функция} \to \text{образ}(f, \mathrm{Dom}(f)) = \mathrm{Val}(f))$$

   из теоремы

   $$\forall_{af}(f - \text{функция} \to a \in \mathrm{Val}(f) \leftrightarrow \exists_x(x \in \mathrm{Dom}(f)\ \&\ a = f(x)))$$

4. Попытка явного разрешения относительно связанной переменной условия в сворачиваемом классе. Консеквент теоремы имеет вид "$x \in t \leftrightarrow A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n$"; $n \geq 1$. Переменная x не входит в t и в антецеденты. Просматриваются элементарные A_i, содержащие x и не разрешенные явно относительно x. Предпринимаются попытки их явного разрешения и замены A_i на результат. Если хотя бы одна попытка удалась, консеквент заменяется на "$t = \mathrm{set}_x(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n)$". Результат упрощается. (Прием принадлежит - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $$\forall_{bc}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to [b, c) = \mathrm{set}_a(a < c\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b \leq a))$$

   из теоремы

   $$\forall_{abc}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to a \in [b, c) \leftrightarrow a - \text{число}\ \&\ 0 \leq a - b\ \&\ 0 < c - a)$$

5. Усмотрение равенства для суммы мощностей двух множеств. Консеквент теоремы имеет вид "$\neg(A) \leftrightarrow B$". Находится список $x_1, \ldots, x_k$ общих параметров утверждений A, B Каждое из них имеет также другие параметры. Список антецедентов теоремы разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих $x_1, \ldots, x_k$, и подсписок S_2 остальных утверждений. К списку S_2 добавляются утверждения "конечное(y)" для всех таких переменных y, что в S_1 встречается утверждение вида "$x_i \in y$". Выражения "$\mathrm{card}(\mathrm{set}_{x_1 \ldots x_k}(S_1))$", "$\mathrm{card}(\mathrm{set}_{x_1 \ldots x_k}(S_1\ \&\ B))$", "$\mathrm{card}(\mathrm{set}_{x_1 \ldots x_k}(S_1\ \&\ A))$" упрощаются относительно S_2 и превращаются в выражения t_1, t_2, t_3, не содержащие описателя "класс".

Консеквентом теоремы становится равенство "$t_1 = t_2 + t_3$", а антецедентами - утверждения S_2. Новая теорема упрощается. (Прием нормотр - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{GH}(\text{конечное}(\text{вершины}(G))\ \&\ \text{простграф}(G)\ \&\ \text{дополнграф}(G,H) \rightarrow$
$\text{card}(\text{ребра}(G))+\text{card}(\text{ребра}(H)) = (\text{card}(\text{вершины}(G))-1)\text{card}(\text{вершины}(G))/2)$

из теоремы

$\forall_{GH}(\text{простграф}(G)\ \&\ a \in \text{вершины}(G)\ \&\ b \in \text{вершины}(G)\ \&\ \neg(a=b)\ \&$
$\text{дополнграф}(G,H) \rightarrow \text{смежны}(a,b,H) \leftrightarrow \neg(\text{смежны}(a,b,G)))$

6. Переход от эквивалентности для принадлежности одному и тому же множеству к равенству множеств. Консеквент теоремы имеет вид "$y \in x \leftrightarrow t \in x$", где x, y - различные переменные, t - некоторое выражение. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих y, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выбирается новая переменная z. Выражения "$\text{set}_y(S_1\ \&\ y \in x)$" и "$\text{set}_z(\exists_y(S_1\ \&\ y \in x\ \&\ z = t))$" упрощаются до выражений A, B, не содержащих символа "класс". Консеквентом новой теоремы становится равенство $A = B$, а списком антецедентов - S_2. (Прием равнтексты - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abyA}(b = \text{операция}(A)\ \&\ a - \text{set}\ \&\ y \in a\ \&\ \text{группа}(A)\ \&\ \text{подгруппа}(a,A) \rightarrow$
   $b[a,\{y\}] = a)$

   из теоремы

   $\forall_{abxyA}(b = \text{операция}(A)\ \&\ a - \text{set}\ \&\ x \in \text{носитель}(A)\ \&\ y \in a\ \&\ \text{группа}(A)\ \&$
   $\text{подгруппа}(a,A) \rightarrow x \in a \leftrightarrow b(x,y) \in a)$

Эквивалентность порождает равенство характеристик классов, определяемых частями эквивалентности

1. Попытка вывести равенство для мощностей классов при усмотрении однозначной разрешимости параметризующего выражения относительно параметра. Консеквент теоремы имеет вид "$A \leftrightarrow \exists_y(x = t\ \&\ B)$", где x - переменная, не входящая в t и входящая в A. Переменная y входит в t. Решается задача на описание с условиями $x = t, B$ и единственной неизвестной y. Посылками служат антецеденты. Ответ имеет конъюнктивный член вида $y = s$, где s не содержит y. Выбирается новая переменная P, и консеквентом становится равенство "$\text{card}(\text{set}_{xy}(A\ \&\ P(x,y))) = \text{card}(\text{set}_{xy}(B_1\ \&\ P(t_1,y)))$". Здесь B_1, t_1 - результаты замены y на x в B, t. Антецеденты упрощаются. (Прием параметризация - 20).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cd}(d - \text{set} \rightarrow \text{card}(\text{set}_{ab}(\text{card}(a) = 1\ \&\ a \subseteq d\ \&\ c(a,b))) =$
   $\text{card}(\text{set}_{ab}(a \in d\ \&\ c(\{a\},b))))$

   из теоремы

   $\forall_{ad}(a - \text{set}\ \&\ d - \text{set} \rightarrow \text{card}(a) = 1\ \&\ a \subseteq d \leftrightarrow \exists_b(a = \{b\}\ \&\ b \in d))$

2. Попытка перейти от параметрического задания класса к обычному. Консеквент теоремы имеет вид "$A \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_k}(x = t \ \& \ B)$", где x - переменная, не входящая в t. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Утверждение "$\exists_{y_1 \ldots y_k}(x = t \ \& \ B \ \& \ S_3)$" упрощается задачей на преобразование и превращается в некоторое утверждение C. Здесь S_3 - результат замены в S_1 переменной x на t. Выбирается новая переменная z, и консеквентом становится равенство "$\text{set}_x(C \ \& \ x \in z) = \text{set}_x(S_1 \ \& \ A \ \& \ x \in z)$". Список антецедентов заменяется на S_2. (Прием параметризация - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{am}(m - \text{целое} \rightarrow \text{set}_n(\exists_k(n = km \ \& \ k - \text{целое}) \ \& \ n \in a) = \text{set}_n(n - \text{целое} \ \& \ m \mid n \ \& \ n \in a))$

   из теоремы

   $\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m \mid n \leftrightarrow \exists_k(k - \text{целое} \ \& \ n = mk))$

3. Вывод тождества для мощностей из обращающей эквивалентности. Консеквент имеет вид "$x = t \leftrightarrow y = s \ \& \ A$", где x - переменная, не входящая в t и входящая в s, y - переменная, не входящая в A, s и входящая в t. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих y, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выбирается новая переменная P, и консеквентом становится равенство "$\text{card}(\text{set}_y(S_1 \ \& \ P(t))) = \text{card}(\text{set}_x(A \ \& \ P(x)))$". Антецедентами становятся утверждения S_2. (Прием глуб - 61).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bGM}(\text{орграф}(G) \ \& \ \text{цепь}(M, G) \rightarrow \text{card}(\text{set}_a(a \in \text{мребра}(M) \ \& \ b(\text{нормребра}(a, M)))) = \text{card}(\text{set}_i(i \in \{1, \ldots, \text{мдлина}(M)\} \ \& \ b(i))))$

   из теоремы

   $\forall_{aMGi}(\text{орграф}(G) \ \& \ \text{цепь}(M, G) \ \& \ a \in \text{мребра}(M) \rightarrow \text{нормребра}(a, M) = i \leftrightarrow i \in \{1, \ldots, \text{мдлина}(M)\} \ \& \ a = \text{мребро}(M, i))$

4. Определение числа решений уравнения. Теорема - эквивалентность для разрешения утверждения A относительно неизвестной x. Ее заменяющая часть B не содержит квантора существования и, после приведения ее к виду д.н.ф., превращается в невырожденную дизъюнкцию утверждений, каждое из которыфх имеет конъюнктивный член вида "$x = t$". Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выражение "$\text{card}(\text{set}_x(B \ \& \ S_1))$" упрощается относительно S_2 и превращается в выражение C, не содержащее символа "мощность". Консеквентом становится равенство "$\text{card}(\text{класс}_x(A \ \& \ S_1)) = C$", антецедентами - утверждения списка S_2. Результат упрощается. (Прием глуб - 56).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abd}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \text{card}(\text{set}_e(ae + be^2 - d = 0 \ \& \ e - \text{число})) = ((1 \text{ при } 4bd + a^2 = 0, \text{ иначе } 2) \text{ при } 0 \leq 4bd + a^2, \text{ иначе } 0))$

из теоремы

$\forall_{abde}(\neg(b=0)\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ d-$ число $\&\ e-$ число $\to ae+be^2=d \leftrightarrow 0 \le 4bd+a^2\ \&\ (e=-(a+\sqrt{4bd+a^2})/(2b)\ \vee\ e=(-a+\sqrt{4bd+a^2})/(2b)))$

Эквивалентность, в одной части которой находится равенство, порождает импликацию с равенством в консеквенте

1. Эквивалентность для кванторной расшифровки порождает упрощающее тождество. Консеквент - эквивалентность элементарного утверждения A утверждению вида "$\forall_{x_1\ldots x_k}(B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_n \to t_1=t_2)$". Все B_i элементарны. Корневая операция выражения t_1 - самая сложная в t_1. Либо сложность t_2 меньше сложности t_1, либо эти сложности равны, а каждый подтерм терма t_2, имеющий в нем максимальную сложность, короче t_1. Утверждения $A, B_1, \ldots, B_n$ добавляются к антецедентам. Консеквентом становится $t_1=t_2$. Результат упрощается. (Прием развертка - 77).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{xAC}(\neg(x=\emptyset)\ \&\ x-$ set $\&\ x\subseteq \mathrm{Dom}(A)\ \&\ \mathrm{Val}(A)\subseteq$ события$(C)\ \&$
   $A-$ функция $\&$ конечное$(x)\ \&$ верпространство$(C)\ \&$ независобытия$(A,C)\to$ вероятность$(\bigcap_{y,y\in x}A(y),C)=\prod_{y,y\in x}$ вероятность$(A(y),C))$

   из теоремы

   $\forall_{AC}(A-$ функция $\&\ \mathrm{Val}(A)\subseteq$ события$(C)\ \&$ верпространство$(C)\to$
   независобытия$(A,C)\leftrightarrow\forall_x(x\subseteq\mathrm{Dom}(A)\ \&\ x-$ set $\&$ конечное$(x)\ \&\ \neg(x=\emptyset)\to$ вероятность$(\bigcap_{y,y\in x}A(y),C)=\prod_{y,y\in x}$ вероятность$(A(y),C)))$

2. Вывод тождества общей стандартизации из эквивалентности для равенства. Теорема - эквивалентность, уменьшающая оценку сложности. Заменяемая часть представляет собой равенство, заменяющая - конъюнкцию (возможно, вырожденную) элементарных утверждений. Эти утверждения добавляются к антецедентам, а консеквентом становится равенство. Проверяется, что новая теорема - тождество общей стандартизации. (Прием уменьшение - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{af}(a-$ set $\&\ f-$ функция $\&$ непересек$(a,\mathrm{Val}(f))\to$ прообраз$(f,a)=\emptyset)$

   из теоремы

   $\forall_{af}(a-$ set $\&\ f-$ функция $\to$ прообраз$(f,a)=\emptyset\leftrightarrow$ непересек$(a,\mathrm{Val}(f)))$

3. Теорема - эквивалентность, определяющая некоторое утверждение A посредством утверждения вида $x=t\ \&\ B$, где x - переменная, не входящая в t, но входящая в A. Все параметры выражения t входят в A. Рассматривается список $x, x_1, \ldots, x_n$ всех параметров A, не входящих в t. Выбираются новые переменные $y, y_1, \ldots, y_n$. К антецедентам добавляются результаты замены в них переменных $x, x_1, \ldots, x_n$ на $y, y_1, \ldots, y_n$, а также A и результат такой же замены переменных в A. Консеквентом становится равенство $x=y$. Результат упрощается. (Прием и - 80).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{afA}$(перестановка(f,a) & перестановка(f,A) & $a-$set & $A-$set & конечное(a) & конечное$(A) \to A = a)$

из теоремы

$\forall_{fA}(A - \text{set}$ & конечное$(A) \to$ перестановка$(f,A) \leftrightarrow f -$ функция & $\text{Dom}(f) = \{1,\ldots,\text{card}(A)\}$ & $\text{Val}(f) = A)$

4. Извлечение тождества из эквивалентности, заменяющая часть которой фиксирует значение переменной, а заменяемая является равенством. Теорема - эквивалентность общей стандартизации. Заменяемая часть имеет вид $t_1 = t_2$, заменяющая - вид $x = s$, где переменная x не входит в выражение s. Заменяющая часть добавляется к антецедентам, а консеквентом становится заменяемая. Результат упрощается. (Прием общнорм - 108).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(\neg(b = 0)$ & $b \mid a$ & $a -$ целое & $b -$ целое $\to |b| =$ нод$(a,b))$

   из теоремы

   $\forall_{abd}(b \mid a$ & $a -$ целое & $b -$ целое & $\neg(b = 0) \to d =$ нод$(a,b) \leftrightarrow d = |b|)$

В одной из частей эквивалентности находится кванторное утверждение с равенством в глубине. Предпринимается вынесение этого равенства наружк в консеквенте новой кванторной импликации

1. Эквивалентность для кванторной расшифровки с квантором общности, фиксирующим значения выражения: вывод условия неизменности значения этого выражения для двух различных значений параметра. Консеквент имеет вид "$A \leftrightarrow \exists_{x_1\ldots x_k}(C$ & $\forall_x(B_1$ & $\ldots$ & $B_n \to t_1 = t_2))$" либо вид "$\forall_x(B_1$ & $\ldots$ & $B_n \to t_1 = t_2)$". Выражение t_1 не содержит переменной x, а выражение t_2 - содержит. Если имеется внешний квантор существования, то определяется список $y_1,\ldots,y_m$ всех параметров выражения t_2, входящих в список $x_1,\ldots,x_k$. Определяется конъюнкция C_1 всех содержащих $y_1,\ldots,y_m$ конъюнктивных членов утверждения C. Если эта конъюнкция непустая, выбираются новые переменные $z_1,\ldots,z_m$, и проверяется равенство выражения t_2 результату подстановки в t_2 переменных z_i вместо y_i. Посылками при этом служат антецеденты теоремы, утверждение C, результат подстановки в C_1 переменных z_i вместо y_i и утверждения $B_1 < \ldots, B_n$. Наконец, выбирается новая переменная v, и консеквентом становится равенство выражения t_2 результату замены в нем переменной x на v. К антецедентам добавляются утверждения $A, B_1,\ldots,B_n,C_1$ и результаты замены в $B_1,\ldots,B_n$ переменной x на v. Результат упрощается. (Прием развертка - 78).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abtT}(b \in T$ & $t \in T$ & неподв(a,T) & мточка(a) & Числотр$(T) \to$ Место$(a,t) =$ Место$(a,b))$

из теоремы

$\forall_{aTt}$(мточка(a) & Числотр$(T) \to$ неподв$(a, T) \leftrightarrow \exists_A(A -$ точка & $\forall_t(t \in T \to$ Место$(a, t) = A)))$

Усмотрение обращающего тождества из обращающей эквивалентности

1. Усмотрение обращающего тождества. Консеквент имеет вид "$x = t \leftrightarrow y = r$", где x - переменная, входящая в r и не входящая в t; y - переменная, не входящая в r. Консеквентом становится равенство $r_1 = y$, где r_1 - результат замены в r переменной x на y. Антецедентами становятся результаты такой же замены в антецедентах исходной теоремы. Добавляются антецеденты, необходимые для сопровождения по о.д.з., и результат упрощается. (Прием глуб - 60).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(b =$ операция(c) & $a \in$ носитель(c) & группа$(c) \to$
   обрэлемент(обрэлемент$(a, b), b) = a)$

   из теоремы

   $\forall_{abcd}(d =$ операция(c) & $a \in$ носитель(c) & $b \in$ носитель(c) & группа$(c) \to$
   $b =$ обрэлемент$(a, d) \leftrightarrow a =$ обрэлемент$(b, d))$

Создание вспомогательной теоремы для преобразования подвыражения исходной теоремы

1. Использование определения отношения в задании класса для получения его параметрического описания. Консеквент теоремы имеет вид "$P(x) \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_k}$(координ$(x, K) = \text{set}_{z_1 \ldots z_m}(A)$ & $B)$". Внутри A встречается отношение $P(\ldots)$, определение которого имеет вид "$P(\ldots) \leftrightarrow \exists_{u_1 \ldots u_m}(\ldots)$". Это определение используется для преобразования утверждения A, с последующим разрешением относительно $z_1, \ldots, z_m$ для получения параметрического описания вида "$\text{set}_{z_1 \ldots z_m}(\exists_{v_1 \ldots v_p}(z_1 = t_1$ & $\ldots$ & $z_m = t_m$ & $C))$". Консеквент теоремы преобразуется в равенство выражения "$\text{set}_{z_1 \ldots z_m}(A)$" данному параметрическому описанию. Антецеденты дополняются необходимыми для указанных действий утверждениями. Новая теорема упрощается. (Прием уравнкрив - 14).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdef}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0)$ & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число &
   $e -$ число & $f -$ число $\to \text{set}_{xyz}(x -$ число & $y -$ число & $z -$ число &
   пропорцнаборы$((d, e, f), (x - a, y - b, z - c))) = \text{set}_{xyz}(\exists_g(x = a + dg$ &
   $y = b + eg$ & $z = c + fg$ & $g -$ число$)))$

   из теоремы

   $\forall_{KP}(P -$ set & систкоорд(K) & Трехмерн(K) & $P \subseteq$ Точки $\to$ Прямая$(P) \leftrightarrow$
   $\exists_{abcdef}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число &
   $f -$ число & $\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0)$ & коорд$(P, K) = \text{set}_{xyz}(x -$ число & $y -$ число &
   $z -$ число & пропорцнаборы$((x - a, y - b, z - c), (d, e, f)))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcdef}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число} \rightarrow$
пропорцнаборы$((a,b,c),(d,e,f)) \leftrightarrow \exists_{uv}(u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&$
$\neg(u^2+v^2=0)\ \&\ au+dv=0\ \&\ bu+ev=0\ \&\ cu+fv=0))$

1.19 Следствия тождества с описателем "класс"

Вывод утверждения принадлежности одной из частей равенства для классов из принадлежности другой части

1. Перенесение в антецеденты конъюнктивных членов определения класса. Теорема - определение множества A посредством равенства "$A = \text{set}_{x_1\ldots x_k}(B)$". Конъюнктивные члены утверждения B добавляются к антецедентам, а консеквентом становится утверждение "$(x_1,\ldots,x_k) \in A$". Результат упрощается. (Прием определение - 68).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{zA}(A - \text{set}\ \&\ z - \text{комплексное}\ \&\ A \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}\ \&\ \text{вещформа}(z) \in A \rightarrow$
   $z \in \text{комплформа}(A))$

   из теоремы

   $\forall_A(A - \text{set}\ \&\ A \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R} \rightarrow \text{комплформа}(A) = \text{set}_z(z - \text{комплексное}\ \&$
   $(\text{Re}(z),\text{Im}(z)) \in A))$

2. Вывод импликации для переформулировки антецедентов других теорем через определяемое понятие. Теорема - определение множества A посредством равенства "$A = \text{set}_{x_1\ldots x_k}(B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_n)$". Выбирается утверждение B_i, имеющее вид $P(t_1,t_2)$, где P - симметричное и транзитивное отношение, t_1 содержит переменные $x_1,\ldots,x_k$, а t_2 - не содержит. Выбираются новые переменные $y_1,\ldots,y_k$. Определяется результат t_3 замены в t_1 переменных $x_1,\ldots,x_k$ на $y_1,\ldots,y_k$. Консеквентом становится равенство $t_1 = t_3$, а к антецедентам добавляются утверждения "$(x_1,\ldots,x_k) \in A$", "$(y_1,\ldots,y_k) \in A$". Результат упрощается. Теорема снабжается единственной характеристикой "опрнапр(P)". (Прием определение - 72).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCa}(\neg(A=B)\ \&\ a \in \text{окружность}(AB)\ \&\ C \in \text{окружность}(AB)\ \&$
   $A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \rightarrow l(AC) = l(aA))$

   из теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \neg(A=B) \rightarrow \text{окружность}(AB) =$
   $\text{set}_C(C - \text{точка}\ \&\ l(AC) = l(AB)))$

3. Вывод импликации для условия принадлежности из параметрического описания класса. Консеквент имеет вид "$\text{set}_x(\exists_{y_1\ldots y_k}(x = t\ \&\ A)) = B$". К антецедентам добавляются конъюнктивные члены B, а консеквентом становится "$t \in B$". Результат упрощается. (Прием описатель - 64).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{afy}(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ y \in a\ \&\ f - \text{функция} \to f(y) \in \text{образ}(f, a))$

из теоремы

$\forall_{af}(a - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f) \to \text{set}_x(\exists_y(y \in a\ \&\ x = f(y))) = \text{образ}(f, a))$

4. Вывод импликации для условия принадлежности из явного задания класса. Теорема - определение множества A посредством равенства "$A = \text{set}_x(B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_n)$". К антецедентам добавляется утверждение "$x \in A$", а консеквентом становится произвольное B_i. Результат упрощается. (Прием описатель - 104).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{afx}(\neg(\text{Dom}(f) = \emptyset)\ \&\ a \in \bigcap(f)\ \&\ x \in \text{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&$
   $\text{семействомножеств}(f) \to a \in f(x))$

   из теоремы

   $\forall_f(\neg(\text{Dom}(f) = \emptyset)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{семействомножеств}(f) \to$
   $\text{set}_a(\forall_x(x \in \text{Dom}(f) \to a \in f(x))) = \bigcap(f))$

Попытка подобрать пример элемента класса путем реализации условия на объекты этого класса

1. Попытка подобрать пример элемента класса. Теорема - определение множества A посредством равенства "$A = \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_n)$". В режиме перечисления результатов решается задача на описание с условиями $B_1, \ldots, B_n$ и неизвестными $x_1, \ldots, x_k$. В задаче требуется найти пример значений неизвестных. Для каждого найденного примера C создается импликация, полученная из исходной добавлением C к антецедентам и заменой консеквента на "$(x_1 \ldots x_k) \in A$". Она упрощается. (Прием определение - 65).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{AC}(\neg(A = C)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \to C \in \text{окружность}(AC))$

   из теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B) \to \text{окружность}(AB) =$
   $\text{set}_C(C - \text{точка}\ \&\ l(AC) = l(AB)))$

Попытка заменить описатель "класс" на конечный список

1. Попытка исключить квантор общности внутри заменяемого описателя путем рассмотрения конечного списка элементов. Теорема - тождество "$A = B$", сводящее характеристику A некоторого класса к характеристикам более простых классов. Внутри A выделяется квантор общности "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(x_1 \in t \to C)$". Выражение t не имеет переменных, связанных внутри A. Выбираются новые переменные a, b, и формируется выражение t_1 вида $\{a\}$ либо $\{a, b\}$. К антецедентам

теоремы добавляется равенство $t = t_1$. В случае двухэлементного t_1 добавляется антецедент "$\neg(a = b)$". Консеквентом теоремы становится равенство "$A_1 = B$", где A_1 - результат замены в A подтерма t на t_1. Результат упрощается. (Прием упрощэкв - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcd}(\neg(a = b)\ \&\ c{-}\text{set}\ \&\ d{-}\text{set}\ \&\ \text{конечное}(c)\ \&\ \text{конечное}(d) \to \text{card}(\text{set}_f(\text{Dom}(f) = \{a, b\}\ \&\ f(a) \in c\ \&\ f(b) \in d\ \&\ f - \text{функция})) = \text{card}(c)\text{card}(d))$

из теоремы

$\forall_{AB}(\text{семействомножеств}(A)\ \&\ \text{конечное}(\text{Dom}(A))\ \&\ \forall_x(x \in \text{Val}(A) \to \text{конечное}(x)) \to \text{card}(\text{set}_f(f - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(f) = \text{Dom}(A)\ \&\ \forall_x(x \in \text{Dom}(A) \to f(x) \in A(x)))) = \prod_{i, i\in \text{ Dom}A} \text{card}A(i))$

2. Переход от параметрического описания класса к конечному списку. Теорема - тождество $A = B$, исключающее описатели либо приводящее к более простым описателям. Внутри A выделяется подтерм T вида "$\text{set}_x(\exists_y(y \in a\ \&\ x = t))$". Переменная a не имеет других вхождений в T и свободна в A. Выбираются новые переменные i, n. Определяется результат t_1 замены в t переменной y на $a(i)$. Определяется результат A_1 замены в A подтерма T на $\{\lambda_i(t_1, i \in \{1, \ldots, n\})\}$ и одновременной подстановки вместо прочих вхождений переменной a выражения Q вида $\{\lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\})\}$. Определяется результат B_1 подстановки в B выражения Q вместо a, и консеквентом становится "$A_1 = B_1$". К антецедентам применяется подстановка Q вместо a, после чего к ним добавляются утверждения "слово(a)", "$l(a) = n$". Антецеденты упрощаются. (Прием описатель - 63).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{afn}(a{-}\text{слово}\ \&\ l(a) = n\ \&\ f{-}\text{функция}\ \&\ \{;\lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\})\} \subseteq \text{Dom}(f) \to \text{образ}(f, \{;\lambda_i(a(i), i \in \{1, \ldots, n\})\}) = \{;\lambda_i(f(a(i)), i \in \{1, \ldots, n\})\})$

из теоремы

$\forall_{fa}(a - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f) \to \text{set}_x(\exists_y(y \in a\ \&\ x = f(y))) = \text{образ}(f, a))$

Уравнение для координат множества объектов позволяет получить теорему, усматривающую тип множества по его уравнению

1. Вывод теоремы, усматривающей тип множества точек по уравнению для его координат. Консеквент имеет вид "$\text{коорд}(A, K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(B)$". Составляется список $B_1, \ldots, B_n$ всех невырожденных числовых атомов, входящих в B. Проверяется, что их параметры отличны от $x_1, \ldots, x_k$. Если список $B_1, \ldots, B_n$ непуст, выбираются новые переменные $b_1, \ldots, b_k$, и в правой части консеквента выражения B_i заменяются на b_i. К антецедентам при этом добавляются равенства "$B_i = b_i$". Выбирается новая переменная X. К антецедентам добавляется равенство выражения "$\text{коорд}(X, K)$" преобразованной правой части консеквента. Консеквентом становится равенство "$X = A$". Результат упрощается. (Прием уравнмножество - 10).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdeABK}(\neg(A = B)$ & коорд$(e, K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + t(c - a)$ &
$y = b + t(d - b)$ & $t -$ число)) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (c, d)$ &
$A -$ точка & $B -$ точка & систкоорд$(K) = e =$ прямая$(AB))$

из теоремы

$\forall_{ABKabcd}(A -$ точка & $B -$ точка & систкоорд(K) & коорд$(A, K) = (a, b)$ &
коорд$(B, K) = (c, d)$ & $\neg(A = B) \rightarrow$ коорд(прямая$(AB), K) =$
$\text{set}_{xy}(\exists_t(t -$ число & $x = (c - a)t + a$ & $y = (d - b)t + b)))$

Вывод условий на мощность класса

1. Вывод условия численного значения мощности множества. Консеквент имеет вид "card$(\text{set}_x(x \in t$ & $A)) = B$". Выражение B неконстантное. Выражение t не содержит переменной x и не константное. Конечность класса из антецедентов не усматривается. Тогда к антецедентам добавляется утверждение "конечное(t)", а консеквентом становится утверждение "число(B)". (Прием описатель - 98).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aG}(a \in$ вершины(G) & конечное(ребра$(G))$ & граф$(G) \rightarrow$
   степеньвершины$(a, G) -$ число$)$

   из теоремы

   $\forall_{aG}($граф(G) & $a \in$ вершины$(G) \rightarrow$ степеньвершины$(a, G) =$
   card$(\text{set}_x(x \in$ ребра(G) & конецребра$(a, x, G))))$

2. Попытка суммирования мощностей с перестановкой индексов. Консеквент имеет вид "card$(\text{set}_x(x \in t$ & $A)) = B$". Переменная x не входит в t. В утверждении A встречается отличная от x переменная y, для которой имеется антецедент "$y \in s$". В прочих антецедентах y не встречается. Выражение "$\sum_{x,x \in t}$ card(
   $\text{set}_y(y \in s$ & $A))$" упрощается и становится выражением r, не содержащим связанных переменных. Консеквент теоремы заменяется на равенство "$\sum_{y,y \in s} B =$
   r". Из антецедентов исключается утверждение "$y \in s$", и к ним добавляются утверждения "конечное(t)", "конечное(s)". Результат упрощается. (Прием описатель - 99).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_G($граф(G) & конечнграф$(G) \rightarrow \sum_{a,a \in \text{вершины}(G)}$ степеньвершины$(a, G) =$
   2card(ребра$(G)))$

   из теоремы

   $\forall_{aG}($граф(G) & $a \in$ вершины$(G) \rightarrow$ степеньвершины$(a, G) =$
   card$(\text{set}_x(x \in$ ребра(G) & конецребра$(a, x, G))))$

Ослабление условия под описателем "класс" и вывод тождества для разности нового и старого классов

1. Рассмотрение класса, получаемого ослаблением одного из конъюнктивных членов его описания. Теорема - определение выражения A посредством равенства "$A = \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(P(t_1, t_2)\ \&\ B)$". Находится ослабленная версия Q двуместного отношения P. Выражения "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(Q(t_1, t_2)\ \&\ B)$" и "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(Q(t_1, t_2)\ \&\ \neg(P(t_1, t_2))\ \&\ B)$" упрощаются и становятся выражениями C, D, не содержащими связанных переменных. Консеквент теоремы заменяется на "$D = C \setminus A$". Результат упрощается. (Прием описатель - 93).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abn}(b - \text{число}\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ \text{числнабор}(a, n) \to \text{евклсфера}(a, b) = \text{замкншар}(a, b) \setminus \text{евклокр}(a, b))$

   из теоремы

   $\forall_{abn}(n - \text{натуральное}\ \&\ \text{числнабор}(a, n)\ \&\ b - \text{число} \to \text{евклокр}(a, b) = \text{set}_x(\text{числнабор}(x, n)\ \&\ \text{евклрасст}(x, a) < b))$

Вывод условий включения либо непересечения с классом

1. Вывод из равенства класса эквивалентности для включения. Консеквент имеет вид "$\text{set}_x(\forall_{y_1 \ldots y_k}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n \to A_0)\ \&\ B) = C$". Утверждение B не имеет связанных переменных. Выбирается новая переменная a, и утверждение "$\forall_x(x \in a \to B)$" упрощается до утверждения D, не содержащего связанных переменных. Посылками служат антецеденты и утверждение "$a - \text{set}$". Консеквентом становится эквивалентность "$\forall_{y_1 \ldots y_k x}(x \in a\ \&\ A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n \to A_0) \leftrightarrow a \subseteq C$". К антецедентам добавляются утверждения "$a - \text{set}$" и D. Результат упрощается. (Прием описатель - 96).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall abcn(c - \text{set}\ \&\ c \subseteq \mathbb{R}^n\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ \text{числнабор}(a, n)\ \&\ \text{числнабор}(b, n) \to \forall_{ix}(i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ x \in c \to |x(i) - a(i)| < b(i)) \leftrightarrow c \subseteq \text{евклпрямокр}(a, b))$

   из теоремы

   $\forall_{abn}(n - \text{натуральное}\ \&\ \text{числнабор}(a, n)\ \&\ \text{числнабор}(b, n) \to \text{set}_x(\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to |x(i) - a(i)| < b(i))\ \&\ \text{числнабор}(x, n)) = \text{евклпрямокр}(a, b))$

2. Вывод условия включения в определяемый класс. Теорема - определение множества A посредством равенства "$A = \text{set}_x(B)$", где утверждение B не содержит связанных переменных. Выбирается новая переменная a, консеквент заменяется на "$\forall_x(x \in a \to B) \leftrightarrow a \subseteq A$", а к антецедентам добавляется "$a - \text{set}$". Результат упрощается. (Прием описатель - 103).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aA}(a - \text{set}\ \&\ A - \text{set}\ \&\ A \subseteq \mathbb{R} \to \forall_x(x \in a \to \text{точкаприкосн}(x, A)) \leftrightarrow a \subseteq \text{замыкание}(A))$

   из теоремы

$\forall_A(A - \text{set}\ \&\ A \subseteq \mathbb{R} \to \text{замыкание}(A) = \text{set}_x(\text{точкаприкосн}(x, A)))$

Равенство двух описателей "класс"

1. Усмотрение взаимно однозначной параметризации для левой части. Теорема - тождество вида "$\text{set}_x(\exists_y(x = t\ \&\ A_1)) = \text{set}_x(\exists_y(x = t\ \&\ A_2))$", обеспечивающее сужение области варьирования параметра y в параметрическом задании класса. Выбирается новая переменная z, и при помощи задачи на доказательство устанавливается, что отрицание равенства выражения t результату замены в t переменной y на z - следствие антецедентов, утверждения A_2, результата замены в A_2 переменной y на z и утверждения "$\neg(y = z)$". Выражение "$\text{card}(\text{set}_y(A_2))$" упрощается и переходит в выражение R, не содержащее символа "мощность". Консеквентом новой теоремы становится равенство "$\text{card}(\text{set}_x(\exists_y(x = t\ \&\ A_1)) = R$". Антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием огрсвязок - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{agh}(a = \text{операция}(h)\ \&\ g \in \text{носитель}(h)\ \&\ \text{порядокэлемента}(g, h) - \text{натуральное}\ \&\ \text{группа}(h) \to \text{card}(\text{set}_b(\exists_m(b = \text{алгстепень}(g, a, m)\ \&\ m - \text{целое}\ \&\ 0 \leq m))) = \text{порядокэлемента}(g, h))$

   из теоремы

   $\forall_{agh}(a = \text{операция}(h)\ \&\ g \in \text{носитель}(h)\ \&\ \text{порядокэлемента}(g, h) - \text{натуральное}\ \&\ \text{группа}(h) \to \text{set}_b(\exists_m(b = \text{алгстепень}(g, a, m)\ \&\ m - \text{целое}\ \&\ 0 \leq m)) = \text{set}_b(\exists_m(b = \text{алгстепень}(g, a, m)\ \&\ m \in \{0, \ldots, \text{порядокэлемента}(g, h) - 1\})))$

2. Усмотрение взаимно однозначной параметризации для правой части. Действия приема, вплоть до формирования новой теоремы, такие же, как в предыдущем пункте. Однако, консеквентом новой теоремы становится равенство "$\text{card}(\text{set}_x(\exists_y(x = t\ \&\ A_2))) = R$". Антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием огрсвязок - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{agh}(a = \text{операция}(h)\ \&\ g \in \text{носитель}(h)\ \&\ \text{порядокэлемента}(g, h) - \text{натуральное}\ \&\ \text{группа}(h) \to \text{card}(\text{set}_b(\exists_m(b = \text{алгстепень}(g, a, m)\ \&\ m - \text{целое}\ \&\ m \leq \text{порядокэлемента}(g, h) - 1\ \&\ 0 \leq m))) = \text{порядокэлемента}(g, h))$

   из теоремы

   $\forall_{agh}(a = \text{операция}(h)\ \&\ g \in \text{носитель}(h)\ \&\ \text{порядокэлемента}(g, h) - \text{натуральное}\ \&\ \text{группа}(h) \to \text{set}_b(\exists_m(b = \text{алгстепень}(g, a, m)\ \&\ m - \text{целое}\ \&\ 0 \leq m)) = \text{set}_b(\exists_m(b = \text{алгстепень}(g, a, m)\ \&\ m \in \{0, \ldots, \text{порядокэлемента}(g, h) - 1\})))$

1.20 Следствия тождества с описателем "отображение"

Занесение внешних операндов конечной операции внутрь этой операции

1. Занесение дополнительного операнда под сокращенную запись серийной операции. Теорема - определение выражения A посредством равенства "$A = F(\lambda_i(t, i-$ целое $\&\ p \leq i\ \&\ i \leq n))$". Здесь F - обобщение двуместной ассоциативной и коммутативной операции f на наборы произвольной длины, n - переменная, имеющая единственное вхождение в определяющей части, p - некоторое выражение, не содержащее i. Определяются результат t_1 подстановки в t выражения $n+1$ вместо переменной i и результат A_1 подстановки в A этого же выражения вместо переменной n. Консеквентом становится равенство "$A_1 = f(A, t_1)$". Проверяется, что при замене в каждом содержащем n антецеденте переменной n на $n+1$ получается утверждение, являющееся следствием всего списка антецедентов. Новая теорема упрощается. (Прием определение - 83).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_n(n -$ целое $\&\ 0 \leq n \to (n+1)! = (n+1)n!)$

   из теоремы

   $\forall_n(n -$ целое $\&\ 0 \leq n \to n! = \prod_{i=1}^{n} i)$

2. Вывод тождества для частичной разгруппировки серийной операции. Теорема - определение выражения A посредством равенства "$A = F(\lambda_i(t, i -$ целое $\&\ p \leq i\ \&\ i \leq n))$". Здесь F - обобщение двуместной ассоциативной и коммутативной операции f на наборы произвольной длины, n - переменная, имеющая единственное вхождение в определяющей части, p - константное выражение. Единственный параметр определяющей части - переменная n. Рассматривается двойник исходной теоремы, полученный из нее заменой всех переменных на новые переменные. Его консеквент - "$A_1 = F(\lambda_j(t_1, j -$ целое $\&\ p \leq j\ \&\ j \leq m))$". Создается новая теорема, консеквентом которой служит равенство "$A_1 = f(A, F(\lambda_i(t, i -$ целое $\&\ n+1 \leq i\ \&\ i \leq m))$". Антецеденты - объединение антецедентов исходной теоремы и ее двойника, к которым добавлены утверждения "$k = m - n, 0 < k$, где k - новая переменная. (Прием определение - 85).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcn}(n -$ целое $\&\ 0 \leq n\ \&\ b -$ целое $\&\ c = b - n\ \&\ 0 < c \to b! = n! \prod_{i=n+1}^{b} i)$

   из теоремы

   $\forall_n(n -$ целое $\&\ 0 \leq n \to n! = \prod_{i=1}^{n} i)$

Определение значения функции, заданной через описатель "отображение"

1. Значение функции, заданной через описатель "отображение". Теорема - определение функции F посредством равенства "$F = \lambda_x(t, A)$". Консеквентом становится равенство "$F(x) = t$", а к антецедентам добавляются конъюнктивные члены утверждения A. Антецеденты упрощаются. (Прием определение - 10).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{axB}(B - \text{set} \ \& \ x \in B \to \text{конст}(B, a)(x) = a)$

из теоремы

$\forall_{aB}(B - \text{set} \to \text{конст}(B, a) = \lambda_x(a, x \in B))$

Расшифровка отношения для функции, заданной через описатель "отображение"

1. Вывод эквивалентности расшифровки равенства для функции, определенной через описатель "отображение". Теорема - определение функции F посредством равенства "$F = \lambda_{x_1 \ldots x_k}(t, A)$". Выбирается новая переменная f, и консеквент заменяется на эквивалентность "$(F = f) \leftrightarrow f - $ функция & $\text{Dom}(f) = \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A)$ & $\forall_{x_1 \ldots x_k}(A \to f(x_1 \ldots x_k) = t)$". Новая теорема упрощается. Проверяется, что после этого ее консеквент не содержит связанных переменных. (Прием определение - 23).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abB}(B - \text{set} \to b = \text{конст}(B, a) \leftrightarrow \text{Dom}(b) = B \ \& \ B \subseteq \text{слой}(b, a) \ \& \ b - \text{функция})$

   из теоремы

   $\forall_{aB}(B - \text{set} \to \text{конст}(B, a) = \lambda_x(a, x \in B))$

Варьирование области определения функции, заданной описателем "отображение"

1. Отождествление области определения описателя "отображение" с областью определения его функциональной переменной. Теорема - тождество, выносящее наружу операцию над семейством из-под сложного понятия. В заменяемой части встречается подвыражение вида "$\lambda_x(f(x), x \in y)$", где y, f - переменные. Это подвыражение заменяется на f, а к антецедентам добавляется равенство "$y = \text{Dom}(f)$". Результат упрощается. (Прием развязка - 19).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{AC}(\neg(\text{Dom}(A) = \emptyset) \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ A - \text{функция} \ \&$
   $\text{конечное}(\text{Dom}(A)) \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \& \ \text{незавсобытия}(A, C) \to$
   $\text{вероятность}(\bigcap(A), C) = \prod_{y, y \in \text{Dom}(A)} \text{вероятность}(A(y), C))$

   из теоремы

   $\forall_{xAC}(\neg(x = \emptyset) \ \& \ x - \text{set} \ \& \ x \subseteq \text{Dom}(A) \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \&$
   $A - \text{функция} \ \& \ \text{конечное}(x) \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \& \ \text{незавсобытия}(A, C) \to$
   $\text{вероятность}(\bigcap_{y, y \in x} A(y), C) = \prod_{y, y \in x} \text{вероятность}(A(y), C))$

2. Переход от произвольного конечного семейства к слову. Теорема - тождество, выносящее наружу операцию над семейством из-под сложного понятия. В консеквенте встречается подвыражение вида "$\lambda_x(t, x \in \mathrm{Dom}(f))$", причем внутри t встречается подвыражение вида "$f(\ldots)$". Имеется антецедент "конечное($\mathrm{Dom}(f)$)". Выбирается новая переменная n, и подтерм "$x \in \mathrm{Dom}(f)$" заменяется в консеквенте на "x – целое & $1 \leq x$ & $x \leq n$". К антецедентам добавляются утверждения "n – натуральное", "$\mathrm{Dom}(f) = \{1, \ldots, n\}$". Результат упрощается. Он снабжается единственной характеристикой, указывающей, что создан для приема вынесения операции над конечным семейством из-под сложного понятия и развертки ее. (Прием развязка - 20).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aAC}(\mathrm{Dom}(A) = \{1, \ldots, a\}$ & & $\mathrm{Val}(A) \subseteq$ события(C) & $A -$ функция & $a -$ натуральное & верпространство(C) & незавсобытия$(A, C) \to$ вероятность$(\bigcap(A), C) = \prod_{y=1}^{a}$ вероятность$(A(y), C))$

   из теоремы

   $\forall_{AC}(\neg(\mathrm{Dom}(A) = \emptyset)$ & $\mathrm{Val}(A) \subseteq$ события(C) & $A -$ функция & конечное($\mathrm{Dom}(A)$) & верпространство(C) & незавсобытия$(A, C) \to$ вероятность$(\bigcap(A), C) = \prod_{y, y \in \mathrm{Dom}(A)}$ вероятность$(A(y), C))$

3. Сужение функции, заданной через описатель "отображение". Теорема - определение функции F посредством равенства "$F = \lambda_x(t, x \in a)$", где a - переменная, не входящая в t. Выбирается новая переменная b, и консеквентом становится равенство "сужение$(F, b) = F_1$", где F_1 - результат подстановки в A выражения "$a \cap b$" вместо a. К антецедентам добавляются результаты такой же примененной к ним подстановки, а также утверждение "$b -$ set". Результат упрощается. (Прием определение - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abAB}(b-$set & $A-$set & $B-$set & $B \subseteq b$ & $B \subseteq A \to$ сужение(индикатор(A, B, a), $b)$ = индикатор$(b \cap A, B, a))$

   из теоремы

   $\forall_{ABa}(A -$ set & $B -$ set & $B \subseteq A \to$ индикатор$(A, B, a) = \lambda_x((a$ при $x \in B,$ иначе $0),\ x \in A))$

Рассмотрение константной функции под описателем "отображение"

1. Исключение конечной суммы для числового атома в предположении одинаковости слагаемых. Консеквент имеет вид "$A = B$", где A - невырожденный числовой атом, а выражение B содержит подвыражение "$\sum_{(x_1, \ldots, x_k), C} t$", где t - невырожденный числовой атом. Выражение "$\mathrm{set}_{x_1 \ldots x_k} C$" упрощается и становится элементарным выражением r. Выбираются новые переменные a, b. К антецедентам добавляются утверждения "$a-$число", "$b-$число", "$\mathrm{card}(r) = a$", "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(C \to t = b)$". Консеквентом становится равенство атома A результату замены в B подтерма "$\sum(\ldots)$" на произведение ab. Антецеденты упрощаются. (Прием числзнач - 21).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcde}(d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ \text{разбиение}(b,c)\ \&\ \text{конечное}(c)\ \&$
$\text{классмножеств}(c)\ \&\ \text{card}(c) = d\ \&\ \forall_a(a \in c \to e = \text{card}(a)) \to \text{card}(b) = de)$

из теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(c)\ \&\ \text{разбиение}(b,c)\ \&\ \text{конечные}(c)\ \&\ \text{классмножеств}(c) \to$
$\text{card}(b) = \sum_{a,a\in c} \text{card}(a))$

1.21 Свойства операции, заданной косвенным определением

1. Извлечение из косвенного определения операции через совокупность условий на ее значение простейших следствий. Теорема - тождества $t = a$, определяющее некоторую операцию t через вспомогательную переменную a, входящую в антецеденты и не входящую в t. Для любых значений переменных определяемой части, удовлетворяющих всем содержащим только такие переменные антецедентам, существует подходящее значение переменной a. Список антецедентов разбивается на подсписок всех утверждений, содержащих a, и подсписок S_2 остальных утверждений. В S_1 выбирается произвольное утверждение и находится результат A подстановки в него t вместо a. Новая теорема имеет антецеденты S_2 и консеквент A. (Прием определение - 179).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to [a] - \text{целое})$

   из теоремы

   $\forall_{an}(a - \text{число}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ n \le a\ \&\ a < n + 1 \to [a] = n)$

1.22 Замена переменной в теореме

Подвыражение консеквента обозначается новой переменной

1. Попытка ввести параметр для самого сложного подвыражения консеквента. Консеквент теоремы - квантор существования "$\exists_{x_1\ldots x_k}(A)$". Выбирается параметр консеквента a, имеющий в этом консеквенте единственное вхождение. Это вхождение расположено внутри выражения t, сложность которого равна сложности всего консеквента, а единственным параметром служит a. Выражение t не продолжается до большего выражения с теми же свойствами. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих a, и подсписок S_2 остальных утверждений. В утверждениях списка S_1 находятся все максимальные относительно переходов к надтермам подвыражения $s_1, \ldots, s_n$, имеющие единственный параметр a и отличные от a. Выбираются новые переменные $b, b_1, \ldots, b_n$. В утверждениях S_1 предпринимается замена найденных s_i на b_i. Полученный список подразбивается на подсписок S_3 утверждений, содержащих a, и подсписок S_4 остальных утверждений. Решается задача на описание с условиями S_3, $s_1 = b_1, \ldots, s_n = b_n, t = b$ и посылками S_2, S_4. Единственная

несущественная неизвестная - a. При решении этой задачи можно использовать приемы, основанные на уже имеющихся в списке вывода теоремах. Ответ B не содержит переменной a. Создается импликация, консеквентом которой служит результат замены t на b в консеквенте исходной теоремы, а антецеденты суть S_2, S_4, B. Она упрощается. (Прием допконтекст - 21).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ 0 \le b\ \&\ 0 \le \text{card}(a) - b\ \&\ \text{конечное}(a) \to$
$\exists_c(\text{card}(c) = b\ \&\ c - \text{set}\ \&\ c \subseteq a))$

из теоремы

$\forall_{bf}(\text{взаимнооднозначно}(f)\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ f - \text{слово}\ \&\ 0 \le b\ \&\ 0 \le l(f) - b \to$
$\exists_c(\text{card}(c) = b\ \&\ c - \text{set}\ \&\ c \subseteq \text{Val}(f)))$

2. Попытка обозначить вспомогательной переменной неоднобуквенный операнд самого сложного подтерма консеквента. Консеквент теоремы имеет вид "$\exists_x(A_1$ & ... & $A_n)$". Самое сложное подвыражение утверждений $A_1, \ldots, A_n$ имеет вид "$f(t_1, \ldots, t_m)$", $m > 1$. Некоторое t_i имеет единственное вхождение переменной x, прчием оценка его сложности больше 4. Рассматривается A_j, содержащее t_i. Выбирается новая переменная a, и решается задача на описание с условиями $A_1, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots, A_n, t_i = a, T(a)$, где T - тип значений выражения t_i. Посылками служат антецеденты теоремы, единственная несущественная неизвестная - x. Ответ B не содержит x. Создается импликация с консеквентом $\exists_a(B\ \&\ C)$, где C - результат замены в A_j подвыражения t_i на a. (Прием допконтекст - 20).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bf}(\text{взаимнооднозначно}(f)\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ f - \text{слово}\ \&\ 0 \le b\ \&\ 0 \le l(f) - b \to$
$\exists_c(\text{card}(c) = b\ \&\ c - \text{set}\ \&\ c \subseteq \text{Val}(f)))$

из теоремы

$\forall_{bfn}(b - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ b \le n\ \&\ 0 \le b\ \&\ \text{Dom}(f) = \{1, \ldots, n\}\ \&$
$f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \to \exists_a(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \{1, \ldots, n\}\ \&$
$\text{card}(\text{образ}(f, a)) = b))$

3. Перестановка местами двух преобразований в тождестве для обратной операции. Консеквент теоремы имеет вид "$f(\ldots t \ldots) = x$", причем x - переменная, имеющая единственное вхождение в левую часть - именно, в операнд t. Заголовок левой части - не символ "вариант". Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выбираются новые переменные y, z. Определяются результаты t_1, t_2 замены в t переменной x, соответственно, на z и на $f(\ldots y \ldots)$. Утверждение "$\exists_z(y = t_1\ \&\ S_3)$" упрощается относительно S_2 и превращается в элементарное утверждение A. Здесь S_3 - результаты замены переменной x на z в утверждениях списка S_1. Консеквентом новой теоремы становится равенство $t_2 = y$, а к антецедентам добавляется A, после чего к ним же применяется подстановка $f(\ldots y \ldots)$ вместо x. Результат упрощается. (Прием нормализация - 85).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{af}(a \in \mathrm{Val}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \to$
$f(\text{обрфункция}(f)(a)) = a)$

из теоремы

$\forall_{fx}(x \in \mathrm{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \to$
$\text{обрфункция}(f)(f(x)) = x)$

4. Попытка ввести новую переменную, обозначающую подвыражение с бесповторной переменной. Теорема - тождество общей стандартизации. В заменяемой части выделяется подвыражение "$f(\ldots x \ldots)$", где x - переменная, имеющая единственное вхождение в заменяемой части, причем все переменные указанного подвыражения свободны в этой части. f отлично от символов "префикс", "суффикс", "набор". Это подвыражение не является операндом другого подвыражения с тем же типом значений. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выбирается новая переменная y, после чего решается завдача на описание с условиями $S_1, f(\ldots x \ldots) = y$ и посылками S_2. Неизвестная - x. Полученный ответ A имеет конъюнктивный член вида $x = t$. Этот ответ добавляется к антецедентам, результат упрощается. (Прием нормализация - 138).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abdfA}(A - \text{set}\ \&\ b \in A\ \&\ a - \text{натуральное}\ \&\ d - \text{натуральное}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&$
   $1 \le a - d\ \&\ \text{обратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, A) \to f(\text{алгстепень}(b, f, a),$
   $\text{алгстепень}(b, f, -d)) = \text{алгстепень}(b, f, a - d))$

   из теоремы

   $\forall_{bcdfA}(A - \text{set}\ \&\ b \in A\ \&\ c - \text{натуральное}\ \&\ d - \text{натуральное}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&$
   $\text{обратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, A) \to f(\text{алгстепень}(b, f, c + d), \text{алгстепень}(b,$
   $f, -d)) = \text{алгстепень}(b, f, c))$

5. Попытка обозначить вспомогательной переменной подвыражение консеквента и разрешить его относительно старого параметра. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема проверочного оператора. Заголовок P консеквента отлчен от символа "не". Имеется единственный антецедент с заголовком P, причем консеквент получается из него заменой вхождения некоторой переменной x на выражение t, содержащее x. Консеквент имеет единственную переменную y, отличную от x. Эта переменная имеет в консеквенте единственное вхождение - операнд некоторого подвыражения $f(\ldots y \ldots)$, содержащего более одной переменной. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих y, и подсписок S_2 остальных утверждений. Утверждения S_1 не имеют переменных, отличных от y. Выбирается новая переменная z. Утверждение "$\exists_y(S_1\ \&\ z = f(\ldots y \ldots))$" упрощается относительно посылок $S_2, T(z)$, где T - тип значений выражения с заголовком f. Результат A не имеет связанных переменных. Он преобразуется к виду д.н.ф., после чего выбирается произвольный дизъюнктивный член A_1. В консеквенте подвыражение $f(\ldots y \ldots)$ заменяется на z, антецедентами становятся $S_2, T(z), A_1$. Результат упрощается. (Прием легковидеть - 32).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ace}$(Вектор(a) & Вектор(c) & однонаправлены(a, c) & влево(c, e) & Трехмерн$(e) \to$ влево(a, e))

из теоремы

$\forall_{bce}(0 < b$ & $b -$ число & Вектор(c) & Трехмерн(e) & влево$(c, e) \to$ влево$(bc, e))$

6. Попытка замены бесповторной переменной заменяемой части. Теорема - тождество $A = B$, причем оценка сложности выражения B меньше, чем у A. Переменная x входит в A и не входит в B. Ее вхождение в A единственное, причем нет антецедента, содержащего x и какую-либо другую переменную. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Внутри A выделяется подвыражение $f(\ldots x \ldots)$. Выбирается новая переменная y, и утверждение "$\exists_x(S_1$ & $y = f(\ldots x \ldots))$" упрощается относительно посылок S_2. Результат C не имеет связанных переменных, не содержит символа "или", и среди его конъюнктивных членов нет равенства. Консеквентом становится равенство результата замены в A подвыражения $f(\ldots x \ldots)$ на y выражению B. Антецедентами становятся утверждения S_2 и C. Новая теорема упрощается. (Прием упрощение - 29).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abdef}(a =$ операция(e) & алгстепень$(b, a, d) =$ единица(a) & $b \in$ носитель(e) & $d-$ натуральное & $f -$ натуральное & $d \mid f$ & группа$(e) \to$ алгстепень$(b, a, f) =$ единица$(a))$

   из теоремы

   $\forall_{abcde}(a =$ операция(e) & алгстепень$(b, a, d) =$ единица(a) & $b \in$ носитель(e) & $c-$ натуральное & $d-$натуральное & группа$(e) \to$ алгстепень$(b, a, cd) =$ единица$(a))$

7. Попытка замены с простым разрешением относительно заменяемой переменной. Теорема - кванторная импликация с консеквентом вида "$P(\lambda_x(A_2, A_1), B_1)$", определяющим характеристику B_1 функции, заданной описателем "отображение". Внутри A_2 имеется единственное вхождение подвыражения вида "$f(t)$", где t содержит x. Имеется антецедент с заголовком P, содержащий переменную f. Выбирается новая переменная g, равенство "$g = \lambda_x(A_2, A_1)$" разрешается относительно f, выражение для f подставляется в антецеденты, а консеквент приобретает вид "$P(g, B_1)$". Результат упрощается. (Прием функперех - 29).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acg}(\neg(g-1 = 0)$ & $0 < g$ & $g-$число & первообразная$(\lambda_x(b(g^x)g^x, x-$число$), c) \to$ первообразная$(b, \lambda_d(c(\log_g d) \ln g, d -$ число$)))$

   из теоремы

   $\forall_{acg}(\neg(g - 1 = 0)$ & $0 < g$ & $g -$ число & первообразная$(a, c) \to$ первообразная$(\lambda_x(a(\log_g x)/x, x -$ число$), \lambda_d(c(\log_g d) \ln g, d -$ число$)))$

Варьирование переменной с помощью операции типа "отрицание"

1. Попытки варьирования отрицаний в тождестве бесповторного типа для получения тождества общей стандартизации. Теорема - тождество общей стандартизации $A = B$, причем обе части бесповторны и имеют одни и те же параметры. Их число равно 2. Если какая-либо переменная x встречается в A только в виде $f(x)$, причем $f(f(x))$ тождественно равно x, то выбирается новая переменная y, и в теореме предпринимается замена $f(x)$ на y. Проверяется, что после этого направление стандартизации меняется на обратное. (Прием нормализация - 47).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{число } \& \text{ Вектор}(a) \to -(-b)a = ba)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{число } \& \text{ Вектор}(a) \to (-b)a = -ba)$

   Здесь минус обозначает векторную операцию "минусвект", умножение - умножение вектора на число "умножвект".

2. Попытки варьирования отрицаний в тождестве бесповторного типа для получения тождества общей стандартизации. Теорема - тождество свертки, причем обе части бесповторны и имеют одни и те же параметры. Если какая-либо переменная x встречается в части A тождества только в виде $f(x)$, причем $f(f(x))$ тождественно равно x, то выбирается новая переменная y, и в теореме предпринимается замена $f(x)$ на y. Полученная теорема характеризуется как тождество общей стандартизации, причем заменяющая часть - преобразованная часть A. Прием рассматривает также случай, когда исходное тождество имеет вид $f(B) = C$. Тогда рассматривается результат замены его на $B = f(C)$, и если такой результат - тождество общей стандартизации в направлении к B, то он регистрируется в списке вывода. (Прием свертка - 52).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ \neg(b = 0) \to 1/b^{-a} = b^a)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ \neg(b = 0) \to b^{-a} = 1/b^a)$

3. Попытка усмотрения самодвойственного перехода от антецедента к консеквенту. Теорема - простая импликация, позволяющая создать прием проверочного оператора. Заголовок P консеквента A отличен от символа "не" и совпадает с заголовком некоторого антецедента B, не используемого для сопровождения по о.д.з. и содержащего все переменные теоремы. При этом A получается из B заменой единственного вхождения переменной x на некоторое выражение t, содержащее x. Связанные переменные выражения t переобозначаются на новые переменные. Из антецедентов удаляется B и проверяется, что результаты подстановки в них t вместо x являются следствиями их самих. Проверяется также, что после подстановки в A выражения t вместо x и упрощения получается утверждение B. Тогда консеквент заменяется на эквивалентность $A \leftrightarrow B$.

К антецедентам добавляются утверждения, необходимые для сопровождения A по о.д.з. (Прием спуск - 47).

Пример: вывод теоремы

$\forall_b(b - \text{число} \to (-b) - \text{rational} \leftrightarrow b - \text{rational})$

из теоремы

$\forall_b(b - \text{rational} \to (-b) - \text{rational})$

Замена варьируемой переменной описателя

1. Попытка замены варьируемой переменной в операции над конечным семейством. Теорема - тождество для перехода к более простым описателям либо для исключения описателей. Заменяемая часть имеет вид "$F(\lambda_{x_1 \ldots x_k}(B, A))$". Внутри B выделяется вхождение подтерма вида "$G(\lambda_y(D, C))$", где G - обобщение ассоциативно- коммутативной операции на наборы произвольной длины. Внутри D находится подвыражение t, имеющее единственное вхождение переменной y и содержащее параметр списка $x_1, \ldots, x_k$. Выбирается новая переменная z, и решается задача на описание с условиями $C, t = z$. Посылками служат антецеденты теоремы и утверждение A. Неизвестная - y. Проверяется, что ответ имеет вид "$y = s$ & E". Определяется результат D_1 подстановки в D выражения s вместо y. Затем в консеквенте теоремы предпринимается замена подтерма "$G(\lambda_y(D, C))$" на "$G(\lambda_z(D_1, E))$". Результат упрощается. (Прием описатель - 76).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{nA}(\text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \to \det(A) =$
   $\sum_{p,\text{перестановка}(p,\{1,\ldots,n\})}((-1)^{\text{четность}(p)} \prod_{a=1}^{n} A(p(a), a)))$

   из теоремы

   $\forall_{An}(n - \text{натуральное}$ & $\text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \to \det(A) =$
   $\sum_{p,\text{перестановка}(p,\{1,\ldots,n\})}((-1)^{\text{четность}(p)} \prod_{i=1}^{n} A(i, p(i))))$

2. Попытка замены варьируемой переменной при вычислении операции над конечным семейством. Теорема - тождество "$F(\lambda_x(T, A)) = B$", исключающее описатель "отображение". F - обобщение некоторой ассоциативной и коммутативной двуместной операции на наборы произвольной длины. Утверждение A имеет единственный конъюнктивный член A_1, не являющийся указателем типа и содержащий x. Его заголовок - символ некоторого отношения P. Находится кванторная импликация с бесповторным консеквентом A_2, имеющим заголовок P. Ее переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Некоторая подстановка S переводит A_1 в A_2, причем переменная x переводится в неоднобуквенное выражение t. Некоторый параметр y выражения t входит в единственный антецедент A_3 дополнительной теоремы, заголовок которого тоже равен P. A_1 переводится в A_3 подстановкой, отличающейся от S только тем, что вместо x подставляется y. При помощи задачи на описание равенство $x = t$ разрешается относительно y. Ответ имеет вид $y = T$ & C. Таким образом, устанавливается, что если варьировать параметр y соответствии с условием на

него, накладываемым антецедентом A_3, то t будет пробегать все значения x, удовлетворяющие A. Поэтому в левой части исходной теоремы описатель заменяется на "$\lambda_y(T_1, A_3)$", где T_1 получено из T подстановкой t вместо x. Левая часть упрощается, и некоторый ее подтерм, имеющий вид "$F(\lambda(\ldots))$", сворачивается в элементарное утверждение при помощи исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием описатель - 73).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bdA}(\text{перестановка}(b, \{1, \ldots, d\}\ \&\ \text{матр}(A, \mathbb{R}, d, d) \to \det)A) =$
$(-1)^{\text{четность}(b)}\det(\lambda_{eg}(A(b(e), g), e \in \{1, \ldots, d\}\ \&\ g \in \{1, \ldots, d\}))$

из теоремы

$\forall_{An}(n - \text{натуральное}\ \&\ \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \to \det(A) =$
$\sum_{p,\text{перестановка}(p,\{1,\ldots,n\})}((-1)^{\text{четность}(p)} \prod_{i=1}^{n} A(i, p(i))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{fhn}(n{-}\text{целое}\ \&\ 0 \le n\ \&\ \text{перестановка}(f, \{1, \ldots, n\})\ \&\ \text{перестановка}(h, \{1, \ldots, n\})$
$\to\ \&\ \text{перестановка}(\text{произведение}(f, h), \{1, \ldots, n\}))$

Ввод степенного выражения

1. Ввод степенного выражения с натуральным показателем для самого сложного подтерма заменяемой части. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$, у которого левая часть имеет единственное подвыражение t максимальной сложности, причем оно встречается в контексте $f(\ldots t \ldots x \ldots)0$, где f - ассоциативная и коммутативная операция, x - переменная, не имеющая других вхождений в левую часть. Для операции f имеется некоммутативная операция g возведения в натуральную степень n. Предпринимается замена переменной x на $f(x, g(t, n-1))$. В результате подвыражение t приобретает вид $f(\ldots g(t, n) \ldots x \ldots)$. Результат упрощается. Теорема используется для приемов, понижающих на единицу степень самого сложного выражения t. (Прием нормализация - 102).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdef}(\neg(a = 0)\ \&\ \neg(d - 1 = 0)\ \&\ 0 < d\ \&\ 0 < e\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&$
   $c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{натуральное} \to$
   $d^{b+c(\log_d e)^f/a} = d^b e^{c(\log_d e)^{f-1}/a})$

   из теоремы

   $\forall_{abcde}(\neg(a = 0)\ \&\ \neg(d - 1 = 0)\ \&\ 0 < d\ \&\ 0 < e\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&$
   $c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \to d^{b+c\log_d e/a} = d^b e^{c/a})$

Перестановка местами двух взаимно обратных операций

1. К каждой части тождества $f(g(x)) = x$ применяется операция g, после чего терм $g(x)$ обозначается новой переменной y, и к антецедентам присоединяется условие представимости y в виде $f(x)$. (Прием нормализация - 85).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{af}(a \in \mathrm{Val}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow f(\text{обрфункция}(f)(a)) = a)$

из теоремы

$\forall_{fx}(x \in \mathrm{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \text{обрфункция}(f)(f(x)) = x)$

1.23 Ввод в антецедентах идентифицирующих равенств

Вынесение в антецеденты равенств для выражений с невырожденными числовыми атомами

1. Выражение невырожденного атома с помощью равенств в посылках, задающих значения других числовых атомов. Теорема - тождество, содержащее отдельные координаты объектов. Список S невырожденных числовых атомов консеквента, не имеющих связанных в этом консеквенте параметров, имеет не менее 2 элементов. Если какие-то два атома A_1, A_2 встречаются в консеквенте только в виде $A_1 - A_2$, а в антецедентах вообще не встречаются, то они заменяются в списке S на свою разность. Проверяется, что консеквент не является равенством двух элементов списка S. Для каждого элемента s_i списка S выбирается обозначающая его новая переменная x_i. Повсеместно в теореме происходит замена выражений s_i на x_i, а к антецедентам добавляются равенства $x_i = s_i$. (Прием нормкрд - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdABK}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\ \&\ l(AB) = a\ \&\ -\text{крд}(B,K,1) + \text{крд}(A,K,1) = b\ \&\ -\text{крд}(B,K,2) + \text{крд}(A,K,2) = c\ \&\ -\text{крд}(B,K,3) + \text{крд}(A,K,3) = d \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + d^2)$

   из теоремы

   $\forall_{ABK}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow l(AB)^2 = (-\text{крд}(B,K,1)+\text{крд}(A,K,1))^2+(-\text{крд}(B,K,2)+\text{крд}(A,K,2))^2+(-\text{крд}(B,K,3)+\text{крд}(A,K,3))^2)$

2. Идентификация невырожденного числового атома с помощью равенства в антецеденте. Теорема - простая импликация, позволяющая создать прием проверочного оператора. Консеквент имеет вид $P(\ldots t \ldots)$, где t - невырожденный числовой атом, встречающийся также в антецедентах. Выбирается новая переменная x, и во всей теореме предпринимается замена выражения t на x. Затем к антецедентам добавляется равенство $t = x$. (Прием спуск - 41).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(\mathrm{card}(b) = a\ \&\ b - \text{set}\ \&\ a - \text{число} \rightarrow a - \text{целое})$

из теоремы

$\forall_b(b - \text{set}\ \&\ \text{card}(b) - \text{число} \rightarrow \text{card}(b) - \text{целое})$

3. Выражение невырожденного атома с помощью равенств в посылках, задающих значения других числовых атомов. Консеквент имеет вид $t = A$, где t - невырожденный числовой атом, не входящий в A. Список S невырожденных числовых атомов выражения A, не имеющих связанных в A параметров, состоит из не менее чем 2 элементов.Если какие-то два атома t_1, t_2 стречаются в A только в виде $t_1 - t_2$, а в антецедентах вообще не встречаются, то они заменяются в списке S на свою разность. Для каждого элемента s_i списка S выбирается обозначающая его новая переменная x_i. Повсеместно в теореме происходит замена выражений s_i на x_i, а к антецедентам добавляются равенства $x_i = s_i$. (Прием числзнач - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(A = D)\ \&$
   $\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \text{разныестороны}(B, D, \text{прямая}(AC))\ \&$
   $\text{однасторона}(B, C, \text{прямая}(AD))\ \&\ \text{составнугол}(A, D, C, B)\ \&\ \angle(BAC) = a\ \&$
   $\angle(CAD) = b \rightarrow \angle(BAD) = a + b)$

   из теоремы

   $\forall_{abABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(A = D)\ \&$
   $\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \text{разныестороны}(B, D, \text{прямая}(AC))\ \&$
   $\text{однасторона}(B, C, \text{прямая}(AD))\ \&\ \text{составнугол}(A, D, C, B) \rightarrow$
   $\angle(BAD) = \angle(BAC) + \angle(CAD))$

   Напомним, что "составнугол(A, D, C, B)" представляет собой дополнительное ограничение на четыре точки A, D, C, B, необходимое для того, чтобы угол BAD был равен сумме углов CAD и BAC. Про эти точки уже известно, что D и B лежат по разные стороны от прямой AC, а точки B, C - по одну сторону от прямой AD. Дополнительное ограничение сводится к тому, что либо точка A не лежит на отрезке CD, либо точка B лежит на луче AC.

4. Вынесение в антецеденты определения числового атома заменяющего терма, чтобы получить декомпозирующее равенство. Консеквент имеет вид $t = A$, где t - невырожденный числовой атом, не входящий в A и содержащий все параметры антецедентов. Находятся все невырожденные числовые атомы $t_1, \ldots, t_k$ выражения A; $k > 1$. Каждая переменная выражения A встречается в нем только внутри какого-либо из этих атомов. Выбирается атом t_i, содержащий все параметры выражения A. Проверяется, что каждый атом $t_j, j \neq i$, не имеет повторных вхождений переменных, а все его переменные - собственное подмножество переменных атома t. Кроме того, в совокупности переменные атомов t_j составляют весь список переменных атома t. Тогда выбирается новая переменная x, в консеквенте все вхождения атома t_i заменяются на x, а к антецедентам добавляется утверждение $t_i = x$. (Прием числзнач - 27).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(a)\ \&\ \text{конечное}(b)\ \&\ \text{card}(a \cap b) = c \rightarrow$
   $\text{card}(a \cup b) = -c + \text{card}(a) + \text{card}(b))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(a)\ \&\ \text{конечное}(b) \to \text{card}(a \cup b) = -\text{card}(a \cap b) + \text{card}(a) + \text{card}(b))$

5. Использование соотношения со сложным числовым атомом для определения его значения через коэффициенты соотношения пропорциональности для двух других числовых атомов. Теорема - тождество, содержащее невырожденные числовые атомы. Число этих атомов не менее 2. Среди них имеется единственный числовой атом t максимальной сложности. В консеквенте имеется единственное подвыражение s аксимальной сложности, причем оно содержит t, и вне t в нем нет переменных. Сначала консеквент разрешается относительно s, затем - s относительно t. В результате получается выражение T для t, в котором усматривается отношение двух невырожденных числовых атомов A_1, A_2, быть может, в одинаковых степенях. К антецедентам добавляются равенства "$A_1 = a_p/b_q$", "$A_2 = c_p/d_q$", где a, b, c, d, p, q - новые переменные. Консеквентом становится равенство $t = T$, причем в правой части вместо A_1, A_2 подставлены их выражения через новые переменные и роизведено сокращение на p, q. (Прием числовойатом - 31).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefgABC}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC)\ \&\ l(BC) = a\ \&\ a = fc/(de)\ \&\ l(AC) = bc/(de) \to \angle(ABC) = \arcsin(bg/df))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \to l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$

6. Фиксация значения числового атома через непосредственно идентифицируемое равенство в антецедентах. Теорема - тождество, содержащее невырожденные числовые атомы, но не являющееся равенством двух таких атомов. Выбирается такой невырожденный числовой атом t консеквента, что количество атомов консеквента с тем же заголовком не более 3. Выбирается новая переменная x. К антецедентам добавляется $t = x$, а в консеквенте t заменяется на x. Теорема сопровождается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема, идентифицирующего "$t = x$" с равенством из посылок. Имеются сильные ограничения на предысторию теоремы в списке вывода. (Прием числовойатом - 39).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \angle(BAC) = a \to \sin al(AC) = \sin\angle(ABC)l(BC))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C) \to \sin\angle(BAC)l(AC) = \sin\angle(ABC)l(BC))$

7. Выражение одного числового атома с помощью посылки, дающей явное значение другого. Теорема - тождество, содержащее невырожденные числовые атомы, но не являющееся равенством двух таких атомов. Консеквент содержит ровно два числовых атома A, B, причем оба они невырожденные и имеют ровно одно вхождение в консеквент. Типы значений их первых операндов различны. Выбираются новые переменные a, x, и решается задача на описание с единственным условием $B = x$. Посылки - антецеденты теоремы, ее консеквент и равенство $A = a$. Неизвестная задачи - x, единственный известный параметр - a. Ответом служит некоторое равенство $x = C$. Консеквентом становится равенство $B = C$, к антецедентам добавляются равенство $A = a$ и все необходимые для сопровождения консеквента по о.д.з. утверждения. (Прием числовойатом - 55).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abd}(a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ l(ab) = d\ \&\ d - \text{число} \rightarrow$
   $\text{скалумнож}(\text{вектор}(ba), \text{вектор}(ba)) = d^2)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка} \rightarrow \text{скалумнож}(\text{вектор}(ba), \text{вектор}(ba)) = l(ab)^2)$

Вынесение в антецеденты равенств для выражений с нечисловыми атомами

1. Вывод импликации, переходящей от равенства объектво к равенству их отдельных координат. Консеквент теоремы имеет вид "$\text{крд}(A, K) = t$", где выражение A неоднобуквенное и не атомарное. Все параметры выражения t встречаются в левой части равенства. Выбирается новая переменная b, после чего консеквент заменяется на "$\text{крд}(b, K) = t$", а к антецедентам добавляется равенство "$A = b$". (Прием нормкрд - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcgK}(g - \text{число}\ \&\ \text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\ \&\ b \in \{1, 2, 3\}\ \&\ ga = c \rightarrow$
   $g \cdot \text{крд}(a, K, b) = \text{крд}(c, K, b))$

   из теоремы

   $\forall_{abgK}(g - \text{число}\ \&\ \text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\ \&\ b \in \{1, 2, 3\} \rightarrow g \cdot \text{крд}(a, K, b) =$
   $\text{крд}(ga, K, b))$

2. Усмотрение приема, использующего равенство для атомарного выражения при нахождении числового атома. Теорема - определение выражения A посредством равенства $A = B$, где B - невырожденный числовой атом. Собственное подвыражение C выражения A - неоднобуквенное атомарное. Все параметры выражения B встречаются в C, причем вне C внутри A они не встречаются. Выбираются новые переменные a, b. К антецедентам добавляются равенства $a = C$, $b = A_1$, а консеквентом становится "$B = b$". Здесь A_1 - результат замены в A подвыражения C на a. Теорема сопровождается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для определения значения неизвестного выражения с помощью равенства $a = C$ из посылок. (Прием определение - 78).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABab}(A - \text{точка } \&\ B - \text{точка } \&\ a = \text{вектор}(AB)\ \&\ \text{длина}(a) = b \to l(AB) = b)$

из теоремы

$\forall_{AB}(A - \text{точка } \&\ B - \text{точка} \to \text{длина}(\text{вектор}(AB)) = l(AB))$

3. Вывод соотношений для координат объектов, явно указанных в антецедентах. Консеквент теоремы имеет вид "коорд$(A, K) = (t_1, \ldots, t_n)$". Выбираются новые переменные $x_1, \ldots, x_n$. К антецедентам добавляется равенство "коорд$(A, K) = (x_1, \ldots, x_n)$", а консеквентом становится конъюнкция "$x_1 = t_1$ & $\ldots$ & $x_n = t_n$". (Прием равнозначны - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefhK}(\text{коорд}(a, K) = (f, h)\ \&\ e - \text{число } \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \text{Вектор}(a)\ \&$
   $b = ea\ \&\ \text{коорд}(b, K) = (c, d) \to c = ef\ \&\ d = eh)$

   из теоремы

   $\forall_{abefhK}(\text{коорд}(a, K) = (f, h)\ \&\ e - \text{число } \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \text{Вектор}(a)\ \&$
   $b = ea\ \to \text{коорд}(b, K) = (ef, eh))$

4. Ввод вспомогательного обозначения для объекта, координаты которого определяются приемом вывода. Консеквент теоремы имеет вид "коорд$(A, K) = (t_1, \ldots, t_n)$". Выражение A не атомарное и не имеет невырожденных атомарных подвыражений того же типа значений, что само A. Для некоторой встречающейся в A переменной имеется антецедент, задающий набор координат этой переменной. Выбирается новая переменная a, к антецедентам добавляется равенство $a = A$, а консеквентом становится "коорд$(a, K) = (t_1, \ldots, t_n)$". Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для прием определения координат объекта, срабатывающего при усмотрении равенства объектов. (Прием систкоорд - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abceglmK}(\text{коорд}(c, K) = (l, m)\ \&\ \text{коорд}(a, K) = (e, g)\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&$
   $\text{Вектор}(c)\ \&\ \text{Вектор}(a)\ \&\ b = c + a \to \text{коорд}(b, K) = (e + l, g + m))$

   из теоремы

   $\forall_{aceglmK}(\text{коорд}(c, K) = (l, m)\ \&\ \text{коорд}(a, K) = (e, g)\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&$
   $\text{Вектор}(c)\ \&\ \text{Вектор}(a) \to \text{коорд}(c + a, K) = (e + l, g + m))$

5. Вывод импликации, усматривающей из равенства нечисловых объектов равенство их численных характеристик. Консеквент теоремы имеет вид "$f(t) = p$", где левая часть - числовой атом, более сложный, чем числовые атомы правой части. Правая часть бесповторна и имееь не менее двух числовых атомов (не обязательно невырожденных), причем каждый из них содержит единственный параметр. Создается копия теоремы, в которой все переменные переобозначены

на новые. Ее консеквент - "$f(t_1) = p_1$". Новая теорема имеет своими антецедентами антецеденты исходной теоремы и ее копии, а также равенство $t = t_1$. Консеквентом ее является равенство $p = p_1$. (Прием числатом - 17).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcd}(a - \text{число}\ \&\ \text{Вектор}(b)\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \text{Вектор}(d)\ \&\ ab = cd \to |a|\text{длина}(b) = |c|\text{длина}(d))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ \text{Вектор}(b) \to \text{длина}(ab) = |a|\text{длина}(b))$

6. Фиксация атомарных подвыражений через равенства в антецедентах. Консеквент теоремы - равенство $t_1 = t_2$, обе части которого содержат нечисловые атомарные выражения. Рассматриваются такие выражения $A_1, \ldots, A_n$, входящие в t_2. Все они не содержат связанных переменных. Выбираются новые перемнные $x_1, \ldots, x_n$ и находится результат t_3 замены в t_2 выражений A_i на переменные x_i. К антецедентам добавляются равенства $A_i = x_i$, консеквент заменяется на $t_1 = t_3$. (Прием Атомарное - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aAB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \text{вектор}(AB) = a \to \text{вектор}(BA) = -a)$

   из теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \to -\text{вектор}(AB) = \text{вектор}(BA))$

7. Попытка перехода от явного задания координат к неявному, но через более простые операции - случай одного равенства. Консеквент теоремы - равенство "коорд$(A, K) = (t_1, \ldots, t_n)$". Правая часть не имеет невырожденных числовых атомов. Рассматривается список S, полученный удалением из списка антецедентов равенств $y = s$, определяющих значения параметров y выражений t_i. Выбираются новые переменные $x_1, \ldots, x_n$, и решается задача на исследование, посылками которой являются утверждения S, "$x_i -$ число" и "$t_i = x_i$". Неизвестные задачи - переменные x_i, дополнительная цель - "косвнеизв". Эта цель ориентирует на получение неявных описаний неизвестных (в данном случае - на упрощение исходных сложных выражений для них, например, на исключение дробей и т.п.). После решения рассматриваются равенства, в которые перешли исходные равенства $t_i = x_i$. Их конъюнкция становится консеквентом теоремы. К антецедентам добавляется равенство "коорд$(A, K) = (x_1, \ldots, x_n)$". (Прием систкоорд - 38).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefAEK}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&$ прямкоорд$(K)\ \&$ фокус$(A, E)\ \&$ коорд$(E, K) = \text{set}_{xy}(ax + by^2 + cy + d = 0\ \&$ $x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \neg(a = 0)\ \&\ \neg(b = 0)\ \&$ коорд$(A, K) = (e, f) \to c + 2bf = 0\ \&\ 4abe + 4bd - c^2 + a^2 = 0)$

   из теоремы

$\forall_{AEKabcd}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&$ прямкоорд(K) & фокус(A, E) & коорд$(E, K) = \text{set}_{xy}(ax + by^2 + cy + d = 0\ \&$ $x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \neg(a = 0)\ \&\ \neg(b = 0) \to \text{коорд}(A, K) =$ $((c^2 - 4bd - a^2)/(4ab), -c/(2b)))$

8. Попытка перехода от явного задания координат к неявному, но через более простые операции - случай дизъюнкции равенств. Консеквент теоремы - дизъюнкция утверждений вида "коорд$(A, K) = (t_1, \ldots, t_n)$ & B". Для каждого из них выполнются действия, аналогичные описанным в предыдущем пункте, после чего предпринимается попытка усмотреть в посылках соответствующих задач на исследование одно и то же соотношение для переменных $x_1, \ldots, x_n$, которое и становится новым консеквентом. К антецедентам, как и выше, добавляется равенство "коорд$(A, K) = (x_1, \ldots, x_n)$". (Прием систкоорд - 39).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdegmpqAEK}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&$ $A-$точка & прямкоорд(K) & фокус(A, E) & $\neg(c = 0)$ & коорд$(E, K) = \text{set}_{xy}(ax^2 +$ $bx + cy^2 + dy + e = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \neg(a = 0)\ \&\ m = 4ace -$ $b^2c - d^2a\ \&\ p = -b/(2a)\ \&\ q = -d/(2c)\ \&$ коорд$(A, K) = (p, g) \to m(c - a) =$ $4a^2c^2(g - q)^2)$

   из теоремы

   $\forall_{AEKabcdepqm}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&$ $A-$точка & прямкоорд(K) & фокус(A, E) & $\neg(c = 0)$ & коорд$(E, K) = \text{set}_{xy}(ax^2 +$ $bx + cy^2 + dy + e = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \neg(a = 0)\ \&\ m = 4ace -$ $b^2c - d^2a\ \&\ p = -b/(2a)\ \&\ q = -d/(2c) \to 0 < m(c - a)\ \&$ (коорд$(A, K) =$ $(p, q + \sqrt{(c - a)m}/(2ac))\ \vee$ коорд$(A, K) = (p, q - \sqrt{(c - a)m}/(2ac)))\ \vee$ $0 \le m(a - c)\ \&$ (коорд$(A, K) = (p + \sqrt{(a - c)m}/(2ac), q)\ \vee$ коорд$(A, K) =$ $(p - \sqrt{(a - c)m}/(2ac), q)))$

Вынесение в антецеденты равенств с неатомарными выражениями

1. Попытка извлечь из эквивалентности общей стандартизации эквивалентность для усиления, использующую равенство из посылок. Теорема - эквивалентность общей стандартизации "$A \leftrightarrow B$". Заменяющая часть B получается из заменяемой заменой подвыражения t_1 на t_2. Выражение t_1 бесповторно. t_2 получается из t_1 вычеркиванием части операндов некоторых операций. t_1 имеет переменную, не входящую в t_2. Выбирается новая переменная a и определяется результат A_1 замены в A подвыражения t_1 на a. К антецедентам добавляется равенство $t_1 = a$, консеквентом становится $A_1 \leftrightarrow B$. (Прием общнорм - 33).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abde}(a - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&$ непересек$(a, d)\ \&\ b = d \cup e \to a \subseteq b \leftrightarrow a \subseteq e)$

   из теоремы

   $\forall_{ade}(a - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&$ непересек$(a, d) \to a \subseteq d \cup e \leftrightarrow a \subseteq e)$

2. Получение тождества для выражения параметра объекта через объект. Теорема - определение выражения $f(t)$ при помощи тождества $f(t) = x$. Здесь x - переменная, t - неоднобуквенное выражение. Выбирается новая переменная y. К антецедентам добавляется равенство $y = t$, а консеквентом становится $f(y) = x$. (Прием определение - 147).

   Пример: рассмотрим вывод теоремы

   $\forall_{abc}(c = a + bi \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to \text{Re}(c) = a)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to \text{Re}(a + bi) = a)$

   Выводимая теорема ориентирована на прием, усматривающий в посылках явное равенство для c и после этого преобразующий $\text{Re}(c)$.

3. Вывод условного тождества, использующего равенство в посылках для исключения неизвестных. Теорема - тождество свертки $A = B$. В бесповторной заменяющей части B выделяется подвыражение $f(x, y)$, где x, y - различные переменные, каждая из которых имеет единственное вхождение в A. Каждый надтерм вхождения x в A имеет список параметров, отличный от пары x, y. Выбирается новая переменная z. К антецедентам добавляется равенство $f(x, y) = z$, а консеквентом становится $A = B_1$, где B_1 - результат замены в B подвыражения $f(x, y)$ на z. Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема, заменяющего неизвестные подтермы на известные с помощью равенства из посылок. (Прием свертка - 76).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \&$
   $\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ a/b = d \to a^c/b^c = d^c)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \&$
   $\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ \neg(b = 0) \to (a/b)^c = a^c/b^c)$

4. Обозначение самого сложного подвыражения заменяющего терма вспомогательной переменной, определяемой через равенство в антецедентах. Теорема - тождество $A = B$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией. Заменяющее выражение имеет единственный подтерм t максимальной сложности, причем эта сложность не меньше 5. Заменяемой выражение имеет ту же самую оценку сложности, причем если оно имеет единственный подтерм r максимальной сложности, то список параметров r не длиннее списка параметров t. Задача на преобразование не упрощает A. Тогда выбирается новая переменная x, к антецедентам добавляется равенство $t = x$, а все вхождения t в B заменяются на x. Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема, определяющео значение неизвестного выражения с помощью равенства из посылок. (Прием сокращ -22).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(b - \text{число} \ \& \ \sin b = a \to \cos(2b) = -2a^2 + 1)$

из теоремы

$\forall_b(b - \text{число} \to \cos(2b) = -2(\sin b)^2 + 1)$

5. Усмотрение теоремы приема, позволяющего заменить неизвестный подтерм с одноместной корневой операцией на известный с помощью равенства из посылок. Теорема - тождество $A = B$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией. Оба выражения A, B бесповторны. Среди подвыражений выражения B, имеющих максимальную сложность, усматривается подвыражение вида $f(x)$, где x - переенная. Выбирается новая переменная y, к антецедентам добавляется равенство $y = f(x)$, а в консеквенте выражение $f(x)$ заменяется на y. Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема, заменяющего неизвестные подтермы на известные с помощью равенства из посылок. (Прием сокращ - 14).

   В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c = |a| \to |ab| = c|b|)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to |a| \cdot |b| = |ab|)$

6. Получение тождества, использующего посылку для упрощения сложного неизвестного подвыражения. Теорема - тождество $A = B$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией. Оценки сложности термов A, B равны. Выражение B имеет не менее двух подвыражений, имеющих максимальную сложность. Из них выбирается такое подвыражение t, которое содержит все параметры выражения A. Выбирается новая переменная x. К антецедентам добавляется равенство $t = x$, а в консеквенте t заменяется на x. Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема, заменяющего неизвестные подтермы на известные с помощью равенства из посылок. (Прием сокращ - 36).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ \sin a = b \to \sin(2a) = 2b\cos a)$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to \sin(2a) = 2\sin a \cos a)$

7. Обозначение самого сложного подвыражения заменяемого терма вспомогательной переменной, определяемой через равенство в антецедентах. Теорема - тождество $A = B$, где оценка сложности заменяющего терма B меньше оценки сложности заменяемого. Заменяемое выражение A бесповторно и имеет единственное подвыражение $f(x)$ максимальной сложности; x - переменная. Выбирается новая переменная y. Проверяется, что уравнение $f(x) = y$ относительно x не имеет такого решения, которое не содержит связанных переменных

и символов "принадлежит", "или". Тогда к антецедентам добавляется равенство $f(x) = y$, а в консеквенте подвыражение $f(x)$ заменяется на y, причем части равенства переставляются. Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема, определяющего значение неизвестного выражения с помощью равенства из посылок. (Прием упрощение - 9).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{rational } \& \ \text{числитель}(b) - \text{even } \& \ |a| = c \to a^b = c^b)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{rational } \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \to |a|^b = a^b)$

8. Использование равенства, фиксирующего значение определяемого атома, для нахождения самого сложного из определяющих атомов. Консеквент теоремы имеет вид $A = B$, где A - невырожденный числовой атом, представляющий собой единственное самое сложное подвыражние консеквента. Внутри B выделяется невырожденный числовой атом t, являющийся единственным самым сложным невырожденным числовым атомом в B. Если B бесповторно, то и A бесповторно. Выбирается новая переменная x. К антецедентам добавляется равенство $A = x$, консеквентом становится равенство $x = B$. Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема, позволяющего определить числовой атом t при помощи равенства в посылках. (Прием числатом - 27).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aBCD}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ B - \text{точка } \& \ C - \text{точка } \& \ D - \text{точка } \&$
   $\text{скалумнож}(\text{вектор}(CB), \text{вектор}(CD)) = a \to a = \cos(\angle(BCD))l(BC)l(CD))$

   из теоремы

   $\forall_{BCD}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ B - \text{точка } \& \ C - \text{точка } \& \ D - \text{точка } \to$
   $\text{скалумнож}(\text{вектор}(CB), \text{вектор}(CD)) = \cos(\angle(BCD))l(BC)l(CD))$

9. Использование посылки, определяющей после перегруппировки равенство сокращаемых выражений. Теорема - тождество $A = B$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией. Параметры выражения B включается в параметры A, причем некоторая переменная x входит в A и не входит в B. Эта переменная имеет в A ровно два вхождения. Имеется антецедент $P(x)$, определяющий тип значений x, причем для данного типа справочник "перегруппировка" усматривает возможность перегруппировки F - членов с изменением их знака G, а также выдает единицу E двуместной операции F. Выбираются новые переменные a, f. Из антецедентов удаляются все содержащие x тверждения, длина которых больше 2. К ним добавляются результаты замены в содержащих x утверждениях длины 2 этой переменной на a, а также равенство $F(x, G(a)) = E$. В консеквенте вхождения переменной x заменяются: одно - на $f(x)$, другое - на $f(a)$. Теорема снабжается единственной характеристикой,

указывающей, что она создана для приема общей стандартизации, усматривающего равенство двух объектов путем перегруппировки равенства в посылках. (Прием сокращ - 25).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdf}(\neg(c=0)\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ a-\text{число}\ \&\ f-a=0\rightarrow db(f)/cb(a)=d/c)$

из теоремы

$\forall_{cdf}(\neg(c=0)\ \&\ \neg(f=0)\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\rightarrow df/(cf)=d/c)$

10. Разбиение равенства в заменяемой части консеквента на два равенства для вспомогательной переменной, одно из которых переносится в антецеденты. Теорема - эквивалентность общей стандартизации с равенством $t_1=t_2$ в заменяемой части и утверждением A в заменяющей. Списки параметров выражений t_1 и t_2 пересекаются. Выбирается новая переменная x. К антецедентам добавляется равенство $t_1=x$, консеквентом становится эквивалентность $t_2=x\leftrightarrow A$. (Прием общнорм - 110).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abcd}(a-\text{boolean}\ \&\ b-\text{boolean}\ \&\ c-\text{boolean}\ \&\ a+b=d\rightarrow b+c=d\leftrightarrow a=c)$

    из теоремы

    $\forall_{abc}(a-\text{boolean}\ \&\ b-\text{boolean}\ \&\ c-\text{boolean}\rightarrow a+b=b+c\leftrightarrow a=c)$

    Знаком "плюс" здесь обозначена сумма по модулю 2.

Вынесение в антецеденты равенств для отображений

1. Вынесение в антецеденты идентификации отображения из заменяемой части и числовых атомов. Теорема - тождество $A=B$, оценка сложности части B которого меньше оценки сложности части A. Значениями части B служат функции. Единственный подтерм максимальной сложности в A - само A. Корневым операндом выражения A служит подвыражение t, заголовок которого - символ "таблица" или "отображение". Выбирается новая переменная x, к антецедентам добавляется равенство $x=t$, а в консеквенте внутри A происходит замена t на x. После этого для каждого имеющегося в консеквенте невырожденного числового атома T выбирается новая переменная y, к антецедентам добавляется равенство $T=y$, а в консеквенте все вхождения данного атома заменяются на y. Теорема снабжается единственной характеристикой "Функвых", означающей, что она представляет собой тождество, дающее явное выражение для функциональной характеристики объекта. (Прием отображение - 42).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{acdefg}(\neg(a=d)\ \&\ \neg(c=\emptyset)\ \&\ \neg(c=\text{элемсобытия}(e))\ \&\ c\in\text{события}(e)\ \&$
    $a-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ \text{верпространство}(e)\ \&\ f=\lambda_b((a\ \text{при}\ b\in c,\ \text{иначе}\ d),$
    $b\in\text{элемсобытия}(e))\ \&\ \text{вероятность}(c,e)=g\rightarrow\text{рядраспред}(f,e)=$
    $\text{таблица}(\{a\rightarrow g,d\rightarrow 1-g\}))$

из теоремы

$\forall_{acde}(\neg(a = d)\ \&\ \neg(c = \emptyset)\ \&\ \neg(c = \text{элемсобытия}(e))\ \&\ c \in \text{события}(e)\ \&$
$a - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ \text{верпространство}(e) \rightarrow \text{рядраспред}(\lambda_b((a\ \text{при}$
$b \in c,\ \text{иначе}\ d), b \in \text{элемсобытия}(e)), e) = \text{таблица}(\{a \rightarrow \text{вероятность}(c, e),$
$d \rightarrow 1 - \text{вероятность}(c, e)\}))$

Вынесение в антецеденты равенства, обращающегося к вычислению

1. Ввод вспомогательных обозначений для вычисляемых по рекурсии подвыражений. Теорема - тождество "$A = B$" для перехода к более простым описателям либо для исключения описателей. Максимально сложные подтермы $t_1, \ldots, t_k$ терма B - выражения, заголовок которых такой же, как у A, причем каждое из них встречается в антецедентах, и ни один антецедент не содержит двух различных t_i. Выбираются новые переменные $x_1, \ldots, x_k$. В антецедентах и в выражении B предпринимается замена выражений t_i на переменные x_i. Затем к антецедентам добавляются равенства $t_i = x_i$. (Прием описатель - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{af}(\text{последовательность}(f, \mathbb{R})\ \&\ a - \text{число}\ \&\ \lim(f) = a \rightarrow \lim(\lambda_c(-f(c),$
   $c - \text{натуральное})) = -a)$

   из теоремы

   $\forall_f(\lim(f) - \text{число}\ \&\ \text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \rightarrow \lim(\lambda_c(-f(c), c - \text{натуральное}))$
   $= -\lim(f))$

2. Вывод теоремы для варьирования стандартизируемого операнда. Теорема - тождество $A = B$ для более короткой переформулировки выражения A. Заменяемая часть A имеет ровно два подвыражения максимальной сложности t_1, t_2, заменяющая - единственное такое подвыражение t_3. Все три подвыражения имеют один и тот же заголовок f, причем в протоколах базы теорем предусмотрена тенденция к отождествлению i-х операндов у встречающихся в одной и той же задаче выражений $f(\ldots)$. Например, оснований логарифмов либо степеней. i - е операнды выражений t_1, t_2, t_3 суть различные не являющиеся переменными выражения a, b, c. Тип значений операции f - символ T. Выбирается новая переменная d. Выражение t_1 имеет единственное вхождение в A. Определяется результат A_1 замены этого вхождения на d, и решается задача на описание с условиями $A_1 = B, T(d)$. Посылки - антецеденты теоремы, неизвестная - d. Полученный ответ преобразуется к виду д.н.ф., после чего выбирается дизъюнктивный член, имеющий вид $d = q\ \&\ D$. Проверяется, что выражение "c" имеет единственное вхождение в равенство $t_1 = q$, и находится результат C замены этого вхождения на d. К антецедентам теоремы добавляются D и $d = c$, консеквентом становится C. Перед добавление равенства антецеденты упрощаются. Теорема сопровождается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема варьирования стандартизируемого i-го операнда операции f. (Прием свертка - 83).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{acde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 < d + e \ \& \ 0 \leq d - e \ \& \ a - \text{число} \ \& \ a = -e^2 + d^2 \to (d - e)^c = a^c/(d + e)^c)$

из теоремы

$\forall_{cde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq d + e \ \& \ 0 \leq d - e \to (d + e)^c(d - e)^c = (-e^2 + d^2)^c)$

3. Попытка приведения операнда к заданному заголовку для упрощения операции. Теорема - тождество общей стандартизации $A = B$. Выражение A имеет вид $f(x, t)$, где x - переменная, входящая в неоднобуквенное выражение t; f - ассоциативная и коммутативная операция. Находится тождество обобщенной дистрибутивности "$g(f(X, Y), f(X, Z)) = f(X, h(Y, Z))$", у которого операция g имеет тот же тип значений, что f. Выбираются новые переменные a, b, c, и создается импликация с единственным антецедентом "$g(a, b) = f(x, c)$" и с консеквентом "$f(g(a, b), t) = f(c, B)$". Она снабжается единственной характеристикой, указывающей, что создана для приема нормализатора преобразования выражений к заголовку f. (Прием нормализация - 124).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcde}(b + d = ae \to (b + d)a^c = ea^{c+1})$

   из теоремы

   $\forall_{ac}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \to aa^c = a^{c+1})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \to ab + ac = a(b + c))$

4. Извлечение операции над константными термами и обработка специальным вычислителем. Тождество позволяет выделить константный подтерм T, для которого существует специальный упрощающий оператор (например, сокращение простых дробей). Фактически последовательно применяются два приема вывода теорем. Первый из них - прием обобщения тождества путем домножения обеих частей на новую переменную и перемещения ее вглубь заменяемой части. Он рассматривается в отдельном пункте данной классификации (глава "Обобщение теоремы"). Второй - собственно данный прием - выбор новой переменной x, добавление к антецедентам равенства $x = T$ и замена в консеквенте T на x. Теорема сопровождается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема, обрабатывающего подтерм T упрощающим оператором. (Прием Выч - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdf}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ d = b/c \to bf/(ac) = fd/a)$

   из теоремы

   $\forall_{abe}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \to e \cdot (a/b) = ae/b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ade}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ a-$число $\&\ d-$число $\&\ e-$число $\to d/(ae)=(d/e)/a)$.

5. Обращение к нормализатору вычисления для определения самого сложного подвыражения антецедентов. Теорема используется для создания приема проверочного оператора. Наиболее сложный терм t антецедентов - выражение с заголовком f, причем этот терм единственный и имеет единственное вхождение. Глубина его больше 1, а оценка сложности больше 4. Существует нормализатор вычисления для выражений с заголовком f. Выбирается новая переменная x, в антецеденте происходит замена t на x, после чего добавляется антецедент $t=x$. Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема усмотрение истинности с помощью нормализатора вычислений. (Прием главнчлен - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(\text{последовательность}(b,\mathbb{R})\ \&\ \overline{\lim}_{c\to\infty}\{|b(c)|^{1/c}\}=a\ \&\ a<1\to$
   $\text{сходится}(\lambda_d(\sum_{c=1}^{d}b(c),d-\text{натуральное})))$

   из теоремы

   $\forall_b(\overline{\lim}_{c\to\infty}\{|b(c)|^{1/c}\}<1\ \&\ \text{последовательность}(b,\mathbb{R})\to\text{сходится}(\lambda_d(\sum_{c=1}^{d}b(c),$
   $d-\text{натуральное})))$

6. Контрапозиция и обращение к нормализатору вычисления для опровержения самого сложного антецедента. Теорема - тождество общей стандартизации. Консеквент имеет вид $f(\ldots)=t$, причем символ f не встречается в t и существует нормализатор вычисления выражений с заголовком f. Самый сложный антецедент A - единственный, причем его оценка сложности больше 9. Он не используется для сопровождения по о.д.з. Выбирается новая переменная x. Утверждение A исключается из антецедентов, его отрицание становится консеквентом. К антецедентам добавляются утверждения $f(\ldots)=x, \neg(x=t)$. Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема усмотрения истинности с помощью нормализатора вычислений. (Прием нормализация - 143).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(\text{последовательность}(a,\mathbb{R})\ \&\ \lim(a)=b\ \&\ \neg(b=0)\to$
   $\neg(\text{сходится}(\lambda_d(\sum_{c=1}^{d}a(c),d-\text{натуральное}))))$

   из теоремы

   $\forall_a(\text{сходится}(\lambda_d(\sum_{c=1}^{d}a(c),d-\text{натуральное}))\ \&\ \text{последовательность}(a,\mathbb{R})\to$
   $\lim(a)=0)$

Ввод в антецедентах соотношений пропорциональности для числовых атомов

1. Рассмотрение вариантов пропорциональности пар числовых атомов. Теорема выводит отличный от равенства нечисловой двуместный предикат. Имеется антецедент вида $AC=BD$, где A,B,C,D - невырожденные числовые атомы.

Выбираются новые переменные a, b. Вместо указанного антецедента вводятся антецеденты $aB = bA, aC = bD, \neg(a = 0) \ \vee \ \neg(b = 0), a -$ число, $b -$ число. (Прием отношение - 16).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abABCDE}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка & $\neg(C = E)$ & $\neg(B = D)$ & $\neg(A = B)$ & $\neg(A = D)$ & $E \in$ прямая(AD) & $C \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, D, E) & точкалуча(A, B, C) & $a -$ число & $b -$ число & $al(AC) = bl(AB)$ & $al(AE) = bl(AD)$ & $(\neg(a = 0) \ \vee \ \neg(b = 0)) \rightarrow$ прямая$(BD) \parallel$ прямая$(CE))$

из теоремы

$\forall_{ABCDE}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка & $\neg(C = E)$ & $\neg(B = D)$ & $\neg(A = B)$ & $\neg(A = D)$ & $E \in$ прямая(AD) & $C \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, D, E) & точкалуча(A, B, C) & $l(AE)l(AB) = l(AD)l(AC) \rightarrow$ прямая$(BD) \parallel$ прямая$(CE))$

Данное преобразование теоремы ориентировано на прием, идентифицирующий соотношения пропорциональности с равенствами в посылках задачи.

2. Вывод соотношения пропорциональноси из нескольких других соотношений. Консеквент теоремы - равенство двух произведений невырожденных числовых атомов, количество которых не менее 5. Эти атомы разбиваются на пары. Одна из пар выделяется. Для каждой из оставшихся пар в антецедентах вводится соотношение пропорциональности с новыми коэффициентами. Эти коэффициенты дают соотношение пропорциональности для выделенной пары. Рассматривается возможность варьирования теоремы за счет привлечения новых невырожденных атомов B, связанных с исходными A_i, A_j соотношением вида $A_i = A_j + B$. (Прием пропорция - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdABCDEF}(\neg(A = C)$ & $\neg(A = F)$ & $\neg(B = C)$ & $\neg(B = D)$ & $\neg(C = E)$ & $\neg($прямая$(AC) =$ прямая$(BC))$ & $al(AF) = bl(DF)$ & $cl(CE) = dl(AE)$ & $D \in$ отрезок(BC) & $E \in$ отрезок(AC) & $F \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(BE) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка & $F -$ точка $\rightarrow$ $(bd - ac)l(BD) = acl(CD))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка & $F -$ точка & $\neg(B = C)$ & $\neg(A = C)$ & $\neg(B = D)$ & $E \in$ отрезок(AC) & $D \in$ отрезок(BC) & $F \in$ прямая(AD) & $F \in$ прямая(BE) & $\neg($прямая$(AC) =$ прямая$(BC)) \rightarrow l(AF)l(BD)l(CE) = l(DF)l(BC)l(AE))$

3. Извлечение из соотношения пропорциональности соотношения, позволяющего выразить невырожденный числовой атом через числовые параметры. Консеквент теоремы имеет вид $Aa = Bb$, где A, B - невырожденные числовые атомы. Выражения a, b содержат единственный невырожденный числовой атом.

Выбираются новые переменные c, d. К антецедентам добавляются утверждения "$cA = dB$", "$c -$ число", "$d -$ число". Консеквентом становится равенство $da = cb$. (Прием пропорция - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ al(AC) = bl(AB)\ \&\ a -$ число $\&\ b -$ число $\&\ A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&\ C -$ точка $\&$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC) \rightarrow$
$b = a\,\mathrm{tg}(\angle(ABC)))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&\ C -$ точка $\&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC) \rightarrow l(AC) = \mathrm{tg}(\angle(ABC))l(AB))$

4. Вывод теоремы приема, использующего пропорциональность из контекста для исключения неизвестных. Теорема - тождество "$A/B = C$" для более короткой переформулировки выражения. Подвыражения A, B - максимально сложные в левой части. Правая часть имеет единственное подвыражение максимальной сложности. Выбираются переменные a, b, и к антецедентам добавляются утверждений "$Ab = Ba$", "$a -$ число", "$b -$ число", "$\neg(a = 0)$". Консеквентом становится равенство "$C = a/b$". (Прием свертка - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcde}(a -$ число $\&\ b -$ число $\&\ c -$ число $\&\ c -$ rational $\&\ \neg($знаменатель$(c) -$ even$)\ \&\ \neg(b = 0)\ \&\ d -$ число $\&\ e -$ число $\&\ \neg(e = 0)\ \&\ a^c e = b^c d \rightarrow (a/b)^c = d/e)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a -$ число $\&\ b -$ число $\&\ c -$ число $\&\ c -$ rational $\&$
   $\neg($знаменатель$(c) -$ even$)\ \&\ \neg(b = 0) \rightarrow (a/b)^c = a^c/b^c)$

5. Использование соотношения для усмотрения пропорциональности двух числовых атомов из пропорциональности двух других числовых атомов. Теорема - соотношение для невырожденных числовых атомов. Относительно трех из этих атомов разность частей консеквента образует однородный многочлен степени k, большей 1. Коэффициенты многочлена могут содержать другие невырожденные числовые атомы. Среди трех атомов выбирается некоторый атом A. В антецеденты заносятся соотношение пропорциональности для двух других атомов B, C (с новыми переменными в качестве коэффициентов) и равенства вспомогательным переменным для тех невырожденных числовых атомов, которые входили в коэффициенты однородного многочлена. В консеквенте предпринимается замена числовых атомов на обозначающие их переменные, причем атом B выражается через C и коэффициенты пропорциональности. Затем консеквент разрешается относительно A, так что получается соотношение пропорциональности для A, C. (Прием числовойатом - 62).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcABC}(b -$ число $\&\ c -$ число $\&\ 0 \le b\ \&\ 0 \le c\ \&\ A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&$
   $C -$ точка $\&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ bl(AC) = cl(AB)\ \&\ \angle(BAC) = a\ \&$
   $a -$ число $\rightarrow bl(BC) = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos a}l(AB))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B) \rightarrow 2l(AB)l(AC)\cos\angle(BAC) = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)$

6. Рассмотрение вариантов пропорциональности пар числовых атомов. Консеквент теоремы имеет вид "$A_1 \cdot A_2 = B_1 \cdot B_2$", где A_1, A_2, B_1, B_2 - невырожденные числовые атомы. Выбираются новые переменные a, b, и к антецедентам добавляются утверждения "$aA_1 = bB_1, a - \text{число}, b - \text{число}$". Консеквентом становится $bA_2 = aB_2$. Предварительно проверяется, что хотя бы одно из A_1, B_1 не нулевое, и если это не устанавливается, к антецедентам добавляется $\neg(A_1 = 0)$. (Прием числовойатом - 14).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abABCDE}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \neg(A = E)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ B \in \text{прямая}(AD)\ \&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC)\ \&\ C \in \text{прямая}(AE)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(BC))\ \&\ al(CE) = bl(BD) \rightarrow al(AC) = bl(AB))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \neg(A = E)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ B \in \text{прямая}(AD)\ \&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC)\ \&\ C \in \text{прямая}(AE)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(BC)) \rightarrow l(AB)l(CE) = l(AC)l(BD))$

7. Фиксация отношения числовых атомов через соотношение пропорциональности в антецедентах. Консеквент теоремы имеет вид $AB = CD$, где A, C - невырожденные числовые атомы, не имеющие в консеквенте других вхождений. Усматривается, что хотя бы один из них не равен 0. Выбираются новые переменные a, b К антецедентам добавляется равенство $aA = bC$, консеквентом становится $bB = aD$. Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что два численных параметра определяются соотношением пропорциональности в антецедентах. (Прием числовойатом - 40).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcde}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = c)\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ dl(bc) = el(ac) \rightarrow \sin(\angle(acb) + \angle(bac))e = \sin(\angle(bac))d)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = c)\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка} \rightarrow \sin(\angle(acb) + \angle(bac))l(bc) = \sin(\angle(bac))l(ac))$

8. Вывод теоремы приема, использующего пропорциональность из контекста для исключения неизвестных. Консеквент имеет вид "$A/B = C$, причем A, B - максимально сложные подтермы левой части, C - максимально сложный подтерм правой. Выбираются новые переменные a, b; к антецедентам добавляются утверждения "$a - \text{число}$", "$b - \text{число}$", "$\neg(b = 0)$", "$Ab = Ba$". Консеквентом

становится равенство "$C = a/b$". Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема, определяющего значение неизвестного выражения с помощью равенства из посылок. (Прием группмножитель - 6).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcde}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ c - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&\ \neg(b = 0)\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ \neg(e = 0)\ \&\ a^c e = b^c d \to (a/b)^c = d/e)$

из теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ c - \text{rational}\ \&$
$\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&\ \neg(b = 0) \to (a/b)^c = a^c/b^c)$

Ввод в антецедентах обычных либо кванторных равенств для приема подбора значения

1. Варьированиие теоремы для приема подбора последовательности, удовлетворяющей заданному условию - случай кванторной импликации (наложение условия на неизвестную функцию). Консеквент теоремы - равенство, содержащее подвыражение "$\lambda_n(T, n - \text{натуральное})$". Выбирается новая переменная f. К антецедентам добавляется утверждение "$\forall_n(n - \text{натуральное} \to f(n) = T)$". В консеквенте описатель "отображение" замняется на "$\lambda_n(f(n), n - \text{натуральное})$". Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема подбора значения неизвестной. (Прием отображение - 19).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ \forall_c(c - \text{натуральное} \to b(c) = a) \to \lim(\lambda_c(b(c), c - \text{натуральное})) = a)$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to \lim(\lambda_c(a, c - \text{натуральное})) = a)$

   Теорема создается для приема, подбирающего пример последовательности с заданным пределом: второй антецедент будет замещать условие задачи.

2. Варьирование теоремы приема подбора последовательности, удовлетворяющей заданному условию - случай кванторной импликации (подбор значений неизвестной). Консеквент теоремы - равенство, содержащее подвыражение "$\lambda_n(T, n - \text{натуральное})$". Выбирается новая переменная f. К антецедентам добавляется утверждение "$f = \lambda_n(T, n - \text{натуральное})$", а в консеквенте описатель "отображение" замняется на f. Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема подбора значения неизвестной. (Прием отображение - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b = \lambda_c(a, c - \text{натуральное}) \to \lim(b) = a)$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to \lim(\lambda_c(a, c - \text{натуральное})) = a)$

3. Варьирование теоремы приема подбора последовательности, удовлетворяющей заданному условию - случай бесквантороной теоремы (наложение условия на неизвестную функцию). Теорема не является кванторной импликацией. Она содержит подвыражение "$\lambda_n(T, n-$натуральное$)$". Выбирается новая переменная f. Создается импликация с антецедентом "$\forall_n(n -$ натуральное $\rightarrow f(n) = T)$". Консеквентом становится результат замены в теореме описателя "отображение" на "$\lambda_n(f(n), n -$ натуральное$)$". Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема подбора значения неизвестной. (Прием отображение - 21).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(\forall_b(b -$ натуральное $\rightarrow a(b) = b) \rightarrow \lim(\lambda_b(a(b), b -$ натуральное$)) = \infty)$

   из теоремы

   $\lim(\lambda_b(b, b -$ натуральное$)) = \infty$

4. Варьирование теоремы приема подбора последовательности, удовлетворяющей заданному условию - случай бесквантороной теоремы (подбор значения неизвестной). Теорема не является кванторной импликацией. Она содержит подвыражение "$\lambda_n(T, n -$ натуральное$)$". Выбирается новая переменная f. Создается импликация с антецедентом "$f = \lambda_n(T, n -$ натуральное$)$". Консеквентом становится результат замены в теореме описателя "отображение" на f. Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема подбора значения неизвестной. (Прием отображение - 23).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a = \lambda_b(b, b -$ натуральное$) \rightarrow \lim(a) = \infty)$

   из теоремы

   $\lim(\lambda_b(b, b -$ натуральное$)) = \infty$

5. Варьирование теоремы приема подбора последовательности, чья характеристика не равна заданному значению. Консеквент теоремы имеет вид $x = A$, где x - переменная, не входящая в A. Внутри A выделяется подвыражение "$\lambda_n(T, n -$ натуральное$)$". Выбирается новая переменная f и определяется результат B замены в A указанного подвыражения на "$\lambda_n(f(n), n-$натуральное$)$". Выбирается новая переменная y. Создается конъюнкция K антецедентов теоремы и утверждений "$\forall_n(n -$ натуральное $\rightarrow f(n) = T)$", "$\neg(x = y)$". Новая теорема имеет единственный антецедент "$\exists_x(K)$" и консеквент "$\neg(y = A)$". Она снабжается единственной характеристикой, указывающей, что создана для приема подбора значения неизвестной. (Прием отображение - 20).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bd}(\exists_a(a-$число $\& \forall_c(c-$натуральное $\rightarrow b(c) = a) \& \neg(a = d)) \rightarrow \neg(\lim(\lambda_c(b(c), c-$ натуральное$)) = d))$

   из теоремы

   $\forall_a(a -$ число $\rightarrow \lim(\lambda_c(a, c -$ натуральное$)) = a)$

6. Вывод теоремы для параметризованного подбора значения неизвестной. Теорема - кванторная импликация без существенных антецедентов, имеющая элементарный консеквент A. Этот консеквент, после отбрасывания отрицания, если оно есть, приобретает вид $P(t_1 \dots t_n)$, где неоднобуквенным является единственный операнд t_i. Выбирается новая переменная x, и определяется результат A_1 замены в A подвыражения t_i на x. Этот результат бесповторен. Составляется непустой список $y_1, \dots, y_m$ всех переменных выражения t_i, имеющих в A единственное вхождение. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 всех утверждений, содержащих переменную списка $y_1, \dots, y_m$, и подсписок S_2 остальных утверждений. Создается список S_3, полученный добавлением к S_2 утверждения "$\exists_{y_1 \dots y_m}(S_1 \ \& \ x = t_i)$". Проверяется, что все параметры утверждений списка S_3 встречаются в A_1. Затем создается импликация с антецедентами S_3 и консеквентом A_1 & $T(x)$, где T - тип значений выражения t_i. Она снабжается единственной характеристикой, указывающей, что создана для приема подбора параметрического описания неизвестной x. (Прием элементарно - 16).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(\exists_c(a = \{c\}) \to \neg(a = \emptyset) \ \& \ a - \text{set})$

   из теоремы

   $\forall_c(\neg(\{c\} = \emptyset)$

7. Попытка использовать оператор усмотрения повторяющихся подвыражений для получения импликации, подбирающей корень уравнения. Теорема - тождество сокращенной перезаписи. Одна из его частей небесповторна. Консеквент преобразуется так, чтобы некоторое подвыражение t, имеющее не менее двух свободных переменных, встречалось в нем неоднократно. Для преобразования используется специальный оператор, связанный с типом значений частей равенства. Выбирается новая переменная x, и в преобразованном консеквенте все вхождения t заменяются на x. Получается утверждение A. Решается задача на описание с условием A. Посылками служат антецеденты теоремы и утверждение $T(x)$, где T - тип значений выражения t. Единственная неизвестная - x. Уровень обращения маленький, получение явного ответа не требуется. Ответ A_1 имеет более одного вхождения переменной x К антецедентам теоремы добавляется равенство $x = t$, консеквентом становится A_1. Она снабжается единственной характеристикой, указывающей, создана для подбора значения неизвестной x. (Прием свертка - 56).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c = a + b \to -3abc + c^3 = a^3 + b^3)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$

8. Использование "зануляющего" тождества для обобщения по дистрибутивности, дающего прием подбора примера. Консеквент теоремы имеет вид $f(a, x) = b$, где x - переменная, b - логический символ, a - выражение без переменных. Находится тождество вида "$f(X, h(Y, Z)) = g(f(X, Y), f(X, Z))$", и с его помощью

преобразуется $f(a,x)$. Иными словами, для некоторых новых переменных y,z вместо x в исходную теорему подставляется $h(y,z)$, причем консеквент приобретает вид "$g(f(a,y),f(a,z))=b$". Выбираются новые переменные u,v. К антецедентам добавляются равенства $u=a, v=a$, а консеквентом становится $g(f(u,y),f(v,z))=b$. Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема подбора значения неизвестных u,v. (Прием нормализация - 45).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcd}(c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ a=0\ \&\ b=0\to ca+db=0)$

из теоремы

$\forall_a(a-\text{число}\to a\cdot 0=0)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\to ab+ac=a(b+c))$

Ввод в антецедентах кванторного равенства для идентификации подвыражения консеквента, имеющего связанные переменные

1. Переход к теореме, использующей кванторное тождество из контекста для исключения сложного числового атома под описателем "отображение". Теорема - тождество вида $A=B$, где A - невырожденный числовой атом, B содержит подвыражение "$f(\lambda_{x_1\dots x_k}(t,P))$". Выбирается новая переменная g. К антецедентам добавляется утверждение "$\forall_{x_1\dots x_k}(P\to t=g(x_1\dots x_k))$". В консеквенте t заменяется на $g(x_1\dots x_k)$. Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема исключения описателя "отображение" с помощью кванторного тождества из контекста. (Прием отображение - 29).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{afABC}(C-\text{set}\ \&\ C\subseteq A\ \&\ \text{конечное}(B)\ \&\ \text{конечное}(C)\ \&\ \text{Отображение}(f,A,B)\ \&\ \forall_y(y\in B\to \text{card}(\text{слой}(\text{сужение}(f,C),y))=a(y))\to \text{card}(C)=\sum_{y,y\in B}a(y))$

   из теоремы

   $\forall_{fABC}(C-\text{set}\ \&\ C\subseteq A\ \&\ \text{конечное}(B)\ \&\ \text{конечное}(C)\ \&\ \text{Отображение}(f,A,B)\to \text{card}(C)=\sum_{y,y\in B}\text{card}(\text{слой}(\text{сужение}(f,C),y)))$

Обозначение новой переменной подвыражения консеквента, содержащего уникальную переменную консеквента, и занесение в антецеденты условия существования по этой уникальной переменной, упрощенного до элементарного утверждения

1. Обозначение подвыражения заменяемой части новой переменной и добавление элементарного условия на нее в антецеденты. Теорема - тождество $A=B$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией. Переменная x - параметр

левой части A и не входит в правую часть. Она имеет единственное вхождение в A. Выделяется подтерм t выражения A, корневым операндом которого служит x. Этот подтерм имеет не менее двух параметров. Оценка сложности выражения t меньше оценки сложности A. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. В S_1 нет равенства для x. Выбирается новая переменная a. Утверждение "$\exists_x(S_1\ \&\ a = t)$" упрощается относительно посылок S_2. Результат C - элементарное утверждение. Антецедентами становятся утверждения S_2 и C, в консеквенте t заменяется на a. (Прием сокращ - 50).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdh}(\text{операция}(h) = a\ \&\ c \in \text{носитель}(h)\ \&\ \text{группа}(h)\ \&\ \text{подгруппа}(d,h)\ \&\ b \in a[d,\{c\}] \to a[d,\{b\}] = a[d,\{c\}])$

из теоремы

$\forall_{acdgh}(a = \text{операция}(h)\ \&\ c \in \text{носитель}(h)\ \&\ g \in d\ \&\ \text{группа}(h)\ \&\ \text{подгруппа}(d,h) \to a[d,\{c\}] = a[d,\{a(g,c)\}])$

1.24 Вывод неравенства из равенства

Попытка доказать неравенство, подсказанное соотношением для числовых атомов

1. Переход от равенства для разности координат к неравенству, являющемуся следствием неравенства для координаты - множителя противоположной части. Консеквент теоремы имеет вид "$\text{крд}(A,K,i) - \text{крд}(B,K,i) = a \cdot \text{крд}(C,K,i)$". Проверяется неравенство $0 \le a$, к антецедентам добавляется неравенство $0 \le \text{крд}(C,K,i)$, консеквентом становится $0 \le \text{крд}(A,K,i) - \text{крд}(B,K,i)$. (Прием нормкрд - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abdestK}(0 < s - t\ \&\ s \in e\ \&\ t \in e\ \&\ \text{неподв}(d,e)\ \&\ \text{мточка}(b)\ \&\ \text{Равндвиж}(b,e)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\ \&\ \text{Числотр}(e)\ \&\ \text{мтело}(d)\ \&\ a \in \{1,2,3\}\ \&\ 0 \le \text{крд}(\text{Скорость}(b,d,e),K,a) \to 0 \le \text{крд}(\text{Место}(b,s),K,a) - \text{крд}(\text{Место}(b,t),K,a))$

   из теоремы

   $\forall_{abdestK}(0 < s - t\ \&\ s \in e\ \&\ t \in e\ \&\ \text{неподв}(d,e)\ \&\ \text{мточка}(b)\ \&\ \text{Равндвиж}(b,e)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\ \&\ \text{Числотр}(e)\ \&\ \text{мтело}(d)\ \&\ a \in \{1,2,3\} \to \text{крд}(\text{Место}(b,s),K,a) - \text{крд}(\text{Место}(b,t),K,a) = \text{длина}([t,s]) \cdot \text{крд}(\text{Скорость}(b,d,e),K,a))$

2. Вывод неравенства для суммы двух числовых атомов и третьего атома. Консеквент теоремы имеет вид $A = B + C + P$, где A, B, C - невырожденные числовые атомы. Усматривается, что $P \le 0$. При этом не усматривается ни одно из неравенств $A \le B, A \le C$. Консеквент заменяется на $A \le B + C$. Результат упрощается. (Прием числзнач - 38).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a-\text{set}\ \&\ b-\text{set}\ \&\ \text{конечное}(a)\ \&\ \text{конечное}(b) \to \text{card}(a \cup b) \le \text{card}(a)+\text{card}(b))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a-\text{set}\ \&\ b-\text{set}\ \&\ \text{конечное}(a)\ \&\ \text{конечное}(b) \to \text{card}(a \cup b) = -\text{card}(a \cap b) + \text{card}(a) + \text{card}(b))$

3. Получение импликации, выводящей соотношение для координат из соотношения для числовых атомов. Теорема - тождество вида $t = p$, где p содержит единственный в консеквенте невырожденный числовой атом A и не содержит вырожденных, t содержит непустой список вырожденных числовых атомов. Не усматривается ни одно из неравенств $0 \le t, t \le 0$. Последовательно рассматриваются утверждения P вида $0 \le t, t \le 0, 0 < t, t \le 0, t = 0$. После упрощения относительно антецедентов P превращается в некоторое утверждение P_1 с непустым списком параметров. Рассматривается утверждение, полученное из P заменой t на p. Оно упрощается; проверяется, что после упрощения возникает утверждение Q с единственным вхождением атома A. После замены в Q этого атома на новую переменную a возникает утверждение Q_1. Решается задача на описание с условиями $Q_1, a -$ число. Посылками служат антецеденты, единственная неизвестная - a. Ответ R не имеет связанных переменных. К антецедентам теоремы добавляется результат подстановки в R атома A вместо переменной a, консеквентом становится P_1. Результат упрощается. (Прием числкоэфф - 20).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{defghiK}(\neg(d = \text{вектор0})\ \&\ \neg(i = \text{вектор0})\ \&\ \text{коорд}(d, K) = (f, g)\ \&$
   $\text{коорд}(i, K) = (e, h)\ \&\ \text{уголмежду}(d, i) < \pi/2\ \&\ \text{Вектор}(d)\ \&\ \text{Вектор}(i)\ \&$
   $\text{прямкоорд}(K) \to 0 < ef + gh)$

   из теоремы

   $\forall_{defghiK}(\neg(d = \text{вектор0})\ \&\ \neg(i = \text{вектор0})\ \&\ \text{коорд}(d, K) = (f, g)\ \&$
   $\text{коорд}(i, K) = (e, h)\ \&\ \text{Вектор}(d)\ \&\ \text{Вектор}(i)\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \to$
   $\cos(\text{уголмежду}(d, i)) = (ef + gh)/(\sqrt{e^2 + h^2} \cdot \sqrt{f^2 + g^2}))$

Вывод эквивалентности для неравенств, получающихся одно из другого тождественным преобразованием подвыражения

1. Получение эквивалентности, преобразующей неравенство для координат в неравенство для невырожденных числовых атомов (случай бесповторного терма). Теорема - тождество вида $t = p$, где p содержит единственный в консеквенте невырожденный числовой атом и не содержит вырожденных, t содержит непустой список вырожденных числовых атомов. Это тождество связывает невырожденные числовые атомы с параметрами координат. Не усматривается ни одно из неравенств $0 \le t, t \le 0$. Последовательно рассматриваются утверждения P вида $0 \le t, t \le 0, 0 < t, t < 0, t = 0$. После упрощения относительно антецедентов P превращается в некоторое бесповторное утверждение P_1 с непустым списком параметров. В антецедентах нет уравнения для координат множества объектов. Рассматривается утверждение, полученное из P заменой t на p. Оно

упрощается и получается некоторое утверждение Q. Консеквентом становится эквивалентность $P_1 \leftrightarrow Q$. Результат упрощается. (Прием числкоэфф - 18).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abABCDK}(\neg(A = D)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&$ полкоорд$(D, K) = (a, b)\ \&\ D -$ точка $\&$ разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB))\ \&$ прямкоорд$(K) \to b < 0 \leftrightarrow 0 < \angle(BAD))$

из теоремы

$\forall_{abABCDK}($прямкоорд$(K)\ \&\ D -$ точка $\&\ \neg(A = D)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&$ разныестороны$(C, D,$ прямая$(AB))\ \&$ полкоорд$(D, K) = (a, b) \to \angle(BAD) = -b)$

2. Получение эквивалентности, преобразующей неравенство для координат в неравенство для невырожденных числовых атомов (случай терма с повторынми вхождениями переменных). Теорема - тождество вида $t = p$, где p содержит единственный в консеквенте невырожденный числовой атом и не содержит вырожденных, t содержит непустой список вырожденных числовых атомов. Это тождество связывает невырожденные числовые атомы с параметрами координат. Не усматривается ни одно из неравенств $0 \le t, t \le 0$. Последовательно рассматриваются утверждения P вида $0 \le t, t \le 0, 0 < t, t < 0, t = 0$. После упрощения относительно антецедентов P превращается в некоторое утверждение P_1 с непустым списком параметров. Переменные $x_1, \ldots, x_k$ встречаются в P_1 более одного раза. В антецедентах нет уравнения для координат множества объектов, но есть равенство "коорд$(A, K) = (y_1, \ldots, y_n)$", где $y_1, \ldots, y_n$ - переменные, включающие весь список $x_1, \ldots, x_k$. В антецедентах нет равенства для K. Выбираются новые переменные $C, C_1, \ldots, C_n$. К антецедентам добавляются утверждения "$K = (C, C_1, \ldots, C_n)$", "$y_1 = 0$", ..., "$y_n = 0$", "$A = C$". Рассматривается утверждение, полученное из P заменой t на p. Оно упрощается и получается некоторое утверждение Q. Консеквентом становится эквивалентность $P_1 \leftrightarrow Q$. Результат упрощается. (Прием числкоэфф - 19).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdfghjkABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ g = (A, f, h)\ \&$ коорд$(B, g) = (c, d)\ \&$ коорд$(C, g) = (j, k)\ \&\ A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&\ C -$ точка $\&$ прямкоорд$(g) \to 0 < cj + dk \leftrightarrow 0 < -\angle(BAC) + \pi/2)$

из теоремы

$\forall_{abcdgjkABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&$ коорд$(A, g) = (a, b)\ \&$ коорд$(B, g) = (c, d)\ \&$ коорд$(C, g) = (j, k)\ \&\ A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&$ $C -$ точка $\&$ прямкоорд$(g) \to \cos(\angle(BAC)) =$ $((c - a)(j - a) + (d - b)(k - b))/(\sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2} \cdot \sqrt{(j - a)^2 + (k - b)^2}))$

1.25 Добавление антецедентов, упрощающих консеквент

Нахождение условий вырождения заменяющей части консеквента

1. Попытка найти условие зануления операции над конечным семейством путем перестановки кванторов. Теорема - тождество $A = B$, используемое для исключения описателей. Выражение B элементарное, причем его сложность больше сложности выражения A. Внутри A выделяется подвыражение "$F(\lambda_{x_1 \ldots x_k}(t, C))$", где F - обобщение ассоциативной и коммутативной операции f на наборы произвольной длины. Операция f имеет единицу E. Кванторная импликация "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(C \to t = E)$" упрощается относительно антецедентов теоремы и превращается в некоторую кванторную импликацию Q, консеквентом которой является квантор существования. Утверждение Q добавляется к антецедентам, а консеквентом становится равенство $B = E$. Результат упрощается. (Прием описатель - 72).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{nA}(\forall_p(\text{перестановка}(p, \{1, \ldots, n\}) \to \exists_i(A(i, p(i)) = 0 \ \& \ i - \text{натуральное} \ \& \ i \leq n)) \ \& \ \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \to \det(A) = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{An}(n - \text{натуральное} \ \& \ \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \to \det(A) = \sum_{p, \text{перестановка}(p, \{1, \ldots, n\})}((-1)^{\text{четность}(p)} \prod_{i=1}^{n} A(i, p(i))))$

Добавление условий, позволяющих применить к консеквенту эквивалентность типа сокращения

1. Отождествление противоположных числовых атомов в соотношении пропорциональности. Консеквент теоремы имеет вид "$A_1 \cdot A_2 = B_1 \cdot B_2$", где A_1, A_2, B_1, B_2 - невырожденные числовые атомы. К антецедентам добавляется равенство $A_1 = A_2$ и условие $\neg(A_1 = 0)$. Консеквентом становится $A_2 = B_2$. Результат упрощается. (Прием пропорция - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AD) = \text{прямая}(AE)) \ \& \ l(AB) = l(AD) \ \& \ B \in \text{прямая}(AD) \ \& \ C \in \text{прямая}(AE) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(DE) \to l(DE) = l(BC))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ B \in \text{прямая}(AD) \ \& \ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC) \ \& \ C \in \text{прямая}(AE) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(AD)) \to l(AB)l(DE) = l(AD)l(BC))$

2. Фиксация отношения двух числовых атомов через соотношение пропорциональности в антецедентах. Консеквент теоремы имеет вид "$A_1 \cdot t_1 = A_2 \cdot t_2$", где A_1, A_2 - невырожденные числовые атомы, каждый из которых имеет не более 2 параметров. Общее число переменных теоремы не более 4. Выбирается новые переменные a, b. К антецедентам добавляются утверждения $a \cdot A_1 = b \cdot A_2, a -$ число, $b -$ число, $\neg(A_2 = 0)$. Консеквентом становится $b \cdot t_1 = a \cdot t_2$. (Прием пропорция - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abdefg}(\neg(d = g)\ \&\ \neg(e = f)\ \&\ \neg(e = g)\ \&\ \neg(f = g)\ \&\ al(de) = bl(ef)\ \&$
   $e \in$ отрезок$(df)\ \&\ a -$ число $\&\ b -$ число $\&\ d -$ точка $\&\ e -$ точка $\&$
   $f -$ точка $\&\ g -$ точка $\rightarrow b\sin(\angle(egf))l(fg) = a\sin(\angle(dge))l(dg))$

   из теоремы

   $\forall_{defg}(f -$ точка $\&\ d -$ точка $\&\ \neg(d = g)\ \&\ \neg(e = g)\ \&\ \neg(f = g)\ \&$
   $e \in$ отрезок$(df)\ \&\ e -$ точка $\&\ g -$ точка $\rightarrow \sin(\angle(egf))l(de)l(fg) =$
   $\sin(\angle(dge))l(dg)l(ef))$

3. Попытка усмотреть зависимость от отношения двух числовых атомов. Консеквент теоремы имеет вид $A = B$ где A - невырожденный числовой атом, а внутри B имеется подвыражение "C_1/C_2". Для некоторых двух невырожденных числовых атомов P_1, P_2, каждый из которых входит как в C_1, так и в C_2, усматривается, что данная дробь зависит только от отношения этих атомов. Выбираются новые переменные a, b. К антецедентам добавляются равенство $a \cdot P_1 = b \cdot P_2$ и утверждения $a -$ число, $b -$ число. Внутри дроби P_1 заменяется на b, P_2 - на a. Результат упрощается. (Прием числзнач - 19).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ al(AC) = bl(BC)\ \&\ a -$ число $\&$
   $b -$ число $\&\ A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&\ C -$ точка $\rightarrow \angle(BAC) =$
   $\arccos((b - a\cos(\angle(ACB)))/\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle(ACB))}))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\rightarrow$
   $\angle(BAC) = \arccos((-\cos(\angle(ACB))l(BC) + l(AC)) :$
   $\sqrt{l(AC)^2 + l(BC)^2 - 2l(AC)l(BC)\cos(\angle(ACB))}))$

Попытка упростить консеквент, добавив к антецедентам условие невырожденности некоторого выражения

1. Попытка упростить заменяющее выражение, добавив к антецедентам необходимое условие непустоты класса. Консеквент - равенство $A = B$, причем внутри A имеется собственное подвыражение "$\mathrm{set}_{x_1 \ldots x_k}(P_1\ \&\ \ldots P_n)$", где все P_i элементарны. Решается задача на исследование, посылками которой служат антецеденты теоремы и утверждения $P_1, \ldots, P_n$. Целевая установка задачи ориентирует на вывод следствий без переменных $x_1, \ldots, x_k$. После ее решения в посылках задачи выбирается утверждение Q, не содержащее переменных $x_1, \ldots, x_k$ и выведенное с использованием утверждений P_i. Оно добавляется к антецедентам,

и предпринимается попытка упростить относительно расширенного списка антецедентов выражение B. Если получается более короткое выражение B_1, то в консеквенте B заменяется на B_1. Результат упрощается. (Прием описатель - 56).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acm}(m < 0\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ m - \text{целое}\ \&\ 0 \le c - a \to \text{card}(\text{set}_n(m|n\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ a \le n\ \&\ n \le c)) = 1 + [-c/m] + [a/m])$

из теоремы

$\forall_{acm}(m < 0\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ m - \text{целое} \to \text{card}(\text{set}_n(m|n\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ a \le n\ \&\ n \le c)) = \max(1 + [-c/m] + [a/m], 0))$

1.26 Навешивание внешнего оператора на обе части тождества

Переход от равенства значений к равенству функций и вывод следствия из этого равенства

1. Интегрирование величины, определяемой через производную. Теорема - определение некоторого выражения P при помощи равенства $A = B$. Это выражение входит в левую часть, правая часть имеет вид "производная(F, a)". Заголовок выражения F - символ "отображение", a - переменная, не входящая в F. Выбираются новые переменные T, b, c. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих a, и подсписок S_2 остальных утверждений. Антецедентами новой теоремы становятся утверждения S_2, Числотр$(T), b -$ число$, c -$ число$, T = [b, c], T \subseteq \text{set}_a(S_1)$. Консеквентом становится равенство $F(c) = F(b) + \int_b^c A da$. Результат упрощается. (Прием определение - 220).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acde}(e = [c, d]\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ \text{мточка}(a)\ \&\ \text{Числотр}(e) \to \text{длина}(\text{Путь}(a, [c, d])) = \int_c^d \text{скорость}(a, t) dt)$

   из теоремы

   $\forall_{ast}(\text{мточка}(a)\ \&\ s - \text{число}\ \&\ t - \text{число}\ \&\ 0 \le t - s \to \text{скорость}(a, t) = d\text{длина}(\text{Путь}(a, [s, t]))/dt)$

Применение одной и той же операции к обеим частям тождества и упрощение одной из этих частей

1. Попытка рассмотреть мощности в равенстве для двух множеств и исключить описатель "класс" в заменяющем терме. Консеквент - равенство $A = B$, где значением A служит множество. Самый сложный подтерм левой части - сама эта часть. В правой части имеется подвыражение с тем же заголовком, но более короткое. Внутри B встречается описатель "класс". Выражение card(B)

упрощается относительно антецедентов и превращается в выражение C, не содержащее символа "класс". Консеквентом становится равенство $\mathrm{card}(A) = C$. Результат упрощается. (Прием сокращ - 37).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{слово} \to \mathrm{card}(\text{слой}(\text{префикс}(b, a), b)) = 1 + \mathrm{card}(\text{слой}(a, b)))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{слово} \to \text{слой}(\text{префикс}(b, a), b) = \{1\} \cup \mathrm{set}_i(i - 1 \in \text{слой}(a, b)\ \&\ i - \text{число}))$

2. Изменение знака заменяемой части. Теорема - тождество общей стандартизации $A = B$. По заголовку заменяемой части A определяется операция f типа отрицания (т.е. такая, что $f(f(x)) = x$). Консеквент заменяется на $f(A) = f(B)$. Результат упрощается. Проверяется, что снова получается тождество общей стандартизации с прежним направлением замены. (Прием нормализация - 135).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to 1 - \cos a = 2(\sin(a/2))^2)$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to \cos a - 1 = -2(\sin(a/2))^2)$

3. Дифференцирование равенства с определенным интегралом. Консеквент теоремы имеет вид "$\int_t^a F(x)dx = A$". Здесь a - переменная, не имеющая других вхождений в левую часть, t - константа. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих a, и подсписок S_2 остальных утверждений. Из S_2 усматривается истинность равенства "$\mathrm{set}_a(S_1) = \mathrm{Dom}(F)$". Выражение "$\lambda_a(A, S_1)$" упрощается и превращается в выражение B, не содержащее описателя "отображение". Антецедентами становятся утверждения S_2 и "$\text{непрерывно}(F, \mathrm{set}_a(S_1))$", консеквентом - равенство "$F = \lambda_a(\text{производная}(B, a))$". Новая теорема упрощается. (Прием описатель - 107).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fP}(f - \text{функция}\ \&\ \text{непрерывно}(\text{плотнраспред}(f, P), \mathbb{R})\ \&\ \text{верпространство}(P)\ \&$
   $\text{непрвеличина}(f, P) \to \text{плотнраспред}(f, P) =$
   $\lambda_x(\text{производная}(\text{функраспред}(f, P), x), x - \text{число}))$

   из теоремы

   $\forall_{fxP}(f - \text{функция}\ \&\ x - \text{число}\ \&\ \text{верпространство}(P)\ \&\ \text{непрвеличина}(f, P) \to$
   $\text{функраспред}(f, P)(x) = \int_{-\infty}^{x} \text{плотнраспред}(f, P)(y)dy)$

1.27 Переход к утверждению существования

Усматривается реализуемость группы антецедентов, содержащих некоторые параметры X консеквента. Эти антецеденты исключаются; часть их добавляется к консеквенту, и на консеквент навешивается квантор существования по X. Если некоторые переменные X в новом консеквенте выражаются через другие, то они исключаются

1. Вывод утверждения существования путем рассмотрения реализуемости группы антецедентов, содержащих заданный параметр. Консеквент теоремы - отличный от равенства нечисловой двуместный предикат A. Выбирается параметр x утверждения A. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Проверяется, что в S_1 не более 4 утверждений, а число и сложность утверждений в S_2 не меньше, чем в S_1. Проверяется, что утверждение "$\exists_x(S_1)$ следствие S_2. При этом утверждения списка S_2 не являются результатами подстановки вместо x в утверждения списка S_1, пополненного утверждением A. Списком антецедентов становится S_2, консеквентом - $\exists_x(S_1\ \&\ A)$. Результат упрощается. Проверяется, что он не имеет избыточных существенных антецедентов. (Прием отношение - 23).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCEFG}(\neg(A=C)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AC)=\text{прямая}(BC))\ \&$
   $l(AF)=l(CF)\ \&\ l(BE)=l(CE)\ \&\ E\in\text{прямая}(BC)\ \&\ F\in\text{прямая}(AC)\ \&$
   $G\in\text{отрезок}(AE)\ \&\ G\in\text{отрезок}(BF)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&$
   $E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\ \&\ G-\text{точка}\rightarrow\exists_D(lAD)=l(BD)\ \&\ D\in\text{отрезок}(AB)\ \&$
   $G\in\text{отрезок}(CD)\ \&\ D-\text{точка})$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDEFG}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB)=\text{прямая}(AC))\ \&$
   $l(AD)=l(BD)\ \&\ l(AF)=l(CF)\ \&\ l(BE)=l(CE)\ \&\ D\in\text{прямая}(AB)\ \&$
   $E\in\text{прямая}(BC)\ \&\ F\in\text{прямая}(AC)\ \&\ G\in\text{отрезок}(AE)\ \&\ G\in\text{отрезок}(BF)\ \&$
   $A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\ \&$
   $G-\text{точка}\rightarrow G\in\text{отрезок}(CD))$

2. Получение импликации, задающей общий вид уравнения множества объектов, путем отбрасывания в антецедентах равенств для координат объектов. Консеквент теоремы имеет вид "координ$(A,K)=B$", где B - выражение с заголовком "класс". Находится список S антецедентов вида "координ$(x_1,K)=t_1$", ..., "координ$(x_k,K)=t_k$", где $x_1,\ldots,x_k$ - переменные. Составляется список $y_1,\ldots,y_n$ всех параметров выражений $t_1,\ldots,t_k$. Проверяется, что они не входят в остальные антецеденты и имеют численные значения. Утверждения S_1 исключаются из антецедентов. Если B содержит невырожденные числовые атомы $C_1,\ldots,C_m$, то для них вводятся новые переменные $z_1,\ldots,z_k$. Эти атомы заменяются в B на $z_1,\ldots,z_k$, а к антецедентам добавляются равенства $C_i=z_i$. Консеквентом становится утверждение "$\exists_{y_1\ldots y_n}(y_1-\text{число}\ \&\ \ldots y_n-\text{число}\ \&\ \text{координ}(A,K)=B)$", где B преобразовано указанным выше образом. Результат упрощается. (Прием уравнмножество - 4).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABK}(\neg(A = B)$ & $A -$ точка & $B -$ точка & систкоорд$(K) \rightarrow$
$\exists_{abcd}($коорд$($прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(\exists_t(x = a + t(c - a)$ & $y = b + t(d - b)$ &
$t -$ число)) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число))

из теоремы

$\forall_{ABKabcd}(A -$ точка & $B -$ точка & систкоорд(K) & коорд$(A, K) = (a, b)$ &
коорд$(B, K) = (c, d)$ & $\neg(A = B) \rightarrow$ коорд$($прямая$(AB), K) =$
$\mathrm{set}_{xy}(\exists_t(t -$ число & $x = (c - a)t + a$ & $y = (d - b)t + b)))$

3. Попытка уменьшения числа параметров одного из уравнений с помощью параметрического описания консеквента. Консеквент теоремы - равенство A без невырожденных числовых атомов, содержащее параметры уравнения для координат множества точек. Это уравнение - антецедент B вида "коорд$(P, K) = C$"; заголовком выражения C служит символ "класс". Предпринимается попытка, разрешая уравнение A относительно параметров уравнения, получить параметрическое их описание, у которого число параметров меньше числа неизвестных. Если это удалось, то антецедент B преобразуется задачей на исследование в равенство "коорд$(P, K) = Q$", у которого не определяемых прочими антецедентами параметров $z_1, \ldots, z_p$ меньше, чем у B. Из антецедентов удаляется утверждение B, а консеквентом становится утверждение вида $\exists_{z_1 \ldots z_p}(D$ & коорд$(P, K) = Q)$. (Прием числсвязь - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{defABCDK}(\neg(A = D)$ & $\neg(B = C)$ & коорд$($прямая$(BC), K) =$
   $\mathrm{set}_{uv}(f + du + ev = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) & $d -$ число & $e -$ число &
   $f -$ число & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка &
   прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & прямкоорд$(K) \rightarrow \exists_a($коорд$($прямая$(AD), K) =$
   $\mathrm{set}_{xy}(a + ex - dy = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & $a -$ число))

   из теоремы

   $\forall_{abcdefABCDK}(\neg(A = D)$ & $\neg(B = C)$ & коорд$($прямая$(AD), K) =$
   $\mathrm{set}_{xy}(c + ax + by = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & коорд$($прямая$(BC), K) =$
   $\mathrm{set}_{uv}(f + du + ev = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) & $a -$ число & $b -$ число &
   $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $A -$ точка & $B -$ точка &
   $C -$ точка & $D -$ точка & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & прямкоорд$(K) \rightarrow$
   $ad + be = 0)$

Подвыражение консеквента заменяется на вспомогательную переменную, и на консеквент навешивается квантор существования по этой переменной

1. Использование простой импликации без существенных антецедентов для вывода теорем приемов непосредственного усмотрения истинности квантора существования либо ложности квантора общности. Теорема не имеет существенных антецедентов. Ее консеквент(с точностью до отбрасывания отрицания) имеет вид "$P(x_1 \ldots x_{i-1} t x_{i+1} \ldots x_n)$", где $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ - различные переменные. Выбирается новая переменная y, в консеквенте t заменяется на y, и на консеквент навешивается квантор существования по y. Под квантор заносится также утверждение $T(y)$, где T - тип значения выражения t. Дополнительно

выводится версия теоремы, в которой квантор существования представлен как отрицание квантора общности. (Прием пример - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_b(b - \text{set} \to \exists_a(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq b))$

из теоремы

$\forall_b(b - \text{set} \to b \subseteq b)$

2. Ввод вспомогательных параметров для числовых атомов, встрчающихся в уравнении множества объектов. Консеквент теоремы имеет вид "коорд$(A, K) = B$", где заголовок выражения B - символ "класс". Находятся все невырожденные числовые атомы $C_1, \ldots, C_n$, входящие в B. Выбираются новые переменные $y_1, \ldots, y_n$, и определяется результат B_1 замены в B подтермов C_i на y_i. Консеквент заменяется на $\exists_{y_1 \ldots y_n}(y_1 - \text{число} \ \& \ \ldots \ \& \ y_n - \text{число} \ \& \ \text{коорд}(A, K) = B_1)$. (Прием уравнмножество - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abABK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \&$
$\text{прямкоорд}(K) \to \exists_c(\text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) =$
$\text{set}_{xy}(c - 2ax - 2by + x^2 + y^2 = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ c - \text{число}))$

из теоремы

$\forall_{abABK}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \ \& \ \neg(A = B) \ \&$
$\text{коорд}(A, K) = (a, b) \to \text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) =$
$\text{set}_{xy}((x - a)^2 + (y - b)^2 = l(AB)^2 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$

3. Усмотрение существования объекта. Теорема не имеет существенных антецедентов. Ее консеквент - элементарное утверждение A. Его корневой операнд (после отбрасывания корневого отрицания, если оно есть) - некоторое выражение t, отличное от переменной. Выбирается новая переменная x, и в консеквенте t заменяется на x, после чего на консеквент навешивается квантор существования по x. Под квантор заносится также утверждение $T(x)$, где T - тип значения выражения t. (Прием элементарно - 15).

Пример: вывод теоремы

$\exists_a(\neg(a = \emptyset) \ \& \ a - \text{set})$

из теоремы

$\forall_{cd}(d - \text{слово} \to \neg(\{c; d\} = \emptyset))$

Вывод утверждения существования из частного случая

1. Вывод утверждения существования. Теорема - элементарное утверждение вида $P(t)$, где выражение t константное. Выводится теорема $\exists_x P(x)$. (Прием конст - 5).

Пример: вывод теоремы

$\exists_a(a - \text{set})$

из теоремы

$\emptyset - \text{set}$

2. Вывод утверждения существования объекта, определяемая характеристика которого принимает заданное константное значение. Консеквент теоремы - равенство $A = B$, выражающее сложный числовой атом $f(t_1 \dots t_n)$ через более простые. Теорема получена в цикле вывода, начинающегося с определения числового атома $f(x_1 \dots x_n)$. Новая теорема имеет консеквент вида "$\exists_{x_1 \dots x_n}(f(x_1 \dots x_n) = B \ \& \ D)$", где D - конъюнкция условий на $x_1, \dots, x_n$ из антецедентов определения. (Прием числатом - 60).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_n(n - \text{натуральное} \ \& \ 0 \leq n - 2 \rightarrow \exists_a(\text{перестановка}(a, \{1, \dots, n\}) \ \& \ \text{четность}(a) = 1))$

   из теоремы

   $\forall_{bcd}(\neg(b = c) \ \& \ b \in \{1, \dots, d\} \ \& \ c \in \{1, \dots, d\} \ \& \ d - \text{натуральное} \rightarrow \text{четность}(\text{транспозиция}(b, c, d)) = 1)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{an}(n - \text{натуральное} \ \& \ \text{перестановка}(a, \{1, \dots, n\}) \rightarrow \text{четность}(a) = \text{числоинверсий}(a) (\text{mod } 2))$

Антецеденты, содержащие заданные переменные, переносятся в конъюнктивные члены консеквента, и на консеквент навешивается квантор существования по этим переменным

1. Перенесение в консеквент и занесение под квантор существования антецедента, выражающего координаты точки, упоминаемой в обозначении некоторого множества точек. Консеквент теоремы - равенство R без невырожденных числовых атомов, содержащее параметры уравнения для координат множества точек. Имеется антецедент вида "$\text{коорд}(A, K) = (x_1, \dots, x_n)$", где A - переменная, для которой в антецедентах встречается выражение $f(\dots A \dots)$, обозначающее множество точек; $x_1, \dots, x_n$ - различные переменные, не встречающиеся в других антецедентах. Равенство "$\text{коорд}(A, K) = (x_1, \dots, x_n)$" исключается из списка антецедентов. Консеквентом становится утверждение $\exists_{x_1 \dots x_n}(B \ \& \ R \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (x_1, \dots, x_n))$, где B - утверждения, необходимые для сопровождения по о.д.з. (Прием числсвязь - 11).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{hmnpqrsuvAB}(\neg(m = n) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(h, s) = (u, v) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), s) = \text{set}_{xy}(r + px + qy = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ h \in \text{прямая}(AB) \ \& \ h \in \text{окружность}(mn) \ \& \ p - \text{число} \ \& \ q - \text{число} \ \& \ r - \text{число} \ \& \ m - \text{точка} \ \& \ n - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) - \text{касательная к окружность}(mn) \ \& \ \text{прямкоорд}(s) \rightarrow \exists_{fg}(g - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \text{коорд}(m, s) = (f, g) \ \& \ fq + pv - gp - qu = 0))$

из теоремы

$\forall_{fghmnpqrsuvAB}(\neg(m = n)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \text{коорд}(h, s) = (u, v)\ \&\ \text{коорд}(m, s) = (f, g)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), s) = \text{set}_{xy}(r + px + qy = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ h \in \text{прямая}(AB)\ \&\ h \in \text{окружность}(mn)\ \&\ p - \text{число}\ \&\ q - \text{число}\ \&\ r - \text{число}\ \&\ m - \text{точка}\ \&\ n - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AB) - \text{касательная к окружность}(mn)\ \&\ \text{прямкоорд}(s) \rightarrow fq + pv - gp - qu = 0)$

1.28 Переход к импликации для усмотрения противоречивых посылок

Отрицание консеквента переносится в антецеденты, а консеквентом становится константа "ложь"

1. Прием для контроля противоречивых подслучаев. Консеквент имеет вид "$\neg(A)$", где A - нечисловой двуместный предикат. Утверждение A добавляется к антецедентам, а консеквентом становится символ "ложь". Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема контроля противоречивых подслучаев. (Прием отношение - 47).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdD}(a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(a = d)\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ a \in \text{окружность}(bc)\ \&\ d \in \text{окружность}(bc)\ \&\ \neg(a = D)\ \&\ \neg(d = D)\ \&\ D \in \text{прямая}(ad)\ \&\ D \in \text{окружность}(bc) \rightarrow \text{ложь})$

   из теоремы

   $\forall_{abcdD}(a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(a = d)\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ a \in \text{окружность}(bc)\ \&\ d \in \text{окружность}(bc)\ \&\ \neg(a = D)\ \&\ \neg(d = D)\ \&\ D \in \text{прямая}(ad) \rightarrow \neg(D \in \text{окружность}(bc)))$

2. Вывод импликации для усмотрения противоречия. Бесповторный консеквент A выражает свойство некоторого сложного объекта. Его отрицание упрощается и добавляется к антецедентам. Консеквентом становится константа "ложь". Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема контроля противоречивых подслучаев. (Прием свойства - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDE}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C \in \text{прямая}(AB))\ \&\ D \in \text{отрезок}(CE)\ \&\ E \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ A{-}\text{точка}\ \&\ B{-}\text{точка}\ \&\ C{-}\text{точка}\ \&\ \neg(D \in \text{фигура}(ABC)) \rightarrow \text{ложь})$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDE}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C \in \text{прямая}(AB))\ \&\ D \in \text{отрезок}(CE)\ \&\ E \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow D \in \text{фигура}(ABC))$

Отрицание консеквента переносится в антецеденты и переформулируется в терминах вспомогательных переменных для числовых атомов

1. Прием для контроля противоречивых подслучаев. Консеквент теоремы - равенство $A = B$ для невырожденных числовых атомов $C_1, \ldots, C_n$; $n = 3$ либо $n = 4$. Число переменных теоремы не более 4. Сложность консеквента не более чем на 5 превосходит сложность самого сложного атома C_i. Списки параметров этих атомов различны. Отсутствует антецедент с заголовком "равно". Выбираются новые переменные $x_1, \ldots, x_n$. Определяется результат $t_1 = t_2$ замены в консеквенте атомов C_i на переменные $x_1, \ldots, x_n$. К антецедентам добавляются утверждения $C_1 = x_1, \ldots, C_n = x_n$ и отрицание результата обработки равенства $t_1 - t_2 = 0$ нормализаторами общей стандартизации. Консеквентом становится константа "ложь". Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема контроля противоречивых подслучаев. (Прием числовойатом - 63).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdABC}(A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \& \ C - \text{точка } \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \&$
   $l(AB) = a \ \& \ l(AC) = b \ \& \ \angle(BAC) = c \ \& \ l(BC) = d \ \&$
   $\neg(2ab\cos c - a^2 - b^2 + d^2 = 0) \rightarrow \text{ложь})$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \& \ C - \text{точка } \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow$
   $2l(AB)l(AC)\cos(\angle(BAC)) = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)$

2. Извлечение импликации для усмотрения противоречия при контроле подслучая - случай единственного числового атома в консеквенте. Консеквент A - неравенство с единственным невырожденным числовым атомом B. Выбирается новая переменная b, определяются результат A_1 замены в A атома B на b, а также результат A_2 упрощения утверждения $\neg(A_1)$. К антецедентам добавляются утверждения "b – число", "$B = b$", A_2. Консеквент заменяется на константу "ложь". Список антецедентов упрощается. Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема контроля противоречивых подслучаев. (Прием числоценка - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \& \ C - \text{точка } \&$
   $\angle(ABC) = a \ \& \ a < 0 \rightarrow \text{ложь})$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \& \ C - \text{точка } \rightarrow$
   $0 \leq \angle(ABC))$

3. Извлечение импликации для усмотрения противоречия при контроле подслучая - случай двух числовых атомов в консеквенте. Консеквент A - неравенство с двумя числовыми атомами B_1, B_2. Оба они невырожденные. Выбираются новые переменные b_1, b_2. Отрицание результата замены в A атомов B_1, B_2 на b_1, b_2 упрощается и превращается в утверждение A_1. К антецедентам добавляются

утверждения "$B_1 = b_1$", "$B_2 = b_2$", A_1. Консеквент заменяется на константу "ложь". Теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема контроля противоречивых подслучаев. (Прием числоценка - 7).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ 0 < -\angle(ACB) + \angle(BAC) \ \& \ l(AB) = a \ \& \ l(BC) = b \ \& \ 0 \leq a - b \rightarrow \text{ложь})$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \angle(ACB) < \angle(BAC) \rightarrow l(AB) < l(BC))$

1.29 Ввод вспомогательных переменных для координат

Консеквент дает равенство координат некоторому специальному набору. В антецеденты заносится равенство этих координат набору новых параметров, а консеквентом становится соотношение, связывающее новый параметр со старым выражением

1. Варьирование точки, координаты которой вычисляются в антецедентах. Консеквент теоремы имеет вид "коорд$(A, K) = (t_1, \ldots, t_n)$". Не все t_i являются переменными, но некоторые являются. Имеется антецедент вида "коорд$(B, K) = (x_1, \ldots, x_n)$", где $x_1, \ldots, x_n$ - различные переменные; переменные A, B различны. Список $x_{i_1}, \ldots x_{i_k}$ тех t_j, которые суть переменные, содержится в списке $x_1, \ldots, x_n$. Выбираются новые переменные $C, y_1, \ldots, y_n$. Рассматривается объединение S_1 списка антецедентов с результатами подстановки в них переменных $C, y_1, \ldots, y_n$ вместо $B, x_1, \ldots, x_n$. Выделяется подсписок S_2 списка S_1, образованный всеми равенствами с заголовком "набор" у правой части. Решается задача на исследование, посылками которой являются не вошедшие в список S_2 утверждения S_1, а также утверждение $\neg(B = C)$. Целью решения является получение такого списка утверждений, не содержащих A, из которого следовало бы существование подходящей точки A. При этом допускается некоторое усиление посылок. После решения выбирается список S_3 всех посылок, не имеющих заголовок "актив". Проверяется, что в нем переменная A не встречается. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения S_2, S_3, а консеквентом - "$x_{i_1} = y_{i_1} \ \& \ \ldots \ \& \ x_{i_k} = y_{i_k}$". (Прием систкоорд - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdeABCDK}(\neg(c = D) \ \& \ \neg(c \in \text{прямая}(AB)) \ \& \ \neg(c \in \text{прямая}(AC)) \ \& \ \neg(D \in \text{прямая}(AB)) \ \& \ \neg(D \in \text{прямая}(AC)) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ \text{коорд}(c, K) = (d, e) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(cD) \parallel \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow b = e)$

   из теоремы

$\forall_{abABCDEK}(\neg(D \in \text{прямая}(AB))$ & $D -$ точка & $E -$ точка & систкоорд(K) & $\neg(D = E)$ & $K = (A, B, C)$ & $E \in$ прямая(AC) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(DE) & коорд$(D, K) = (a, b) \to$ коорд$(E, K) = (0, b))$

2. Усмотрение тождества для численных параметров координаты. Консеквент имеет вид "коорд$(A, K) = (t_1, \ldots, t_n)$", причем не все t_i константные. Выбираются новые переменные $x_1, \ldots, x_n$. К антецедентам добавляется равенство "коорд$(A, K) = (x_1, \ldots, x_n)$". Выбирается такое t_i, которое не содержит невырожденных числовых атомов, и консеквент заменяется на $t_i = x_i$. Избыточные антецеденты удаляются. (Прием систкоорд - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdghjrK}(\text{коорд}(a, K) = (h, j, r)$ & $g -$ число & систкоорд(K) & Вектор(a) & коорд$(ga, K) = (b, c, d) \to b = gh)$

   из теоремы

   $\forall_{aghjrK}(\text{коорд}(a, K) = (h, j, r)$ & $g -$ число & систкоорд(K) & Вектор$(a) \to$ коорд$(ga, K) = (gh, gj, gr))$

3. Использование координатного набора для вывода соотношения с невырожденными числовыми атомами. Аналогично предыдущему. Консеквент имеет вид "коорд$(A, K) = (t_1, \ldots, t_n)$", причем не все t_i константные. Выбираются новые переменные $x_1, \ldots, x_n$. К антецедентам добавляется равенство "коорд$(A, K) = (x_1, \ldots, x_n)$". Выбирается такое t_i, которое не содержит невырожденных числовых атомов. Равенство $t_i = x_i$ упрощается относительно антецедентов и становится консекветом. (Прием систкоорд - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abABCDK}(\text{систкоорд}(K)$ & $K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, B, D) & коорд$(D, K) = (a, b) \to l(AD) = al(AB))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDK}(\text{систкоорд}(K)$ & $K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AB) & точкалуча$(A, B, D) \to$ коорд$(D, K) = (l(AD)/l(AB), 0))$

4. Разрешение координат объекта, встречающегося в антецедентах, относительно координат объекта, заданных в консеквенте. Консеквент имеет вид "коорд$(A, K) = (t_1, \ldots, t_n)$". В антецедентах находится равенство "коорд$(B, K) = (x_1, \ldots, x_n)$", где $x_1, \ldots, x_n$ - различные переменные. Выбираются новые переменные $y_1, \ldots, y_n$. Находится список S_1 всех антецедентов, не содержащих $x_1, \ldots, x_n$. Задача на описание решает уравнения $t_1 = y_1, \ldots, t_n = y_n$ относительно $x_1, \ldots, x_n$. Посылки - утверждения S_1 и равенство "коорд$(A, K) = (y_1, \ldots, y_n)$". Ответ R преобразуется к виду д.н.ф., причем выбирается тот единственный дизъюнктивный член D, конъюнктивные члены которого содержат равенства $x_1 = r_1, \ldots, x_n = r_n$ для всех неизвестных $x_1, \ldots, x_n$. Остальные конъюнктивные члены D суть некоторые условия U, не выполнимые для прочих дизъюнктивных членов ответа R. Из антецедентов

теоремы исключается равенство "коорд$(B,K)=(x_1,\ldots,x_n)$" и к ним добавляются утверждения "коорд$(A,K)=(y_1,\ldots,y_n)$", U. Консеквентом становится "коорд$(B,K)=(r_1,\ldots,r_n)$". (Прием равнозначны - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdefgK}$(коорд$(a,K)=(e,g)$ & систкоорд(K) & Вектор(c) & Вектор(a) & $b=c+a$ & коорд$(b,K)=(d,f)\rightarrow$ коорд$(c,K)=(d-e,f-g)$)

из теоремы

$\forall_{abceglmK}$(коорд$(c,K)=(l,m)$ & коорд$(a,K)=(e,g)$ & систкоорд(K) & Вектор(c) & Вектор(a) & $b=c+a\rightarrow$ коорд$(b,K)=(e+l,g+m)$)

1.30 Проверка стандартного свойства одной части тождества

1. Усмотрение дифференцируемости из непрерывности подынтегрального выражения. Консеквент имеет вид "$\int_t^y F(x)dx=A$". Здесь y - переменная, не входящая в t; F - некоторое выражение, определяющее функцию. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих y, и подсписок S_2 остальных утверждений. Проверяется, что утверждение "$\mathrm{Dom}(F)=\mathrm{set}_y(S_1)$" - следствие утверждений S_2. Выражение "$\lambda_y(A,S_1)$" упрощается и превращается в выражение B без описателя "отображение". Выражение "$\mathrm{set}_y(S_1)$" упрощается и превращается в выражение для непустого промежутка. К антецедентам добавляется утверждение "непрерывно(F,y)". Консеквентом становится утверждение "дифференцируема(B,y)". Результат упрощается. (Прием описатель - 109).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fxP}$($f-$функция & $x-$число & непрерывно(плотнраспред$(f,P),x)$ & верпространство(P) & непрвеличина$(f,P)\rightarrow$ дифференцируема(функраспред$(f,P),x)$)

   из теоремы

   $\forall_{fxP}$($f-$функция & $x-$число & верпространство(P) & непрвеличина$(f,P)\rightarrow$ функраспред$(f,P)(x)=\int_{-\infty}^{x}$ плотнраспред$(f,P)(y)dy$)

1.31 Усмотрение простейшего свойства определяемого понятия

1. Усмотрение монотонности по включению относительно численного параметра. Теорема - определение множества A посредством равенства $A=B$, где заголовок B - символ "класс", либо посредством эквивалентности "$x\in A\leftrightarrow B$", где x - переменная, не входящая в антецеденты. Выбирается переменная y, входящая как в A, так и в B. Проверяется, что каждое вхождение y в B имеет вид $t<y$ либо $t\leq y$, причем это неравенство расположено только внутри подтермов

с заголовками "и", "или", "существует", либо внутри консеквентов кванторных импликаций, либо внутри корневого описателя "класс". Выбирается новая переменная z. Определяется результат A_1 замены в A переменной y на z. К антецедентам добавляются результаты подстановки в них z вместо y, а также утверждение $y \leq z$. Консеквентом становится "$A \subseteq A_1$". (Прием определение - 243).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcn}(n - $ натуральное & числнабор(a, n) & $b -$ число & $c -$ число & $b \leq c \rightarrow$ евклокр$(a, b) \subseteq$ евклокр$(a, c))$

из теоремы

$\forall_{abn}(n - $ натуральное & числнабор(a, n) & $b -$ число $\rightarrow$ евклокр$(a, b) =$ set$_x$(числнабор(x, n) & евклрасст$(x, a) < b))$

2. Усмотрение монотонности по включению относительно числового набора. Теорема - определение множества A посредством равенства $A = B$, где заголовок B - символ "класс", либо посредством эквивалентности "$x \in A \leftrightarrow B$", где x - переменная, не входящая в антецеденты. Выбирается переменная y, входящая как в A, так и в B. Проверяется, что каждое вхождение y в B имеет вид $y(i)$ и расположено внутри некоторого неравенства таким образом, что после возможной перегруппировки оказывается со знаком "плюс" в правой его части. Это неравенство, в совю очередь, расположено внутри квантора общности вида $\forall_i(i \in C$ & $D \rightarrow E)$. Здесь C - результат упрощения относительно антецедентов выражения Dom(y). Выбирается новая переменная z. Определяется результат A_1 замены в A переменной y на z. К антецедентам добавляются результаты подстановки в них z вместо y, а также утверждение "Меньшеилиравно(y, z)", означающее, что значение функции z в каждой точке не меньше значения функции y. Консеквентом становится "$A \subseteq A_1$". (Прием определение - 246).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcn}(n - $ натуральное & числнабор(a, n) & числнабор(b, n) & числнабор(c, n) & Меньшеилиравно$(b, c) \rightarrow$ евклпрямокр$(a, b) \subseteq$ евклпрямокр$(a, c))$

из теоремы

$\forall_{abn}(n-$натуральное & числнабор(a, n) & числнабор$(b, n) \rightarrow$ евклпрямокр$(a, b) =$ set$_x$(числнабор(x, n) & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow a(i) - b(i) < x(i)$ & $x(i) < a(i) + b(i))))$

3. Усмотрение монотонности по включению - рассмотрение единственной переменной. Теорема - определение множества A посредством равенства $A = B$, где заголовок B - символ "класс", либо посредством эквивалентности "$x \in A \leftrightarrow B$", где x - переменная, не входящая в антецеденты. Выбирается переменная y, входящая как в A, так и в B. Проверяется, что каждое вхождение y в B имеет вид $t \in y$ либо $t \subseteq y$, причем это утверждение расположено только внутри подтермов с заголовками "и", "или", "существует", либо внутри консеквентов кванторных импликаций, либо внутри корневого описателя "класс". Выбирается новая переменная z. Определяется результат A_1 замены в A переменной y на z. К антецедентам добавляются результаты подстановки в них z вместо

y, а также утверждение $y \subseteq z$. Консеквентом становится "$A \subseteq A_1$". (Прием определение - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcd}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ b \subseteq d \to b \cap c \subseteq d \cap c)$

из теоремы

$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \to a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$

4. Усмотрение сохранения непустоты множества. Начало приема в точности такое же, как в предыдущем случае. Но дополнительно к антецедентам добавляется утверждение "$\neg(A = \emptyset)$", а консеквентом становится "$\neg(A_1 = \emptyset)$". (Прием определение - 105).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ a \subseteq b \ \& \ \neg(\text{образ}(f, a) = \emptyset) \to \neg(\text{образ}(f, b) = \emptyset))$

   из теоремы

   $\forall_{fa}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \to \text{set}_x(\exists_y(y \in a \ \& \ x = f(y))) = \text{образ}(f, a))$

5. Усмотрение сохранения непересечения. Начало приема такое же, как в пункте 3 - до момента формирования антецедентов. Рассматривается такое вхождение переменной y в B, которое имеет вид "$t \in y$". Проверяется, что либо каждый надтерм этого вхождения имеет заголовок "и" или является корневым описателем "класс", либо B имеет вид "$\text{set}_u(\exists_{x_1 \ldots x_k}(t \in y \ \& \ u = r \ \& \ D))$", причем t восстанавливается по r однозначно. Если такое вхождение y нашлось, то к антецедентам добавляются результаты подстановки в них z вместо y, а также утверждение "$\text{непересек}(y, z)$". Консеквентом становится "$\text{непересек}(A, A_1)$". (Прием определение - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abf}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, b) \to \text{непересек}(\text{прообраз}(f, a), \text{прообраз}(f, b)))$

   из теоремы

   $\forall_{afx}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \to x \in \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f(x) \in a)$

6. Усмотрение сохранения пересечения. Начало приема в точности такое же, как в пункте 3 - до момента формирования антецедентов. Проверяется, что либо каждое вхождение в B отношения принадлежности либо включения с y расположено только внутри надтермов, либо имеющих заголовок "и", либо являющихся консеквентом кванторной испликации, либо представляющих собой корневой описатель "класс". Допускаются также случаи: либо B имеет вид $\text{set}_u(\exists_{x_1 \ldots x_k}(t \in y \ \& \ u = r \ \& \ D))$, причем t восстанавливается по r однозначно, либо усматривается равенство "$B \cap B_1 = B_2$", где B_1 - результат подстановки

в B переменной z вместо y, B_2 - результат подстановки в B терма $y \cap z$ вместо y, либо B имеет вид "$t \in y \ \vee \ P$". Наконец, проверяется, что A не содержит подтерма вида "$y \cap Q$". Тогда к антецедентам добавляются результаты подстановки в них z вместо y, а консеквентом становится "$A_2 = A \cap A_1$", где A_2 - результат подстановки в A выражения "$y \cap z$" вместо y. (Прием определение - 14).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abf}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \text{прообраз}(f, a \cap b) = \text{прообраз}(f, a) \cap \text{прообраз}(f, b))$

из теоремы

$\forall_{afx}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow x \in \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f(x) \in a)$

7. Усмотрение сохранения объединения. Начало приема в точности такое же, как в пункте 3 - до момента формирования антецедентов. Проверяется, что вхождение переменной y в B единственное и имеет вид "$t \in y$", причем это утверждение расположено только внутри подтермов, имеющих заголовки "и", "или", "существует"либо являющихся корневым описателем "класс". Проверяется, что A не имеет подтерма вида "$y \cup Q$". Определяется результат A_2 подстановки в A выражения "$y \cup z$" вместо y. К антецедентам добавляются результаты подстановки в них z вместо y, а консеквентом становится "$A_2 = A \cup A_1$". (Прием определение - 13).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \times (b \cup c) = (a \times b) \cup (a \times c))$

из теоремы

$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово})$

8. Усмотрение сохранения разности. Начало приема в точности такое же, как в пункте 3 - до момента формирования антецедентов. Проверяется, что либо каждое вхождение в B отношения принадлежности либо включения с y расположено только внутри надтермов, либо имеющих заголовок "и", либо являющихся консеквентом кванторной испликации, либо представляющих собой корневой описатель "класс". Допускается также случай, когда B имеет вид $\text{set}_u(\exists_{x_1 \ldots x_k}(t \in y \ \& \ u = r \ \& \ D))$, причем t восстанавливается по r однозначно. Определяется результат A_2 подстановки в A выражения "$y \setminus z$" вместо y. К антецедентам добавляются результаты подстановки в них z вместо y, а консеквентом становится "$A_2 = A \setminus A_1$". (Прием определение - 15).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abf}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \text{прообраз}(f, a \setminus b) = \text{прообраз}(f, a) \setminus \text{прообраз}(f, b))$

из теоремы

$\forall_{afx}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow x \in \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f(x) \in a)$

9. Усмотрение монотонности по включению относительно всех параметров (множеств). Теорема - определение множества A посредством равенства $A = B$, где заголовок B - символ "класс", либо посредством эквивалентности "$x \in A \leftrightarrow B$", где x - переменная, не входящая в антецеденты. Составляется список $y_1, \ldots, y_k$ всех таких переменных y_i, входящих в A и в B, что каждое вхождение y_i в B имеет вид $t \in y_i$ либо $t \subseteq y_i$, причем это утверждение расположено только внутри подтермов с заголовками "и", "или", "существует", либо внутри консеквентов кванторных импликаций, либо внутри корневого описателя "класс". Проверяется, что $k \geq 2$. Выбираются новые переменные $z_1, \ldots, z_k$. Определяется результат A_1 подстановки в A переменных $z_1, \ldots, z_k$ вместо $y_1, \ldots, y_k$. К антецедентам добавляются результаты подстановки в них $z_1, \ldots, z_k$ вместо $y_1, \ldots, y_k$, а также утверждения "$y_i \subseteq z_i$". Консеквентом становится утверждение "$A \subseteq A_1$". (Прием определение - 28).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ a \subseteq c \ \& \ b \subseteq d \rightarrow a \times b \subseteq c \times d)$

   из теоремы

   $\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово})$

1.32 Усмотрение простейшего свойства функции

1. Вывод условия включения для множества значений, если определяющая часть представляет собой значение некоторой функции. Теорема - определение выражения A, имеющее вид "$A = F(x)$", где x - переменная, входящая в A и не входящая в задающее функцию выражение F. Единственный содержащий x антецедент имеет вид "$x \in B$", где B не содержит x. Выбирается новая переменная f, определяется результат A_1 замены в A переменной x на $f(x)$, и консеквентом становится включение "$\text{Val}(\lambda_x(A_1, x \in \text{Dom}(f))) \subseteq \text{Val}(F)$". Из антецедентов исключается утверждение "$x \in B$" и добавляются утверждения "$f - $ функция", "$\text{Val}(f) \subseteq B$". Результат упрощается. (Прием определение - 259).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aAG}(\text{Val}(a) \subseteq \{1, \ldots, \text{мдлина}(A) + 1\} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ \text{орграф}(G) \ \&$
   $\text{маршрут}(A, G) \rightarrow \text{Val}(\lambda_i(\text{мверш}(A, a(i)), i \in \text{Dom}(a))) \subseteq \text{мвершины}(A))$

   из теоремы

   $\forall_{aGi}(\text{орграф}(G) \ \& \ \text{маршрут}(A, G) \ \& \ i \in \{1, \ldots, \text{мдлина}(A) + 1\} \rightarrow$
   $\text{мверш}(A, i) = A(1)(i))$

2. Вывод условия принадлежности множеству значений, если определяющая часть представляет собой значение некоторой функции. Теорема - определение выражения A, имеющее вид "$A = F(x)$", где x - переменная, входящая в A и не входящая в задающее функцию выражение F. Консеквентом становится утверждение "$A \in \text{Val}(F)$". Результат упрощается. (Прием определение - 260).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{iAG}(i \in \{1, \ldots, \text{мдлина}(A) + 1\}$ & $\text{орграф}(G)$ & $\text{маршрут}(A, G) \rightarrow$
$\text{мверш}(A, i) \in \text{мвершины}(A))$

из теоремы

$\forall_{aGi}(\text{орграф}(G)$ & $\text{маршрут}(A, G)$ & $i \in \{1, \ldots, \text{мдлина}(A) + 1\} \rightarrow$
$\text{мверш}(A, i) = A(1)(i))$

3. Вывод равенства для функции из равенства для ее значения в точке. Консеквент теоремы - равенство, задающее значение определяемой функции F в произвольной точке x: $F(x) = t$. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выражение "$\text{Dom}(F)$" упрощается относительно S_2 и превращается в выражение A, не содержащее символа "область". Консеквентом становится равенство "$F = \lambda_x(t, x \in A)$". Из антецедентов удаляются утверждения S_1 и добавляется утверждение "$\forall_x(x \in A \rightarrow S_1)$". Результат упрощается. (Прием определение - 263).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fP}(\forall_x(x - \text{число} \rightarrow \text{дифференцируема}(\text{функраспред}(f, P), x))$ & $f - \text{функция}$ &
   $\text{верпространство}(P)$ & $\text{непрвеличина}(f, P) \rightarrow \text{плотнраспред}(f, P) =$
   $\lambda_x(\text{производная}(\text{функраспред}(f, P), x), x - \text{число}))$

   из теоремы

   $\forall_{fxP}(f - \text{функция}$ & $x - \text{число}$ & $\text{верпространство}(P)$ & $\text{непрвеличина}(f, P)$ &
   $\text{дифференцируема}(\text{функраспред}(f, P), x) \rightarrow \text{плотнраспред}(f, P)(x) =$
   $\text{производная}(\text{функраспред}(f, P), x))$

4. Усмотрение задания функции через описатель "отображение". Консеквент теоремы имеет вид "$F(x) = t$", где x - переменная, F - неоднобуквенное выражение, не содержащее x. Список антецедентов разбивается на непустой подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Проверяется, что равенство "$\text{Dom}(F) = \text{set}_x(S_1)$" - следствие S_2. Антецедентами становятся утверждения S_2, а консеквентом - "$F = \lambda_x(t, S_1)$". (Прием отображение - 40).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fP}(f - \text{функция}$ & $\text{верпространство}(P)$ & $\text{непрвеличина}(f, P) \rightarrow$
   $\text{функраспред}(f, P) = \lambda_x(\int_{-\infty}^{x} \text{плотнраспред}(f, P)(y)dy, x - \text{число}))$

   из теоремы

   $\forall_{fxP}(f - \text{функция}$ & $x - \text{число}$ & $\text{верпространство}(P)$ & $\text{непрвеличина}(f, P) \rightarrow$
   $\text{функраспред}(f, P)(x) = \int_{-\infty}^{x} \text{плотнраспред}(f, P)(y)dy)$

5. Попытка получить явное определение функции через описатель "отображение". Теорема - определение выражения A посредством равенства $A = B$. Тип значения выражения B - "функция", причем антецеденты не содержат утверждений с заголовком "функция". Выбирается новая переменная x. Выражения

$B(x)$ и $\mathrm{Dom}(B)$ упрощаются относительно антецедентов, пополненных утверждением "$x \in \mathrm{Dom}(B)$". Результаты t, C не содержат, соответственно, символа "значение" и символа "область". Консеквент теоремы заменяется на равенство "$A = \lambda_x(t, x \in C)$". (Прием свертка - 90).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ijn}(n - \text{натуральное } \& \ i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ \neg(i = j) \to$
$\text{транспозиция}(i, j, n) = \lambda_a((i \text{ при } a = i, \text{ иначе } (i \text{ при } a = j, \text{ иначе } a)),$
$a \in \{1, \ldots, n\}))$

из теоремы

$\forall_{ijn}(n - \text{натуральное } \& \ i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ \neg(i = j) \to$
$\text{транспозиция}(i, j, n) = \text{таблица}(\{i \to j, j \to i, \text{тождфунк}(\{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\})\}))$

Глава 2

Склейка нескольких теорем

Две импликации отличаются только парой антецедентов, дизъюнкция которых тождественно истинна. Они объединяются в одну импликацию, получаемую из исходных отбрасыванием указанных антецедентов

1. Склейка двух теорем, отличающихся альтернативными антецедентами. Консеквент теоремы имеет вид "актив(A)". В списке вывода находится другая теорема с таким же консеквентом и такой же корневой связывающей приставкой. Списки антецедентов двух теорем отличаются только двумя утверждениями: в первой теореме - утверждение B, во второй - C. Дизъюнкция $B \vee C$ является следствием списка S общих антецедентов двух теорем. Выводится теорема, полученная из исходной исключением антецедента B. Исходная и дополнительная теоремы помечаются символом "исключение", блокирующим дальнейшее их использование в цикле вывода. Новая теорема рассматривается как обобщение исходной. (Прием актив - 5).

   Пример: вывод импликации

   $\forall_{ABCDK}$(систкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AC) $\rightarrow$ актив($l(AD)$))

   из двух импликаций:

   $\forall_{ABCDK}$(систкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AC) & точкалуча(A, C, D) $\rightarrow$ актив($l(AD)$))

   $\forall_{ABCDK}$(систкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AC) & $A \in$ отрезок(CD) $\rightarrow$ актив($l(AD)$))

   Обе эти импликации имели характеристики "актив(контрольвывода(коорд(D, K)))", указывающие, что соответствующие приемы инициируются усмотрением выражения "коорд(D, K)". Они возникли из альтернативных случаев определения координаты точки и поэтому имели различные последние антецеденты. Так как дизъюнкция данных антецедентов всегда истинна, то они отбрасываются.

2. Склейка двух импликаций, отличающихся альтернативными антецедентами. Теорема - тождество A для нечисловых атомарных выражений. В списке вывода находится другое тождество B, причем список антецедентов S_1 тождества A имеет ту же длину, что список антецедентов S_2 тождества B, консеквенты их и корневые связывающие приставки тоже имеют равные длины. В списке S_1

находится утверждение P, такое, что никакое утверждение списка S_2 не является результатом сохраняющей длину подстановки в P. Аналогично, в списке S_2 находится утверждение Q, такое, что никакое утверждение списка S_1 не является результатом сохраняющей длину подстановки в Q. Рассматриваются списки S_3, S_4, получаемые из S_1, S_2 удалением утверждений P, Q. Утверждения списка S_3 не имеют связанных переменных, причем все параметры утверждения P встречаются в этом списке. Существует подстановка C, преобразующая список S_3 в S_4. Эта подстановка переводит консеквент теоремы A в консеквент теоремы B. Дизъюнкция Q и результата применения C к утверждению P является следствием утверждений S_4. Тогда новая теорема получается из A удалением антецедента P. Теоремы A и B помечаются символом "исключение", блокирующим дальнейшее их использование в цикле вывода. Новая теорема рассматривается как обобщение исходной. (Прием Атомарное - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \rightarrow \ a(\text{вектор}(cB) + \text{вектор}(Ac)) = a\text{вектор}(cB) + a\text{вектор}(Ac))$

из двух теорем:

$\forall_{ABac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow a(\text{вектор}(cB) + \text{вектор}(Ac)) = a\text{вектор}(cB) + a\text{вектор}(Ac))$

$\forall_{ABac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a \leq 0 \rightarrow a(\text{вектор}(cB) + \text{вектор}(Ac)) = a\text{вектор}(cB) + a\text{вектор}(Ac))$

3. Склейка двух теорем, отличающихся альтернативными антецедентами. Теорема A создана для приема, выполняющего дополнительное построение. Ее консеквент содержит единственную переменную x, не входящую в антецеденты. В списке вывода находится другая теорема B аналогичного вида; ее новая переменная консеквента - y. Список антецедентов S_1 теоремы A имеет ту же длину, что список S_2 антецедентов теоремы B. Списки Q_1, Q_2 конъюнктивных членов консеквентов этих теорем тоже имеют равные длины. Списка параметров антецедентов обеих теорем совпадают. Имеется единственное утверждение P_1 списка S_1, не входящее в S_2, и единственное утверждение P_2 списка S_2, не входящее в S_1. В списке Q_2 предпринимается замена переменной y на x. После этого проверяется, что каждое утверждение списка Q_1, не вошедшее в Q_2, является следствием S_1 и пересечение Q_3 списков Q_1, Q_2, а каждое утверждение списка Q_2, не вошедшее в Q_1, - следствием S_2 и Q_3. Проверяется, что дизъюнкция P_1 и P_2 - следствие пересечения S_3 списков S_1, S_2. Антецедентами новой теоремы становятся утверждения S_3, консеквентом - конъюнкция пересечения списка Q_1 и измененного списка Q_2. Теоремы A и B помечаются символом "исключение", блокирующим дальнейшее их использование в цикле вывода. Новая теорема рассматривается как обобщение исходной. (Прием вспомобъекты - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDFK}(\neg(D \in \text{прямая}(AB)) \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ (A, B, C) = K \rightarrow F - \text{точка} \ \& \ \neg(D = F) \ \& \ F \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AC))$

из теоремы

$\forall_{ABCDFK}(\neg(D \in \text{прямая}(AB))$ & разныестороны$(B, D, \text{прямая}(AC))$ & $D-$точка & систкоорд(K) & $(A, B, C) = K \rightarrow F-$точка & $\neg(D = F)$ & $F \in \text{прямая}(AB)$ & $\text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AC))$ & $A \in \text{отрезок}(BF)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDEK}(\neg(D \in \text{прямая}(AB))$ & однасторона$(B, D, \text{прямая}(AC))$ & $D -$ точка & систкоорд(K) & $(A, B, C) = K \rightarrow E-$точка & $\neg(D = E)$ & $E \in \text{прямая}(AB)$ & точкалуча(A, B, E) & $\text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AC))$.

4. Склейка двух импликаций, отличающихся альтернативными антецедентами. Теорема A используется для создания приема вывода следствий. В списке вывода находится другая теорема B, причем список антецедентов S_1 теоремы A имеет ту же длину, что список антецедентов S_2 тождества B, консеквенты их и корневые связывающие приставки тоже имеют равные длины. В списке S_1 находится утверждение P, заголовок которого не встречается в списке S_2. Аналогично, в списке S_2 находится утверждение Q, заголовок которого не встречается в списке S_1. Рассматриваются списки S_3, S_4, получаемые из S_1, S_2 удалением утверждений P, Q. Утверждения списка S_3 не имеют связанных переменных, причем все параметры утверждения P встречаются в этом списке. Существует подстановка C, преобразующая список S_3 в S_4. Эта подстановка переводит консеквент теоремы A в консеквент теоремы B. Дизъюнкция Q и результата применения C к утверждению P является следствием утверждений S_4. Тогда новая теорема получается из A удалением антецедента P. Теоремы A и B помечаются символом "исключение", блокирующим дальнейшее их использование в цикле вывода. Новая теорема рассматривается как обобщение исходной. (Прием вывод - 32).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABabc}(\neg(a = b)$ & $\neg(a = c)$ & $\neg(b = c)$ & $\neg(A = B)$ & $a \in \text{окружность}(AB)$ & $b \in \text{окружность}(AB)$ & $c \in \text{окружность}(AB)$ & $a -$ точка & $b -$ точка & $c -$ точка & $A -$ точка & $B -$ точка & $\text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(ac) \rightarrow$ $A \in \text{отрезок}(bc))$

из теоремы

$\forall_{ABabc}(\neg(a = b)$ & $\neg(a = c)$ & $\neg(b = c)$ & $\neg(A = B)$ & $a \in \text{окружность}(AB)$ & $b \in \text{окружность}(AB)$ & $c \in \text{окружность}(AB)$ & $a -$ точка & $b -$ точка & $c-$точка & $A-$точка & $B-$точка & $\text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(ac)$ & разныестороны$(a, A, \text{прямая}(bc)) \rightarrow A \in \text{отрезок}(bc))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABabc}(\neg(a = b)$ & $\neg(a = c)$ & $\neg(b = c)$ & $\neg(A = B)$ & $a \in \text{окружность}(AB)$ & $b \in \text{окружность}(AB)$ & $c \in \text{окружность}(AB)$ & $a -$ точка & $b -$ точка & $c-$точка & $A-$точка & $B-$точка & $\text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(ac)$ & однасторона$(a, A, \text{прямая}(bc)) \rightarrow A \in \text{отрезок}(bc))$

5. Склейка двух теорем, отличающихся альтернативными антецедентами. Теорема - тождество, осуществляющее декомпозицию выражения со сложным заголовком. Прием выполняется в точности те же действия, что прием из пункта 2 выше. (Прием декомпозиция - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABaj}(a - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$

   из теоремы

   $\forall_{ABaj}(a - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a \leq 0 \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABaj}(a - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ 0 \leq j \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$

6. Склейка двух импликаций, отличающихся альтернативными антецедентами - усмотрение уникального заголовка. Теорема - тождество для координат объектов. Прием выполняет в точности те же действия, что прием из пункта 4 выше. (Прием коорд - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDKab}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow b = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDKab}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A \in \text{отрезок}(BD) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow b = 0)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCDKab}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, D) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow b = 0)$

7. Склейка двух импликаций, отличающихся альтернативными антецедентами - случай, не требующий переобозначения переменных. Теорема - тождество A для координат объектов. В списке вывода находится другая теорема B, причем список антецедентов S_1 теоремы A имеет ту же длину, что список антецедентов S_2 тождества B, а консеквенты их и корневые связывающие приставки равны. Разность списков S_1, S_2 состоит из единственного утверждения P, разность списков S_2, S_1 - из единственного утверждения Q. Пересечение S_3 этих списков непусто. Дизъюнкция $P \vee Q$ - следствие S_3. Новая теорема получается из A удалением антецедента P. Теоремы A и B помечаются символом "исключение", блокирующим дальнейшее их использование в цикле вывода. Новая теорема рассматривается как обобщение исходной. (Прием коорд - 9).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcABCDEGHK}(G - $точка & $H - $точка & систкоорд$(K)$ & $K = (A, B, C, D)$ & $E \in$ плоскость(ABC) & $\neg(E = G)$ & прямая$(EG) \parallel$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(AC) & прямая$(EH) \parallel$ прямая(AC) & $\neg(E = H)$ & $H \in$ прямая(AB) & коорд$(E, K) = (a, b, c) \to c = 0)$

из теоремы

$\forall_{abcABCDEGHK}(G - $точка & $H - $точка & систкоорд$(K)$ & $K = (A, B, C, D)$ & $E \in$ плоскость(ABC) & $\neg(E = G)$ & прямая$(EG) \parallel$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(AC) & прямая$(EH) \parallel$ прямая(AC) & $\neg(E = H)$ & $A \in$ отрезок(BH) & $H \in$ прямая(AB) & коорд$(E, K) = (a, b, c) \to c = 0)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcABCDEGHK}(G - $точка & $H - $точка & систкоорд$(K)$ & $K = (A, B, C, D)$ & $E \in$ плоскость(ABC) & $\neg(E = G)$ & прямая$(EG) \parallel$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(AC) & прямая$(EH) \parallel$ прямая(AC) & $\neg(E = H)$ & точкалуча(A, B, H) & $H \in$ прямая(AB) & коорд$(E, K) = (a, b, c) \to c = 0)$

8. Склейка двух импликаций, отличающихся альтернативными антецедентами. Теорема - тождество A для определения координат объектов. В списке вывода находится другое тождество B, причем список антецедентов S_1 тождества A имеет ту же длину, что список антецедентов S_2 тождества B, консеквенты Q_1 и Q_2 их тоже имеют равные длины, а корневые связывающие приставки равны. Находится подстановка C вместо параметров термов Q_1 и Q_2, переводящая каждый из них в другой. Определяется список S_3 результатов применения C к утверждениям S_2. Разность списков S_1, S_3 состоит из единственного утверждения P_1, разность списков S_3, S_1 - из единственного утверждения P_2, а пересечение S_4 списков S_1, S_3 непусто. Дизъюнкция $P_1 \vee P_2$ - следствие S_4. Новая теорема получается из A удалением антецедента P_1. Теоремы A и B помечаются символом "исключение", блокирующим дальнейшее их использование в цикле вывода. Новая теорема рассматривается как обобщение исходной. (Прием систкоорд - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{efghAK}($коорд$($вектор$(Ag), K) = (f, h)$ & $e - $число & $g - $точка & $A - $точка & систкоорд$(K) \to$ коорд$(e \cdot$ вектор$(Ag), K) = (ef, eh))$

   из теоремы

   $\forall_{efghAK}($коорд$($вектор$(Ag), K) = (f, h)$ & $e - $число & $g - $точка & $A - $точка & $0 \leq e$ & систкоорд$(K) \to$ коорд$(e \cdot$ вектор$(Ag), K) = (ef, eh))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{efghAK}($коорд$($вектор$(Ag), K) = (f, h)$ & $e - $число & $g - $точка & $A - $точка & $e \leq 0$ & систкоорд$(K) \to$ коорд$(e \cdot$ вектор$(Ag), K) = (ef, eh))$

9. Склейка двух тождеств, отличающихся альтернативными антецедентами. Теорема - тождество A, упрощающее выражение под корневой сложной операцией. В списке вывода находится другое тождество B, причем список антецедентов

S_1 тождества A имеет ту же длину, что список антецедентов S_2 тождества B, консеквенты Q_1 и Q_2 их и корневые связывающие приставки тоже имеют равные длины. Каждый из консеквентов Q_1, Q_2 содержит все переменные корневой связывающей приставки своей теоремы. Определяется подстановка C вместо параметров терма Q_2, переводящая его в Q_1. Находится список S_3 результатов применения C к утверждениям списка S_2. Разность списков S_1, S_3 состоит из единственного утверждения P_1, разность списков S_3, S_1 - из единственного утверждения P_2, а пересечение S_4 списков S_1, S_3 непусто. Дизъюнкция $P_1 \vee P_2$ - следствие S_4. Новая теорема получается из A удалением антецедента P_1. Теоремы A и B помечаются символом "исключение", блокирующим дальнейшее их использование в цикле вывода. Новая теорема рассматривается как обобщение исходной. (Прием сокращ - 27).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_{ac}(\neg(a = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to \sin(c|a|) = \sin(ac)\text{sg}(a))$$

из теоремы

$$\forall_{ac}(\neg(a = 0)\ \&\ 0 \le c\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to \sin(c|a|) = \sin(ac)\text{sg}(a))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(\neg(a = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ b \le 0 \to \sin(b|a|) = \sin(ab)\text{sg}(a))$$

10. Склейка двух импликаций, отличающихся альтернативными антецедентами. Теорема - тождество, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат. Прием выполняет в точности те же действия, что прием из пункта 8 выше. (Прием числкоэфф - 9).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_{abABCDEFK}(D - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(D = F)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ F \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{точкалуча}(A, C, F)\ \&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \to l(AF) = bl(AC))$$

из теоремы

$$\forall_{abABCDEFK}(D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \neg(D = F)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{точкалуча}(A, B, E)\ \&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AC)\ \&\ F \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{точкалуча}(A, C, F)\ \&\ \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \to l(AF) = bl(AC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abABCDEFK}(D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \neg(D = F)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ E \in \text{прямая}(AC)\ \&\ A \in \text{отрезок}(BF)\ \&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ F \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{точкалуча}(A, C, E)\ \&\ \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \to l(AE) = bl(AC))$$

11. Склейка двух импликаций, отличающихся альтернативными антецедентами. Теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. Прием выполняет в точности те же действия, что прием из пункта 4 выше. (Прием числовойатом - 43).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ABCDE}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(C=E)\ \&\ \neg(D=E)\ \&$
    $C \in \text{окружность}(AB)\ \&\ D \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&$
    $A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка} \rightarrow$
    $l(CD) = 2\sin(\angle(CED))l(AB))$

    из теоремы

    $\forall_{ABCDE}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(C=E)\ \&\ \neg(D=E)\ \&$
    $C \in \text{окружность}(AB)\ \&\ D \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&$
    $A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
    $\text{однасторона}(A, E, \text{прямая}(CD)) \rightarrow l(CD) = 2\sin(\angle(CED))l(AB))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{ABCDE}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(C=E)\ \&\ \neg(D=E)\ \&$
    $C \in \text{окружность}(AB)\ \&\ D \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&$
    $A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
    $\text{разныестороны}(E, A, \text{прямая}(CD)) \rightarrow l(CD) = 2\sin(\angle(CED))l(AB))$

12. Отбрасывание антецедента, если для его отрицания уже была выведена аналогичная импликация. Теорема A используется для создания приема вывода следствий. В списке вывода находится другая теорема B такого же типа. Консеквент P_1 теоремы A может быть получен из консеквента P_2 теоремы B путем применения к ней некоторой подстановки C. Все переменные теоремы B встречаются в P_2. Разность списка S_2 результатов применения подстановки C к антецедентам теоремы B и списка S_1 антецедентов теоремы A состоит из единственного утверждения Q. Отрицание этого утверждения входит в список S_1. Новая теорема получается из теоремы A удалением из списка ее антецедентов отрицания утверждения Q. Теорема A помечается символом "исключение", блокирующим дальнейшее ее использование в цикле вывода. Новая теорема рассматривается как обобщение исходной. (Прием вывод - 43).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abcde}(\neg(d=e)\ \&\ \neg(b \in \text{прямая}(de))\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&$
    $d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ \text{однасторона}(a, b, \text{прямая}(de))\ \&\ \text{однасторона}(b, c, \text{прямая}(de)) \rightarrow \text{однасторона}(a, c, \text{прямая}(de)))$

    из теоремы

    $\forall_{abcde}(\neg(d=e)\ \&\ \neg(b \in \text{прямая}(de))\ \&\ \neg(c \in \text{прямая}(de))\ \&\ a - \text{точка}\ \&$
    $b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ \text{однасторона}(a, b, \text{прямая}(de))$
    $\&\ \text{однасторона}(b, c, \text{прямая}(de)) \rightarrow \text{однасторона}(a, c, \text{прямая}(de)))$

    и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(C = D)$ & $A \in$ прямая(CD) & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка $\rightarrow$ однасторона$(A, B,$ прямая$(CD)))$

Две импликации отличаются только небольшими группами антецедентов, дизъюнкция конъюнкций которых преобразуется в элементарное утверждение либо в дизъюнкцию элементарных утверждений. Импликации объединяются в одну, где исходные антецеденты заменены на указанное элементарное утверждение. В случае дизъюнкции создаются несколько новых теорем, отдельно для каждого дизъюнктивного члена

1. Склейка двух теорем, отличающихся склеиваемыми антецедентами. Теорема A - тождество для координат объектов. В списке вывода находится другая теорема B, консеквент которой совпадает с консеквентом теоремы A, а список антецедентов S_2 имеет ту же длину, что список антецедентов S_1 теоремы A. Разность списков S_1 и S_2 состоит из единственного утверждения P, разность списков S_2 и S_1 - из единственного утверждения Q. Пересечение S_3 списков S_1, S_2 непусто. Дизъюнкция $P \vee Q$ преобразуется нормализатором дизъюнкций "нормили" относительно посылок S_3 в элементарное утверждение R. Новая импликация получается из старой заменой антецедента P на R. Теоремы A и B помечаются символом "исключение", блокирующим дальнейшее их использование в цикле вывода. Новая теорема рассматривается как обобщение исходной. (Прием коорд - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefgABCDEK}(\neg(g = E)$ & $K = (A, B, C, D)$ & коорд$(g, K) = (d, e, f)$ & коорд$(E, K) = (a, b, c)$ & $g -$ точка & $E -$ точка & прямая$(gE) \parallel$ прямая(AB) & систкоорд(K) & $g \in$ плоскость$(ABC) \rightarrow b = e)$

   из теоремы

   $\forall_{abcdefgABCDEK}(\neg(g = E)$ & $K = (A, B, C, D)$ & коорд$(g, K) = (d, e, f)$ & коорд$(E, K) = (a, b, c)$ & $g -$ точка & $E -$ точка & прямая$(gE) \parallel$ прямая(AB) & однасторона$(g, C,$ прямая$(AB))$ & систкоорд$(K) \rightarrow b = e)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcdefgABCDEK}(\neg(g = E)$ & $K = (A, B, C, D)$ & коорд$(g, K) = (d, e, f)$ & коорд$(E, K) = (a, b, c)$ & $g -$ точка & $E -$ точка & прямая$(gE) \parallel$ прямая(AB) & разныестороны$(C, g,$ прямая$(AB))$ & систкоорд$(K) \rightarrow b = e)$

2. Склейка двух теорем, отличающихся склеиваемыми антецедентами. Теорема A - тождество, выражающее терм с невырожденными числовыми атомами через численные параметры. Прием выполняет в точности те же действия, что предыдущий прием. (Прием числатомы - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcAK}($коорд$(A, K) = (a, b, c)$ & Трехмерн(K) & геом$(A) \rightarrow$ крд$(A, K, 1) = a)$

   из теоремы

$\forall_{abcAK}(\text{коорд}(A,K)=(a,b,c)\ \&\ \text{Вектор}(A)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\rightarrow \text{крд}(A,K,1)=a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcAK}(\text{коорд}(A,K)=(a,b,c)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\rightarrow \text{крд}(A,K,1)=a)$

Напомним, что "геом(x)" означает, что x - точка либо вектор трехмерного пространства.

3. Склейка двух теорем, отличающихся склеиваемыми антецедентами. Теорема A - тождество для определения координат объека. Прием выполняет в точности те же действия, что прием из пункта 1. (Прием систкоорд - 31).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcAK}(\text{Трехмерн}(K)\ \&\ \text{крд}(A,K,1)=a\ \&\ \text{крд}(A,K,2)=b\ \&$
   $\text{крд}(A,K,3)=c\ \&\ \text{геом}(A)\rightarrow \text{коорд}(A,K)=(a,b,c))$

   из теоремы

   $\forall_{abcAK}(\text{Трехмерн}(K)\ \&\ \text{Вектор}(A)\ \&\ \text{крд}(A,K,1)=a\ \&\ \text{крд}(A,K,2)=b\ \&$
   $\text{крд}(A,K,3)=c\rightarrow \text{коорд}(A,K)=(a,b,c))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcAK}(\text{Трехмерн}(K)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ \text{крд}(A,K,1)=a\ \&\ \text{крд}(A,K,2)=b\ \&$
   $\text{крд}(A,K,3)=c\rightarrow \text{коорд}(A,K)=(a,b,c))$

   Здесь утверждение "геом(A)" означает, что A - точка либо вектор трехмерного пространства.

4. Склейка двух теорем, отличающихся склеиваемыми антецедентами. Теорема A - тождество общей стандартизации. В списке вывода находится другое тождество общей стандартизации B, список антецедентов и консеквент которого имеют такие же длины, как у теоремы A. Переменные теоремы B переобозначаются на новые переменные, не входящие в A. Находится подстановка C, переводящая консеквент теоремы B в консеквент теоремы A и подставляющая вместо исходных переменных попарно различные переменные. Определяется список S_2 результатов применения C к антецедентам теоремы B. Разность списка S_1 антецедентов теоремы A и списка S_2 состоит из единственного утверждения P, а разность списка S_2 и списка S_1 - из единственного утверждения Q. Пересечение S_3 списков S_1, S_2 непусто. Дизъюнкция $P\ \vee\ Q$ преобразуется нормализатором дизъюнкций "нормили" относительно посылок S_3 в элементарное утверждение R. Новая импликация получается из старой заменой антецедента P на R. Теоремы A и B помечаются символом "исключение", блокирующим дальнейшее их использование в цикле вывода. Новая теорема рассматривается как обобщение исходной. (Прием нормализация - 95).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abAB}(\neg(a=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\rightarrow$
   $b(a\text{вектор}(AB))=(ab)\text{вектор}(AB))$

   из теоремы

$\forall_{abAB}(0 < a$ & $a -$ число & $b -$ число & $A -$ точка & $B -$ точка $\rightarrow$
$b(a\text{вектор}(AB)) = (ab)\text{вектор}(AB))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abAB}(a < 0$ & $a -$ число & $b -$ число & $A -$ точка & $B -$ точка $\rightarrow$
$b(a\text{вектор}(AB)) = (ab)\text{вектор}(AB))$

5. Склейка двух теорем для одинаковых входных данных и склеиваемых антецедентов. Теорема T_1 имеет консеквент вида "$P(\lambda_x(B, A), \lambda_y(D, C))$", определяющий значение "$\lambda_y(D, C)$" характеристики P функции "$\lambda_x(B, A)$" (например, производную или первообразную). В списке вывода находится другая теорема T_2 с консеквентом вида "$P(\lambda_z(B_1, A_1), \lambda_u(D_1, C_1))$". Длины списков антецедентов и консеквентов обеих теорем равны. Переменные второй теоремы переобозначены так, чтобы отличаться от переменных первой. Параметры антецедентов каждой из теорем содержатся среди параметров первого операнда их консеквента. Подстановка H переводит выражение "$\lambda_z(B_1, A_1)$" в "$\lambda_x(B, A)$". Рассматриваются список S_1 антецедентов первой теоремы и список S_2 результатов применения H к антецедентам второй. Разность списков S_1 и S_2 состоит из единственного утверждения Q_1, разность списков S_2 и S_1 - из единственного утверждения Q_2. Находится пересечение S_3 списков S_1, S_2. Дизъюнкция $Q_1 \vee Q_2$ преобразуется относительно S_3 в элементарное утверждение Q. Находится результат R_1 подстановки в "$\lambda_y(D, C)$"переменной x вместо y. Находится результат R_2 последовательного применения к "$\lambda_u(D_1, C_1)$" подстановки x вместо u и подстановки C. Для получения новой теоремы второй операнд консеквента теоремы T_1 заменяется на "(R_1 при P, иначе R_2)", а в списке антецедентов P заменяется на Q. Результат упрощается. Теоремы T_1 и T_2 помечаются символом "исключение", блокирующим дальнейшее их использование в цикле вывода. Новая теорема рассматривается как обобщение исходной. (Прием функперех - 25).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(0 < 4bc - a^2$ & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число $\rightarrow$
первообразная$(\lambda_x(1/(b + ax + cx^2), x -$ число$),$
$\lambda_x(2\,\text{arctg}((a + 2cx)/\sqrt{4bc - a^2})/\sqrt{4bc - a^2}, x -$ число$)))$

из теоремы

$\forall_{abc}(0 < c$ & $0 < 4bc - a^2$ & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число $\rightarrow$
первообразная$(\lambda_x(1/(b + ax + cx^2), x -$ число$),$
$\lambda_d(2\,\text{arctg}((a + 2cd)/\sqrt{4bc - a^2})/\sqrt{4bc - a^2}, d -$ число$)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abd}(b < 0$ & $0 < 4ab - d^2$ & $a -$ число & $b -$ число & $d -$ число $\rightarrow$
первообразная$(\lambda_x(1/(a + dx + bx^2), x -$ число$),$
$\lambda_c(2\,\text{arctg}((d + 2bc)/\sqrt{4ab - d^2})/\sqrt{4ab - d^2}, c -$ число$)))$

6. Склейка двух теорем с перекрестным добавлением антецедентов. Теорема A - тождество сокращенной перезаписи. В списке вывода находится другая теорема

B такого же типа, список антецедентов и консеквент которой имеют такую же длину, как у теоремы A. Переменные второй теоремы переобозначены так, чтобы не входить в теорему A. Находится подстановка C, переводящая консеквент теоремы B в консеквент теоремы A и являющаяся переобозначением переменных без их отождествления. Определяются список S_1 антецедентов теоремы A и список S_2 результатов применения C к антецедентам теоремы B. Если некоторый параметр x утверждения D списка S_2 не встречается в списке S_1, но в списке S_1 имеется единственное утверждение с тем же заголовком, что у D, являющееся результатом подстановки в D выражения r вместо x, то подстановка C дополняется парой (x, r). Соответственно корректируется S_2. Разность R_1 списков S_1, S_2 имеет не более двух элементов, разность R_2 списков S_2, S_1 - тоже не более двух. Пусть S_3 - пересечение этих списков. Находится утверждение P списка R_1, содержащее все параметры этого списка, и аналогичное утверждение Q для R_2. Дизъюнкция $P \vee Q$ преобразуется относительно S_3 в элементарное утверждение E, отличное от P, Q. Проверяется, что каждое из остальных утверждений списков R_1, R_2 является следствием, соответственно, S_2 и S_1. Новая теорема получается из A заменой списка антецедентов на список S_3, к которому добавлены E и остальные утверждения списков R_1, R_2. Результат упрощается. (Прием свертка - 94).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{adefA}(A - \text{set} \ \& \ a \in A \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \ \& \ \text{ассоциативно}(f) \ \&$
$d \leq 0 \ \& \ \text{обратимо}(f) \ \& \ \text{бинарнооперация}(f, A) \rightarrow \text{алгстепень}(a, f, d + e) =$
$f(\text{алгстепень}(a, f, d), \text{алгстепень}(a, f, e)))$

из теоремы

$\forall_{adefA}(A - \text{set} \ \& \ a \in A \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \ \& \ \text{ассоциативно}(f) \ \&$
$d \leq 0 \ \& \ e \leq 0 \ \& \ \text{обратимо}(f) \ \& \ \text{бинарнооперация}(f, A) \rightarrow \text{алгстепень}(a, f, d{+}e) =$
$f(\text{алгстепень}(a, f, d), \text{алгстепень}(a, f, e)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcfj}(j - \text{set} \ \& \ b \in j \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ \text{ассоциативно}(f) \ \& \ c \leq 0 \ \&$
$0 \leq a \ \& \ \text{обратимо}(f) \ \& \ \text{бинарнооперация}(f, j) \rightarrow f(\text{алгстепень}(b, f, c),$
$\text{алгстепень}(b, f, a)) = \text{алгстепень}(b, f, a + c))$

7. Склейка двух теорем с поглощением антецедента одной из них антецедентом другой. Действия приема совпадают с действиями предыдущего приема - до определения списка S_3 включительно. Далее проверяется, что каждый из списков R_1, R_2 двухэлементный. Выбираются утверждение P списка R_1 и утверждение Q списка R_2, параметры которых совпадают. Их дизъюнкция преобразуется относительно S_3 в элементарное утверждение E, отличное от P, Q. Рассматриваются остальные утверждения P_1, Q_1 списков R_1, R_2. Если P_1 имеет параметры, не входящие в Q_1, причем эти параметры встречаются только в одном утверждении списка S_1, то на P_1 навешивается квантор существования по этим параметрам. Проверяется, что P_1 - следствие S_3 и Q_1. Новая теорема получается из A заменой списка антецедентов на список S_3, к которому добавлены E и остальные утверждения списков R_1, R_2. Результат упрощается. (Прием свертка - 95).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcfj}(j - \text{set}\ \&\ b \in j\ \&\ a - \text{целое}\ \&\ c - \text{целое}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&$
$0 \leq a\ \&\ \text{обратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, j) \to f(\text{алгстепень}(b, f, c),$
$\text{алгстепень}(b, f, a)) = \text{алгстепень}(b, f, a + c))$

из теоремы

$\forall_{abcfj}(j - \text{set}\ \&\ b \in j\ \&\ a - \text{целое}\ \&\ c - \text{целое}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&\ c \leq 0\ \&$
$0 \leq a\ \&\ \text{обратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, j) \to f(\text{алгстепень}(b, f, c),$
$\text{алгстепень}(b, f, a)) = \text{алгстепень}(b, f, a + c))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bcdefh}(h - \text{set}\ \&\ b \in h\ \&\ c - \text{целое}\ \&\ d - \text{целое}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&$
$0 \leq c\ \&\ 0 \leq d\ \&\ \text{Единица}(e, f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, h) \to$
$\text{алгстепень}(b, f, c + d) = f(\text{алгстепень}(b, f, c), \text{алгстепень}(b, f, d)))$

8. Склейка двух теорем, отличающихся склеиваемыми антецедентами. Теорема A - импликация для проверочного оператора. В списке вывода находится теорема B, такая, что ее консеквент является результатом применения переобозначающей переменные подстановки C к консеквенту теоремы A. Связывающие приставки обеих теорем имеют равные длины. Находятся список X переменных связывающей приставки теоремы A, не вошедших в параметры ее консеквента, а также список Y переменных связывающей приставки теоремы B, не вошедших в параметры ее консеквента. Проверяется, что длины списков X, Y равны. Рассматриваются список S_1 антецедентов теоремы A и список S_2 результатов применения C к антецедентам теоремы B. Список S_1 разбивается на подсписок S_3 утверждений, содержащих переменные X, и подсписок S_4 остальных утверждений. Список S_2 разбивается на подсписок S_5 утверждений, содержащих переменные Y, и подсписок S_6 остальных утверждений. Длины списков S_3, S_5 равны. Определяется подстановка C_1 вместо X, переводящая S_3 в S_5. Разность R_1 списков S_4, S_6, а также разность R_2 списков S_6, S_4 не более чем двухэлементные. Составляется список S_7, образованный пересечением списков S_4, S_6, а также списком S_5. Относительно этого списка дизъюнкция конъюнкции утверждений R_1 и конъюнкции утверждений R_2 преобразуется в утверждение E, не имеющее связанных переменных и не содержащее символа "или". Его оценка сложности не больше, чем у исходной дизъюнкции. Новая теорема получается из теоремы B выбором в качестве антецедентов утверждений S_7 и E. Результат упрощается. (Прием легковидеть - 31).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aeghiA}(a = \text{операция}(A)\ \&\ g \in \text{носитель}(A)\ \&\ \text{алгстепень}(g, a, h) \in e\ \&$
$h - \text{натуральное}\ \&\ i - \text{целое}\ \&\ \text{группа}(A)\ \&\ \text{подгруппа}(e, A) \to$
$\text{алгстепень}(g, a, hi) \in e)$

из теоремы

$\forall_{abcdeA}(b = \text{операция}(A)\ \&\ c \in \text{носитель}(A)\ \&\ \text{алгстепень}(c, b, d) \in a\ \&$
$d - \text{натуральное}\ \&\ e - \text{натуральное}\ \&\ \text{группа}(A)\ \&\ \text{подгруппа}(a, A) \to$
$\text{алгстепень}(c, b, de) \in a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{aeghiA}(a = \text{операция}(A)\ \&\ i < 0\ \&\ g \in \text{носитель}(A)\ \&$
$\text{алгстепень}(g, a, h) \in e\ \&\ h - \text{натуральное}\ \&\ i - \text{целое}\ \&\ \text{группа}(A)\ \&$
$\text{подгруппа}(e, A) \to \text{алгстепень}(g, a, hi) \in e)$

9. Склейка двух тождеств с одинаковыми консеквентами, у которых дизъюнкция различий в антецедентах допускает недизъюнктивную переформулировку. Теорема A - тождество, упрощающее выражение под корневой сложной операцией. В списке вывода находится другая теорема B, такая, что консеквент теоремы A получается из ее консеквента некоторой подстановкой C, переобозначающей переменные без отождествлений. Предварительно переменные теоремы B переобозначаются на переменные, не входящие в A. Проверяется, что длины списков антецедентов обеих теорем отличаются не более чем на 1. Определяется список S_1 антецедентов теоремы A, а также список S_2 результатов применения C к антецедентам теоремы B. Пересечение S_3 этих списков, а также разность R_1 списков S_1, S_2 и разность R_2 списков S_2, S_1 непусты. Каждый из списков R_1, R_2 имеет не более двух элементов. Дизъюнкция конъюнкции утверждений R_1 и конъюнкции утверждений R_2 упрощается относительно S_3 до утверждения D, не содержащего символа "или". Новая теорема получается из теоремы A заменой списка антецедентов на список S_3, к которому добавлено D. Теоремы A и B помечаются символом "исключение", блокирующим дальнейшее их использование в цикле вывода. Новая теорема рассматривается как обобщение исходной. (Прием сокращ - 48).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{dmn}(\neg(d^2{+}m^2 = 0)\ \&\ d{-}\text{целое}\ \&\ m{-}\text{целое}\ \&\ n{-}\text{целое}\ \&\ \text{взаимнопросты}(d, m) \to$
$\text{нод}(m, dn) = \text{нод}(m, n))$

из теоремы

$\forall_{dmn}(\neg(d^2 + m^2 = 0)\ \&\ d - \text{целое}\ \&\ m - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ n + 1 \leq 0\ \&$
$\text{взаимнопросты}(d, m) \to \text{нод}(m, dn) = \text{нод}(m, n))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{cde}(\neg(d^2 + e^2 = 0)\ \&\ c - \text{натуральное}\ \&\ d - \text{целое}\ \&\ e - \text{целое}\ \&$
$\text{взаимнопросты}(d, e) \to \text{нод}(e, cd) = \text{нод}(c, e))$

10. Склейка двух импликаций, отличающихся склеиваемыми антецедентами. Теорема A - эквивалентность общей стандартизации. В списке вывода находится другая теорема B, такая, что консеквент теоремы A получается из ее консеквента некоторой подстановкой C, переобозначающей переменные без отождествлений. Предварительно переменные теоремы B переобозначаются на переменные, не входящие в A. Определяется список S_1 антецедентов теоремы A, а также список S_2 результатов применения C к антецедентам теоремы B. Находятся пересечение S_3 этих списков, а также разность R_1 списков S_1, S_2 и разность R_2 списков S_2, S_1. Проверяется, что один из списков R_1, R_2 одноэлементен и состоит из некоторого утверждения P, а в другом списке имеется утверждение Q с теми же параметрами, что у P. Остальные утверждения другого списка

добавляются к S_3. Дизъюнкция $P \vee Q$ упрощается относительно утверждений списка S_3 и превращается в элементарное утверждение D. Новая теорема получается из теоремы A заменой списка антецедентов на список S_3, к которому добавлено D. Результат упрощается. (Прием общнорм - 57).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abAB}(\neg(A = B)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \rightarrow$
$a \cdot \text{вектор}(AB) = b \cdot \text{вектор}(AB) \leftrightarrow a = b)$

из теоремы

$\forall_{abAB}(\neg(A = B)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&$
$0 \leq b \rightarrow a \cdot \text{вектор}(AB) = b \cdot \text{вектор}(AB) \leftrightarrow b = a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abAB}(\neg(A = B)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&$
$a \leq 0 \rightarrow a \cdot \text{вектор}(AB) = b \cdot \text{вектор}(AB) \leftrightarrow b = a)$

11. Склейка двух тождеств, отличающихся склеиваемыми антецедентами. Теорема A - тождество $T_1 = t_1$, выражающее сложный числовой атом T_1 через более простые. В списке вывода находится теорема B такого же типа, имеющая консеквент $T_2 = t_2$. Длины списков антецедентов и корневых связывающих приставок обеих теорем равны. Все переменные корневых связывающих приставок обеих теорем включаются в параметры левых частей их консеквентов. Некоторая подстановка C переводит T_2 в T_1. Определяется список S_1 антецедентов теоремы A, а также список S_2 результатов применения C к антецедентам теоремы B. Разность списков S_1, S_2 состоит из единственного утверждения P, а разность S_2, S_1 - из единственного утверждения Q. Пересечение S_3 списков S_1 и S_2 непусто. Дизъюнкция $P \vee Q$ преобразуется относительно S_3 в элементарное утверждение D. Определяется результат t_3 применения C к t_2, и условное выражение "(t_1 при P, иначе t_3)" упрощается относительно S_3, D до выражения t_4, не содержащего символа "вариант". Новая теорема имеет антецеденты S_3, D и консеквент $T_1 = t_4$. (Прием числатом - 14).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aAB}(a - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \rightarrow \text{длина}(a \cdot \text{вектор}(AB)) =$
$|a|\text{длина}(\text{вектор}(AB)))$

из теоремы

$\forall_{aAB}(a - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ 0 \leq a \rightarrow \text{длина}(a \cdot \text{вектор}(AB)) =$
$a\text{длина}(\text{вектор}(AB)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{aAB}(a - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ a \leq 0 \rightarrow \text{длина}(a \cdot \text{вектор}(AB)) =$
$-a\text{длина}(\text{вектор}(AB)))$

12. Попытка склейки двух теорем, имеющих в антецедентах подобные соотношения для числовых атомов. Теорема A выводит отличный от равенства нечисловой двуместный предикат. Среди ее антецедентов выделяется равенство D_1 с невырожденными числовыми атомами. В списке вывода находится теорема B такого же типа, консеквент K_2 которой имеет ту же длину, что консеквент K_1 теоремы A, причем в списке ее антецедентов имеется равенство D_2 той же длины, что D_1. Переменные теоремы B переобозначены на переменные, не входящие в A. Корневая связывающая приставка теоремы B включается в список параметров утверждений D_2, K_2. Определяется подстановка C, переводящая D_2 в D_1 и одновременно K_2 в K_1. Она лишь переобозначает переменные, причем нетождественная. Определяется список S_1 отличных от D_1 антецедентов теоремы A, а также список S_2 результатов применения подстановки C к отличным от D_2 антецедентам теоремы B. Рассматривается непустое пересечение S_3 списков S_1, S_2, а также разность R_1 списков S_1, S_2 и разность R_2 списков S_2, S_1. Если в одном из списков R_1, R_2 имеется отрицание равенства двух переменных, то оно исключается из этого списка и переносится в S_3. Аналогичным образом поступаем с утверждениями одного из списков, являющихся следствиями S_3 и другого списка. Дизъюнкция конъюнкции утверждений списка R_1 и конъюнкции утверждений списка R_2 преобразуется относительно S_3 в утверждение E, не содержащее символа "или". Новая теорема получается из теоремы A заменой списка антецедентов на S_3, E, D_1. Результат упрощается. Теоремы A и B помечаются символом "исключение", блокирующим дальнейшее их использование в цикле вывода. (Прием отношение - 20).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ABCDE}(\neg(B = C)\ \&\ \neg(B = D)\ \&\ \neg(C = E)\ \&\ \neg(D = E)\ \&$
    $l(AB)l(DE) = l(AD)l(BC)\ \&\ A \in \text{прямая}(BC)\ \&\ A \in \text{прямая}(DE)\ \&$
    $A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ \text{однасторона}(B, D,$
    $\text{прямая}(CE))\ \&\ \text{однасторона}(C, E, \text{прямая}(BD))\ \&\ \text{однасторона}(D, E,$
    $\text{прямая}(BC)) \rightarrow \text{прямая}(BD) \parallel \text{прямая}(CE))$

    из теоремы

    $\forall_{ABCDE}(C - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
    $\neg(B = D)\ \&\ \neg(C = E)\ \&\ l(AB)l(DE) = l(AD)l(BC)\ \&\ B \in \text{отрезок}(AC)\ \&$
    $D \in \text{отрезок}(AE) \rightarrow \text{прямая}(BD) \parallel \text{прямая}(CE))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{ABCDE}(B - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
    $\neg(B = D)\ \&\ \neg(C = E)\ \&\ l(AC)l(DE) = l(AE)l(BC)\ \&\ B \in \text{отрезок}(AC)\ \&$
    $D \in \text{отрезок}(AE) \rightarrow \text{прямая}(BD) \parallel \text{прямая}(CE))$

13. Склейка теорем, отличающихся парами антецедентов. Теорема A имеет своим консеквентом A_1 соотношение для невырожденных числовых атомов. В текущем списке вывода находится другая теорема B такого же типа с консеквентом B_1. Длины теорем A и B, а также длины их консеквентов и длины списков антецедентов равны. Переменные теоремы B переобозначены и не входят в A. Находится поддстановка C, переводящая A_1 в B_1. Если имеются переменные $x_1, \ldots, x_k$ корневой связывающей приставки теоремы A, не входящие в A_1, то

подстановка C доопределяется до подстановки C_1 вместо всех переменных этой связывающей приставки так, чтобы некоторый содержащий все переменные $x_1, \ldots, x_k$ и хотя бы одну переменную консеквента антецедент теоремы A переводился в антецедент теоремы B. Создается список S_1 результатов применения C_1 к антецедентам теоремы A и список S_2 антецедентов теоремы B. Разность списков S_1, S_2 состоит из двух утверждений P_1, P_2. Разность списков S_2, S_1 состоит из двух утверждений Q_1, Q_2. Пересечение S_3 списков S_1, S_2 непусто. Дизъюнкция $(P_1 \ \& \ P_2) \ \vee \ (Q_1 \ \& \ Q_2)$ упрощается относительно S_3 и превращается в дизъюнкцию $R_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ R_m$ элементарных утверждений. Для каждого R_i создается новая теорема, антецеденты которой получаются добавлением к S_3 утверждения R_i, а консеквентом служит B_1. Такая теорема упрощается. Исходные теоремы A, B исключаются из дальнейшего рассмотрения в цикле вывода. (Прием числовойатом - 82).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcdefgh}(\neg(b = g) \ \& \ \neg(b = h) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ \neg(e = f) \ \& \ \neg(e = g) \ \&$
$\neg(g = h) \ \& \ b \in$ окружность$(cd) \ \& \ g \in$ прямая$(ef) \ \& \ g \in$ окружность$(cd) \ \&$
$h \in$ окружность$(cd) \ \& \ b -$ точка $\& \ c -$ точка $\& \ d -$ точка $\& \ e$точка $\& \ f -$ точка $\&$
$g -$ точка $\& \ h -$ точка $\&$ прямая$(ef) -$ касательная к окружность$(cd) \ \&$
однасторона$(b, e,$ прямая$(gh)) \rightarrow \angle(egh) + \angle(gbh) = \pi)$

из теоремы

$\forall_{aABCDEF}(\neg(a = E) \ \& \ \neg(a = F) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(C = E) \ \&$
$\neg(E = F) \ \& \ a \in$ окружность$(AB) \ \& \ E \in$ прямая$(CD) \ \& \ E \in$ окружность$(AB) \ \&$
$F \in$ окружность$(AB) \ \& \ a -$ точка $\& \ A -$ точка $\& \ B -$ точка $\& \ C -$ точка $\&$
$D -$ точка $\& \ E -$ точка $\& \ F -$ точка $\&$ прямая$(CD) -$
касательная к окружность$(AB) \ \&$ разныестороны$(A, a,$ прямая$(EF)) \ \&$
разныестороны$(A, C,$ прямая$(EF)) \rightarrow \angle(CEF) + \angle(EaF) = \pi)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{aABCDEF}(\neg(a = E) \ \& \ \neg(a = F) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(C = E) \ \&$
$\neg(E = F) \ \& \ a \in$ окружность$(AB) \ \& \ E \in$ прямая$(CD) \ \& \ E \in$ окружность$(AB) \ \&$
$F \in$ окружность$(AB) \ \& \ a -$ точка $\& \ A -$ точка $\& \ B -$ точка $\& \ C$точка $\&$
$D -$ точка $\& \ E -$ точка $\& \ F -$ точка $\&$ прямая$(CD) -$
касательная к окружность$(AB) \ \&$ однасторона$(a, A,$ прямая$(EF)) \ \&$
однасторона$(A, C,$ прямая$(EF)) \rightarrow \angle(CEF) + \angle(EaF) = \pi)$

Два тождества с одинаковыми заменяемыми частями и различными заменяющими имеют списки антецедентов, отличающиеся только двумя утверждениями A_1 и A_2, дизъюнкция которых эквивалентна элементарному утверждению B. Они объединяются в одно тождество с условным выражением в заменяющей части и антецедентом B, замещающим A_1 и A_2

1. Склейка двух отличающихся альтернативными антецедентами тождеств с различающимися правыми частями и одинаковыми левыми. Теорема A - тождество общей стандартизации с консеквентом $A_1 = A_2$, причем параметры заменяющей части A_2 включаются в список параметров заменяемой части A_1. В списке вывода находится другое тождество общей стандартизации B с консеквентом

$B_1 = B_2$. Длины списков антецедентов этих тождеств отличаются не более чем на 1. Переменные теоремы B переобозначены на переменные, не входящие в A. Выражение A_1 является результатом применения к B_1 некоторой подстановки C, переобозначающей переменные без их отождествления. Определяется результат B_3 применения подстановки C к выражению B_2. Он отличен от A_2. Находятся список S_1 антецедентов теоремы A и список S_2 результатов применения подстановки C к антецедентам теоремы B. Определяются непустое пересечение S_3 списков S_1, S_2, а также разность R_1 списков S_1, S_2 и разность R_2 списков S_2, S_1. Один из списков R_1, R_2 одноэлементный и состоит из некоторого утверждения P. Дизъюнкция P и конъюнкции утверждений другого списка преобразуется относительно S_3 в элементарное утверждение D. Если P - элемент списка R_1, то консеквент новой теоремы имеет вид "$A_1 = (A_2$ при $P,$ иначе $B_3)$", иначе - вид "$A_1 = (B_3$ при $P,$ иначе $A_2)$". Антецедентами служат утверждения списка S_3 и D. Новая теорема упрощается. (Прием нормализация - 52).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = 0)\ \&\ \neg(b = 0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число} \to |c/(ab)| = |c/b|/|a|)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0)\ \&\ 0 < a\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to |c/(ab)| = |c/b|/a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0)\ \&\ a < 0\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to |c/(ab)| = -|c/b|/a)$$

Несколько теорем получаются из исходной теоремы заменой одних и тех же вхождений некоторых подтермов на другие подтермы. На эти вхождения помещаются новые переменные; антецеденты и консеквент переформулируются через эти переменные

1. Склейка двух импликаций, отличающихся антецедентами, выражающими равенство одного и того же выражения различным значениям. Теорема A - тождество, исключающее либо упрощающее описатель. В списке вывода находится другое тождество B такого же типа, причем длина консеквента A_1 тождества A равна длине консеквента B_1 тождества B. Определяется подстановка C, переводящая B_1 в A_1. Составляется список S_1 антецедентов теоремы A и список S_2 результатов применения C к антецедентам теоремы B. Разность R_1 списков S_1, S_2 не более чем двухэлементная, разность R_2 списков S_2, S_1 - тоже не более чем двухэлементная. Рассматривается пересечение S_3 списков S_1, S_2. В R_1 имеется равенство $t = t_1$, в R_2 - равенство $t = t_2$. Выбирается новая переменная x и составляются списки T_1, T_2, полученные из R_1, R_2 заменой указанных равенств на равенства $x = t_1, x = t_2$. Если t_1 либо t_2 - переменная y, то по мере возможности она исключается в соответствующем T_i путем подстановки x вместо нее и отбрасывания $x = y$. Новая теорема получается из A заменой антецедентов на $S_3, t = x$ и дизъюнкцию конъюнкции утверждений списка T_1 с конъюнкцией утверждений списка T_2. (Прием описатель - 43).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{acefgj}$(предел$(g,j,c) = -\infty$ & Val$(g) \subseteq \mathbb{R}$ & $g-$функция & Локопред(g,c,j) & $f-$функция & Число(c) & $e \subseteq \mathbb{R}$ & Val$(f) \subseteq \mathbb{R}$ & Локопред(f,c,j) & типпредела(j) & Dom$(g) = e$ & Dom$(f) = e$ & предел$(f,j,c) = a$ & $(a = -\infty \ \vee \ a-$число$) \rightarrow \lim_{b \rightarrow c \backslash j}(g(b) + f(b)) = -\infty)$

из теоремы

$\forall_{cdefgj}$(предел$(g,j,c) = -\infty$ & Val$(g) \subseteq \mathbb{R}$ & $g-$функция & Локопред(g,c,j) & $f-$функция & Число(c) & $e \subseteq \mathbb{R}$ & Val$(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $d-$число & Локопред(f,c,j) & типпредела(j) & Dom$(g) = e$ & Dom$(f) = e$ & предел$(f,j,c) = d \rightarrow$ $\lim_{b \rightarrow c \backslash j}(g(b) + f(b)) = -\infty)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{cdefg}$(предел$(g,j,c) = -\infty$ & Val$(g) \subseteq \mathbb{R}$ & $g-$функция & Локопред(g,c,f) & $d-$функция & Число(c) & $e \subseteq \mathbb{R}$ & Val$(d) \subseteq \mathbb{R}$ & Локопред(d,c,f) & типпредела(f) & предел$(d,f,c) = -\infty$ & Dom$(g) = e$ & Dom$(f) = e \rightarrow$ $\lim_{b \rightarrow c \backslash f}(g(b) + f(b)) = -\infty)$

2. Склейка нескольких импликаций, получающихся друг из друга варьированием подвыражения. Теорема A_1 - равенство для координаты некоторого выражения. В списке вывода находятся теоремы $A_2, \ldots, A_n$, отличающиеся от A_1 заменой одних и тех же вхождений $v_1, \ldots, v_m$ некоторого константного выражения t_1 на другие константные выражения $t_2, \ldots, t_n$. Выбирается новая переменная x. Все вхождения t_1 в A_1 заменяются на x, а к антецедентам добавляется "$x \in \{t_1, \ldots, t_n\}$". Теоремы $A_1, \ldots, A_n$ помечаются символом "исключение", блокирующим дальнейшее их использование в цикле вывода. Новая теорема рассматривается как обобщение исходной. (Прием нормкрд - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aABK}(A-$точка & $B-$точка & Трехмерн(K) & $a \in \{1,2,3\} \rightarrow -$крд$(A,K,a) +$ крд$(B,K,a) =$ крд(вектор$(AB),K,a))$

   из теоремы

   $\forall_{ABK}(A-$точка & $B-$точка & Трехмерн$(K) \rightarrow -$крд$(A,K,1) +$ крд$(B,K,1) =$ крд(вектор$(AB),K,1))$

   и двух дополнительных теоремы

   $\forall_{ABK}(A-$точка & $B-$точка & Трехмерн$(K) \rightarrow -$крд$(A,K,2) +$ крд$(B,K,2) =$ крд(вектор$(AB),K,2))$

   $\forall_{ABK}(A-$точка & $B-$точка & Трехмерн$(K) \rightarrow -$крд$(A,K,3) +$ крд$(B,K,3) =$ крд(вектор$(AB),K,3))$

3. Склейка двух импликаций с одинаковми антецедентами, консеквенты которых отличаются заменой константного подвыражения. Теорема A - тождество общей стандартизации. В списке вывода находится другое тождество общей стандартизации B, список антецедентов и корневая связывающая приставка которого такие же, как у A. Консеквент B_1 теоремы B получается из консеквента

A_1 теоремы A заменой всех вхождений некоторого константного терма t_1 на константный терм t_2. Тип значения надвыражения терма t_1 отличен от типа значения t_1. Выбирается новая переменная x. К антецедентам теоремы A добавляется утверждение "$x \in \{t_1, t_2\}$", а в консеквенте ее t_1 заменяется на x. Теоремы A, B помечаются символом "Исключение", означающим, что они не включаются в результат цикла вывода, но в дальнейших выводах участвуют. (Прием нормализация - 99).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcf}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 \le c - b \ \& \ 0 \le f - c \ \& \ a - \text{boolean} \rightarrow$
$[b, c] \cup [c, f] = [b, f])$

из теоремы

$\forall_{bcf}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 \le c - b \ \& \ 0 \le f - c \rightarrow$
$[b, c) \cup [c, f) = [b, f))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bcf}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 \le c - b \ \& \ 0 \le f - c \rightarrow$
$[b, c] \cup [c, f] = [b, f])$

Формульный редактор в данном случае скрывает указатели на тип промежутка. В первой из приведенных трех теорем последний операнд выражений для промежутков равен a, т.е. правый конец промежутка может как принадлежать, так и не принадлежать промежуткам (но для всех промежутков - одинаково). Во второй теореме последние операнды выражений для промежутков равны 0, в третьей - равны 1. Соответственно, правый конец промежутка либо отбрасывается, либо относится к промежутку.

4. Склейка двух импликаций, отличающихся лишь заменой вхождений одного и того же подтерма на другой подтерм. Теорема A - тождество для исключения либо упрощения описателя. В списке вывода находится другое тождество B такого типа, причем корневые связывающие приставки теорем A, B равны. Равны также длины этих теорем и длины их консеквентов. Теорема B получается из теоремы A заменой всех вхождений некоторого элементарного выражения t_1 на элементарное выражение t_2. Все параметры обоих выражений включаются в корневую связывающую приставку теоремы A. Выбирается новая переменная x. В теореме A все вхождения t_1 заменяются на x, после чего к ее антецедентам добавляется утверждение "$x = t_1 \ \vee \ x = t_2$". Теоремы A, B помечаются символом "исключение", блокирующим дальнейшее их использование в цикле вывода. Новая теорема рассматривается как обобщение исходной. (Прием описатель - 44).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acdgi}(\text{предел}(g, i, a) = d \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g - \text{функция} \ \&$
$c - \text{число} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(g, a, i) \ \&$
$(d = -\infty \ \vee \ d = \infty) \rightarrow \lim_{b \rightarrow a \setminus i}(c + g(b)) = d)$

из теоремы

$\forall_{acgi}$(предел$(g,i,a) = -\infty$ & Dom$(g) \subseteq \mathbb{R}$ & Val$(g) \subseteq \mathbb{R}$ & $g -$ функция & $c -$ число & Число(a) & типпредела(i) & Локопред$(g,a,i) \rightarrow$ $\lim_{b \rightarrow a \backslash i}(c + g(b)) = -\infty$)

и дополнительной теоремы

$\forall_{acgi}$(предел$(g,i,a) = \infty$ & Dom$(g) \subseteq \mathbb{R}$ & Val$(g) \subseteq \mathbb{R}$ & $g -$ функция & $c -$ число & Число(a) & типпредела(i) & Локопред$(g,a,i) \rightarrow$ $\lim_{b \rightarrow a \backslash i}(c + g(b)) = \infty$)

5. Склейка нескольких теорем, отличающихся константными значениями в атомарных подвыражениях консеквента. Теорема A_1 - эквивалентность общей стандартизации. На некоторых вхождениях $v_1, \ldots, v_m$ в заменяемую часть B этой теоремы расположены константные выражения. В списке вывода находятся другие эквивалентности общей стандартизации $A_2, \ldots, A_n$, отличающиеся от A_1 только заменой вхождений $v_1, \ldots, v_m$ на другие константные выражения. Допускаются вырожденные случаи, когда A_i - не эквивалентность, а импликация, консеквент которой получается из B таким же образом. В этом случае вводится фиктивная заменяющая часть "истина". Выбираются новые переменнеы $x_1, \ldots, x_m$. Составляется дизъюнкция конъюнкций $x_1 = a_1$ & $\ldots$ & $x_m = a_m$, составленных для константных выражений $a_1, \ldots, a_m$ рассматриваемых теорем $A_1, \ldots, A_n$. Она превращается в утверждение D, не содержащее дизхюнкции. Единственная посылка при этом - константа "истина". Составляется также дизъюнкция конъюнкций $x_1 = a_1$ & $\ldots$ & $x_m = a_m$ & K, где K - консеквент соответствующей теоремы A_i. Она упрощается относительно антецедентов теоремы A_1 и утверждения D, после чего превращается в некоторое утверждение E. Антеценатми новой теоремы становятся антецеденты A_1 и утверждение D, консеквентом - эквивалентность результата замены вхождений $v_1, \ldots, v_m$ в B на переменные $x_1, \ldots, x_m$ утверждению E. Эта теорема упрощается. (Прием общнорм - 104).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcd}(b -$ число & $c -$ число & $a -$ boolean & $d -$ boolean $\rightarrow$ замкнутое$([b,c]) \leftrightarrow$ $a = 1$ & $d = 1 \ \vee \ c \leq b$)

из теоремы

$\forall_{bc}(b -$ число & $c -$ число $\rightarrow$ замкнутое$((b,c]) \leftrightarrow c \leq b)$

и дополнительных теорем:

$\forall_{bc}(b -$ число & $c -$ число $\rightarrow$ замкнутое$([b,c]))$

$\forall_{bc}(b -$ число & $c -$ число $\rightarrow$ замкнутое$([b,c)) \leftrightarrow c \leq b)$

$\forall_{bc}(b -$ число & $c -$ число $\rightarrow$ замкнутое$((b,c)) \leftrightarrow c \leq b)$

В первой теореме a, d - указатели типа концов промежутка $[b,c]$, скрытые формульным редактором. В третьей теореме подразумевается замкнутый промежуток.

Несколько теорем, отличающихся только антецедентами, преобразуются в несколько других, но более простых

1. Две теоремы отличаются толкьо двумя парами антецедентов: у одной A_1, A_2, а у другой - B_1, B_2. Дизъюнкция $(A_1 \,\&\, A_2 \vee B_1 \,\&\, B_2)$ упрощается. Если получается дизъюнкция элементарных утверждений, то для каждого дизъюнктивного члена C создается импликация, получаемяа из исходных заменой указанной пары антецедентов на C. (Прием равны - 28).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{defghi}(\neg(g = h) \,\&\, \neg(d = g) \,\&\, \neg(g = i) \,\&\, \neg(d = h) \,\&\, \neg(h = i) \,\&$
   $\neg(e = f) \,\&\, g \in \text{окружность}(ef) \,\&\, h \in \text{окружность}(ef) \,\&\, d \in \text{окружность}(ef) \,\&$
   $i \in \text{окружность}(ef) \,\&\, g - \text{точка} \,\&\, h - \text{точка} \,\&\, d - \text{точка} \,\&\, e - \text{точка} \,\&$
   $f - \text{точка} \,\&\, i - \text{точка} \,\&\, \text{однасторона}(d, i, \text{прямая}(gh)) \to \angle(gih) = \angle(gdh))$

   из теоремы

   $\forall_{abcABE}(\neg(a = b) \,\&\, \neg(a = c) \,\&\, \neg(a = E) \,\&\, \neg(b = c) \,\&\, \neg(b = E) \,\&\, \neg(A = B) \,\&$
   $a \in \text{окружность}(AB) \,\&\, b \in \text{окружность}(AB) \,\&\, c \in \text{окружность}(AB) \,\&$
   $E \in \text{окружность}(AB) \,\&\, a - \text{точка} \,\&\, b - \text{точка} \,\&\, c - \text{точка} \,\&\, A - \text{точка} \,\&$
   $B - \text{точка} \,\&\, E - \text{точка} \,\&\, \text{разныестороны}(c, A, \text{прямая}(ab)) \,\&$
   $\text{разныестороны}(E, A, \text{прямая}(ab)) \to \angle(aEb) = \angle(acb))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{aABCDE}(\neg(a = C) \,\&\, \neg(a = D) \,\&\, \neg(A = B) \,\&\, \neg(C = D) \,\&\, \neg(C = E) \,\&$
   $\neg(D = E) \,\&\, a \in \text{окружность}(AB) \,\&\, C \in \text{окружность}(AB) \,\&$
   $D \in \text{окружность}(AB) \,\&\, E \in \text{окружность}(AB) \,\&\, a - \text{точка} \,\&\, A - \text{точка} \,\&$
   $B - \text{точка} \,\&\, C - \text{точка} \,\&\, D - \text{точка} \,\&\, E - \text{точка} \,\&\, \text{однасторона}(a, A, \text{прямая}(CD))$
   $\&\, \text{однасторона}(A, E, \text{прямая}(CD)) \to \angle(CED) = \angle(CaD))$

2. Несколько импликаций отличаются только антецедентами. Формируется дизъюнкция конъюнкций тех фрагментов антецедентов, по которым наблюдается отличие. Она разрешается относительно одного из параметров, причем после этого число альтернатив оказывается меньшим. Для каждой альтернативы создается своя версия теоремы. (Прием декомпозиция - 4).

   Пример: вывод двух теорем

   $\forall_{ABaj}(a - \text{число} \,\&\, j - \text{число} \,\&\, A - \text{точка} \,\&\, B - \text{точка} \,\&\, a \le 0 \to$
   $(a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$

   и

   $\forall_{ABaj}(a - \text{число} \,\&\, j - \text{число} \,\&\, A - \text{точка} \,\&\, B - \text{точка} \,\&\, 0 \le j \to$
   $(a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$

   из теоремы

   $\forall_{ABaj}(a - \text{число} \,\&\, j - \text{число} \,\&\, A - \text{точка} \,\&\, B - \text{точка} \,\&\, a \le 0 \,\&$
   $j \le 0 \to (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$

   и дополнительных теорем

$\forall_{ABaj}(a - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a + j \leq 0 \ \&$
$0 \leq j \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$

$\forall_{ABaj}(a - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a \leq 0 \ \&$
$0 \leq a + j \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$

$\forall_{ABaj}(a - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ 0 \leq a \ \&$
$0 \leq j \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$

Использование третьей теоремы для склейки двух теорем

1. При склейке двух теорем возникает дизъюнктивный антецедент. Третья теорема позволяет реализовать эту дизъюнкцию.

   (a) Склейка двух теорем списка вывода и реализация дизъюнкции в антецедентах при помощи теоремы существования дизъюнкции. Теорема A имеет единственный наиболее сложный подтерм антецедентов, имеющий единственное вхождение в некоторый антецедент A_1. Заголовок s_1 этого подтерма имеет сложность более 4. В списке вывода находится другая теорема B аналогичного типа, с единственным наиболее сложным подтермом антецедентов, имеющим единственное вхождение в антецедени B_1. Его заголовок s_2 отличен от s_1. Определяется подстановка C, переводящая отличные от B_1 антецеденты теоремы B в отличные от A_1 антецеденты теоремы A. Она же переводит консеквент теоремы B в консеквент теоремы A. Находится результат B_2 применения C к B_1 и составляется дизъюнкция $A_1 \ \vee \ B_2$. Она могла бы стать антецедентом теоремы T, объединяющей теоремы A, B. Однако, вместо этого по символу s_1 находится третья теорема D, консеквентом которой служит квантор существования, причем среди подкванторных утверждений имеется дизъюнкция, отличающаяся от $A_1 \ \vee \ B_2$ только переобозначением переменных. Эта теорема используется для реализации антецедента $A_1 \ \vee \ B_2$ и некоторых других антецедентов теоремы T, причем квантор существования из D перемещается в консеквент теоремы T. Результат упрощается. (Прием главнчлен - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abf}(\forall_c(c \in (a, b) \rightarrow \text{дифференцируема}(f, c)) \ \& \ f(a) = f(b) \ \& \ a < b$
   $\& \ [a, b] \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \&$
   $\text{непрерывно}(f, [a, b]) \rightarrow \exists_c(\text{производная}(f, c) = 0 \ \& \ c \in (a, b)))$

   из теоремы

   $\forall_{abcf}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ (a, b) \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \&$
   $0 < c - a \ \& \ 0 < b - c \ \& \ f(c) = \sup(\text{образ}(f, (a, b))) \ \& \ \text{дифференцируема}(f, c) \rightarrow$
   $\text{производная}(f, c) = 0)$

   и дополнительных теорем

   $\forall_{abce}(e(c) = \inf(\text{образ}(e, (a, b))) \ \& \ 0 < b - c \ \& \ 0 < c - a \ \& \ (a, b) \subseteq \text{Dom}(e) \ \&$
   $\text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{дифференцируема}(e, c) \rightarrow$
   $\text{производная}(e, c) = 0)$

$\forall_{abf}(a - $ число $\&\ b - $ число $\&\ a < b\ \&\ f - $ функция $\&\ [a,b] \subseteq \mathrm{Dom}(f)\ \&$
$\mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&$ непрерывно$(f,[a,b])\ \&\ f(a) = f(b) \to \exists_c(c - $ число $\&$
$0 < c - a\ \&\ 0 < b - c\ \&\ (f(c) = \inf($образ$(f,(a,b)))\ \vee$
$f(c) = \sup($образ$(f,(a,b))))))$

(b) Склейка двух отличающихся единственным антецедентом импликаций при помощи третьей импликации. Консеквент теоремы A - равенство, содержащее невырожденные числовые атомы. В списке вывода находится другая теорема B того же типа, у которой консеквент и корневая связывающая приставка такие же, как у теоремы A. Разность R_1 списка S_1 антецедентов теоремы A и списка S_2 антецедентов теоремы B состоит из единственного равенства P, разность R_2 списков S_2, S_1 - из единственного равенства Q. Пересечение S_3 списков S_1, S_2 непусто. Дизъюнкция $P\ \vee\ Q$ упрощается относительно S_3 и превращается в некоторую дизъюнкцию D. Она могла бы стать антецедентом теоремы T, объединяющей теоремы A, B. Однако, вместо этого выбирается заголовок некоторого входящего в D невырожденного числового атома, и по этому заголовку находится теорема E, консеквентом которой является дизъюнкция равенств, содержащих невырожденные числовые атомы, хотя бы один из которых имеет данный заголовок. Теорема E используется для реализации антецедента D теоремы T (после соответствующей унификации антецеденты теоремы E добавляются к антецедентам T и корректируется консеквент теоремы T). Результат упрощается. (Прием числовойатом - 70).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdehij}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(c = e)\ \&\ \neg(d = e)\ \&\ \neg(h = j)\ \&\ \neg(i = j)\ \&$
$c \in$ окружность$(ab)\ \&\ d \in$ окружность$(ab)\ \&\ e \in$ окружность$(ab)\ \&$
$h \in$ окружность$(ab)\ \&\ i \in$ окружность$(ab)\ \&\ j \in$ окружность$(ab)\ \&$
$a - $ точка $\&\ b - $ точка $\&\ c - $ точка $\&\ d - $ точка $\&\ e - $ точка $\&\ h - $ точка $\&$
$i - $ точка $\&\ j - $ точка $\&$ прямая$(ce) \parallel$ прямая$(hj)\ \&$
прямая$(de) \parallel$ прямая$(ij) \to l(hi) = l(cd))$

из теоремы

$\forall_{abcdehij}(\neg(a = b)\ \&\ b -$точка $\&\ a -$точка $\&\ \neg(i = j)\ \&\ \neg(h = j)\ \&\ i -$точка $\&$
$j - $ точка $\&\ h - $ точка $\&\ \neg(d = e)\ \&\ \neg(c = e)\ \&\ d - $ точка $\&\ e - $ точка $\&$
$c -$точка $\&\ \angle(ced) = \angle(hji)\ \&\ c \in$ окружность$(ab)\ \&\ d \in$ окружность$(ab)\ \&$
$e \in$ окружность$(ab)\ \&\ h \in$ окружность$(ab)\ \&\ i \in$ окружность$(ab)\ \&$
$j \in$ окружность$(ab) \to l(hi) = l(cd))$

и дополнительных теорем

$\forall_{abcdehij}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(c = e)\ \&\ \neg(d = e)\ \&\ \neg(h = j)\ \&\ \neg(i = j)\ \&$
$\angle(ced) + \angle(hji) = \pi\ \&\ c \in$ окружность$(ab)\ \&\ d \in$ окружность$(ab)\ \&$
$e \in$ окружность$(ab)\ \&\ h \in$ окружность$(ab)\ \&\ i \in$ окружность$(ab)\ \&$
$j \in$ окружность$(ab)\ \&\ a - $ точка $\&\ b - $ точка $\&\ c - $ точка $\&\ d - $ точка $\&$
$e - $ точка $\&\ h - $ точка $\&\ i - $ точка $\&\ j - $ точка $\to l(hi) = l(cd))$

$\forall_{ABCDEF}(A - $ точка $\&\ B - $ точка $\&\ C - $ точка $\&\ D - $ точка $\&\ E - $ точка $\&$
$F - $ точка $\&\ \neg(E = F)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
прямая$(AB) \parallel$ прямая$(DE)\ \&$ прямая$(BC) \parallel$ прямая$(EF) \to$
$\angle(ABC) = \angle(DEF)\ \vee\ \angle(ABC) + \angle(DEF) = \pi)$

(c) Использование альтернативы для объединения двух классов. Теорема A - тождество вида "$\mathrm{set}_x(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n) = E_1$", где все $A_1, \ldots, A_n$ элементарны. Выбирается некоторое содержащее x утверждение A_i, и по его заголовку s находится теорема C без существенных антецедентов, консеквент которой - дизъюнкция двух утверждений P, Q, причем P имеет заголовок s. Усматривается подстановка, переводящая P в A_i. Находится раздел, к которому относится заголовок самого сложного подтерма выражения E_1, и в этом разделе выбирается теорема B с консеквентом вида "$\mathrm{set}_y(B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_m) = E_2$", где некоторое B_j имеет тот же заголовок, что Q. Далее теорема C используется для получения соотношения вида "$E_1 \cup E_2 = E_3$". (Прием описатель - 13).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcf}(0 < c-b\ \&\ 0 < f-c\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ f-\text{число} \to (b,c] \cup [c,f) = (b,f))$

из теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to (b,c] = \mathrm{set}_a(b < a\ \&\ a - \text{число}\ \&\ a \le c))$

и дополнительных теорем

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to a \le b\ \vee\ b \le a)$

$\forall_{bc}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to \mathrm{set}_a(a - \text{число}\ \&\ b \le a\ \&\ a < c) = [b,c))$

2. Каждая из двух теорем выводит соотношения, объединяемые в общее утверждение с помощью третьей теоремы.

(a) Склейка двух теорем при помощи третьей теоремы с характеристикой "равныедлины". Консеквент A_1 теоремы A - равенство двух атомарных выражений с одинаковым заголовком s. Определяется теорема C, представляющая собой эквивалентность некоторого равенства R конъюнкции двух утверждений R_1, R_2, причем R_1 - равенство двух выражений с заголовком s. Заголовок t утверждения R_2 отличен от равенства. В списке вывода находится теорема B, консеквент B_1 которой имеет заголовок t. Предпринимается одновременная унификация A_1 с R_1 и B_1 с R_2. Проверяется, что при этой унификации теоремы B, C не добавляют новых антецедентов к A. Консеквент теоремы A заменяется на соответствующим образом преобразованное равенство R. (Прием равны - 31).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abKT}(\text{неподв}(b,T)\ \&\ \text{неподв}(K,T)\ \&\ \text{мточка}(a)\ \&\ \text{Числотр}(T)\ \&\ \text{мтело}(b)\ \&\ \text{мтело}(K) \to \text{Скорость}(a,K,T) = \text{Скорость}(a,b,T))$

из теоремы

$\forall_{abKT}(\text{неподв}(b,T)\ \&\ \text{неподв}(K,T)\ \&\ \text{мточка}(a)\ \&\ \text{Числотр}(T)\ \&\ \text{мтело}(b)\ \&\ \text{мтело}(K) \to \text{длина}(\text{Скорость}(a,K,T)) = \text{длина}(\text{Скорость}(a,b,T)))$

и дополнительных теорем

$\forall_{ab}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Вектор}(b) \to a = b \leftrightarrow \text{длина}(a) = \text{длина}(b)\ \&\ \text{однонаправлены}(a,b))$

$\forall_{abKT}$(неподв(b,T) & неподв(K,T) & мточка(a) & Числотр(T) & мтело(b) & мтело(K) → однонаправлены(Скорость(a,K,T)) ↔ однонаправлены(Скорость(a,b,T)))

(b) Склейка двух теорем при помощи третьей теоремы с характеристикой "общнорм". Теорема A - импликация с самым сложным в теореме корневым отношением консеквента - символом s. Теорема C - эквивалентность общей стандартизации с двумя конъюнктивными членами заменяемой части, один из которых имеет заголовок s. В списке вывода находится теорема B, консеквент B_1 которой имеет тот же заголовок, что второй конъюнктивный член. Дальше - точно так же, как в предыдущем пункте. (Прием реализация - 19).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{astKT}(T = [t,s]$ & $s -$ число & $t -$ число & неподв(K,T) & мточка(a) & Числотр(T) & мтело(K) → вектор(Место(a,t)Место(a,s)) = длина(T)Скорость$(a,K,T))$

из теоремы

$\forall_{astKT}(s -$ число & $t -$ число & мточка(a) & Числотр(T) & мтело(K) & $T = [t,s]$ & неподв(K,T) → однонаправлены(Скорость(a,K,T), вектор(Место(a,t)Место$(a,s))))$

и дополнительных теорем

$\forall_{ABav}(a -$ число & $A -$ точка & $B -$ точка & Вектор(v) & $0 \leq a \rightarrow$ вектор$(AB) = av \leftrightarrow l(AB) = a$длина$(v)$ & однонаправлены(вектор$(AB), v))$

$\forall_{astKT}(s -$ число & $t -$ число & мточка(a) & Числотр(T) & мтело(K) & $T = [t,s]$ & неподв$(K,T) \rightarrow l$(Место(a,t)Место$(a,s)) =$ длина(Скорость(a,K,T))длина$(T))$

Получение эквивалентности из двух противоположных импликаций

1. Вывод эквивалентности из двух противоположных импликаций. Теорема A - импликация для приема проверочного оператор. В списке вывода находится другая теорема B для приема проверочного оператора, длина которой равна длине теоремы A. После некоторого переобозначения переменных консеквент A_1 теоремы A оказывается элементом списка антецедентов теоремы B, а консеквент B_1 теоремы B - элементом списка антецедентов теоремы A. В остальном их списки антецедентов совпадают. Антецедентами новой теоремы служат общие антецеденты теорем A, B, а консеквентом - эквивалентность A_1 и B_1. (Прием легковидеть - 16).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{afxy}(a -$ set & $a \subseteq$ Dom(f) & Dom$(f) \subseteq \mathbb{R}$ & Val$(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $x \in a$ & $y \in a$ & $f -$ функция & возрастает$(f,a) \rightarrow 0 < f(y) - f(x) \leftrightarrow 0 < y - x)$

   из теоремы

   $\forall_{afxy}(a -$ set & $f -$ функция & $a \subseteq$ Dom(f) & Dom$(f) \subseteq \mathbb{R}$ & Val$(f) \subseteq \mathbb{R}$ & возрастает(f,a) & $x \in a$ & $y \in a$ & $0 < x - y \rightarrow 0 < f(x) - f(y))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{afxy}(0 < f(y) - f(x)$ & $a -$ set & $a \subseteq \mathrm{Dom}(f)$ & $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $x \in a$ & $y \in a$ & $f -$ функция & возрастает$(f, a) \to 0 < y - x)$

2. Склейка двух импликаций в эквивалентность. Консеквент A_1 теоремы A - равенство двух атомарных выражений. Эта теорема имеет единственный антецедент A_2, содержащий все ее переменные. Его заголовком служит символ s, отличный от отрицания. В списке вывода находится другая теорема B, длина которой равна длине теоремы A, причем заголовком консеквента B_1 теоремы B служит символ s. Все переменные теоремы B встречаются в ее консеквенте. Усматривается подстановка C, переводящая B_1 в A_2. Определяется список S результатов применения подстановки C к антецедентам теоремы B. Проверяется, что среди них имеется утверждение A_1. Проверяется, что список отличных от A_2 антецедентов теоремы A совпадает со списком отличных от A_1 элементов S. Тогда A_2 исключается из антецедентов теоремы A, а консеквентом ствновится $A_1 \leftrightarrow A_2$. (Прием равны - 34).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcD}(\neg(a = b)$ & $\neg(a = D)$ & $\neg(b = c)$ & $c \in$ окружность(ab) & $D \in$ прямая(bc) & $a -$точка & $b -$точка & $c -$точка & $D -$точка $\to l(cD) = l(bD) \leftrightarrow$ прямая$(aD) \perp$ прямая$(bc))$

   из теоремы

   $\forall_{abcD}(\neg(a = b)$ & $\neg(a = D)$ & $\neg(b = c)$ & $c \in$ окружность(ab) & $D \in$ прямая(bc) & $a -$ точка & $b -$ точка & $c -$ точка & $D -$ точка & прямая$(aD) \perp$ прямая$(bc) \to l(cD) = l(bD))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcD}(\neg(a = b)$ & $\neg(a = D)$ & $\neg(b = c)$ & $l(bD) = l(cD)$ & $c \in$ окружность(ab) & $D \in$ прямая(bc) & $a -$точка & $b -$точка & $c -$точка & $D -$точка $\to$ прямая$(aD) \perp$ прямая$(bc))$

Несколько эквивалентностей с одинаковыми заменяемыми частями склеиваются так, что заменяющей частью становится дизъюнкция утверждений вида "заменяющая часть для подслучая" & **"антецеденты, выделяющие этот подслучай"**

1. Попытка склеить две эквивалентности разрешения относительно неизвестной. Теорема A - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$ разрешения утверждения A_1 относительно неизвестной x. В списке вывода находится другая теорема B с консеквентом $B_1 \leftrightarrow B_2$, разрешающая B_1 относительно неизвестной y. Утверждения A_1, B_1 содержат все переменные корневых связывающих приставок своих теорем. Некоторая подстановка C, переобозначающая переменные, переводит A_1 в B_1. Она же переводит x в y. Рассматриваются список S_1 результатов применения C к антецедентам теоремы A и список S_2 антецедентов теоремы B. Разность R_1 списков S_1, S_2 и разность R_2 списков S_2, S_1 непусты и имеют не более

2 элементов каждая. Рассматривается пересечение S_3 списков S_1, S_2. Дизъюнкция конъюнкции утверждений R_1 и конъюнкции утверждений R_2 упрощается относительно S_3 до утверждения D, все конъюнктивные члены которого элементарны. Определяется результат A_3 применения C к утверждению A_2. Антецедентами новой теоремы становятся утверждения S_3 и конъюнктивные члены D, а консеквентом - эквивалентность "$B_1 \leftrightarrow (R_1\ \&\ A_3)\ \vee (R_2\ \&\ B_2)$". Эта теорема упрощаетя и сопровождается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема разрешения относительно y. (Прием глуб - 15).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acd}(\neg(d=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ c-\text{число} \rightarrow c<ad \leftrightarrow d<0\ \&\ a<c/d\ \vee\ 0<d\ \&\ c/d<a)$

из теоремы

$\forall_{acd}(c<0\ \&\ a-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число} \rightarrow a<d/c \leftrightarrow d<ac)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{acd}(0<d\ \&\ a-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число} \rightarrow c<ad \leftrightarrow c/d<a)$

2. Попытка склеить две эквивалентности разрешения относительно неизвестной: усиление антецедентов для их идентификации. Действия приема такие же, как в предыдущем случае - до определения R_1, R_2 и S_3 включительно. Ограничения на длины R_1, R_2 не накладываются. Вместо этого предпринимается попытка "сблизить" списки S_1, S_2. Если для какого-либо двуместного отношения из R_i его "ослабленная" версия принадлежит противоположному R_j, то это отношение переносится в список S_3, а из R_1, R_2 исключаются обе его версии. Проверяется, что после указанного сближения список R_1 оказывается состоящим из единственного элемента P, а список R_2 - из единственного элемента Q. Дизъюнкция $P\ \vee\ Q$ упрощается относительно S_3 до элементарного утверждения D. Определяется результат A_3 применения C к утверждению A_2. Антцедентами новой теоремы становятся утверждения списка S_3 и утверждение D, а консеквентом - эквивалентность "$B_1 \leftrightarrow (P_1\ \&\ A_3)\ \vee\ (Q\ \&\ B_2)$". Эта теорема упрощается и сопровождается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема разрешения относительно y. (Прием глуб - 18).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abd}(\neg(b=0)\ \&\ 0<a\ \&\ 0<d\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{число} \rightarrow a^b<d \leftrightarrow a<d^{1/b}\ \&\ 0<b\ \vee\ b<0\ \&\ d^{1/b}<a)$

из теоремы

$\forall_{abd}(b<0\ \&\ 0<a\ \&\ 0<d\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{число} \rightarrow a^b<d \leftrightarrow d^{1/b}<a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abd}(0<b\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ 0\le a\ \&\ 0\le d \rightarrow a^b<d \leftrightarrow a<d^{1/b})$

3. Попытка склейки двух эквивалентностей с подобными заменяемыми частями. Аналогично пункту 1, но вместо разрешения относительно неизвестных эквивалентности выполняют упрощение относительно них. (Прием неизвоценка - 5)э

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bijx}(\neg(b=1)\ \&\ 0<b\ \&\ 0<j\ \&\ 0<x\ \&\ b-\text{число}\ \&\ i-\text{число}\ \&\ j-\text{число}\ \&\ x-\text{число}\to x\le jb^i\leftrightarrow 0<b-1\ \&\ \log_b x\le i+\log_b j\ \vee\ 0<-b+1\ \&\ i+\log_b j\le\log_b x)$

   из теоремы

   $\forall_{bijy}(0<b\ \&\ 0<j\ \&\ 0<y\ \&\ 0<-b+1\ \&\ b-\text{число}\ \&\ i-\text{число}\ \&\ j-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\to i+\log_b j\le\log_b y\leftrightarrow y\le jb^i)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bijx}(0<j\ \&\ 0<x\ \&\ 0<b-1\ \&\ b-\text{число}\ \&\ i-\text{число}\ \&\ j-\text{число}\ \&\ x-\text{число}\to\log_b x\le i+\log_b j\leftrightarrow x\le jb^i)$

4. Попытка склеить две эквивалентности общей стандартизации, отличающиеся заменяющими частями. Аналогично пункту 1, но склеиваются две эквивалентности общей стандартизации. (Прием общнорм - 35).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bd}(b-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ \neg(b=0)\to 0<d/b\leftrightarrow 0<bd)$

   из теоремы

   $\forall_{ac}(0<a\ \&\ a-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\to 0<c/a\leftrightarrow 0<c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bd}(b<0\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\to 0<d/b\leftrightarrow d<0)$

5. Склейка двух теорем, отличающихся заменяемыми частями. Теорема A - эквивалентность $A_1\leftrightarrow A_2$, уменьшающая оценку сложности утверждения A_1. В списке вывода находится другая теорема B с консеквентом $B_1\leftrightarrow B_2$, уменьшающая оценку сложности утверждения B_1. Утверждения A_1, B_1 содержат все переменные корневых связывающих приставок своих теорем. Некоторая подстановка C, переобозначающая переменные, переводит A_1 в B_1. Рассматриваются список S_1 результатов применения C к антецедентам теоремы A и список S_2 антецедентов теоремы B. Разность R_1 списков S_1, S_2 и разность R_2 списков S_2, S_1 одноэлементны и состоят из утверждений P, Q. Рассматривается пересечение S_3 списков S_1, S_2. Дизъюнкция $P\ \vee\ Q$ упрощается относительно S_3 до элементарного утверждения D. Определяется результат A_3 применения C к утверждению A_2. Антецедентами новой теоремы становятся утверждения S_3 и D, а консеквентом - эквивалентность "$B_1\leftrightarrow(P\ \&\ A_3)\ \vee\ (Q\ \&\ B_2)$". (Прием уменьшение - 15).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{acd}(a - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \neg(d = 0) \to c/d < a \leftrightarrow d < 0\ \&$
$ad < c\ \vee\ 0 < d\ \&\ c < ad)$

из теоремы

$\forall_{bcd}(c < 0\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число} \to bc < d \leftrightarrow d/c < b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{acd}(0 < d\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число} \to c < ad \leftrightarrow c/d < a)$

Несколько теорем определяют по отдельности параметры некоторого терма. Они склеиваются в теорему, определяющую данный терм

1. Восстановление характеристического набора по его разрядам. Теорема A имеет консеквент вида $x = t$, где x - переменная, не входящая в t. Она обладает антецедентом A_1 вида $P = (x, y)$, где x, y - различные переменные, не входящие в прочие антецеденты и в P, t. Составляется список X_1 параметров антецедента A_1, пополняемый итеративно параметрами всех равенств в антецедентах, одна из частей которых уже принадлежит X_1. Выделяется подсписок S_1 антецедентов теоремы A, параметры которых включаются в X_1. В списке вывода находится теорема B с консеквентом $z = r$ и антецедентом B_1 вида $Q = (u, z)$". Здесь u, z - переменные, условия на которые такие же, как условия на переменные x, y теоремы A. Все переменные теоремы B предварительно переобозначаются на переменные, не входящие в A. Аналогично теореме A, начиная с B_1 формируется список переменных X_2. Затем выделяется подсписок S_2 антецедентов теоремы B, параметры которых включаются в X_2. Определяется подстановка C, переводящая список S_2 в S_1. Находится результат r_1 применения C к r. Новая теорема имеет консеквент $P = (t, r_1)$. Антецедентами служат отличные от A_1 антецеденты теоремы A и результаты применения C к антецедентам теоремы B, не вошедшим в S_2. (Прием значениепеременной - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDKcdehij}(\neg(c = D)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ \text{коорд}(c, K) = (d, e)\ \&\ c - \text{точка}\ \&$
   $D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(cD) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \neg(h = D)\ \&$
   $\text{коорд}(h, K) = (i, j)\ \&\ h - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(hD) \parallel \text{прямая}(AC) \to$
   $\text{коорд}(D, K) = (i, e))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDKcde}(\neg(c = D)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ \text{коорд}(c, K) = (d, e)\ \&\ \text{коорд}(D, K) =$
   $(a, b)\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(cD) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{систкоорд}(K) \to$
   $b = e)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCDKcde}(\neg(c = D)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ \text{коорд}(c, K) = (d, e)\ \&\ \text{коорд}(D, K) =$
   $(a, b)\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(cD) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{систкоорд}(K) \to$
   $a = d)$

2. Попытка восстановления сложной характеристики объекта по ее компонентам. Консеквент $A_1 = A_2$ теоремы A преобразует сложное выражение A_1 в более простое выражение A_2, содержащее единственную переменную x, причем антецедент $x = t$ фиксирует значение этой переменной и содержит все переменные теоремы. В списке вывода находится другая теорема B аналогичного типа, с консеквентом $B_1 = B_2$ и антецедентом $y = r$; B_2 содержит только r. Ее переменные переобозначаются так, чтобы отличаться от переменных теоремы A. Определяется подстановка C, переводящая равенство $y = r$ в равенство $x = t$. Находится результат B_3 применения C к терму B_2. Выбираются новые переменные u, v. Составляется список S_1 отличных от $x = t$ антецедентов теоремы A и результатов применения C к отличным от $y = r$ антецедентам теоремы B. Решается задача на описание, условиями которой служат равенства $A_2 = u, B_3 = v$ и все содержащие только x утверждения списка S_1. Единственная неизвестная - x. Посылки - указатели типа значений для u, v, определяемые по A_2, B_3. Ответ имеет вид $x = s$. Создается список S_2 - объединение списка S_1 с указателями типа для u, v и утверждениями $A_1 = u, B_4 = v$, где B_4 - результат применения C к B_1. Должна быть выведена теорема с консеквентом $t = s$ и антецедентами S_2. Однако, предшествующие действия лишь приводятк такому предположению, и перед регистрацией теоремы в списке вывода решается задача на доказательство ее консеквента как следствия антецедентов. Далее теорема упрощается. (Прием упрощтерм - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acd}(\lim(\lambda_h(\mathrm{Re}(a(h)), h-\text{натуральное})) = d \,\&\, \lim(\lambda_n(\mathrm{Im}(a(n)), n-\text{натуральное})) = c \,\&\, c - \text{число} \,\&\, d - \text{число} \,\&\, \text{последовательность}(a, \mathbb{C}) \to \lim_{n\to\infty}\{a(n)\} = d + ci))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(\text{последовательность}(a, \mathbb{C}) \,\&\, b - \text{комплексное} \,\&\, \lim_{n\to\infty}\{a(n)\} = b \to \lim(\lambda_n(\mathrm{Im}(a(n)), n - \text{натуральное})) = \mathrm{Im}(b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(\text{последовательность}(a, \mathbb{C}) \,\&\, b - \text{комплексное} \,\&\, \lim^{n\to\infty}\{a(n)\} = b \to \lim(\lambda_n(\mathrm{Re}(a(n)), n - \text{натуральное})) = \mathrm{Re}(b))$

Две эквивалентности имеют в своих заменяемых частях конъюнкции некоторого утверждения A с такими утверждениями, дизъюнкция которых истинна. Они объединяются в эквивалентность утверждения A дизъюнкции исходных заменяющих частей

1. Склейка двух эквивалентностей для конъюнкций, отличающихся альтернативными членами. Теорема A - эквивалентность общей стандартизации, консеквентом которой служит $(A_1 \,\&\, A_2 \leftrightarrow A_3)$. Утверждение A_1 содержит все переменные теоремы, утверждение A_2 - не все. В списке вывода находится другая аналогичная теорема B с консеквентом $(B_1 \,\&\, B_2 \leftrightarrow B_3)$. Утверждение B_1 содержит все переменные теоремы, причем A_1 является результатом применения переобозначающей переменные подстановки C к B_1. Подстановка C применяется ко всей теореме B и переводит ее в теорему D с консеквентом $(A_1 \,\&\, D_1 \leftrightarrow D_2)$. Списки

антецедентов теорем A, D одинаковые. Дизъюнкция $A_2 \vee D_1$ - следствие этих антецедентов. Новая теорема получается из теоремы A заменой ее консеквента на $(A_1 \leftrightarrow (A_3 \vee D_2))$. Она упрощается. (Прием общнорм - 91).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(\neg(b = 0)$ & $a -$ число & $-$ число & числитель$(b) -$ even & $b -$ rational $\rightarrow$ $a^b = c^b \leftrightarrow a = c \vee a = -c)$

из теоремы

$\forall_{abc}(\neg(b = 0)$ & $a -$ число & $-$ число & числитель$(b) -$ even & $b -$ rational $\rightarrow$ $a^b = c^b$ & $0 \leq ac \leftrightarrow a = c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bce}(\neg(b = 0)$ & $c -$ число & $e -$ число & числитель$(b) -$ even & $b -$ rational $\rightarrow$ $c^b = e^b$ & $ce \leq 0 \leftrightarrow c = -e)$

Склеиваются две копии одной и той же теоремы при помощи третьей теоремы, выражающей конъюнкцию заменяющих частей исходнйх теорем в виде элементарного утверждения. Конъюнкция заменяемых частей приводится к виду элементарного утверждения при помощи вспомогательной задачи на описание

1. Попытка склейки консеквентов двух копий исходной теоремы при помощи другой эквивалентности. Теорема A - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$ с элементарными обеими частями. Переменные бесповторной заменяющей части A_2 - собственное подмножество переменных заменяемой части A_1. По заголовку P утверждения A_2 определяется вспомогательная эквивалентность D с консеквентом вида $Q \leftrightarrow Q_1$ & Q_2, где оба утверждения Q_1, Q_2 имеют заголовок P и отличаются лишь переобозначением переменных. Переменные этой теоремы переобозначаются так, чтобы не входить в теорему A. Определяется копия B теоремы A, полученная из нее переобозначением параметров терма A_2 на новые переменные. Консеквентом теоремы B служит эквивавалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$. Находится подстановка C, унифицирующая A_2 с Q_1 и одновременно B_2 с Q_2. Определяется список S антецедентов всех трех теорем, к которым применена подстановка C. Определяются результаты Q_3, A_3, B_3 применения C к Q, A_1, B_1. Решается задача на описание с посылками S и условиями A_3, B_3. Ее цели - "редауция", "свертка". Ответом служит элементарное утверждение H. Создается новая теорема с антецедентами S и консеквентом $H \leftrightarrow Q_3$. Она упрощается. (Прием общнорм - 32).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{adefg}(a -$ set & $a \subseteq$ Dom(f) & Dom$(f) \subseteq \mathbb{R}$ & Val$(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $d \in a$ & $e \in a$ & $g \in a$ & $f -$ функция & возрастает$(f, a) \rightarrow f(d) \in (f(e), f(g)) \leftrightarrow d \in (e, g))$

   из теоремы

   $\forall_{afxy}(a -$ set & $a \subseteq$ Dom(f) & Dom$(f) \subseteq \mathbb{R}$ & Val$(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $x \in a$ & $y \in a$ & $f -$ функция & возрастает$(f, a) \rightarrow 0 < f(y) - f(x) \leftrightarrow 0 < y - x)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to a \in (b,c) \leftrightarrow 0 < a - b\ \&\ 0 < c - a)$

Две теоремы позволяют составить систему из двух уравнений относительно двух сложных выражений. После ее решения получаются тождества для данных выражений

1. Попытка усмотрения системы из двух уравнений с двумя неизвестными операциями над семействами по данной теореме и другой теореме того же цикла вывода. Теорема A - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатели. Внутри A_1 встречается два подвыражения t_1, t_2, представляющие собой одноместные операции над описателем "отображение". В списке вывода находится другая теорема B аналогичного типа, имеющая консеквент $B_1 = B_2$. Внутри B_1 встречаются два подвыражения r_1, r_2, представляющие собой одноместные операции над описателем "отображение". Переменные теоремы B переобозначены так, чтобы не встречаться в теореме A. Подстановка C переводит t_1 в r_1, а t_2 в r_2. Определяется список S антецедентов теоремы B и результатов применения C к антецедентам теоремы A. Выбираются новые переменные x, y. Определяется результат A_3 замены в A_1 подтермов t_1, t_2 на x, y и последующего применения подстановки C. Определяется результат A_4 применения подстановки C к A_2. Определяется результат B_3 замены в B_1 подвыражений r_1, r_2 на x, y. Решается задача на описание с условиями $A_3 = A_4, B_3 = B_2$ и посылками S. Неизвестные - x, y. Выбирается произвольный конъюнктивный член ответа, определяется результат Q замены в нем переменных x, y на r_1, r_2, и создается новая теорема с антецедентами S и консеквентом Q. (Прием описатель - 29).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{целое}\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ 0 \le b - a \to \sum_{e=a}^{b} \cos e =$
   $2\sin(-a/2 + b/2 + 1/2)\sin(1/2)\cos(a/2 + b/2)/(-\cos 1 + 1))$

   из теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{целое}\ \&\ d - \text{целое}\ \&\ 0 \le d - c \to (-1 + \cos 1)\sum_{x=c}^{d} \sin x + \sin 1 \sum_{x=c}^{d} \cos x =$
   $\sin c + \sin(d+1))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{целое}\ \&\ d - \text{целое}\ \&\ 0 \le d - c \to (-1 + \cos 1)\sum_{x=c}^{d} \cos x - \sin 1 \sum_{x=c}^{d} \sin x =$
   $-\cos c + \cos(d+1))$

2. Использование двух равенств с двумя числовыми атомами для исключения их общего атома. Имеются два тождества, каждое из которых связывает два невырожденных числовых атома A и B. Их переменные сначала переобозначаются так, чтобы не пересекались, а затем находится подстановка C, переводящая атом B и часть антецедентов одного тождества в атом B и часть антецедентов другого. Составляется объединенный список S антецедентов второго тождества и результатом применения C к антецедентам первого. Относительно списка S получается система из двух уравнений для атома B и двух версий атома A. Она позволяет исключить атом B и получить соотношение для атомов A. Это

соотношение становится консеквентом новой теоремы; ее антецеденты - утверждения S. Исходные теоремы тоже сохраняются. (Прием числовойатом - 72).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{eABCDE}(\neg(e = C)\ \&\ \neg(e = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \neg(C = E)\ \&$
$\neg(D = E)\ \&\ e \in \text{окружность}(AB)\ \&\ C \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$D \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
$B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$\text{разныестороны}(e, E, \text{прямая}(CD)) \to \angle(CeD) + \angle(CED) = \pi)$

из теоремы

$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$\neg(D = E)\ \&\ \neg(C = E)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ C \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$D \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$\text{разныестороны}(E, A, \text{прямая}(CD)) \to 2\angle(CED) + \angle(CAD) = 2\pi)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$\neg(D = E)\ \&\ \neg(C = E)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ C \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$D \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$\text{однасторона}(A, E, \text{прямая}(CD)) \to 2\angle(CED) = \angle(CAD))$

Несколько импликаций с одинаковыми консеквентами, выражающими некоторое "сложное" свойство, отличаются группами "простых" антецедентов. Они объединяются в одну, с новым дизъюнктивным антецедентом, составленным из исходных различающихся антецедентов

1. Склейка двух импликаций, сводящих вычисление операции над отображением к таким же операциям с более простыми операндами. Теорема A сводит вычисление операции над описателем "отображение" к вычислению таких же операций над "подотображениями" - выражения, определяющие их значения - подтермы такого выражения для исходного описателя. Это вычисление обеспечивается равенствами в антецедентах. В списке вывода находится другая теорема B такого же типа и для той же операции над отображениями, но с другими результатами вычисления операций над "подотображениями". Консеквент теоремы B переводится в консеквент теоремы A некоторой подстановкой. После этого предпринимается дизъюнктивное объединение результатов вычисления подвыражений в обеих теоремах. Эти результаты обозначены переменными, а само вычисление осуществляется равенствами в антецедентах, имеющих своими правыми частями данные переменные. (Прием описатель - 83).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acdehjk}(\text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ h - \text{функция}\ \&\ \text{Локопред}(h, c, k)\ \&\ j - \text{функция}\ \&\ \text{Число}(c)$
   $\&\ e \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(j) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Локопред}(j, c, k)\ \&\ \text{типпредела}(k)\ \&\ \text{Dom}(j) =$
   $e\ \&\ \text{Dom}(h) = e\ \&\ \text{предел}(j, k, c) = d\ \&\ \text{предел}(h, k, c) = a\ \&\ ((d < 0\ \&\ d -$
   $\text{число}\ \vee\ d = -\infty)\ \&\ a = \infty\ \vee\ (0 < d\ \&\ d - \text{число}\ \vee\ d = \infty)\ \&\ a = -\infty) \to$
   $\lim_{b \to c \setminus k}(j(b)h(b)) = -\infty)$

из теоремы

$\forall_{acdehjk}(\mathrm{Val}(h) \subseteq \mathbb{R}$ & $h-$функция & Локопред(h,c,k) & $j-$функция & Число(c) & $e \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(j) \subseteq \mathbb{R}$ & $d-$число & Локопред(j,c,k) & типпредела(k) & $\mathrm{Dom}(j) = e$ & $\mathrm{Dom}(h) = e$ & предел$(j,k,c) = d$ & предел$(h,k,c) = a$ & $(a = -\infty$ & $0 < d \ \vee \ a = \infty$ & $d < 0) \rightarrow \lim_{b \rightarrow c \backslash k}(j(b)h(b)) = -\infty)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{cefhj}($предел$(h,j,c) = \infty$ & $\mathrm{Val}(h) \subseteq \mathbb{R}$ & $h-$функция & Локопред(h,c,j) & $f-$функция & Число(c) & $e \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ & Локопред(f,c,j) & типпредела(j) & предел$(f,j,c) = -\infty$ & $\mathrm{Dom}(f) = e$ & $\mathrm{Dom}(h) = e \rightarrow$ $\lim_{b \rightarrow c \backslash j}(f(b)h(b)) = -\infty)$

Две импликации с одинаковыми консеквентами, у которых часть параметров антецедентов не входит в консеквент. Рассматриваются всевозможные способы унификации по этим переменным антецедентов одной импликации с антецедентами другой, при которых остается не отождествленным единственный антецедент. Дизъюнкция таких остаточных антецедентов (их может быть больше двух, из-за различия унифицирующих подстановок) преобразуется к элементарному утверждлению, которое из замещает не отождествленный антецедент

1. Склейка двух теорем с дополнительной унификацией параметров антецедентов, не встречающихся в консеквенте. Теорема A - импликация, консеквентом A_1 которой служит нечисловой двуместный предикат. В антецедентах нет равенства. В списке вывода находится другая теорема B того же типа, с консеквентом B_1. Переменные теоремы B переобозначаются так, чтобы не входить в теорему A. Определяется подстановка C, переобозначающая переменные и переводящая B_1 в A_1. Эта подстановка преобразует теорему B. Рассматриваются список S_1 антецедентов теоремы A и список S_2 антецедентов теоремы B (уже преобразованной). Составляются разность R_1 списков S_1, S_2 и разность R_2 списков S_2, S_1. Находятся подсписок R_3 списка R_1, образованный теми утверждениями, которые имеют единственную не входящую в консеквент A_1 переменную, а также аналогичный подсписок R_4 списка R_2. Каждый из них охватывает все не входящие в консеквент переменные. Рассматриваются подстановки, переводящие R_4 в R_2. Они применяются к единственному оставшемуся элементу списка R_2 и порождают некоторые его вариации, каждая из которых уже могла бы дать новую теорему. Вообще говоря, их может быть несколько. Все они, вместе с оставшимся элементом E списка R_1, соединяются дизъюнкцией и упрощаются относительно списка S_3 антецедентов теоремы A, из которого удален антецедент E. Результат не содержит дизъюнкции. Вместе со списком S_3, он замещает список антецедентов теоремы A. (Прием отношение - 48).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdD}(\neg(b = c)$ & $a \in$ окружность(bc) & $d \in$ окружность(bc) & $a -$ точка & $b -$ точка & $c -$ точка & $d -$ точка & $D -$ точка & $\neg(a = D)$ & $\neg(d = D)$ & $D \in$ прямая$(ad) \rightarrow \neg(D \in$ окружность$(bc)))$

   из теоремы

$\forall_{abcdD}(\neg(b = c)$ & $a \in$ окружность(bc) & $d \in$ окружность(bc) & $D \in$ интервал(ad)
& $a -$ точка & $b -$ точка & $c -$ точка & $d -$ точка & $D -$ точка $\rightarrow$
$\neg(D \in$ окружность$(bc)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcdC}(\neg(b = c)$ & $a \in$ интервал(dC) & $a \in$ окружность(bc) & $d \in$ окружность(bc)
& $a -$ точка & $b -$ точка & $c -$ точка & $d -$ точка & $C -$ точка $\rightarrow$
$\neg(C \in$ окружность$(bc)))$

Консеквенты двух теорем однозначно определяют в совокупности параметры правой части некоторого общего для этих теорем равенства в антецедентах. Тогда создается теорема, у которой это равенство перенесено в консеквент, а оба старых консеквента перенесены в антецеденты

1. Определение координат объекта по координатам его проекций. Теорема A_1 - тождество с консеквентом вида "коорд$(E_1, K) = (t_1, \ldots, t_k)$". Она имеет антецедент C вида "коорд$(F, K) = (x_1, \ldots, x_k)$", где $x_1, \ldots, x_k$ - попарно различные переменные. Единственное выражение t_m неконстантное и является при этом некоторой переменной x_i. В списке вывода находятся другие теоремы $A_2, \ldots, A_k$ аналогичного вида, имеющие консеквенты вида "коорд$(E_j, K) = (r_1, \ldots, r_k)$", где по-прежнему лишь единственное r_n неконстантное и является некоторой переменной x_i; такие переменные x_i различны и в совокупности накрывают весь список $x_1, \ldots, x_k$. В список антецедентов любого A_j включаются все антецеденты теоремы A_1, не содержащие параметра x_i из правой части ее консеквента. Итоговый список антецедентов составляется из списков антецедентов теорем A_j, из которых исключено равенство "коорд$(F, K) = (x_1, \ldots, x_k)$" и добавлены равенства "коорд$(E_j, K) = (r_1, \ldots, r_k)$". Консеквентом становится "коорд$(F, K) = (x_1, \ldots, x_k)$". (Прием систкоорд - 11).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abABCDEFK}(D -$ точка & $F -$ точка & систкоорд(K) & $\neg(D = F)$ &
   $K = (A, B, C)$ & $F \in$ прямая(AB) & прямая$(AC) \parallel$ прямая(DF) & $E -$ точка &
   $\neg(D = E)$ & $E \in$ прямая(AC) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(DE) &
   коорд$(F, K) = (a, 0)$ & коорд$(E, K) = (0, b) \rightarrow$ коорд$(D, K) = (a, b))$

   из теоремы

   $\forall_{abABCDFK}(D -$ точка & $F -$ точка & систкоорд(K) & $\neg(D = F)$ &
   $K = (A, B, C)$ & $F \in$ прямая(AB) & прямая$(AC) \parallel$ прямая(DF) &
   коорд$(D, K) = (a, b) \rightarrow$ коорд$(F, K) = (a, 0))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abABCDEK}(D -$ точка & $E -$ точка & систкоорд(K) & $\neg(D = E)$ &
   $K = (A, B, C)$ & $E \in$ прямая(AB) & прямая$(AB) \parallel$ прямая(DE) &
   коорд$(D, K) = (a, b) \rightarrow$ коорд$(E, K) = (0, b))$

Склейка теорем, выражающих свойства функций

1. Две теоремы определяют одну и ту же характеристику двух функций, отличающихся только областями определения. Дизъюнкция условий принадлежности этим областям сводится к элементарному утверждению, причем условное выражение для значений характеристики преобразуется к безусловному виду A. Новая теорема дает характеристику A для функции, определенной на объединении исходных областей. (Прием функперех - 22).

   Пример: вывод теоремы

   первообразная$(\lambda_f(1/f, \neg(f = 0)\ \&\ f - \text{число}), \lambda_f(\ln|f|, f - \text{число}))$

   из теоремы

   первообразная$(\lambda_x(1/x, x < 0\ \&\ x - \text{число}), \lambda_d(\ln(-d), d - \text{число}))$

   и дополнительной теоремы

   первообразная$(\lambda_f(1/f, 0 < f\ \&\ f - \text{число}), \lambda_c(\ln c, c - \text{число}))$

2. Примерка конъюнктивно-дизъюнктивного определения свойства функции на элементарные операции раздела: попытки реализации подслучаев с помощью имеющихся теорем и склейки результатов с помощью того же определения. Определяющая часть свойства функции представляет собой конъюнкцию утверждений. Рассматривается некоторая элементарная операция E подходящего раздела, и определение применяется к функции вида "$\lambda_x(E(f_1(x), \ldots, f_n(x)), A(x))$". Для отрицания каждого из конъюнктивных членов определяющей части при помощи других теорем предпринимается попытка вывести его из некоторого условия на "исходные" функции $f_1, \ldots, f_n$. Отрицание дизъюнкции этих условий удается свернуть с помощью рассматриваемого определения в свойство одной из функций f_i. (Прием определение - 191).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{adei}(\text{Dom}(d) = \text{Dom}(e)\ \&\ \lim_{b\to a\setminus i}(d(b)e(b)) = \text{неопред}\ \&\ \text{предел}(e, i, a) < 0\ \&$
   $\text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ d - \text{функция}\ \&\ e - \text{функция}\ \&$
   $\text{предел}(e, i, a) - \text{число}\ \&\ \text{Число}(a)\ \&\ \text{типпредела}(i)\ \&\ \text{Локопред}(d, a, i)\ \&$
   $\text{Локопред}(e, a, i) \to \text{предел}(d, i, a) = \text{неопред})$

   из теоремы

   $\forall_{afi}(f - \text{функция}\ \&\ \text{Число}(a)\ \&\ \text{типпредела}(i)\ \&\ \text{Локопред}(f, a, i)\ \&$
   $\text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \text{предел}(f, i, a) = \text{неопред} \leftrightarrow$
   $\neg(\text{предел}(f, i, a) - \text{число})\ \&\ \neg(\text{предел}(f, i, a) = \infty)\ \&\ \neg(\text{предел}(f, i, a) = -\infty))$

Склейка тождества, имеющего существенные антецеденты, с несколькими тождествами для частных случаев

1. Теорема - тождество, определяющее значение некоторого "сложного" выражения. В списке вывода находится группа тождеств для того же выражения, но в частных случаях, причем для этих случаев удается усмотреть, что "общее"

значение исходного тождества сохраняется, а дизъюнкция условий применимости тождеств сводится к конъюнкции элементарных утверждений, которая и замещает список антецедентов исходной теоремы. (Прием числатом - 26).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{adC}(\neg(a = C)\ \&\ \neg(d = C)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow$
$\text{уголмежду}(\text{вектор}(aC), \text{вектор}(dC)) = \angle(aCd))$

из теоремы

$\forall_{adC}(\neg(a = d)\ \&\ \neg(a = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(ad) = \text{прямая}(aC))\ \&\ a - \text{точка}\ \&$
$d - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(aC), \text{вектор}(dC)) = \angle(aCd))$

и дополнительных теорем

$\forall_{acA}(\neg(a = c)\ \&\ l(aA) = l(cA)\ \&\ A \in \text{отрезок}(ac)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&$
$A - \text{точка} \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(ca), \text{вектор}(Aa)) = 0)$

$\forall_{aAB}(\neg(a = A)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ a \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
$B - \text{точка} \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(aA), \text{вектор}(BA)) = 0)$

$\forall_{acB}(\neg(a = B)\ \&\ \neg(c = B)\ \&\ B \in \text{отрезок}(ac)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&$
$B - \text{точка} \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(aB), \text{вектор}(cB)) = \pi)$

Склейка двух утверждений о равенстве числовых атомов, выведенных из тождеств для пары числовых атомов

1. Имеются два тождества, каждое из которых связывает два невырожденных числовых атома A и B. Значение атома B однозначно определяется этими тождествами по значению атома A. Антецеденты тождеств отличаются только условиями на атом A, причем дизъюнкция конъюнкций таких условий истинна. В области, где эти условия одновременно истинны, тождества эквивалентны. Переменные консеквентов тождеств переобозначаются так, чтобы не пересекались; различающиеся антецеденты заменяются на условие равенства двух версий атома A, а консеквентом становится равенство двух версий атома B. Исходные теоремы тоже сохраняются. (Прием числовойатом - 69).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdeABCDE}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(c = e)\ \&\ \neg(d = e)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(C = E)\ \&$
   $\neg(D = E)\ \&\ \angle(ced) = \angle(CED)\ \&\ c \in \text{окружность}(ab)\ \&\ d \in \text{окружность}(ab)\ \&$
   $e \in \text{окружность}(ab)\ \&\ C \in \text{окружность}(AB)\ \&\ D \in \text{окружность}(AB)\ \&$
   $E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&$
   $e - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка} \rightarrow$
   $\angle(CAD) = \angle(cad))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDE}(\neg(D = E)\ \&\ \neg(C = E)\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
   $\neg(A = B)\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ C \in \text{окружность}(AB)\ \&$
   $D \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ 0 \leq -\angle(CED) + \pi/2 \rightarrow$
   $2\angle(CED) = \angle(CAD))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDE}(\neg(D=E)\ \&\ \neg(C=E)\ \&\ D-$ точка $\&\ E-$ точка $\&\ C-$ точка $\&$
$\neg(A=B)\ \&\ B-$ точка $\&\ A-$ точка $\&\ C\in$ окружность$(AB)\ \&$
$D\in$ окружность$(AB)\ \&\ E\in$ окружность$(AB)\ \&\ 0\le -\pi/2+\angle(CED)\to$
$2\angle(CED)+\angle(CAD)=2\pi)$

Склейка двух теорем, отличающихся только консеквентами

1. Две эквивалентности отличаются лишь консеквентами. Дизъюнкция левых частей этих эквивалентностей эквивалентна элементарному утверждению A, дизъюнкция правых - элементарному утверждению B. Выводится эквивалентность A и B. Исходные теоремы тоже сохраняются. (Прием числопред - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefghijkmnstK}(\neg(f=g)\ \&\ \neg(s=t)\ \&\ \neg(h\in$ прямая$(fg))\ \&$ коорд(прямая$(st),K)$
   $=\text{set}_{pqr}(p-$ число $\&\ q-$ число $\&\ r-$ число $\&$ пропорцнаборы$((i,k,m),(n+p,e+$
   $q,j+r)))\ \&$ коорд(плоскость$(fgh),K)=\text{set}_{xyz}(d+ax+by+cz=0\ \&$
   $x-$ число $\&\ y-$ число $\&\ z-$ число$)\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\&$
   $d-$ число $\&\ e-$ число $\&\ i-$ число $\&\ j-$ число $\&\ k-$ число $\&\ m-$ число $\&$
   $n-$ число $\&\ f-$ точка $\&\ g-$ точка $\&\ h-$ точка $\&\ s-$ точка $\&\ t-$ точка $\&$
   Трехмерн$(K)\to$ прямая$(st)\parallel$ плоскость$(fgh)\leftrightarrow ai+bk+cm=0)$

   из теоремы

   $\forall_{abcdefghijkmnstK}(\neg(f=g)\ \&\ \neg(s=t)\ \&\ \neg(h\in$ прямая$(fg))\ \&$ коорд(прямая$(st),K)$
   $=\text{set}_{pqr}(p-$ число $\&\ q-$ число $\&\ r-$ число $\&$ пропорцнаборы$((i,k,m),(n+p,e+$
   $q,j+r)))\ \&$ коорд(плоскость$(fgh),K)=\text{set}_{xyz}(d+ax+by+cz=0\ \&$
   $x-$ число $\&\ y-$ число $\&\ z-$ число$)\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\&$
   $d-$ число $\&\ e-$ число $\&\ i-$ число $\&\ j-$ число $\&\ k-$ число $\&\ m-$ число $\&$
   $n-$ число $\&\ f-$ точка $\&\ g-$ точка $\&\ h-$ точка $\&\ s-$ точка $\&\ t-$ точка $\&$
   Трехмерн$(K)\to$ непересек(прямая(st), плоскость$(fgh))\leftrightarrow$
   $\neg(d-an-be-cj=0)\ \&\ ai+bk+cm=0)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcdefghijkmnstK}(\neg(f=g)\ \&\ \neg(s=t)\ \&\ \neg(h\in$ прямая$(fg))\ \&$ коорд(прямая$(st),K)$
   $=\text{set}_{pqr}(p-$ число $\&\ q-$ число $\&\ r-$ число $\&$ пропорцнаборы$((i,k,m),(n+p,e+$
   $q,j+r)))\ \&$ коорд(плоскость$(fgh),K)=\text{set}_{xyz}(d+ax+by+cz=0\ \&$
   $x-$ число $\&\ y-$ число $\&\ z-$ число$)\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\&$
   $d-$ число $\&\ e-$ число $\&\ i-$ число $\&\ j-$ число $\&\ k-$ число $\&\ m-$ число $\&$
   $n-$ число $\&\ f-$ точка $\&\ g-$ точка $\&\ h-$ точка $\&\ s-$ точка $\&\ t-$ точка $\&$
   Трехмерн$(K)\to$ прямая$(st)\subseteq$ плоскость$(fgh))\leftrightarrow d-an-be-cj=0\ \&$
   $ai+bk+cm=0)$

Конъюнктивная склейка двух импликаций с одинаковыми антецедентами

1. Две импликации имеют одинаковые антецеденты, а конъюнкция их консеквентов сворачивается в элементарное утверждение. Это утверждение замещает

консеквент исходной теоремы. Обе исходные импликации помечаются символом "исключение", блокирующим дальнейшее их использование в цикле вывода. Новая теорема рассматривается как обобщение исходной. (Прием вывод - 80).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{adf}(a \in \text{вершины}(d)\ \&\ f \in \text{компсвязн}(d,a)\ \&\ \text{граф}(d) \rightarrow$
$\text{компсвязн}(d,f) = \text{компсвязн}(d,a))$

из теоремы

$\forall_{adf}(a \in \text{вершины}(d)\ \&\ f \in \text{компсвязн}(d,a)\ \&\ \text{граф}(d) \rightarrow$
$\text{компсвязн}(d,f) \subseteq \text{компсвязн}(d,a))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{adf}(a \in \text{компсвязн}(d,f)\ \&\ f \in \text{вершины}(d)\ \&\ \text{граф}(d) \rightarrow$
$\text{компсвязн}(d,f) \subseteq \text{компсвязн}(d,a))$

У двух тождеств, выведенных в общем цикле, некоторые их части отличаются лишь подвыражениями A_1, A_2. Равенство этих подвыражений добавляется к антецедентам, а консеквентом становится равенство противоположных частей исходных тождеств

1. Заменяемые части двух упрощающих тождеств, выведенных в общем цикле, отличаются единственным операндом. Равенство этих операндов добавляется к объединению антецедентов, а консеквентом становится равенство заменяющих частей. (Прием нормализация - 145).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcde}(a = \text{операция}(b)\ \&\ \text{алгстепень}(d,a,e) = \text{единица}(a)\ \&\ d \in \text{носитель}(b)\ \&$
   $c - \text{целое}\ \&\ e - \text{целое}\ \&\ 0 \leq c\ \&\ 0 \leq e\ \&\ \text{группа}(b) \rightarrow \text{алгстепень}(d,a,ce) =$
   $\text{единица}(a))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a = \text{операция}(b)\ \&\ c - \text{целое}\ \&\ 0 \leq c\ \&\ \text{группа}(b) \rightarrow$
   $\text{алгстепень}(\text{единица}(a),a,c) = \text{единица}(a))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bcdefh}(h - \text{set}\ \&\ b \in h\ \&\ c - \text{целое}\ \&\ d - \text{целое}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&$
   $0 \leq c\ \&\ 0 \leq d\ \&\ \text{Единица}(e,f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f,h) \rightarrow \text{алгстепень}(b,f,cd) =$
   $\text{алгстепень}(\text{алгстепень}(b,f,c),f,d))$

Две теоремы с альтернативными антецедентами и различными консеквентами позволяют переформулировать антецедент первой из них так, чтобы он отделял ее от второй теоремы

1. Усмотрение двух альтернативных контекстов теоремы и использование оценки числового атома для замещения антецедента. Теорема A - соотношение для

невырожденных числовых атомов. В списке вывода находится другая теорема B. Рассматриваются антецедент P первой теоремы, заголовок которого не встречается среди антецедентов второй, и антецедент Q второй теоремы, заголовок которого не встречается среди антецедентов первой. Определяется подстановка C, переводящая остальные антецеденты первой теоремы в остальные антецеденты второй. Устанавливается, что дизъюнкция Q и результата применения C к P - следствие остальных антецедентов второй теоремы. Рассматривается невырожденный числовой атом D, встречающийся в консеквенте второй теоремы либо в результате применения C к консеквенту первой. Этот атом оценивается сверху в каждой из теорем, и из сравнения оценок извлекается неравенство, отделяющее случай одной из теорем от другой. Выводятся две новых теоремы, получаемых из исходных двух теорем заменой P, Q на соответствующие неравенства. (Прием числовойатом - 41).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \neg(C = E)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ C \in \text{окружность}(AB)$
$\&\ D \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&$
$C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ 0 \leq -\pi/2 + \angle(CED) \rightarrow$
$2\angle(CED) + \angle(CAD) = 2\pi)$

из теоремы

$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$\neg(D = E)\ \&\ \neg(C = E)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ C \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$D \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$\text{разныестороны}(E, A, \text{прямая}(CD)) \rightarrow 2\angle(CED) + \angle(CAD) = 2\pi)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$\neg(D = E)\ \&\ \neg(C = E)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ C \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$D \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$\text{однасторона}(A, E, \text{прямая}(CD)) \rightarrow 2\angle(CED) = \angle(CAD))$

Глава 3

Использование дополнительной теоремы для варьирования текущей

3.1 Вывод дизъюнктивного утверждения при помощи дополнительного тождества

1. Некоторый антецедент A имеет вид нестрогого неравенства для невырожденного числового атома P. Этот антецедент содержит все переменные теоремы. Дополнительная теорема - тождество для двух числовых атомов P, Q одинакового типа, позволяющее переформулировать отрицание неравенства A через другой невырожденный числовой атом Q. Если после этого заменить знак строгого неравенства на нестрогое, получается результат A_1 замены в неравенстве A атома P на Q. Таким образом, возникает двойник исходной теоремы - для замены A на A_1 и соответствующего переобозначения переменных теоремы. Антецедентами новой теоремы служат антецеденты исходной теоремы и ее двойника - за исключением A и A_1, а также антецеденты дополнительной теоремы. Консеквент - дизъюнкция консеквентов исходной теоремы и ее двойника. (Прием антецедент - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{ромб}(ABCD) \rightarrow 0 < l(AC) - l(AB)\ \vee\ 0 < l(BD) - l(AB))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(B = C)\ \&\ \neg(A \in \text{прямая}(BC))\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ 0 \leq \angle(ACB) - \pi/2 \rightarrow 0 < l(AB) - l(BC))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{ромб}(ABCD) \rightarrow \angle(ABC) + \angle(BAD) = \pi)$

3.2 Использование дополнительного тождества для варьирования консеквента

В этом и последующих разделах иногда используется оборот "после необходимой унификации". Он означает, что как к исходной, так и к дополнительной теоремам применяется некоторая подстановка, отождествляющая преобразуемый терм и левую часть применяемого тождества (либо эквивалентности). Обычно для этого используется процедура "тождвывод", которая учитывает наличие связанных внешними некорневыми кванторами и описателями переменных преобразуемого терма, чтобы избежать некорректных действий.

3.2.1 Преобразование заменяемой части тождества

Применение обращающего тождества

1. Попытка унификации альтернативного выражения с подтермом заменяемой части упрощающего тождества. Консеквент имеет вид "$(t_1$ при $P,$ иначе $t_2) = A$". Некоторое t_i, например, пусть далее это будет t_2, имеет вид $f(r)$. По символу f находится дополнительное тождество вида $g(f(x)) = x$. Консеквент теоремы заменяется на "$(g(t_1)$ при $P,$ иначе $r) = g(A)$". Добавляются антецеденты, необходимые для дополнительной теоремы. Результат упрощается. (Прием свертка - 51).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow -|a| = (-a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } a))$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = (a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } -a))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_b(b - \text{число} \rightarrow --b = b)$

Применение тождества, уменьшающего число переменных

1. Использование тождества типа сокращения для исключения одного из двух исходных сложных подвыражений заменяемой части. Консеквент теоремы имеет вид "$f(t_1, t_2) = A$", где A и каждое t_i бесповторны. Теорема используется для преобразования левой части, содержащей константные подтермы, к такому виду A, что становится возможным упрощение за счет вычислений с константами. Самый сложный подтерм T заменяющей части имеет заголовок g. Такой же заголовок имеют максимально сложные подвыражения левой части. Выражения $t_1, \ldots, t_n$ осуществляют декомпозицию выражения A по его параметрам. По символу g находится дополнительное тождество сокращающего типа: "$g(B_1, B_2) = x$", где x - переменная, причем каждое из выражений B_1, B_2 бесповторно и имеет переменные x, y. Внутри заменяемой части выбирается подвыражение $g(p_1, p_2)$, которое после необходимой унификации преобразуется при помощи дополнительной теоремы. Новая теорема упрощается и снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема упрощения за счет вычислений с константами. (Прием вычпрог - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cde}(\neg(d-1=0)\ \&\ 0<c\ \&\ 0<d\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\rightarrow \log_d(cd^e)=e+\log_d c)$

из теоремы

$\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ 0<a\ \&\ \neg(a-1=0)\ \&\ 0<b\ \&\ 0<c\rightarrow \log_a(bc)=\log_a b+\log_a c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ae}(\neg(a-1=0)\ \&\ 0<a\ \&\ a-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\rightarrow \log_a(a^e)=e)$

2. Попытка упростить заменяемую часть тождества общей стандартизации с помощью сокращающего тождества. Теорема - тождество общей стандартизации, которое в пакетах приведения к заданным заголовкам может применяться в обратном направлении. Число переменных в ней не более 3. Внутри заменяемой части этого тождества находится неоднобуквенное подвыражение t_1 с заголовком f. По символу f находится тождество сокращающего типа: $f(B_1,B_2)=B$, где B_1,B_2 имеют единственную общую переменную, и эта переменная не входит в B. Подвыражение t_1 после необходимой унификации преобразуется этим тождеством. Результат упрощается. (Прием норм - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcd}(b-\text{set}\ \&\ c-\text{set}\ \&\ d-\text{set}\ \&\ b\subseteq c\ \&\ c\cap d\subseteq b\rightarrow c\setminus d=b\setminus d\cup c\setminus b)$

   из теоремы

   $\forall_{adf}(a-\text{set}\ \&\ d-\text{set}\ \&\ f-\text{set}\ \&\ \text{непересек}(a,d)\rightarrow (a\cup f)\setminus d=a\cup(f\setminus d))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ac}(c-\text{set}\ \&\ a-\text{set}\ \&\ a\subseteq c\rightarrow a\cup(c\setminus a)=c)$

3. Попытка упростить заменяемую часть тождества общей стандартизации с помощью сокращающего тождества. Аналогично предыдущему, причем исходное тождество выполняет общую стандартизацию во всех ситуациях. Дополнительно проверяется, что оценка сложности дополнительного тождества не больше, чем у исходного. (Прием нормализация - 41).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bc}(\neg(bc-1=0)\ \&\ 0<b\ \&\ 0<c\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\rightarrow 1=\log_{bc} b+\log_{bc} c)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ 0<a\ \&\ \neg(a-1=0)\ \&\ 0<b\ \&\ 0<c\rightarrow \log_a(bc)=\log_a b+\log_a c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a-\text{число}\ \&\ 0<a\ \&\ \neg(a-1=0)\rightarrow \log_a a=1)$

4. Упрощение заменяемой части с поомощью дополнительного тождества для получения тождества, упрощающего сложное выражение с неизвестными после навешивания внешней операции. Консеквент теоремы имеет вид $f(t_1, t_2) = t$, где каждое из выражений t_1, t_2 бесповторно, причем пара t_1, t_2 декомпозирует выражение t по его переменным. Самое сложное подвыражение каждого из выражений t_1, t_2, t единственное, причем все эти подвыражения имеют один и тот же заголовок g. По символу g находится дополнительное тождество сокращающего типа: $g(B_1, B_2) = x$, где x - переменная, причем каждое из выражений B_1, B_2 бесповторно и имеет переменные x, y. Внутри левой части выбирается подвыражение $g(p_1, p_2)$, которое после необходимой унификации преобразуется при помощи дополнительной теоремы. Новая теорема упрощается и снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема упрощения сложного выражения с неизвестными после навешивания внешней операции (тождество применяется в направлении справа налево). (Прием группмножитель - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cde}(\neg(d - 1 = 0)\ \&\ 0 < c\ \&\ 0 < d\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow \log_d(cd^e) = e + \log_d c)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 < a\ \&\ \neg(a - 1 = 0)\ \&\ 0 < b\ \&\ 0 < c \rightarrow \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ae}(\neg(a - 1 = 0)\ \&\ 0 < a\ \&\ a - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow \log_a(a^e) = e)$

5. Попытка разделения сокращаемых операндов при дистрибутивной развертке. Консеквент теоремы имеет вид $g(x, h(y, z)) = f(g(x, y), g(x, z))$, где x, y, z - различные переменные. По символу h находится тождество сокращающего типа: $h(B_1, B_2) = B$, где B_1, B_2 имеют единственную общую переменную, и эта переменная не входит в B. Подвыражение $h(y, z)$ после необходимой унификации преобразуется этим тождеством. Результат упрощается. (Прием дистрибразвертка - 11).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdef}(0 < ef\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ 0 \leq de \rightarrow (d/e)^c \cdot (e/f)^c = (d/f)^c)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 \leq a\ \&\ 0 \leq b \rightarrow a^c b^c = (ab)^c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \neg(c = 0)\ \&\ \neg(b = 0) \rightarrow (a/b) \cdot (b/c)\ a/c)$

6. Попытка разделения сокращаемых операндов со вводом дополнительной переменной. Теорема - тождество вида $g(x, h(y, z)) = f(g(x, y), g(x, z))$, где операция h ассоциативная и коммутативная. По символу h находится тождество $h(B_1, B_2) = B$ сокращающего типа, у которого B_1 - переменная. Выбирается новая переменная u, и консеквент дополнительного тождества заменяется на $h(h(u, B_1), B_2) = h(B, v)$. После необходимой унификации это тождество применяется к подвыражению $h(y, z)$. Результат упрощается. (Прием дистрибразвертка - 16).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{adef}(a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow a(d + f) + a(e - d) = a(e + f))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a + (b - a) = b)$

7. Попытка упрощения подвыражения упрощаемого атома. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложный числовой атом через более простые. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится сокращающее либо перегруппировочное тождество общей стандартизации $f(\ldots) = r$. После необходимой унификации это тождество применяется к подвыражению t. Результат упрощается с дополнительным использованием теорем, уже имеющихся в списке вывода. (Прием числатом - 11).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abd}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Вектор}(d) \rightarrow \text{скалумнож}(b, d - a) =$
   $- \text{скалумнож}(b, a - d))$

   из теоремы

   $\forall_{bc}(\text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Вектор}(c) \rightarrow \text{скалумнож}(b, -c) = -\text{скалумнож}(b, c))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(b) \rightarrow -(a - b) = b - a)$

8. Попытка опрокинуть тождество для исключения либо упрощения описателя за счет сильного упрощения заменяемой части. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее либо упрощающее описатель A_1. Внутри A_1 находится неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f, не содержащее связанных переменных левой части тождества. По символу f находится тождество сильного упрощения (10 различных справочников поиска теорем, в основном, заменяющих выражение на логический символ либо переменную) с заголовком f заменяемой части. После необходимой унификации это тождество применяется к подвыражению t. Результат упрощается. (Прием описатель - 14).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{bf}(b - \text{set} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq b \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \text{сужение}(f, b) = f)$

из теоремы

$\forall_{fA}(f - \text{функция} \ \& \ A - \text{set} \rightarrow \text{сужение}(f, A) = \lambda_x(f(x), x \in A \cap \text{Dom}(f)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ c \subseteq b \rightarrow b \cap c = c)$

9. Попытка упрощения заменяемой части. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, обеспечивающее преобразование выражения к заданным заголовкам. Длина корневой связывающей приставки не более 3. Внутри A_1 находится неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество типа сокращения, заменяемая часть которого имеет вид $f(\ldots)$. После необходимой унификации это тождество применяется к подвыражению t. Результат упрощается. (Прием нормзаголовок - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(b - \text{число} \rightarrow 1 + \sin(b) = 2(\sin(b/2 + \pi/4)^2))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin a + \sin b = 2\sin((a + b)/2)\cos((a - b)/2))$

   и дополнительной теоремы

   $\sin(\pi/2) = 1.$

10. Попытка сильного упрощения заменяемой части для получения тождества общей стандартизации, исключающего переменную. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, обеспечивающее преобразование выражения к заданным заголовкам. Длина корневой связывающей приставки не более 3. Внутри A_1 находится неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество вида $f(x, f(x, y)) = a$, где a - логический символ либо переменная. Переменные x, y в левой части могут находиться под одноместными операциями. После необходимой унификации это тождество применяется к подвыражению t. Результат упрощается. (Прием нормзаголовок - 8).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{bd}(b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq d + b^2 \rightarrow d = (b + \sqrt{d + b^2})(-b + \sqrt{d + b^2}))$

    из теоремы

    $\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \rightarrow c - b^2 = (b + \sqrt{c})(-b + \sqrt{c}))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a + (b - a) = b)$

11. Попытка проварьировать заменяемую часть тождества с усиленным редуцированием. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций большей либо равной сложности. Длина корневой связывающей приставки не более 3. Внутри A_1 находится неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество общей стандартизации $f(\ldots) = r$, являющееся сокращающим либо перегруппировочным. После необходимой унификации это тождество применяется к подвыражению t. Результат упрощается, в том числе с привлечением уже имеющихся в списке вывода теорем. (Прием сокращ - 19).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ac}(\neg(a = 0)\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{rational} \to \sin(|a|^c) = \sin(a^c)\text{sg}(a^c))$

    из теоремы

    $\forall_b(\neg(b = 0)\ \&\ b - \text{число} \to \sin|b| = \sin b\text{sg}(b))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \to |a^b| = |a|^b)$

12. Попытка проварьировать заменяемую часть тождества с обычным редуцированием. Аналогично предыдущему, но при упрощении список вывода не используется. (Прием сокращ - 35).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ab}(\neg(a = 0)\ \&\ \neg(b = 0)\ \&\ \neg(-1 + |b| = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to \log_{|b|}|ab| = 1 + \log_{|b|}|a|)$

    из теоремы

    $\forall_{cd}(\neg(d - 1 = 0)\ \&\ 0 < c\ \&\ 0 < d\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число} \to \log_d(cd) = 1 + \log_d c)$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to |a||b| = |ab|)$

13. Попытка уменьшить число термов со стандартизируемым операндом в заменяющей части. Теорема - тождество для варьирования стандартизируемого операнда (например, основания логарифма). В заменяющей части имеется ровно два подвыражения максимальной сложности. Рассматривается вхождение одного из таких подвыражений t. По его заголовку f находится тождество вида $f(B_1, B_2) = B$, где B_1, B_2 - выражения с единственной бесповторной переменной x, а B - константный терм. После необходимой унификации это тождество применяется к подвыражению t. Результат упрощается. (Прием стандлогарифм - 7).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{cd}(\neg(c - 1 = 0)\ \&\ \neg(d - 1 = 0)\ \&\ 0 < c\ \&\ 0 < d\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число} \to 1/\log_d c = \log_c d)$

из теоремы

$\forall_{abc}(\neg(a-1=0)\ \&\ \neg(c-1=0)\ \&\ 0<a\ \&\ 0<b\ \&\ 0<c\ \&\ a-\text{число}\ \&$
$b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\to\log_a b/\log_a c=\log_c b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a-\text{число}\ \&\ 0<a\ \&\ \neg(a-1=0)\to\log_a a=1)$

14. Попытка сильного упрощения определяемого выражения. Теорема - определение выражения A_1 посредством равенства $A_1=A_2$. Внутри A_1 выбирается подвыражение вида $f(t_1,t_2)$. По его заголовку находится тождество вида $f(B_1,B_2)=B$, где B_1,B_2 - выражения с единственной бесповторной переменной, B - константный терм. После необходимой унификации это тождество применяется к подвыражению $f(t_1,t_2)$. Результат упрощается. (Прием определение - 77).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aC}(a-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\to\text{вектор}(aC)+\text{вектор}0=\text{вектор}(aC))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\to\text{вектор}(AB)+\text{вектор}(BC)=\text{вектор}(AC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_A(A-\text{точка}\to\text{вектор}(AA)=\text{вектор}0)$

15. Попытка опрокинуть тождество свертки путем сильного упрощения заменяемого терма. Теорема - тождество $A_1=A_2$, выполняющее сокращенную перезапись и одновременно упрощающее выражение под корневой сложной операцией. Оценка N сложности ее больше 5. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t, оценка сложности которого меньше N. По заголовку f терма t находится тождество вида $f(x,g(x,y))=a$, где a - логический символ либо переменная. После необходимой унификации оно применяется к подвыражению t. Результат упрощается. (Прием свертка - 96).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{akm}(\neg(m=0)\ \&\ \neg(a^2+k^2=0)\ \&\ m\mid a\ \&\ a-\text{целое}\ \&\ k-\text{целое}\ \&\ m-\text{целое}\to$
$\text{нод}(a,km)=|m|\text{нод}(k,a/m))$

из теоремы

$\forall_{mnk}(m-\text{целое}\ \&\ n-\text{целое}\ \&\ k-\text{целое}\ \&\ \neg(n^2+k^2=0)\ \&\ \neg(m=0)\to$
$\text{нод}(mn,mk)=|m|\text{нод}(n,k))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ \neg(b=0)\to(a/b)\cdot b=a)$

16. Попытка использовать тождество исключения переменной для вывода тождества, обеспечивающего упрощение с помощью вычисления над константными термами. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выполняющее сокращенную перезапись. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, преобразующее небесповторное выражение B_1 с заголовком f в бесповторное выражение B_2. Число переменных этого тождества не более 3, число вхождений переменных в B_1 не более 6. После необходимой унификации оно применяется к подвыражению t. Результат упрощается. Полученная теорема анализируется для выделения подтермов заменяющей части, допускающих обращение к процедурам вычисления с константами. Если такие подтермы T имеются, они переобозначаются новыми переменными x, с добавлением антецедентов $x = T$. Теорема снабжается характеристикой, указывающей, что она создана для приемов, выполняющих упрощение с помощью вычислений для константных термов. (Прием свертка - 81).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{acdefg}(0 < d \;\&\; c - \text{число} \;\&\; d - \text{число} \;\&\; e - \text{число} \;\&\; f - \text{число} \;\&\; g - \text{число} \;\&\; a = f - e \to cd^e + gd^f = (c + gd^a)d^e)$

    из теоремы

    $\forall_{abc}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \to ab + ac = a(b + c))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{ace}(0 < a \;\&\; a - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; e - \text{число} \to a^c a^{c-e} = a^e)$

17. Попытка сильного упрощения заменяемой части при помощи тождества, исключающего переменную. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, обеспечивающее преобразование выражения к заданным заголовкам. Длина корневой связывающей приставки не более 3. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество $t_1 = t_2$, у которого заменяемая часть t_1 с заголовком f небесповторная, а заменяющая - бесповторная и ее переменные - собственное подмножество переменных t_1. Число существенных антецедентов этого тождества не более 2, число переменных - не более 3. Оценки сложности выражения t и равенства $t_1 = t_2$ равны. После необходимой унификации дополнительное тождество применяется к подвыражению t. Результат упрощается. (Прием нормзаголовок - 9).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{de}(d - \text{число} \;\&\; e - \text{число} \;\&\; 0 \le e \to (\sqrt{d + \sqrt{e + d^2}} + \sqrt{-d + \sqrt{e + d^2}})^2 = 2\sqrt{e} + 2\sqrt{e + d^2})$

    из теоремы

    $\forall_{bc}(b - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; 0 \le c \to (b + \sqrt{c})^2 = c + 2b\sqrt{c} + b^2)$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{cde}(c - \text{число} \;\&\; d - \text{число} \;\&\; e - \text{число} \;\&\; 0 \le d + \sqrt{e + d^2} \;\&\; 0 \le e + d^2 \;\&\; 0 \le -d + \sqrt{e + d^2} \to (d + \sqrt{e + d^2})^c(-d + \sqrt{e + d^2})^c = e^c)$

18. Попытка применить тождество исключения параметра для варьирования тождества с двумя функциональными переменными. Теорема - тождество вида "$F(\lambda_x(s(f(x),g(x)),A(x)),\ldots)=B$", позволяющее свести вычисление операции F над отображением с двумя переменными f,g для функций к вычислению такой же операции для f,g по отдельности. Равенства в антецедентах определяют такие вспомогательные вычисления. По символу s находится тождество $s(t_1,t_2)=t_3$, исключающее единственную общую переменную y бесповторных выражений t_1,t_2. В каждом из выражений t_1,t_2 имеется еже одна переменная - x_1 и x_2. В дополнительном тождестве вместо переменных x_1,x_2 берутся выражения $p_1(x),p_2(x)$ для новых функциональных переменных p_1,p_2. Затем, после необходимой унификации, представляющей f,g как отображения, значения которых суть t_1,t_2, дополнительное тождество применяется для преобразования $s(f(x),g(x))$. Результат упрощается. (Прием описатель - 70).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdfgik}(\neg(c=0)\ \&\ \neg(d-1=0)\ \&\ \neg(1\in \mathrm{Val}(k))\ \&\ b=\lim_{e\to a\setminus i}\log_d f(e)\ \&$
$c=\lim_{e\to a\setminus i}\log_d k(e)\ \&\ \mathrm{Dom}(f)=g\ \&\ \mathrm{Dom}(k)=g\ \&\ 0<d\ \&\ g\subseteq\mathbb{R}\ \&$
$\mathrm{Val}(f)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ \mathrm{Val}(k)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ f-\text{функция}\ \&\ k-\text{функция}\ \&\ b-\text{число}\ \&$
$c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ \text{Нижняягрань}(0,\mathrm{Val}(f))\ \&\ \text{Нижняягрань}(0,\mathrm{Val}(k))\ \&$
$\text{Число}(a)\ \&\ \text{типпредела}(i)\ \&\ \text{Локопред}(f,a,i)\ \&\ \text{Локопред}(k,a,i)\to$
$\lim_{e\to a\setminus i}\log_{k(e)} f(e)=b/c)$

из теоремы

$\forall_{abcghij}(\neg(0\in\mathrm{Val}(j))\ \&\ \mathrm{Dom}(h)=g\ \&\ \mathrm{Dom}(j)=g\ \&\ \ g\subseteq\mathbb{R}\ \&$
$\mathrm{Val}(h)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ \mathrm{Val}(j)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ h-\text{функция}\ \&\ j-\text{функция}\ \&\ \text{Число}(a)\ \&$
$\text{типпредела}(i)\ \&\ \text{Локопред}(h,a,i)\ \&\ \text{Локопред}(j,a,i)\ \&\ b-\text{число}\ \&\ \neg(c=0)\ \&$
$c-\text{число}\ \&\ \text{предел}(h,i,a)=b\ \&\ \text{предел}(j,i,a)=c\to\lim_{e\to a\setminus i}(h(e)/j(e))=b/c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(\neg(a-1=0)\ \&\ \neg(c-1=0)\ \&\ 0<a\ \&\ 0<b\ \&\ 0<c\ \&\ a-\text{число}\ \&$
$b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\to\log_a b/log_a c=\log_c b)$

19. Попытка применить тождество свертки для перехода от тождества с двумя функциональными переменными к одной функциональной переменной - случай обработки операндов в антецедентах. Аналогично предыдущему, но в качестве $s(t_1,t_2)=t_3$ берется тождество свертки. (Прием описатель - 67).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdgi}(\neg(c=0)\ \&\ \forall_e(e\in g\to\neg(\cos(d(e))=0))\ \&\ b=\lim_{e\to a\setminus i}\sin(d(e))\ \&$
$c=\lim_{e\to a\setminus i}\cos(d(e))\ \&\ \mathrm{Dom}(d)=g\ \&\ g\subseteq\mathbb{R}\ \&\ \mathrm{Val}(d)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ d-\text{функция}\ \&$
$b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ \text{Число}(a)\ \&\ \text{типпредела}(i)\ \&\ \text{Локопред}(d,a,i)\to$
$\lim_{e\to a\setminus i}\mathrm{tg}(d(e))=b/c)$

из теоремы

$\forall_{abcghij}(\neg(0\in\mathrm{Val}(j))\ \&\ \mathrm{Dom}(h)=g\ \&\ \mathrm{Dom}(j)=g\ \&\ g\subseteq\mathbb{R}\ \&$
$\mathrm{Val}(h)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ \mathrm{Val}(j)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ h-\text{функция}\ \&\ j-\text{функция}\ \&\ \text{Число}(a)\ \&$
$\text{типпредела}(i)\ \&\ \text{Локопред}(h,a,i)\ \&\ \text{Локопред}(j,a,i)\ \&\ b-\text{число}\ \&\ \neg(c=0)\ \&$
$c-\text{число}\ \&\ \text{предел}(h,i,a)=b\ \&\ \text{предел}(j,i,a)=c\to\lim_{e\to a\setminus i}(h(e)/j(e))=b/c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \ \& \ \neg(\cos a = 0) \to \text{tg}(a) = \sin(a)/\cos(a))$

20. Попытка применить тождество свертки для перехода от тождества с двумя функциональными переменными к одной функциональной переменной - случай обработки операндов в заменяющей части. Аналогично предыдущему, но вспомогательные вычисления не вынесены в антецеденты исходной теоремы, а реализуются непосредственно в заменяющей части. (Прием описатель - 82).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(\forall_c(c \in \text{Val}(b) \to \neg(\cos c = 0)) \ \& \ \text{Dom}(b) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \in \text{Dom}(b) \ \& \ b-\text{функция} \ \& \ \text{дифференцируема}(b, a) \to \text{производная}(\lambda_c(\text{tg}\, b(c), c \in \text{Dom}(b)), a) = \text{производная}(b, a)/(\cos b(a))^2)$

из теоремы

$\forall_{aeg}(\neg(0 \in \text{Val}(g)) \ \& \ \text{Dom}(e) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \in \text{Dom}(g) \ \& \ e-\text{функция} \ \& \ g-\text{функция} \ \& \ \text{дифференцируема}(e, a) \ \& \ \text{дифференцируема}(g, a) \to \text{производная}(\lambda_c(e(c)/g(c), c \in \text{Dom}(g)), a) = (g(a)\text{производная}(e, a) - e(a)\text{производная}(g, a))/g(a)^2)$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \ \& \ \neg(\cos a = 0) \to \text{tg}(a) = \sin(a)/\cos(a))$

21. Попытка зануления фрагмента параметрического описания. Теорема - тождество вида "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(\exists_{y_1 \ldots y_m} A_1) = \text{set}_{z_1 \ldots z_n} B$", преобразующее параметрическое описание класса в его явное описание. Внутри левой части выбирается подвыражение вида $f(t, u)$, где u - параметр этой части. По символу f находится тождество вида $f(x, a) = a$, где x - переменная, a - логический символ. Оно применяется для преобразования $f(t, u)$. Результат упрощается. Проверяется, что снова получается тожжество, преобразующее параметрическое описание класса в явное. (Прием парамописание - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcef}(\neg(e^2+f^2 = 0) \ \& \ a-\text{число} \ \& \ b-\text{число} \ \& \ c-\text{число} \ \& \ e-\text{число} \ \& \ f-\text{число} \to \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((x - a, y - b, z - c), (0, e, f))) = \text{set}_{xyz}(\exists_g(y = b + eg \ \& \ z = c + fg \ \& \ g - \text{число}) \ \& \ x = a))$

из теоремы

$\forall_{abcdef}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e-\text{число} \ \& \ f-\text{число} \to \text{set}_{xyz}(x-\text{число} \ \& \ y-\text{число} \ \& \ z-\text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (x - a, y - b, z - c))) = \text{set}_{xyz}(\exists_g(x = a + dg \ \& \ y = b + eg \ \& \ z = c + fg \ \& \ g - \text{число})))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to a \cdot 0 = 0)$

Применение тождества, уменьшающего число вхождений переменных

1. Попытка упростить заменяемую часть тождества общей стандартизации с помощью тождества, преобразующего выражение с единственной небесповторной переменной в выражение с единственной бесповторной. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. По заголовку f выражения A_1 находится тождество $f(B_1, B_2) = B$, где B_1, B_2 - бесповторные выражения с единственной переменной x, а заменяющая часть либо состоит из этой переменной, либо представляет собой группу вложенных одноместных операций от нее. После необходимой унификации это тождество применяется к A_1. Результат упрощается. (Прием нормализация - 122).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fA}(A - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \text{Val}(\text{сужение}(f, A)) = \text{образ}(f, A \cap \text{Dom}(f)))$

   из теоремы

   $\forall_{bfA}(b - \text{set} \ \& \ A - \text{set} \ \& \ b \subseteq A \ \& \ b \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow$
   $\text{образ}(\text{сужение}(f, A), b) = \text{образ}(f, b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_f(f - \text{функция} \rightarrow \text{образ}(f, \text{Dom}(f)) = \text{Val}(f))$

2. Попытка склеить два члена факторизуемого выражения. Прием применяется в цикле вывода тождеств приведения к заданному заголовку. Исходная теорема - тождество $f(A_1 \ \ldots \ A_n) = B$. В списке отобранных для цикла тождеств общей стандартизации находится тождество $f(C_1, C_2) = C_3$, которое применяется к некоторым двум членам A_i, A_j. Результат упрощается с помощью прочих тождеств цикла вывода. Например, в цикле вывода тождеств разложения на множители исходные теоремы получаются при раскрывании скобок в некотором произведении сумм, а далее используетя тождество $a - a = 0$, уменьшающее число слагаемых в факторизуемой части. (Прием факторизация - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow a^2 - b^2 = (a + b)(a - b))$

   из теоремы

   $\forall_{abde}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow ad + ae + bd + be = (a + b)(d + e))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a - a = 0)$

Применение тождества, исключающего сложное понятие

1. Использование определения сложного понятия.

(a) Попытка использовать определение для получения приема с функциональной переменной. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Внутри A_1 выбирается вхождение неоднобуквенного терма t с заголовком F. Этот заголовок - символ некоторой (не обязательно одноместной) операции над функцией (например, образ множества). Находится определение $B_1 = B_2$ символа F, в котором определяющая часть B_2 содержит выражения для значений этой функции f. После необходимой унификации это тождество применяется к подвыражению t. Чтобы получить теорему приема, идентифицирующего терм $f(y)$ из рассмотрения произвольного выражения с переменной y, в теорему вместо вхождений функции f, не связанных с ее значениями, подставляется выражение вида "$\lambda_y(f(y), P(y))$". Результат упрощается. Так как теорема создана для приема, она включается в результат цикла вывода, но в дальнейших выводах не участвует. (Прием нормализация - 37).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cd}(c - \text{set} \ \& \ c \subseteq \text{Dom}(d) \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозачно}(\lambda_f(d(f), f \in c)) \rightarrow \text{card}(c) = \text{card}(\text{set}_e(\exists_f(f \in c \ \& \ e = d(f)))))$

из теоремы

$\forall_{ab}(b{-}\text{set} \ \& \ b \subseteq \text{Dom}(a) \ \& \ a{-}\text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(\text{сужение}(a, b)) \rightarrow \text{card}(b) = \text{card}(\text{образ}(a, b)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ba}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{set}_x(\exists_y(y \in a \ \& \ x = f(y))) = \text{образ}(f, a))$

(b) Попытка использовать определение, выражающее новое понятие через понятие, встречающееся в заменяемой части тождества. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией A_1 и не вводящее новых операций большей либо равной сложности. Внутри A_1 выбирается не совпадающее с A_1 неоднобуквенное элементарное подвыражение t с заголовком f. Находится определение $B_1 = B_2$ некоторой операции, у которого заголовок определяющей части B_2 - символ f. После необходимой унификации это определение используется для преобразования подвыражения t. Результат упрощается. (Прием сокращ - 23).

Пример: вывод теоремы

$\forall_x(\neg(\cos x = 0) \ \& \ x - \text{число} \ \& \ 0 \leq 2x + \pi \ \& \ 0 \leq -2x + \pi \rightarrow \text{производная}(\lambda_c(\arcsin c, c \in [-1, 1]), \sin x) = 1/\cos x)$

из теоремы

$\forall_{abfpqx}(\neg(\text{производная}(f, x) = 0) \ \& \ \text{Dom}(f) = [a, b] \ \& \ a < b \ \& \ x \in [a, b] \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{непрерывно}(f, [a, b]) \ \& \ p - \text{boolean} \ \& \ q - \text{boolean} \ \& \ \text{возрастает}(f, [a, b]) \ \& \ \text{дифференцируема}(f, x) \rightarrow \text{производная}(\text{обрфункция}(f), f(x)) = 1/\text{производная}(f, x))$

и дополнительной теоремы

$\text{обрфункция}(\lambda_x(\sin x, x \in [-\pi/2, \pi/2])) = \lambda_x(\arcsin x, x \in [-1, 1])$

Здесь дополнительная теорема - определение арксинуса, и она выражает его через понятие "обрфункция", встречающееся в заменяемой части исходной теоремы.

(c) Применение определяемой одноместной операции над функциями к другой операции над функциями и обратная свертка. Теорема - определение $F(a) = A(a)$ некоторой одноместной операции над функцией a. Заголовок выражения $A(a)$ - описатель "отображение". В качестве дополнительной теоремы выбирается одно из определений простейших операций P над числовыми функциями - изменение знака, сложение, умножение, умножение на число, умножение матриц. Рассматривается столько копий исходной теоремы, сколько в дополнительной теореме имеется переменных g для функций, и вместо каждой такой переменной в дополнительную теорему подставляется копия $A(g)$. Заменяющая часть дополнительной теоремы упрощается задачей на преобразование и дает выражение без связанных переменных, определяющее применение операции P к соответствующим $F(g)$. Оно становится одной из частей выводимого тождества. К посылкам задачи на преобразование добавляются равенства $F(g) = A(g)$ для рассматриваемых переменных g. Другая часть нового тождества - результат применения F к операции P над функциями g. Новая теорема упрощается. (Прием описатель - 112).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{efg}(\text{матр}(f, \mathbb{R}, e, e)\ \&\ \text{матр}(g, \mathbb{R}, e, e) \to \text{транспонир}(f + g) = \text{транспонир}(f) + \text{транспонир}(g))$

из теоремы

$\forall_{an}(a - \text{функция}\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ \text{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \to \text{транспонир}(a) = \lambda_{ij}(a(j, i), i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\}))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{fg}(f - \text{функция}\ \&\ g - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \to f + g = \lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f)))$

(d) Применение к определяемой функции другой операции над функциями и обратная свертка. Аналогично предыдущему. Отличие лишь в том, что исходное определение вводит не операцию над функциями, а функцию, заданную рядом нефункциональных параметров. (Прием описатель - 113).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{an}(a - \text{число}\ \&\ n - \text{натуральное} \to a \cdot \text{нульматр}(n) = \text{нульматр}(n))$

из теоремы

$\forall_n(n - \text{натуральное} \to \text{нульматр}(n) = \lambda_{ij}(0, i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\}))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{af}(a - \text{число}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \to af = \lambda_x(af(x), x \in \text{Dom}(f)))$

(e) Рассмотрение частных случаев выражений заданного типа для определения их характеристики. Теорема - тождество $f(t) = A$, у которого t - атомарное нечисловое выражение, f - логический символ. Находится тождество общей стандартизации вида $f(T) = B$, у которого T - атомарное выражение. Его переменные переобозначаются, чтобы не встречаться в исходной теореме. Антецеденты обеих теорем объединяются, и к ним добавляется равенство $t = T$, а консеквентом становится $A = B$. Результат упрощается. (Прием Атомарное - 23).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abceAB}(e = [a, b]$ & Отрезок$(A, B) =$ Путь(c, e) & $a-$число & $b-$число & $A-$точка & $B-$точка & мточка(c) & Числотр$(e) \to A =$ Место$(c, a))$

из теоремы

$\forall_{abce}(e = [a, b]$ & $a-$число & $b-$число & мточка(c) & Числотр$(e) \to$ началопути(Путь$(c, e)) =$ Место$(c, a))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{AB}(A-$точка & $B-$точка $\to$ началопути(Отрезок$(A, B)) = A)$

(f) Попытка рассмотреть операцию, значением которой является атомарный объект, встречающийся в определяемом терме. Теорема - определение $A_1 = A_2$ некоторой операции над нечисловым атомарным выражением B с заголовком f. Находится другая теорем - некоторое определение $D_1 = D_2$, заголовок заменяющей части D_2 которого равен f. Переменные ее переобозначаются так, чтобы не встречаться в исходной теореме. Определяется подстановка C, переводящая D_2 в B. С учетом этой подстановки, решается задача на описание, позволяющая выразить A_2 через атомарные подвыражения D_1. Консеквентом новой теоремы становится равенство полученногог выражения результату замены в A_1 подвыражения B на D_1. Новая теорема упрощается. (Прием определение - 101).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABac}(\neg(c = B)$ & $\neg(A = B)$ & $\neg($прямая$(cB) =$ прямая$(AB))$ & $a-$число & $c-$точка & $A-$точка & $B-$точка & $0 \le a \to a\cdot($вектор$(cB)+$вектор$(Ac)) =$ $a \cdot$ вектор$(cB) + a \cdot$ вектор$(Ac))$

из теоремы

$\forall_{ABCa}(a-$ число & $A-$ точка & $B-$ точка & $C-$ точка & $\neg(A = B)$ & $C \in$ прямая(AB) & $0 \le a$ & $l(AC) = al(AB)$ & точкалуча$(A, B, C) \to$ $a \cdot$ вектор$(AB) =$ вектор$(AC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A-$ точка & $B-$ точка & $C-$ точка $\to$ вектор$(AB) +$ вектор$(BC) =$ вектор$(AC))$

2. Варьирование теоремы путем сильного упрощения заменяемой части. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, позводяющее заменить неизвестные подтермы на известные с помощью равенства R из антецедентов. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t, имеющее общий параметр с R. По его заголовку f

находится тождество вида $f(\ldots) = B$, уменьшающее оценку сложности. После необходимой унификации, это тождество используется для преобразования подвыражения t. Результат упрощается. Новая теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема, исключающего неизвестное подвыражение с помощью равенства из посылок. (Прием исключ-неизв - 8).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcefij}(\neg(c = 0)\ \&\ \neg(j = 0)\ \&\ j|a| = fi\ \&\ 0 < i\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&$
$e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ i - \text{число}\ \&\ j - \text{число}\ \&\ \text{числитель}(b) - \text{even}\ \&\ b - \text{rational} \rightarrow$
$ea^b/(ci^b) = ef^b/(cj^b))$

из теоремы

$\forall_{cdefhij}(\neg(c = 0)\ \&\ \neg(j = 0)\ \&\ dj = fi\ \&\ 0 < i\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&$
$e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ i - \text{число}\ \&\ j - \text{число}\ \&\ 0 \leq d \rightarrow$
$ed^h/(ci^h) = e(f/j)^h/c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{rational}\ \&\ \text{числитель}(b) - \text{even} \rightarrow |a|^b = a^b)$

3. Попытка упростить заменяемую часть тождества общей стандартизации с помощью простейшего тождества, уменьшающего оценку сложности. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$, имеющее не более 3 переменных. В его антецедентах не встречаются подвыражения с более чем одним параметров. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t. По его заголовку f с помощью справочника поиска теорем "упрощстанд" находится тождество вида $f(\ldots) = B$, уменьшающее оценку сложности. После необходимой унификации, это тождество используется для преобразования подвыражения t. Результат упрощается. (Прием нормализация - 150).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bc}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{rational} \rightarrow b^c(-1)^c = (-b)^c)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^c b^c = (ab)^c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow (-1)a = -a)$

4. Попытка упростить заменяемую часть тождества общей стандартизации с помощью тождества, исключающего сложное выражение. Аналогично предыдущему, но вместо справочника "упрощстанд" используются справочники "упрощвариант" (преобразование сложного безусловного выражения в более простое условное), "исклтерм" (преобразование выражения вида $f(x_1 \ldots x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ - различные переменные, в выражение меньшей сложности)", "раздпарам" (тождества вида $f(g(x, y), g(x, z)) = g(x, f(y, z))$). (Прием нормализация - 70).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abd}(0 < ab \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \to d|b|/(ab) = d/|a|)$

из теоремы

$\forall_{abd}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to d|b|/|ab| = d/|a|)$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \to |a| = a)$

5. Попытка упрощения заменяемого терма, содержащего дополнительные переменные, для исключения сложного понятия на "неудобном" операнде. Теорема - тождество общей стандартизации $f(t_1, t_2) = f(p_1, p_2)$, у которого параметры правой части - собственное подмножество параметров левой. Операнд t_i считается расположенным на более "сложном" для операции f месте (например, знаменатель для дроби). Он неоднобуквенный и имеет переменную, не входящую в $f(p_1, p_2)$. По заголовку g этого операнда находится тождество вида $g(\ldots) = r$, уменьшающее оценку сложности. После необходимой унификации, оно применяется для преобразования t_i. Результат упрощается. Новая теорема снабжается единственной характерстикой, указывающей, что она обеспечивает упрощение i -го операнда операции f. (Прием нормализация - 64).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abdeghi}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(e + hg^{i/2} = 0) \ \& \ \neg(hg^{i/2} - e = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ 0 \leq g \to d(hg^{i/2} - e)^b/(a(g^i h^2 - e^2)^b) = d/(a(e + hg^{i/2})^b))$

   из теоремы

   $\forall acdf(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \to (df/a)/(cf) = (d/a)/c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{cdefg}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ 0 \leq e \to (d + fe^{g/2})^c (fe^{g/2} - d)^c = (e^g f^2 - d^2)^c)$

6. Использование тождества для значения подоперации в конкретной точке. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Самое сложное подвыражение левой части - оно само. Самое сложное подвыражение корневых операндов A_1 единственное и имеет вид $f(t)$. Его оценка сложности больше, чем у A_2. В том разделе, к которому относится одноместная операция f, находится бесквантворное тождество $f(a) = b$. Здесь a, b - константные выражения, причем оценка сложности левой части больше, чем у правой. После необходимой унификации, данное тождество применяется для преобразования подвыражения $f(t)$. Результат упрощается. (Прием нормализация - 86).

   Пример: вывод теоремы

   $\arcsin 1/\sqrt{2} = \pi/4$

из теоремы

$\forall_x(x - \text{число} \ \& \ 0 \leq 2x + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - 2x \rightarrow \arcsin \sin x = x)$

и дополнительной теоремы

$\sin \pi/4 = \sqrt{2}/2$

7. Попытка использовать упрощающее тождество, выведенное в том же цикле. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложный числовой атом A_1 с заголовком f через более простые числовые атомы. В списке вывода находится другое тождество $B_1 = B_2$ аналогичного типа, у которого B_1 имеет заголовок f. После необходимой унификации, оно применяется к выражению A_1. Результат упрощается. (Прием числатом - 32).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cde}(\neg(d = 0) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ \text{Вектор}(e) \ \& \ \text{однонаправлены}(c, de) \rightarrow \text{скалумнож}(c, e) = \text{длина}(c)\text{длина}(e)\text{sg}(d))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ \text{однонаправлены}(a, b) \rightarrow \text{скалумнож}(a, b) = \text{длина}(a)\text{длина}(b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bcd}(c - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Вектор}(d) \rightarrow \text{скалумнож}(b, cd) = c \cdot \text{скалумнож}(b, d))$

8. Попытка подставить константное значение числового атома без добавления условий на числовые атомы в антецедентах. Теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. В консеквенте выбирается некоторый невырожденный числовой атом A, имеющий единственное вхождение в теорему. По заголовку f этого атома находится тождество $B_1 = B_2$, у которого левая часть имеет заголовок f, а правая - константная. В антецедентах этого тождества не встречаются невырожденные числовые атомы. После необходимой унификации, оно применяется для преобразования подвыражения A. Проверяется непротиворечивость антецедентов новой теоремы, и она упрощается. (Прием числовойатом - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcB}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = B) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(ac) \ \& \ \text{разныестороны}(B, c, \text{прямая}(ab)) \ \& \ \text{однасторона}(b, B, \text{прямая}(ac)) \rightarrow \angle(caB) = \pi/2 + \angle(baB))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{разныестороны}(B, D, \text{прямая}(AC)) \ \& \ \text{однасторона}(B, C, \text{прямая}(AD)) \ \& \ \text{составнугол}(A, D, C, B) \rightarrow \angle(BAD) = \angle(BAC) + \angle(CAD))$

   и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
$\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \to \angle(BAC) = \pi/2)$

9. Вывод частных случаев из тождества для характеристики сложной функции. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией f. Внутри A_1 встречается описатель "$\lambda_{x_1 \ldots x_k}(g(t), A)$", где g - переменная, встречающаяся в одном из максимально сложных подтермов T правой части A_2. Выражение T имеет заголовок f и не содержит описателя "отображение". В разделе, к которому относится f, находится тождество $f(\ldots) = B$, исключающее описатель "отображение". После необходимой унификации, оно применяется для преобразования T. В частности, такая унификация определяет конкретную функцию для переменной g. Результат упрощается. (Прием сокращ - 24).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{af}(\neg(\cos f(a) = 0)\ \&\ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ a \in \text{Dom}(f)\ \&$
   $f - \text{функция}\ \&\ \text{дифференцируема}(f, a) \to$
   $\text{производная}(\lambda_x(\text{tg}\, f(x), x \in \text{Dom}(f)), a) = \text{производная}(f, a)/(\cos f(a))^2)$

   из теоремы

   $\forall_{afg}(\text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \text{Dom}(g)\ \&\ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}\ \&$
   $a \in \text{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ g - \text{функция}\ \&\ \text{дифференцируема}(f, a)\ \&$
   $\text{дифференцируема}(g, f(a)) \to \text{производная}(\lambda_x(g(f(x)), x \in \text{Dom}(f)), a) =$
   $\text{производная}(f, a)\text{производная}(g, f(a)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число}\ \&\ \neg(\cos a = 0) \to d\,\text{tg}\, a/da = 1/(\cos a)^2)$

10. Попытка сильного упрощения упрощаемого атома. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложный числовой атом A_1 через более простые. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, уменьшающее оценку сложности корневой сложной операции и имеющее бесповторным корневым операндом выражения B_1 подтерм с заголовком f. Внутри A_1 находится надтерм r терма t, имеющий тот же заголовок, что B_1. После необходимой унификации, выражение r преобразуется с помощью дополнительного тождества. Результат упрощается. (Прием числатом - 56).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_a(\text{конечное}(\text{вершины}(a))\ \&\ \text{дерево}(a) \to \text{card}(\text{вершины}(a)) - \text{card}(\text{ребра}(a)) =$
    $1)$

    из теоремы

    $\forall_G(\text{конечное}(\text{вершины}(G))\ \&\ \text{граф}(G)\ \&\ \text{ациклический}(G) \to$
    $\text{card}(\text{компоненты}(G)) = \text{card}(\text{вершины}(a)) - \text{card}(\text{ребра}(a)))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_G(\text{граф}(G)\ \&\ \text{связный}(G) \to \text{card}(\text{компоненты}(G)) = 1)$

11. Попытка упрощения подтерма заменяемой части. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, упрощающее сложное выражение, используя вспомогательную переменную, вводимую самым сложным антецедентом. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное выражение t с заголовком f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, обеспечивающее переход от выражения B_1 с заголовком f к выражению меньшей сложности. После необходимой унификации, оно применяется к t. Результат упрощается. (Прием упрощтерм - 3).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{an}(\text{перестановка}(a, \{1, \ldots, n\})\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ 0 \leq n \rightarrow l(a) = n)$

    из теоремы

    $\forall_{aA}(\text{перестановка}(a, A)\ \&\ A - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(A) \rightarrow l(a) = \text{card}(A))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_n(n - \text{целое}\ \&\ 0 \leq n \rightarrow \text{card}(\{1, \ldots, n\}) = n)$

12. Попытка опрокинуть тождество общей стандартизации путем сильного упрощения заменяемого терма. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$ сильного упрощения выражений с заголовком f. Используется серия различных справочников поиска теорем : "констнорм", "тожд", "поглощается", "поглощает", "констврхожд", "сократимо", "исклтерм", "сокращмн". После необходимой унификации, это тождество используется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что новая теорема имеет направление упрощения, обратное направлению исходной. (Прием нормализация - 36).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abc}(\neg(b = 0)\ \&\ \neg(c = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \rightarrow (a/b)/c = a/(bc))$

    из теоремы

    $\forall_{cdf}(\neg(c = 0)\ \&\ \neg(f = 0)\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ f - \text{число} \rightarrow (df)/(cf) = d/c)$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \neg(b = 0) \rightarrow (a/b)b = a)$

13. Попытка опрокинуть тождество свертки путем сильного упрощения заменяемого терма (первый прием). Аналогично предыдущему, но исходная теорема - тождество свертки. Проверяется, что новая теорема - тождество нормализации либо свертки, направление которого обратно направлению исходной теоремы. (Прием свертка - 43).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{cde}(\neg(e = 0)\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число} \rightarrow d(c + ef)/e = d(f + c/e))$

из теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow (a/b)b = a)$

14. Попытка опрокинуть тождество свертки путем сильного упрощения заменяемого терма (второй прием). Аналогично предыдущему, но новая теорема - тождество перегруппировочного типа. (Прием свертка - 44).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cde}(\neg(c - 1 = 0) \ \& \ \neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \&$
$e - \text{число} \rightarrow e \log_c d = e/\log_d c)$

из теоремы

$\forall_{abc}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ \neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ a - \text{число} \ \&$
$b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \log_a b/\log_a c = \log_c b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ae}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \log_a(a^e) = e)$

15. Попытка перехода к новой функциональной переменной для упрощения описателя "отображение" в консеквенте. Случай упрощения антецедента, указывающего тип значения. Консеквент теоремы имеет единственный самый сложный подтерм A_1, причем этот подтерм содержит описатель "$\lambda_x(B_2, B_1)$". Некоторый корневой операнд T выражения B_2 содержит собственное подвыражение вида $f(x)$, где f - переменная. Для обозначения T выбирается новая функциональная переменная $g(x)$. При помощи задачи на описание предпринимается выражение f через g в виде описателя "отображение", и везде в остальной части теоремы вместо f подставляется данное выражение. Самый сложный антецедент C исходной теоремы указывал тип значения Q выражения A_2 с тем же заголовком, что A_1. Первоначально он не содержал описателя "отображение", но после исключения f стал содержать такой описатель. Находится другая теорема - тождество, левая часть которого унифицируется с A_2, а тип значения правой части - Q. Среди антецедентов дополнительной теоремы нет описателя "отображение". Дополнительная теорема используется для замещения антецедента C списком ее антецедентов. Результат упрощается. (Прием функполе - 1).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{adfi}(\text{Dom}(d) = \text{Dom}(f) \ \& \ \text{предел}(f, i, a) = \text{неопред} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \&$
$\text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ f - \text{функция} \ \&$
$\text{предел}(d, i, a) - \text{число} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(d, a, i) \ \&$
$\text{Локопред}(f, a, i) \rightarrow \lim_{b \rightarrow a \setminus i}(d(b) + f(b)) = \text{неопред})$

из теоремы

$\forall_{aefi}(\mathrm{Dom}(e) = \mathrm{Dom}(f)$ & предел$(f, i, a) =$ неопред & $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(e) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $e -$ функция & $f -$ функция & предел$(e, i, a) -$ число & Число(a) & типпредела(i) & Локопред(e, a, i) & Локопред$(f, a, i) \to \lim_{b \to a \setminus i}(-e(b) + f(b)) =$ неопред)

и дополнительной теоремы

$\forall_{abghi}(\mathrm{Dom}(h) = g$ & $g \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(h) \subseteq \mathbb{R}$ & $h -$ функция & Число(a) & типпредела(i) & Локопред(h, a, i) & $b -$ число & предел$(h, i, a) = b \to \lim_{e \to a \setminus i}(-h(e)) = -b)$

16. Попытка использовать упрощающее тождество для перехода от тождества с одной функциональной переменной под двуместной операцией к тождеству с двумя функциональными переменными под этой операцией. В консеквенте теоремы, исключающей описатель, под описателем "$\lambda_x(A_2, A_1)$", расположено подвыражение вида $F(a, f(x))$, где F - двуместная операция, f - переменная. По символу F находится дополнительное упрощающее тождество вида $F(a, B_1) = B_2$, где B_1 и B_2 имеют каждое две переменные g, h. Это тождество применяется к исходной теореме так, что вместо функциональной переменной $f(x)$ возникают две новые функциональные переменные $g(x), h(x)$. Результат упрощается. (Прием описатель - 69).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdgi}(b = \lim_{e \to a \setminus i}(d(e) \ln c(e))$ & $\mathrm{Dom}(c) = g$ & $\mathrm{Dom}(d) = g$ & $g \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(c) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(d) \subseteq \mathbb{R}$ & $c -$ функция & $d -$ функция & $b -$ число & Нижняягрань$(0, \mathrm{Val}(c))$ & Число(a) & типпредела(i) & Локопред(c, a, i) & Локопред$(d, a, i) \to \lim_{e \to a \setminus i}(c(e)^{d(e)}) = \exp(b))$

из теоремы

$\forall_{abghij}(\mathrm{Dom}(j) = g$ & $0 < h$ & $\mathrm{Val}(j) \subseteq \mathbb{R}$ & $j -$ функция & $h -$ число & Число(a) & типпредела(i) & Локопред(j, a, i) & $b -$ число & предел$(j, i, a) = b \to \lim_{e \to a \setminus i}(h^{j(e)}) = h^b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число & $0 < a \to a^b = \exp(b \ln a))$

Применение тождества, уменьшающего число сложных понятий

1. Использование двух различных соотношений аддитивности для одноименных числовых атомов: усмотрение равенства вторых слагаемых при равенстве сумм и идентичности первых слагаемых. Теорема - тождество вида $A_1 = A_2 + A_3$, где A_1, A_2, A_3 - невырожденные числовые атомы с одинаковым заголовком f. По символу f находится другое тождество $B_1 = B_2 + B_3$ аналогичного вида. Атомы A_2 и B_2 унифицируются, списки антецедентов двух теорем после данной унификации объединяются и к ним добавляется равенство $A_1 = B_1$. Консеквентом становится $A_3 = B_3$. Результат упрощается. (Прием числзнач - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcC}(l(aC) = l(bc)$ & $a \in$ интервал(bc) & $b \in$ отрезок(aC) & $a -$ точка & $b -$ точка & $c -$ точка & $C -$ точка $\rightarrow l(ac) = l(bC))$

из теоремы

$\forall_{abc}(a \in$ интервал(bc) & $a -$ точка & $b -$ точка & $c -$ точка $\rightarrow l(bc) = l(ab) + l(ac))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $B \in$ отрезок$(AC) \rightarrow$ $l(AC) = l(AB) + l(BC))$

2. Попытка упростить заменяемую часть с помощью стандартного упрощающего тождества для бинарных операций. Теорема - эквивалентность общей стандартизации, в заменяемой части которой встречается подвыражение $f(t_1, t_2)$, где f - переменная, для которой из антецедентов усматривается, что ее значением является бинарная ассоциативная операция на некотором множестве. Выбирается одно из нескольких конкретных (явно указанных в приеме) упрощающих тождеств для бинарных ассоциативных операций (например, для произведения степеней с одинаковым основанием), и после необходимой унификации оно применяется к $f(t_1, t_2)$. Результат упрощается. (Прием общнорм - 106).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdeA}(b =$ операция(A) & $a -$ set & $c \in$ носитель(A) & алгстепень$(c, b, e) \in a$ & $d -$ целое & $e -$ целое & группа(A) & подгруппа$(a, A) \rightarrow$ алгстепень$(c, b, d) \in a \leftrightarrow$ алгстепень$(c, b, d + e) \in a)$

   из теоремы

   $\forall_{abxyA}(b =$ операция(A) & $a -$ set & $x \in$ носитель(A) & $y \in a$ & группа(A) & подгруппа$(a, A) \rightarrow x \in a \leftrightarrow b(x, y) \in a)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{adefA}(A-$set & $A \in A$ & $d-$целое & $e-$целое & ассоциативно(f) & обратимо(f) & бинарнооперация$(f, A) \rightarrow$ алгстепень$(a, f, d + e) = f($алгстепень$(a, f, d),$ алгстепень$(a, f, e)))$

Применение тождества, приводящего к более коротким сложным подтермам

1. Попытка упростить заменяемую часть тождества общей стандартизации с помощью нормализующей дистрибутивной развертки. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$, в левой части которого выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком g. По символу g находится другое тождество общей стандартизации, имеющее вид $g(x, h(y, z)) = f(g(x, y), g(x, z))$. После необходимой унификации, оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием нормализация - 40).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdef}(\neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even})\ \&\ 0 < de\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{rational} \rightarrow d^f e^f (de)^c = (de)^{c+f})$

из теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 < a \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^c b^c = (ab)^c)$

2. Попытка упрощения операндов самого сложного подтерма описателя. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенный подтерм t с заголовком f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, выражающее корневую сложную операцию f через эту же операцию от более простого терма. После необходимой унификации, оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием описатель - 108).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abd}(\forall_x(x - \text{число} \rightarrow \text{дифференцируема}(\text{функраспред}(b, d), x))\ \&\ a - \text{число}\ \&\ \text{верпространство}(d)\ \&\ \text{непрвеличина}(b, d) \rightarrow \text{плотнраспред}(\lambda_c(a + b(c), c \in \text{элемсобытия}(d)), d) = \lambda_x(\text{плотнраспред}(b, d)(x - a), x - \text{число}))$

   из теоремы

   $\forall_{fP}(\forall_x(x - \text{число} \rightarrow \text{дифференцируема}(\text{функраспред}(f, P), x))\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{верпространство}(P)\ \&\ \text{непрвеличина}(f, P) \rightarrow \text{плотнраспред}(f, P) = \lambda_x(\text{производная}(\text{функраспред}(f, P), x), x - \text{число}))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{gPa}(\text{верпространство}(P)\ \&\ \text{случвеличина}(g, P)\ \&\ a - \text{число} \rightarrow \text{функраспред}(\lambda_x(g(x) + a, x \in \text{элемсобытия}(P)), P) = \lambda_x(\text{функраспред}(g, P)(x - a), x - \text{число}))$

3. Использование тождества "предвумножение" для получения тождества свертки константного выражения. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выполняющее группировку сложных выражений. Внутри A_1 имеется ровно два выражения t_1, t_2 максимальной сложности. Их заголовки равны f. Внутри A_2 имеется единственное максимально сложное подвыражение, причем той же самой сложности. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, у которого заменяющая часть B_2 имеет заголовок f, а азменяемая может быть сведена к виду $f(\ldots)$ после подстановки подходящих единиц вместо переменных. После необходимой унификации, это тождество применяется для одновременного преобразования t_1 и t_2, причем направление его применения - справа налево. Список антецедентов результата упрощается. Проверяется, что новая теорема имеет в своей правой части подвыражения, допускающие вычисления над константными подтермами, а в левой - не имеет. Она снабжается единственной характеристикой, указывающей, что создана для приема, обеспечивающего такую перегруппировку константных термов, после которой становится возможным вычисление константных значений. (Прием группмножитель - 7).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aefgijk}(\neg(a^j i^k - 1 = 0)\ \&\ 0 < e\ \&\ e -$ число $\&\ f -$ число $\&\ g -$ число $\&\ \neg(a - 1 = 0)\ \&\ 0 < a\ \&\ 0 < i\ \&\ a -$ число $\&\ i -$ число $\&\ j -$ число $\&\ k -$ число $\rightarrow (f + g \log_a e)/(j + k \log_a i) = \log_{a^j i^k}(a^f e^g))$

из теоремы

$\forall_{abc}(\neg(a - 1 = 0)\ \&\ \neg(c - 1 = 0)\ \&\ 0 < a\ \&\ 0 < b\ \&\ 0 < c\ \&\ a -$ число $\&\ b -$ число $\&\ c -$ число $\rightarrow \log_a b / \log_a c = \log_c b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abef}(\neg(a - 1 = 0)\ \&\ 0 < a\ \&\ 0 < b\ \&\ a -$ число $\&\ b -$ число $\&\ e -$ число $\&\ f -$ число $\rightarrow \log_a(a^e b^f) = e + f \log_a b)$

Дополнительная теорема имеет характеристику "предвумножение(первыйтерм, и(дробнаявеличина(a)целое(e) дробнаявеличина(b)целое(f)), $a^e b^f$)". Она означает, что переход справа налево позволяет свернуть константный терм с целочисленными e, f и рациональными a, b, содержащий единственную сложную операцию (логарифм), в терм, заголовком которого служит данная операция, а операндами - константы. Предполагается, что свертка использует нормализаторы общей стандартизации.

4. Попытка сильного упрощения заменяемой части с последующей сверткой в бесповторное выражение. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, позволяющее перейти от выражения с несколькими вхождениями переменной x к выражению с одним вхождением этой переменной. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенный подтерм t с максимально сложным в A_1 заголовком f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, выражающее корневую сложную операцию f через эту же операцию от более простого терма. После необходимой унификации, оно применяется для преобразования t. Заменяемая часть новой теоремы обрабатывается вспомогательной задачей на преобразование, имеющей цель "свертка", после чего она становится бесповторной. Затем эта теорема упрощается. (Прием склейка - 13).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(\neg(\cos b = 0)\ \&\ b -$ число $\rightarrow \mathrm{tg}(-b) = -\mathrm{tg}\, b)$

   из теоремы

   $\forall_a(a -$ число $\&\ \neg(\cos a = 0) \rightarrow \mathrm{tg}\, a = \sin a / \cos a)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a -$ число $\rightarrow \sin(-a) = -\sin a)$

5. Попытка применить к заменяемому выражению группировочное тождество, обеспечивающее возможность вычислений с константами. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, обеспечивающее переход к сокращенной записи. Внутри A_1 выбирается подвыражение $f(u, v)$, не входящее в A_2. Здесь u, v - различные переменные.

По символу f находится тождество вида $f(g(x,y),g(x,z)) = g(x,f(y,z))$. Если операция f ассоциативная и коммутативная, то выбирается новая переменная w, и данное тождество преобразуется в $f(w,g(x,y),g(x,z)) - f(w,g(x,f(y,z)))$. Найденное тождество применяется для преобразования выражения $f(u,v)$. Результат упрощается. Проверяется, что новое тождество выполняет преобразование, обеспечивающее возможность вычисления над константными термами, и оно сопровождается единственной характеристикой, указывающей на такую возможность. (Прием свертка - 72).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdefg}(c - \text{число} \ \& \ dc - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ 0 \le d \ \& \ 0 \le e \to cd^f + g(de)^f = (c + ge^f)d^f)$

из теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \to ab + ac = a(b + c))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \le a \ \& \ 0 \le b \to a^c b^c = (ab)^c)$

Итоговая теорема будет применяться справа налево для перемножения десятичных констант d, e в основании степени.

6. Упрощение выражения для объекта, координата которого рассматривается. Теорема - тождество вида "крд$(A_1, K, i) = A_2$". Находится тождество вида "крд$(B_1, K, i) = B_2$", выражающее координату сложного объекта B_1 через координаты его компонент. Оно применяется для преобразования левой части исходного тождества. Результат упрощается. (Прием крд - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cde}(c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \text{вправо}(\text{вектор}(cd), e) \ \& \ \text{Трехмерн}(e) \to \text{крд}(d, e, 2) = \text{крд}(c, e, 2))$

   из теоремы

   $\forall_{aK}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{вправо}(a, K) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \to \text{крд}(a, K, 2) = 0)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABKi}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \ \& \ i \in \{1,2,3\} \to \text{крд}(\text{вектор}(AB), K, i) = \text{крд}(B, K, i) - \text{крд}(A, K, i))$

Применение тождества, варьирующего сложное выражение

1. Использование упрощающего тождества для сложной подоперации корневой сложной операции. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Самое сложное подвыражение левой части - оно само. Самое сложное подвыражение корневых операндов A_1 единственное и имеет вид $f(t)$. Его оценка сложности больше, чем у A_2. В том разделе, к которому относится одноместная операция f, находится другое тождество общей стандартизации вида $f(\ldots) = r$, где все

корневые операнды выражения r суть переменные. Это тождество применяется для преобразования $f(t)$. Результат упрощается. (Прием нормализация - 87).

Пример: вывод теоремы

$\forall_b(b - \text{число} \ \& \ 0 \leq b \ \& \ 0 \leq \pi - b \rightarrow \arcsin\cos b = \pi/2 - b)$

из теоремы

$\forall_x(x - \text{число} \ \& \ 0 \leq \pi + 2x \ \& \ 0 \leq \pi - 2x \rightarrow \arcsin\sin x = x)$

и дополнительной теоремы

$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow \sin(\pi/2 - b) = \cos b)$

2. Варьирование атомарного подвыражения заменяемой части. Теорема - определение $A_1 = A_2$, причем внутри определяемого выражения A_1 выделяется собственное атомарное нечисловое подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, представляющее собой определение выражения B_1, причем заголовком определяющего выражения B_2 служит f. Это тождество применяется для преобразования t, причем направление замены - справа налево. Результат упрощается. (Прием определение - 112).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abA}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(Ab) - \text{вектор}(ab) = \text{вектор}(Aa))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(AB) + \text{вектор}(BC) = \text{вектор}(AC))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow -\text{вектор}(AB) = \text{вектор}(BA))$

Применение тождества, упрощающего выражение относительно неизвестной

1. Использование тождества "смнеизв". Теорема - тождество $f(t) = A$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией f. По заголовку g выражения t находится тождество $B_1 = B_2$, упрощающее относительно неизвестных заданный корневой операнд выражения B_1, имеющего заголовок g. Номер такого операнда и прочие условия задаются характеристиками тождества. Прием их не учитывает. После необходимой унификации, это тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием сокращ - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdef}(\neg(e - \text{even}) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{натуральное} \ \& \ f - \text{целое} \rightarrow |c^f d^e| = |dc^{f/e}|^e)$

   из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \to |a^b| = |a|^b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcd}(a - \text{число}\ \&\ c - \text{натуральное}\ \&\ \neg(c - \text{even})\ \&\ d - \text{целое}\ \&\ b - \text{число} \to (ba^{d/c})^c = b^c a^d)$

2. Попытка получения тождества, исключающего сложную операцию. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, используемое для создания приема нормализатора приведения к заданным заголовкам. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенный подтерм t с заголовком f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, упрощающее относительно неизвестных заданный корневой операнд выражения B_1, имеющего заголовок f. Номер такого операнда и прочие условия задаются характеристиками тождества. Прием их не учитывает. После необходимой унификации, это тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием нормзаголовок - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcdf}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ 0 \le c \to c^f d^2 - b^2 = (b + dc^{f/2})(dc^{f/2} - b))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to a^2 - b^2 = (a - b)(a + b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(c = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ 0 \le a\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \to (ba^{d/c})^c = b^c a^d)$

   Получаемая здесь теорема используется как дополнительная при выводе теорем. Именно, с ее помощью выводится теорема приема, исключающего иррациональность в знаменателе.

Применение тождества свертки

1. Попытка свертки заменяемого выражения. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложный числовой атом A_1 через более простые. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенный подтерм t с заголовком f. По символу f находится кванторное тождество $B_1 = B_2$ без существенных посылок, выполняющее свертку в бесповторное выражение повторного выражения B_1, имеющего заголовок f. После необходимой унификации, это тождество применяется к t. Результат упрощается. Проверяется, что новая теорема имеет не более 3 переменных. (Прием числатом - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(c \setminus d)\ \&\ \text{конечное}(d \setminus c) \to \text{card}(c \triangle d) = \text{card}(c \setminus d) + \text{card}(d \setminus c))$

   из теоремы

$\forall_{ab}(a-\text{set}\ \&\ b-\text{set}\ \&\ \text{непересек}(a,b)\ \&\ \text{конечное}(a)\ \&\ \text{конечное}(b) \to \text{card}(a \cup b) = \text{card}(a) + \text{card}(b))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set} \to a \triangle b = a \setminus b \cup b \setminus a)$

2. Рассмотрение дополнительного тождества, разбивающего набор операндов в конкатенации двух наборов. Теорема - упрощающее тождество вида $f(A_1) = A_2$, где переменная f - бинарная ассоциативная операция, а значением A_1 служит набор. По заголовку g выражения A_1 находится тождество свертки вида "конкатенация$(B_1, B_2) = B_3$", где заголовки всех выражений B_1, B_2, B_3 равны g. После необходимой унификации, это тождество применяется для разбиения A_1 в конкатенацию двух наборов A_3, A_4. Далее левая часть преобразуется к виду $f(f(A_3), f(A_4))$, и каждое из подвыражений $f(A_3), f(A_4)$ сворачивается при помощи самой же исходной теоремы в двойника выражения A_2. Результат упрощается. (Прием упрощение - 25).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{adefA}(A-\text{set}\ \&\ a \in A\ \&\ d-\text{натуральное}\ \&\ e-\text{натуральное}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&\ 2 \le d\ \&\ 2 \le e\ \&\ \text{обратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, A) \to$
   $\text{алгстепень}(a, f, -(d+e)) = f(\text{алгстепень}(a, f, -d), \text{алгстепень}(a, f, -e)))$

   из теоремы

   $\forall_{Aabfn}(A - \text{set}\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, A)\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&\ a \in A\ \&$
   $\text{обратимо}(f)\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ 2 \le n \to \text{алгстепень}(a, f, -n) =$
   $f(\text{констнабор}(\text{обрэлемент}(a, f), n)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{amn}(m - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ 0 \le m\ \&\ 0 \le n \to$
   $\text{констнабор}(a, m); \text{констнабор}(a, n) = \text{констнабор}(a, m + n))$

   Напомним, что операция "конкатенация" прорисовывается формульным редактором как точка с запятой.

3. Варьирование теоремы путем свертки заменяемой части. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, созданное для приема, позволяющего заменить неизвестные подтермы на известные с помощью равенства из посылок, идентифицируемого с антецедентом теоремы $t_1 = t_2$. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f, имеющее общую переменную с $t_1 = t_2$. По символу f находится кванторное тождество $B_1 = B_2$ без существенных антецедентов, выполняющее свертку в бесповторное выражение повторного выражения B_1, имеющего заголовок f. После необходимой унификации, это тождество применяется к t. Результат упрощается. Проверяется, что снова получается тождество, которое можно использовать для приема указанного выше типа, и теорема снабжается единственной указывающей на это характеритстикой. (Прием исключнеизв - 9).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{bdefg}(\neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \;\&\; \neg(\text{знаменатель}(g) - \text{even}) \;\&\; be = d \;\&$
$b - \text{число} \;\&\; e - \text{число} \;\&\; f - \text{rational} \;\&\; g - \text{rational} \rightarrow b^f e^{f+g} = d^f e^g)$

из теоремы

$\forall_{abcd}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; c - \text{rational} \;\&\; \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \;\&$
$ab = d \rightarrow a^c b^c = d^c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; b - \text{rational} \;\&\; c - \text{rational} \;\&$
$\neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \;\&\; \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$

4. Попытка корневой свертки заменяемой части для опрокидывания тождества. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$, имеющее не более трех переменных. Самый сложный подтерм r заменяемой части A_1 является ее корневым операндом. Загоовок A_1 - ассоциативный и коммутативный символ f. По символу f находится кванторное тождество $B_1 = B_2$ без существенных антецедентов, выполняющее свертку в бесповторное выражение содержащего заголовок r повторного выражения B_1, имеющего заголовок f. После необходимой унификации, это тождество применяется к A_1. Результат упрощается. Проверяется, что число переменных новой теоремы не более чем на единицу превосходит число переменных исходной теоремы. (Прием нормализация - 123).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{adef}(\neg(\text{знаменатель}(e) - \text{even}) \;\&\; 0 < a - d \;\&\; a - \text{число} \;\&\; d - \text{число} \;\&$
   $f - \text{число} \;\&\; e - \text{rational} \rightarrow (a-d)^{e+f}(-1)^e = (a-d)^f (d-a)^e)$

   из теоремы

   $\forall_{acd}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \;\&\; a - \text{число} \;\&\; d - \text{число} \;\&\; c - \text{rational} \rightarrow$
   $(a-d)^c(-1)^c = (d-a)^c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; 0 < a \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$

5. Попытка свертки подтерма заменяемой части с сохранением направления стандартизации. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$, у которого списки параметров левой и правой частей совпадают. Внутри A_1 находится неоднобуквенное подвыражение t с ассоциативным и коммутативным заголовком f. По символу f находится кванторное тождество $B_1 = B_2$ без существенных антецедентов, выполняющее свертку в бесповторное выражение повторного выражения B_1, имеющего заголовок f. После необходимой унификации, это тождество применяется к A_1. Результат упрощается. Проверяется, что число переменных новой теоремы такое же, как у старой и что она определяет общую стандартизацию в том же направлении. (Прием нормализация - 125).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bdegh}(\neg(h = 0) \;\&\; \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \;\&\; 0 < g \;\&\; d - \text{число} \;\&\; e - \text{число} \;\&$
   $g - \text{число} \;\&\; h - \text{число} \;\&\; b - \text{rational} \rightarrow eg^d/(h(-g)^b) = eg^{d-b}(-1)^b/h)$

из теоремы

$\forall_{acdef}(\neg(a=0)\ \&\ 0<f\ \&\ a-$ число $\&\ c-$ число $\&\ d-$ число $\&\ e-$ число $\&$
$f-$ число $\rightarrow ef^d/(af^c)=ef^{d-c}/a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{cd}(\neg($знаменатель$(c)-$ even$)\ \&\ d-$ число $\&\ c-$ rational $\rightarrow d^c(-1)^c=(-d)^c)$

6. Попытка варьирования тождества типа сокращения с помощью тождества дистрибутивной развертки. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1=A_2$, у которого левая часть имеет повторную переменную x, не входящую в правую часть. Рассматривается подтерм $g(x,y)$ левой части, у которого y - переменная, имеющая в этой части единственное вхождение, причем символ g ассоциативный и коммутативный. Находится тождество вида $g(u,h(v,w))=f(g(u,v),g(u,w))$, которое после унификации u с x, а y - с $h(v,w)$, применяется для преобразования $g(x,y)$. Результат упрощается. (Прием нормализация - 63).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcdef}(\neg(c=0)\ \&\ \neg(f=0)\ \&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\&\ d-$ число $\&\ e-$ число $\&$
   $f-$ число $\rightarrow d(bf+ef)/(cf)=d(b+e)/c)$

   из теоремы

   $\forall_{cdf}(\neg(c=0)\ \&\ \neg(f=0)\ \&\ c-$ число $\&\ d-$ число $\&\ f-$ число $\rightarrow df/(cf)=d/c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\&\ ab+ac=a(b+c))$

7. Использование нормализующего тождества типа свертки для варьирования тождества свертки. Теорема - тождество свертки вида $A_1=A_2$, у которого имеется единственная переменная x, входящая неоднократно в левую часть, но однократно - в правую. Все вхождения этой переменной в левую часть имеют вид $f(x,y_1),\ldots,f(x,y_n)$, где f - ассоциативная и коммутативная операция; $y_1,\ldots,y_n$ - различные переменные, не имеющие в левой части других вхождений; $n\geq 2$. По символу f находится кванторное тождество $B_1=B_2$ без существенных антецедентов, выполняющее свертку в бесповторное выражение повторного выражения B_1 вида $f(t_1,t_2)$. Рассматривается n копий дополнительного тождества, причем переменная x унифицируется с операндом t_1 всех этих тождеств, а каждая переменная y_i - с операндом t_2 "своего" тождества. После этого дополнительные тождества применяются для преобразования выражений $f(x,y_1),\ldots,f(x,y_n)$ левой части. Результат упрощается. (Прием свертка - 47).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{defghi}(0<d\ \&\ d-$ число $\&\ e-$ число $\&\ f-$ число $\&\ g-$ число $\&\ h-$ число $\&$
   $i-$ число $\rightarrow gd^{e+f}=hd^{e+i}=(gd^f+hd^i)d^e)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\rightarrow ab+ac=a(b+c))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ 0 < a \to a^b a^c = a^{b+c})$

Характеристика - "свертка(второйтерм)".

8. Попытка дистрибутивной свертки для последующей нормализации. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Выражение A_1 имеет вид $g(u,t)$, где u - переменная, входящая в t. Выражение A_2 бесповторно. Находится тождество вида $g(x,h(y,z)) = f(g(x,y),g(x,z))$, которое используется для преобразования $g(u,t)$. Результат упрощается. Проверяется отсутствие слишком сложных антецедентов и слишком большого числа вхождений переменных в заменяемой части результата. (Прием нормализация - 66).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cde}(0 < d + e \ \& \ c - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ e - \text{число} \to d(d+e)^c + e(d+e)^c = (d+e)^{c+1})$

   из теоремы

   $\forall_{ac}(0 < a \ \& \ a - \text{число } \& \ c - \text{число} \to aa^c = a^{c+1})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ ab + ac = a(b+c))$

Применение варьирующего тождества

1. Попытка варьирования декомпозирующего тождества с помощью перегруппировочного тождества. Теорема - тождество вида $g(x,h(y,z)) = f(g(x,y),g(x,z))$. По символу h находится тождество $B_1 = B_2$ перегруппировочного типа (обе части имеют одни и те же переменные, входящие в равных количествах) с заголовком h выражения B_1. Это тождество, после необходимой унификации, применяется для преобразования подвыражения $h(y,z)$. Результат упрощается. (Прием дистрибразвертка - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abf}(\{;a\} \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ b \in \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция } \& \ a - \text{слово} \to \{f(b)\} \cup \text{образ}(f,\{;a\}) = \text{образ}(f,\{b;a\}))$

   из теоремы

   $\forall_{def}(d - \text{set } \& \ e - \text{set } \& \ f - \text{функция } \& \ d \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ e \subseteq \text{Dom}(f) \to \text{образ}(f,d) \cup \text{образ}(f,e) = \text{образ}(f, d \cup e))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{слово} \to \{;c\} \cup \{d\} = \{d;c\})$

2. Попытка проварьировать заменяемую часть тождества общей стандартизации: простейшие варьирующие тождества. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$, имеющее не менее 4 переменных. Внутри бесповторной левой части A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество перегруппировочного типа $B_1 = B_2$ с заголовком f левой части, выполняющее общую стандартизацию. Это тождество имеет не более 2 переменных и не вводит новых сложных понятий. После необходимой унификации, оно применяется к t. Результат упрощается. (Прием нормализация - 69).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdef}(\neg(d = 0)\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ f \le 0\ \&\ de \le 0 \to (-f)^c(-e/d)^c = (ef/d)^c)$

   из теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(d = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ 0 \le b\ \&\ 0 \le ad \to b^c(a/d)^c = (ab/d)^c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to -b(-c) = bc)$

3. Попытка упростить заменяемую часть тождества общей стандартизации с помощью разделяющего тождества. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$, имеющее не более 3 переменных. Внутри бесповторной левой части A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком g. Каждый параметр выражения t имеет единственной вхождение в A_1. По символу g находится тождество вида $g(x, f(y, z)) = f(g(x, y), g(x, z))$, выполняющее общую стандартизацию в направлении слева направо. После необходимой унификации, оно применяется к подвыражению t. Результат упрощается. (Прием нормализация - 71).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcf}(\neg(c - 1 = 0)\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even})\ \&\ 0 < c\ \&\ 0 < ab\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ f - \text{rational} \to f \cdot \log_c(a/b) = \log_c(a^f/b^f))$

   из теоремы

   $\forall_{cde}(\neg(c - 1 = 0)\ \&\ 0 < c\ \&\ 0 < d\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \to e \cdot \log_c d = \log_c(d^e))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ c - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&\ \neg(b = 0) \to (a/b)^c = a^c/b^c)$

4. Учет возможной перегруппировки для кратной переменной, имеющей как вхождение под одноместной операцией, так и вне такой операции. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Выражение A_1 имеет не более 3 параметров. Некоторый его параметр x встречается в A_1 как в виде $f(x)$, где f - одноместная операция, так и не под операцией f. По символу f находится тождество

перегруппировочного типа $B_1 = B_2$ с заголовком f левой части, выполняющее общую стандартизацию. После необходимой унификации, оно применяется к t. Результат упрощается. (Прием нормализация - 46).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ac}(a - \text{число } \& \ c - \text{число} \to \sin a \cos c + \sin(c - a) = \sin c \cos a)$

из теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{число } \& \ c - \text{число} \to -\sin b \cos c + \sin(b + c) = \sin c \cos b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to \sin(-a) = -\sin a)$

5. Попытка использования префиксной рекурсии. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложный числовой атом A_1 через более простые. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится перегруппировочное тождество $B_1 = B_2$ с заголовком f левой части, выполняющее общую стандартизацию в направлении слева направо. Оно преобразует сложную операцию над некоторым выражением P в такую же операцию над выражением вида "префикс(P, Q)". Данное тождество применяется к t. Результат упрощается. (Прием числатом - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cd}(\neg(c = \text{пустоеслово}) \ \& \ \{; c\} \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{слово} \to$
   $\inf(\{d; c\}) = \min(d, \inf(\{; c\})))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set } \& \ b - \text{set } \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ \text{огрснизу}(b) \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \&$
   $\neg(a = \emptyset) \ \& \ \neg(b = \emptyset) \to \inf(a \cup b) = \min(\inf(a), \inf(b)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{слово} \to \{; c\} \cup \{d\} = \{d; c\})$

6. Попытка равноценной переформулировки заменяемой части тождества общей стандартизации либо свертки. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Внутри A_1 выбирается подвыражение t с заголовком f, внутри которого имеется неодноместная операция. Находится тождество $B_1 = B_2$, выполняющее равноценную переформулировку выражения B_1 с заголовком f. После необходимой унификации, оно применяется к t. Результат упрощается. (Прием нормализация - 29).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abd}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to d|b|/|ab| = d/|a|)$

   из теоремы

   $\forall_{cdf}(\neg(c = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \to df/(cf) = d/c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow |a||b| = |ab|)$

7. Попытка проварьировать заменяемую часть тождества приведения к заданным заголовкам. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, используемое в нормализаторе приведения к заданным заголовкам. Число переменных его не более 3. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное выражение t с заголовком f. По символу f находится тождество перегруппировочного типа $B_1 = B_2$ с заголовком f левой части, имеющее не более 2 переменных. После необходимой унификации оно применяется к t. Результат упрощается. (Прием нормзаголовок - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \&$
   $\text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow b \log_c |a| = \log_c(a^b))$

   из теоремы

   $\forall_{cde}(\neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow$
   $e \log_c d = \log_c(d^e))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \rightarrow |a|^b = a^b)$

8. Попытка проварьировать заменяемую часть тождества свертки. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выполняющее сокращенную перезапись и имеющее не более 3 переменных. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тогждество сокращающего либо перегруппировочного типа $B_1 = B_2$ с заголовком f левой части, имеющее не более 3 переменных, не вводящее символов большей сложности, чем в исходной теореме, причем выполняющее общую стандартизацию. После необходимой унификации, оно применяется к t. Результат упрощается. (Прием свертка - 55).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \sin(b - c) = \sin b \cos c - \sin c \cos b)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \sin(-a) = -\sin a)$

9. Попытка проварьировать заменяемюу часть тождества. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, преобразуюшее выражение A_1 с двумя операциями от переменных, представляющих собой унифицируемые аргументы (т.е. аргументы таких операций, которые в задачах целесообразно иметь одинаковыми, например, аргументы синусов и косинусов), в выражение, имеющее две операции с унифицируемыми аргументами, отличающимися от исходных. Внутри A_1 выбирается

неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество перегруппировочного типа $B_1 = B_2$ с заголовком f левой части, имеющее не более 3 переменных и либо выполняющее общую стандартизаци, либо упрощающее выражение под корневой сложной операцией. После необходимой унификации, оно применяеся к t. Результат упрощается. (Прием тригаргумент - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{число } \& \ c - \text{число} \to -\sin c + \sin b = 2\sin((b-c)/2)\cos((b+c)/2))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \to \sin a + \sin b = 2\sin((a+b)/2)\cos((a-b)/2))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to \sin(-a) = -\sin a)$

10. Попытка проварьировать заменяемую часть тождества общей стандартизации: простейшие варьируемые тождества. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$, имеющее не более 3 переменных. Внутри A_1 выбирается подвыражение t с заголовком f. Находится тождество $B_1 = B_2$ перегруппировочного типа, имеющее не более 3 переменных и не осуществляющее в обратном направлении общую станлартизацию либо уменьшение оценки сложности. Заголовок B_1 - символ f. После необходимой унификации, это тождество применяется к t. Результат упрощается. (Прием нормализация - 39).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acef}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{числитель}(c) - \text{even}) \ \& \ 0 < e - f \ \& \ a - \text{число } \& \ e - \text{число } \& \ f - \text{число } \& \ c - \text{rational} \to -(f-e)^c/(e-f)^a = (e-f)^{c-a})$

из теоремы

$\forall_{abd}(0 < d \ \& \ a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ d - \text{число} \to d^b/d^a = d^{b-a})$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{rational } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ \neg(\text{числитель}(a) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(a) - \text{even}) \to (b-c)^a = -(c-b)^a)$

11. Попытка проварьировать заменяемую часть тождества общей стандартизации. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$, причем обратное преобразование в нормализаторах приведения к заданным заголовкам тоже является допустимым. Число переменных теоремы не превосходит 3. Внутри A_1 выбирается подвыражение t с заголовком f. Находится тождество $B_1 = B_2$ перегруппировочного типа, имеющее не более 3 переменных и не осуществляющее в обратном направлении общую стандартизацию. После необходимой унификации, оно применяется к t. Результат упрощается. (Прием норм - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcd}(\neg(c \in d) \ \& \ d - \text{set } \& \ b - \text{слово} \to \{c;b\} \setminus d = \{;b\} \setminus d \cup \{c\})$

из теоремы

$\forall_{adf}(a - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ f - \text{set}\ \&\ \text{непересек}(a, d) \to (a \cup f) \setminus d = a \cup (f \setminus d))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{cd}(c - \text{слово} \to \{; c\} \cup \{d\} = \{d; c\})$

12. Попытка равноценной переформулировки заменяемой части тождества свертки. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выполняющее сокращенную перезапись. Заменяемая часть A_1 небесповторна, а заменяющая бесповторна. Внутри A_1 выбирается подвыражение t с заголовком f, внутри которого имеется неодноместная операция. Находится тождество $B_1 = B_2$, выполняющее равноценную переформулировку выражения B_1 с заголовком f. После необходимой унификации, оно применяется к t. Результат упрощается. (Прием свертка - 36).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to (b - c)^2 = -2bc + b^2 + c^2)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{rational}\ \&\ \text{числитель}(b) - \text{even} \to (-a)^b = a^b)$

13. Попытка проварьировать тождество определения характеристики класса с помощью дополнительного тождества, имеющего свободную функциональную переменную. Теорема - тождество вида $f(\text{set}_x(A_1)) = A_2$, где A_2 элементарно. По символу f находится другое тождество вида $f(\text{set}_y(B_1)) = f(\text{set}_y(B_2))$. Внутри B_1 имеется функциональная переменная - выражение вида $g(y)$, где переменная g нигде более не используется. После необходимой унификации, включающей идентификацию переменной g, дополнительное тождество преобразует выражение A_1. Результат упрощается. (Прием описатель - 59).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{an}(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \mathbb{R}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ 0 \leq n\ \&\ \text{конечное}(a) \to \text{card}(\text{set}_b(n = l(b)\ \&\ \text{Val}(b) \subseteq a\ \&\ \text{Возркортеж}(b))) = C^n_{\text{card}(a)})$

из теоремы

$\forall_{an}(a - \text{set}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ \text{конечное}(a)\ \&\ 0 \leq n \to \text{card}(\text{set}_x(x - \text{set}\ \&\ x \subseteq a\ \&\ \text{card}(x) = n)) = C^n_{\text{card}(a)})$

и дополнительной теоремы

$\forall_d(\text{card}(\text{set}_b(b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R}\ \&\ d(b)\ \&\ \text{конечное}(b))) = \text{card}(\text{set}_a(d(\text{Val}(a))\ \&\ \text{Возркортеж}(a))))$

14. Попытка подразбиения функциональной переменной в тождестве для двуместной операции над функциями. Теорема - тождество вида $F(\ldots\lambda_x(G(f(x),g(x)),P)\ldots)=Q$, где f,g - переменные, для которых в антецедентах имеются равенства вида $F(\ldots f\ldots)=Q_1, F(\ldots g\ldots)=Q_2$. По символу G находится тождество общей стандартизации вида $G(a,H(b,c))=H(G(a,b),c)$. Его левая часть унифицируется с $G(f(x),g(x))$ таким образом, что $g(x)$ отождествляется с выражением $H(u(x),v(x))$ для двух новых функциональных переменных u,v. После применения данного тождества к исходной теореме ее левая часть приобретает вид $F(\ldots\lambda_x(H(G(f(x),u(x)),v(x)),P)\ldots)$. Новая теорема упрощается. (Прием описатель - 66).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdfghi}(\neg(0\in \mathrm{Val}(f))\ \&\ b=\text{предел}(h,i,a)\ \&\ c=\lim_{e\to a\setminus i}(d(e)/f(e))\ \&$
$\mathrm{Dom}(d)=g\ \&\ \mathrm{Dom}(f)=g\ \&\ \mathrm{Dom}(h)=g\ \&\ g\subseteq\mathbb{R}\ \&\ \mathrm{Val}(d)\subseteq\mathbb{R}\ \&$
$\mathrm{Val}(f)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ \mathrm{Val}(h)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ d-\text{функция}\ \&\ f-\text{функция}\ \&\ h-\text{функция}\ \&$
$b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ \text{Число}(a)\ \&\ \text{типпредела}(i)\ \&\ \text{Локопред}(h,a,i)\ \&$
$\text{Локопред}(\lambda_e(d(e)/f(e),e\in g),a,i)\to\lim_{e\to a\setminus i}(d(e)h(e)/f(e))=bc)$

из теоремы

$\forall_{abcghij}(\mathrm{Dom}(h)=g\ \&\ \mathrm{Dom}(j)=g\ \&\ g\subseteq\mathbb{R}\ \&\ \mathrm{Val}(h)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ \mathrm{Val}(j)\subseteq\mathbb{R}\ \&$
$h-\text{функция}\ \&\ j-\text{функция}\ \&\ \text{Число}(a)\ \&\ \text{типпредела}(i)\ \&\ \text{Локопред}(h,a,i)\ \&$
$\text{Локопред}(j,a,i)\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ \text{предел}(h,i,a)=b\ \&$
$\text{предел}(j,i,a)=c\to\lim_{e\to a\setminus i}(h(e)j(e))=bc)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\to e\cdot(a/b)=ae/b)$

15. Попытка выразить одну сложную операцию через другую. Теорема - тождество вида $f(t)=A$, где f - сложная одноместная операция, t - выражение с единственной бесповторной переменной x, выражение A одержит несколько (более одной) различных одноместных операций от x, имеющих ту же сложность, что f Предпринимается попытка выразить все эти операции выражения A через одну и ту же сложную одноместную операцию, используя дополнительные теоремы. (Прием варприем - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_b(b-\text{число}\ \&\ 0\le 2b+\pi\ \&\ 0\le\pi-2b\to\mathrm{tg}(b/2)=\sin b/(1+\sqrt{1-(\sin b)^2}))$

из теоремы

$\forall_b(\neg(\cos(b/2)=0)\ \&\ b-\text{число}\to\sin b/(1+\cos b)=\mathrm{tg}(b/2))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a-\text{число}\ \&\ 0\le 2a+\pi\ \&\ 0\le\pi-2a\to\cos a=\sqrt{1-(\sin a)^2})$

16. Попытка проварьировать заменяемую часть при помощи определяющего перестановочного тождества, после чего свернуть заменяющую часть. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выполняющее сокращенную перезапись. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество перегруппировочного типа $B_1 = B_2$ с заголовком f правой части, являющееся определением выражения B_1. После необходимой унификации оно применяется к t в направлении справа налево. У нового тождества обе части обрабатываются нормализаторами сокращенной перезаписи, после чего это тождество упрощается. (Прием свертка - 99).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abd}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \ \& \ d - \text{boolean} \rightarrow (a \vee d) \Rightarrow b = (a \Rightarrow b) \cdot (d \Rightarrow b))$

    из теоремы

    $\forall_{cde}(c - \text{boolean} \ \& \ d - \text{boolean} \ \& \ e - \text{boolean} \rightarrow e \vee c \cdot \neg(d) = (c \vee e) \cdot (d \Rightarrow e))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \Rightarrow b = \neg(a) \vee b)$

17. Попытка развязать параметры в определении операции для атомарного выражения (наличие характеристики "Атомарное"). Теорема - определение $A_1 = A_2$, имеющее характеристику "Атомарное(a)", т.е. содержащее более одного атомарного нечислового выражения типа a. Выражения A_1 и A_2 имеют общие параметры. Внутри A_1 выбирается атомарное подвыражение t типа a, имеющее заголовок f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$ двух атомарных выражений с заголовком f. Оно применяется для преобразования подвыражения t. Результат упрощается. Проверяется, что после этого получается равенство, параметры различных частей которого не пересекаются. Если в антецедентах встречаются переменные, отсутствующие в консеквенте, то при помощи задачи на описание предпринимается попытка переформулировать их без таких переменных. (Прием определение - 86).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abcdA}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(c = d) \ \&$
    $\neg(\text{прямая}(ad) = \text{прямая}(cd)) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \&$
    $d - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(cd) \ \&$
    $\text{прямая}(ad) \parallel \text{прямая}(bc) \rightarrow \text{вектор}(dc) + \text{вектор}(Aa) = \text{вектор}(Ab))$

    из теоремы

    $\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(AB) + \text{вектор}(BC) = \text{вектор}(AC))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = D) \ \&$
    $\neg(B = C) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \ \&$
    $\text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AD)) \rightarrow$
    $\text{вектор}(AB) = \text{вектор}(DC))$

18. Попытка развязать параметры в определении операции для атомарного выражения (отсутствие характеристики "Атомарное"). Теорема - определение $A_1 = A_2$, в определяемой части A_1 оторого некоторая переменная x встречается более одного раза. Внутри A_1 выбирается атомарное подвыражение t, содержащее x. По заголовку f этого подвыражения находится тождество $B_1 = B_2$ двух атомарных выражений с заголовком f. Оно применяется для преобразования подвыражения t. Результат упрощается. (Прием определение - 127).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abcdC}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = d)\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ \neg(c = d)\ \&\ \neg(d = C)\ \&$
    $\neg(\text{прямая}(ab) = \text{прямая}(ad))\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&$
    $d - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(cd)\ \&\ \text{прямая}(ad) \parallel$
    $\text{прямая}(bc) \to \text{уголмежду}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(dC)) = \angle(cdC))$

    из теоремы

    $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B) \to$
    $\text{уголмежду}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(AC)) = \angle(BAC))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(A = D)\ \&$
    $\neg(B = C)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD)\ \&$
    $\text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AD)) \to$
    $\text{вектор}(AB) = \text{вектор}(DC))$

19. Попытка рассмотреть множество значений параметра атомарного выражения, на котором оно постоянно. Теорема - нечислове равенство $A_1 = A_2$. Выбирается атомарное подвыражение t выражения A_1 тип которого равен типу значения A_1. По заголовку f этого подвыражения находится тождество $B_1 = B_2$, у которого выражения B_1, B_2 отличаются лишь заменой некоторой переменной x на переменную X. В антецедентах дополнительной теоремы встречается утверждение "$x \in X$". После необходимой унификации, дополнительное тождество применяется для такого преобразования t, при котором вместо исходной переменной x атома t возникла бы переменная X. Каждый антецедент C новой теоремы, содержащий x, заменяется на "$\forall_x(x \in X \to C)$". Далее он сворачивается в утверждение без связанных переменных. Результат упрощается. (Прием Равно - 3).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{bde}(\text{неподв}(d, e)\ \&\ \text{Равноускоренное}(b, d, e)\ \&\ \text{мточка}(b)\ \&\ \text{Числотр}(e)\ \&$
    $\text{мтело}(d) \to \text{масса}(b)\text{Ускорение}(b, d, e) = \text{Сила}(b, e))$

    из теоремы

    $\forall_{atK}(\text{Неподв}(K, t)\ \&\ t - \text{число}\ \&\ \text{мтело}(K)\ \&\ \text{мточка}(a) \to$
    $\text{масса}(a)\text{Ускорение}(a, K, t) = \text{Сила}(a, t))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{atKT}(\text{мточка}(a)\ \&\ \text{мтело}(K)\ \&\ \text{неподв}(K, T)\ \&\ \text{Числотр}(T)\ \&\ t \in T\ \&$
    $\text{Равноускоренное}(a, K, T) \to \text{Ускорение}(a, K, T) = \text{Ускорение}(a, K, t))$

20. Обращение к нормализатору приведения к заданному заголовку для стандартизируемого операнда. Теорема - тождество $f(x,y) = g(f(z,y), f(z,x))$ для перехода от стандартизируемого операнда x к стандартизируемому операнду z (например, основание логарифма). Находится тождество вида $f(u,t_1) = f(u,t_2)$. Оно применяется для преобразования $f(z,x)$, после чего левая часть полученной теоремы сворачивается при помощи исходного тождества, применяемого в обратном порядке. Получается тождество вида $f(t_1,y) = f(t_2,y)$. (Прием станд-логарифм - 8).

    Пример: создание квазипротокола

    $\forall_{abcde}(d = b + c \ \& \ \neg(e(b+c) - 1 = 0) \ \& \ 0 < e(b+c) \to \log_{(b+c)e} a = \log_{de} a)$

    по теореме

    $\forall_{abc}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ \neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ a -$ число $\&$
    $b -$ число $\&$ $c -$ число $\to \log_a b / \log_a c = \log_c b)$

    и дополнительной теореме

    $\forall_{abcde}(d = b + c \ \& \ 0 < (b+c)e \to \log_a((b+c)e) = \log_a(de))$

    Квазипротокол обращается к вспомогательной процедуре для разложения на множители суммы $b + c$ - основания логарифма. Стартовой теоремой служит тождество для изменения основания логарифма, дополнительной - другой квазипротокол, созданный для разложения на множители суммы под логарифмом.

Применение тождества общей стандартизации

1. Упрощение заменяемой части посредством тождества общей стандартизации, расположенного в том же разделе, что наиболее сложный подтерм антецедентов. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, обеспечивающее переход к более простым в смысле справочника "оценка" термам. Оценка сложности антецедентов больше оценки сложности консеквента. Выбирается самый сложный подтерм антецедентов, и находится раздел, к которому относится заголовок этого подтерма. Данный раздел просматривается, и в нем находится тождество общей стандартизации $B_1 = B_2$, заголовок заменяемой части которого равен заголовку выражения A_1. Оно применяется для пребразования A_1. Результат упрощается. Проверяется, что число переменных новой теоремы не больше, чем у старой, причем в антецедентах не встречается символ "значение". (Прием упрощение - 22).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{bcde}(e -$ set $\&$ правединица(b,c) $\&$ левединица(d,c) $\&$ бинарнооперация$(c,e) \to$
    $d = b)$

    из теоремы

    $\forall_{afxA}(A-$set $\&$ бинарнооперация(f,A) $\&$ $x \in A$ $\&$ левединица$(a,f) \to f(a,x) = x)$

    и дополнительной теоремы

$\forall_{afxA}(A - \text{set} \ \& \ \text{бинарнооперация}(f, A) \ \& \ x \in A \ \& \ \text{праваяединица}(a, f) \rightarrow f(x, a) = x)$

2. Вывод упрощающего тождества в стандартной форме путем унификации заменяемых частей двух ранее найденных тождеств. Прием применяется в цикле вывода упрощающих тождеств для некоторой стандартной формы (например, д.н.ф.). В зависимости от уровня срабатывания приема, ограничивается число переменных исходного тождества $A_1 = A_2$. Дополнительное тождество $B_1 = B_2$ выбирается в текущем списке вывода, причем аналогичным образом ограничивается и число его переменных. Во всяком случае, оно имеет не больше переменных, чем исходное тождество. Это тождество либо упрощает уже находящееся в стандартной форме выражение B_1 (с сохранением данной формы), либо преобразует к виду стандартной формы. Внутри A_1 выбирается подвыражение t, заголовок которого равен заголовку B_1, и после унификации t преобразуется дополнительным тождеством. В новой теореме предпринимается упрощение каждой из частей равенства в ее консеквенте специальным нормализатором, создаваемым на период цикла вывода. Приемы этого нормализатора создаются сразу же при получении очередного упрощающего тождества. Проверяется, что новая теорема не выродилась в равенство двух одинаковых выражений. Затем она регистрируется в списке вывода и по ней создается прием нормализатора. По завершении цикла вывода нормализатор удаляется. (Прием станд - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{boolean} \ \& \ d - \text{boolean} \rightarrow c \cdot d \vee \neg d = c \vee \neg d)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \vee a \cdot b = a)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \cdot b \vee a \cdot \neg b = a)$

3. Вывод упрощающего тождества в стандартной форме путем унификации заменяемых частей двух ранее найденных тождеств. Аналогично предыдущему, но исходная теорема - не тождество, выведенное предыдущим приемом, а одно из стартовых тождеств приведения к стандартной форме. (Прием стандформа - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(d, e) \rightarrow d \setminus (a \cup e) = d \setminus a)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow (b \setminus c) \setminus a = b \setminus (a \cup c))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, b) \rightarrow a \setminus b = a)$

4. Попытка преобразовать заменяемую операцию над семейством с помощью другого упрощающего тождества из списка вывода (первая попытка). Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Внутри A_1 выбирается вхождение подвыражения t вида $f(\lambda_{x_1 \ldots x_k}(t_2, t_1))$. В текущем списке вывода находится другое тождество вида $f(\lambda_{y_1 \ldots y_k}(r_2, r_1)) = B$. Никакой параметр g выражения B не встречается в левой части в виде $g(s)$. Переменные дополнительного тождества переобозначаются так, чтобы не входили в исходное тождество. Списки антецедентов обоих тождеств объединяются. К консеквенту исходного тождества применяется подстановка, переводящая t в левую часть дополнительного тождества, и последнее применяется для преобразования t. Эта же подстановка преобразует антецеденты исходного тождества. Результат упрощается. (Прием нормализация - 127).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bhijk}(\neg(h - i = 0)\ \&\ \forall_e(e \in \{1, \ldots, j\} \to k(h, e) = bk(i, e))\ \&\ h \in \{1, \ldots, j\}\ \&$
   $i \in \{1, \ldots, j\}\ \&\ b -$ число $\&$ матр$(k, \mathbb{R}, j, j) \to \det(k) = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{abcnA}(\forall_e(e \in \{1, \ldots, n\} \to A(a, e) = bc(e))\ \&\ b -$ число $\&\ a -$ натуральное $\&$
   кортеж$(c, n, \mathbb{R})\ \&\ a \le n\ \&$ матр$(A, \mathbb{R}, n, n) \to \det(A) =$
   $b\det(\lambda_{de}((c(e)$ при $a = d,$ иначе $A(d, e)), d \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ e \in \{1, \ldots, n\})))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ijnA}(\neg(i - j = 0)\ \&\ i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\}\ \&$ матр$(A, \mathbb{R}, n, n) \to$
   $\det(\lambda_{ab}((A(j, b)$ при $a = i,$ иначе $A(a, b)), a \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ b \in \{1, \ldots, n\})))$

5. Попытка преобразовать заменяемую операцию над семейством с помощью другого упрощающего тождества из списка вывода (вторая попытка). Предыдущий прием применяется на более высоком уровне срабатывания. (Прием нормализация - 128).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bilmpq}(\neg(l - m = 0)\ \&\ \forall_d(d \in \{1, \ldots, p\} \to q(l, d) = iq(m, d) + b(d))\ \&$
   $l \in \{1, \ldots, p\}\ \&\ m \in \{1, \ldots, p\}\ \&\ i -$ число $\&$ кортеж$(b, p, \mathbb{R})\ \&$ матр$(q, \mathbb{R}, p, p) \to$
   $\det(q) = \det(\lambda_{fj}((b(j)$ при $f = l,$ иначе $q(f, j)), f \in \{1, \ldots, p\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, p\})))$

   из теоремы

   $\forall_{abcnA}(\forall_d(d \in \{1, \ldots, n\} \to A(c, d) = a(d) + b(d))\ \&\ c -$ натуральное $\&$
   кортеж$(a, n, \mathbb{R})\ \&$ кортеж$(b, n, \mathbb{R})\ \&\ c \le n\ \&$ матр$(A, \mathbb{R}, n, n) \to \det(A) =$
   $\det(\lambda_{eg}((a(g)$ при $c = e,$ иначе $A(e, g)), e \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ g \in \{1, \ldots, n\})) +$
   $\det(\lambda_{fj}((b(j)$ при $c = f,$ иначе $A(f, j)), f \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\})))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bhijk}(\neg(h - i = 0)\ \&\ h \in \{1, \ldots, j\}\ \&\ i \in \{1, \ldots, j\}\ \&\ b -$ число $\&$ матр$(k, \mathbb{R}, j, j) \to$
   $\det(\lambda_{ae}((bk(i, e)$ при $a = h,$ иначе $k(a, e)), a \in \{1, \ldots, j\}\ \&\ e \in \{1, \ldots, j\})) = 0)$

6. Попытка упрощения выражения с бинарной ассоциативной операцией. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выполняющее сокращенную перезапись. Внутри A_1 выбирается вхождение подвыражения $f(t_1 \dots t_n)$, где f - переменная, для которой в антецедентах указано, что ее значение - бинарная ассоциативная операция. В разделе "группоиды" базы теорем находится тождество вида $g(r_1 \dots r_n) = B$. Оно применяется для преобразования $f(t_1 \dots t_n)$. Результат упрощается. Проверяется, что все антецеденты новой теоремы имеют глубину 1 и отличны от равенств. (Прием свертка - 89).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdei}(i - \text{set}\ \&\ c - \text{целое}\ \&\ \text{ассоциативно}(e)\ \&\ 0 \le c\ \&\ \text{Единица}(d, e)\ \&$
   $\text{бинарнооперация}(e, i) \to \text{алгстепень}(d, e, c + 1) = \text{алгстепень}(d, e, c))$

   из теоремы

   $\forall_{bcdfg}(g - \text{set}\ \&\ b \in g\ \&\ c - \text{целое}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&\ 0 \le c\ \&\ \text{Единица}(d, f)\ \&$
   $\text{бинарнооперация}(f, g) \to \text{алгстепень}(b, f, c + 1) = f(\text{алгстепень}(b, f, c), b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{afxA}(A - \text{set}\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, A)\ \&\ x \in A\ \&\ \text{правединица}(a, f) \to$
   $f(x, a) = x)$

7. Попытка проварьировать тождество определения характеристики класса с помощью дополнительного тождества и упростить утверждение под результирующим описателем. Теорема - тождество вида $f(\text{set}_{x_1 \dots x_n}(A_1\ \&\ \dots\ \&\ A_m)) = D$. Выражение D элементарно. Все утверждения A_1 элементарны, причем каждая переменная x_j, входящая в какое-либо из них, имеет глубину вхождения единица. Находится тождество общей стандартизации вида $f(B_1) = f(B_2)$. Оно применяется для преобразования левой части исходного тождества, причем направление замены - обратное. Результат упрощается. (Прием описатель - 49).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ad}(d - \text{число}\ \&\ a - \text{натуральное} \to \text{card}(\text{set}_c(c - \text{число}\ \&\ (c + d) - \text{натуральное}\ \&$
   $a|(c + d))) = \text{счетное})$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{натуральное} \to \text{card}(\text{set}_b(a|b\ \&\ b - \text{натуральное})) = \text{счетное})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{be}(e - \text{set}\ \&\ e \subseteq \mathbb{R}\ \&\ b - \text{число} \to \text{card}(\text{set}_a(a + b \in e\ \&\ a - \text{число})) = \text{card}(e))$

   Заметим, что выводимая теорема является лишь промежуточным звеном при выводе счетности множества натуральных чисел, имеющих заданное значение по заданному модулю.

3.2.2 Преобразование заменяющей части тождества

Применение тождества, уменьшающего число переменных

1. Упрощение заменяющей части для усиления характеристики теоремы.

   (a) Использование тождества исключения сложных операций для преобразования заменяющей части. Теорема - тождество вида $g(x, h(y, z)) = f(g(x, y), g(x, z))$. По символу g находится дополнительное тождество сокращающего типа: $g(B_1, B_2) = x$, где x - переменная, причем каждое из выражений B_1, B_2 бесповторно и имеет переменные x, y. Если операция g ассоциативна и коммутативна, то выбирается новая переменная z, и дополнительное тождество преобразуется к виду $g(B_1, B_2, z) = g(x, z)$. Затем оно применяется к исходной теореме для преобразования $g(x, y)$. Результат упрощается. Проверяется, что левая часть нового тождества имеет ровно два подвыраженя максимальной сложности и двуместную корневую операцию. (Прием дистрибразвертка - 13).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdefg}(e + f = 1\ \&\ 0 < e\ \&\ 0 < f\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{число}\ \&\ 0 \leq d \rightarrow cd^e + dg = (c + gd^f)d^e)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 \leq a\ \&\ 0 < b\ \&\ 0 < c\ \&\ b + c = 1 \rightarrow a^b a^c = a)$

   Фактически, выводится теорема приема, позволяющего упрощать выражения с радикалами путем раскрывания скобок.

   (b) Использование тождества исключения сложных операций для преобразования заменяющей части. Теорема - тождество вида $f(g(x_1 \ldots x_n), g(y_1 \ldots y_m)) = g(f(x_1, y) \ldots f(x_n, y_m))$, возникающее при раскрывании скобок по дистрибутивности. Число переменных не более 4. Выбирается подвыражение $f(x_i, y_j)$ в правой части. Находится дополнительное тождество сокращающего типа: $f(B_1, B_2) = u$, где u - переменная, причем каждое из выражений B_1, B_2 бесповторно и имеет переменные u, v. Если операция f ассоциативна и коммутативна, то выбирается новая переменная w, и дополнительное тождество преобразуется к виду $f(B_1, B_2, w) = f(u, w)$. Затем оно применяется к исходной теореме для преобразования $f(x_i, y_i)$. Результат упрощается. Проверяется, что левая часть нового тождества имеет ровно два подвыражения максимальной сложности и двуместную корневую операцию. (Прием дистрибутино - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcefgij}(f + g = 1\ \&\ 0 < f\ \&\ 0 < g\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{число}\ \&\ 0 \leq c \rightarrow be + bjc^g + cij + eic^f = (b + ic^f)(e + jc^g))$

   из теоремы

$\forall_{abde}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow ad + ae + bd + be = (a + b)(d + e))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 \leq a\ \&\ 0 < b\ \&\ 0 < c\ \&\ b + c = 1 \rightarrow a^b a^c = a)$

Заметим, что выводимая теорема порождает прием для упрощения произведений с константными радикалами. При этом b, c, e, i, j идентифицируются с десятичными константами.

(c) Использование дополнительного тождества для упрощения небесповторной заменяющей части, с целью получения тождества общей стандартизации. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, обеспечивающее уменьшение оценки сложности, но не являющееся тождеством общей стандартизации. Выражение A_2 небесповторно. Внутри A_2 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество вида $f(x, y) = a$, где a - логический символ либо одна из переменных x, y. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что получается тождество общей стандартизации. (Прием упрощение - 19).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cf}(c - \text{set}\ \&\ c \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция} \rightarrow \text{Val}(\text{сужение}(f, c)) = \text{образ}(f, c))$

из теоремы

$\forall_{fA}(A - \text{set}\ \&\ f - \text{функция} \rightarrow \text{Val}(\text{сужение}(f, A)) = \text{образ}(f, A \cap \text{Dom}(f)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{set}\ \&\ c - \text{set}\ \&\ c \subseteq b \rightarrow b \cap c = c)$

(d) Попытка сильного упрощения подвыражения заменяющей части - наличие в ней числового атома, включающего все параметры. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложный числовой атом A_1 через более простые. Выражение A_2 имеет невырожденный числовой атом, содержащий все параметры выражения A_1. Внутри A_2 выбирается отличное от A_2 неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество вида $f(x, y) = a$, где a - логический символ либо одна из переменных x, y. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием числатом - 15).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{deC}(\neg(\text{вероятность}(d, C) = 0)\ \&\ d - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&\ d \in \text{события}(C)\ \&\ e \in \text{события}(C)\ \&\ \text{непересек}(d, e)\ \&\ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{услвероятн}(e, d, C) = 0)$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&\ \neg(\text{вероятность}(A, C) = 0)\ \&\ B - \text{события}\ \&\ A - \text{события}\ \&\ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{услвероятн}(B, A, C) = \text{вероятность}(A \cap B, C)/\text{вероятность}(A, C))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{de}(d - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&\ \text{непересек}(d, e) \to d \cap e = \emptyset)$

(e) Попытка упрощения заменяющего терма, преобразующего его в константу. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее выражение A_1 с невырожденными числовыми атомами через численные параметры. Внутри A_2 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество вида $f(x, a) = a$, где a - логический символ. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что в консеквенте новой теоремы находится равенство, одна из частей которого константная. (Прием числатомы - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_d(d < 0\ \&\ d - \text{число} \to \arg(d) = \pi)$

из теоремы

$\forall_{xy}(x < 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ 0 \leq y \to \arg(x + yi) = \pi + \text{arctg}(y/x))$

и дополнительной теоремы

$\forall_d(\neg(d = 0)\ \&\ d - \text{число} \to 0/d = 0)$

(f) Попытка сильного упрощения заменяющей части для получения тождества, переводящего к более простым числовым атомам. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее численную характеристику операции над нечисловыми объектами через численные характеристики других операций над этими объектами. Внутри A_2 выбирается подвыражение t с заголовком f, имеющее не менее двух корневых операндов. По символу f находится некоторое несложное упрощающее тождество $B_1 = B_2$ для выражения B_1 с заголовком f. Используются справочники поиска теорем "констнорм", "тожд", "поглощается", "поглощает". Дополнительное тождество используется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием Числвыраз - 1).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ \text{непересек}(a, b)\ \&\ \text{конечное}(a)\ \&\ \text{конечное}(b) \to \text{card}(a \cup b) = \text{card}(a) + \text{card}(b))$

из теоремы

$\forall_{cd}(c - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(c)\ \&\ \text{конечное}(d) \to \text{card}(c \cup d) = \text{card}(c) + \text{card}(d \setminus c))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{set}\ \&\ c - \text{set}\ \&\ \text{непересек}(b, c) \to b \setminus c = b)$

(g) Фиксация значения координаты в заменяющей части. Теорема - тождество вида "крд$(A_1, K) = A_2$". Внутри A_2 выбирается подвыражение вида "крд(A_3, K)", являющееся сомножителем некоторого произведения. Находится тождество вида "крд$(B, Q) = 0$", которое применяется для преобразования подвыражения "крд(A_3, K)". Результат упрощается. (Прием крд - 6).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{act}(t - \text{число}\ \&\ \text{вниз}(\text{Ускорение}(a,c,t),c)\ \&\ \text{мточка}(a)\ \&\ \text{Неподв}(c,t)\ \&\ \text{Трехмерн}(c)\ \&\ \text{мтело}(c) \to 0 = \text{крд}(\text{Сила}(a,t),c,1))$

из теоремы

$\forall_{adt}(t - \text{число}\ \&\ \text{мточка}(a)\ \&\ \text{Неподв}(d,t)\ \&\ \text{Трехмерн}(d)\ \&\ \text{мтело}(d) \to \text{масса}(a)\text{крд}(\text{Ускорение}(a,d,t),d,1) = \text{крд}(\text{Сила}(a,t),d,1))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{aK}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{вниз}(a,K)\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \to \text{крд}(a,K,1) = 0)$

(h) Попытка упрощения заменяющей части, после которого самый сложный ее подтерм получается из самого сложного подтерма заменяемой отбрасыванием части операндов. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Каждая из частей данного тождества имеет единственное подвыражение максимальной сложности. Заголовки и оценки сложности этих подвыражений t_1, t_2 совпадают, причем сложность больше 5. Выражение t_2 не получается из t_1 вычеркиванием части операндов некоторых операций. Внутри A_2 выбирается вхождение неоднобуквенного подвыражения t с заголовком f. Находится тождество вида $f(x, g(x,y)) = a$, где a - логический символ либо переменная. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что полученное тождество имеет по одному подвыражению максимальной сложности в каждой из своих частей, причем подвыражение заменяющей части получается из подвыражения заменяемой отбрасыванием части операндов. (Прием нормализация - 141).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(\neg(c = 0)\ \&\ \neg(a^2 + b^2 = 0)\ \&\ c \mid a\ \&\ c \mid b\ \&\ a - \text{целое}\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ c - \text{целое} \to \text{нод}(a,b) = |c|\text{нод}(a/c, b/c))$

из теоремы

$\forall_{akm}(\neg(m = 0)\ \&\ \neg(a^2 + k^2 = 0)\ \&\ m \mid a\ \&\ a - \text{целое}\ \&\ k - \text{целое}\ \&\ m - \text{целое} \to \text{нод}(a, km) = |m|\text{нод}(k, a/m))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \neg(b = 0) \to (a/b) \cdot b = a)$

(i) Попытка получения нормализующего тождества после обращения заменяющего терма в константу. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией. По заголовку f заменяющей части находится тождество $f(B_1, B_2) = B_3$, где выражение B_3 константное, а каждое из выражений B_1, B_2 бесповторное и имеет единственную переменную. Это тождество применяется для преобразования A_2. Результат упрощается и проверяется, что получается либо тождество общей стандартизации, либо теорема для приема проверочного оператора. (Прием сокращ - 45).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(\neg(a^2 + b^2 = 0)\ \&\ a - \text{целое}\ \&\ b - \text{целое} \to \text{взаимнопросты}(a/\text{нод}(a,b), b/\text{нод}(a,b)))$

из теоремы

$\forall_{abd}(\neg(a^2+b^2=0)\ \&\ d-$натуральное $\&\ d \mid a\ \&\ d \mid b\ \&\ a-$целое $\&\ b-$целое $\rightarrow$ нод$(a/d, b/d) =$ нод$(a,b)/d)$

и дополнительной теоремы

$\forall_b(\neg(b=0)\ \&\ b-$число $\rightarrow b/b=1)$

(j) Попытка превратить тождество свертки в тождество общей стандартизации за счет сильного упрощения заменяющего выражения. Теорема - тождесто сокращенной перезаписи $A_1 = A_2$. Внутри A_2 выбирается подвыражение t с заголовком f, имеющее не менее двух корневых операндов. По символу f находится некоторое несложное упрощающее тождество $B_1 = B_2$ для выражения B_1 с заголовком f. Используются справочники поиска теорем "констнорм", "тожд", "исклтерм", "поглощается", "поглощает". Дополнительное тождество используется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что получилось тождество общей стандартизации (Прием свертка - 46).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bde}(b-\text{set}\ \&\ d-\text{set}\ \&\ e-\text{set}\ \&\ \text{непересек}(d,e) \rightarrow (b \setminus d) \cup (b \setminus e) = b)$

из теоремы

$\forall_{bcf}(b-\text{set}\ \&\ c-\text{set}\ \&\ f-\text{set} \rightarrow (b \setminus c) \cup (b \setminus f) = b \setminus (c \cap f))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{de}(d-\text{set}\ \&\ e-\text{set}\ \&\ \text{непересек}(d,e) \rightarrow d \cap e = \emptyset)$

(k) Попытка превратить тождество свертки в тождество общей стандартизации за счет сильного упрощения заменяющего выражения (усиленное редуцирование). Аналогично предыдущему, но при упрощении новой теоремы используется все теоремы, уже полученные в списке вывода. (Прием свертка - 100).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bc}(b-\text{boolean}\ \&\ c-\text{boolean} \rightarrow b \cdot c \Rightarrow b = 1)$

из теоремы

$\forall_{acd}(a-\text{boolean}\ \&\ c-\text{boolean}\ \&\ d-\text{boolean} \rightarrow a \Rightarrow (c \Rightarrow d) = d \vee \neg(a) \vee \neg(c))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a-\text{boolean} \rightarrow a\ \vee\ \neg(a) = 1)$

(l) Сильное упрощение консеквента. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, где A_1 - невырожденный числовой атом, A_2 - выражение, содержащее невырожденные числовые атомы, но само не являющееся числовым атомом. Внутри A_2 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество вида $f(x,y) = a$, где a - либо логический символ, либо одна из переменных x, y. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием числзнач - 43).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDEF}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(C=E)\ \&\ \neg(E=F)\ \&$
$E \in \text{прямая}(CD)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ F \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$F - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB)\ \&$
$0 \le \pi/2 - \angle(CEF) \to \angle(EAF) = 2\angle(CEF))$

из теоремы

$\forall_{ABCDEF}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(C=E)\ \&\ \neg(E=F)\ \&$
$E \in \text{прямая}(CD)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ F \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$F - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \to$
$\angle(EAF) = 2\min(\pi - \angle(CEF), \angle(CEF)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ 0 \le a - b \to \min(a,b) = b)$

2. Попытка получить простую теорему, используемую в качестве дополнительной приемами вывода теорем.

   (a) Использование тождества общей стандартизации для получения тождества, устраняющего сложное подвыражение с неизвестными при навешивании внешней операции. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$, имеющее не более 3 переменных. В заменяющей части выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. Находится дополнительное тождество вида $f(x, g(x,y)) = a$, где a - переменная либо логический символ. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что новая теорема - тождество, которое можно использовать для устранения сложного подвыражения с неизвестными путем навешивания внешней операции. Она сопровождается единственной характеристикой, устанавливающей этот факт. (Прием нормализация - 43).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acd}(\neg(c=0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ 0 \le a \to (a^{d/c})^c = a^d)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 \le a \to (a^b)^c = a^{bc})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \neg(b=0) \to (a/b)b = a)$

   (b) Попытка упрощения заменяющего терма для получения теоремы справочника "поглощается". Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$, у которого левая часть имеет ровно две переменные x, y, причем x имеет единственное вхождение в A_1, в y - два вхождения. По заголовку f выражения A_2 находится тождество вида $f(z_1, z_2) = z_1$, которое применяется для преобразования A_2. Проверяется, что получается тождество вида $u = g(v, h(u,v))$, которое может будет использовать для вывода теорем с

помощью справочника поиска теорем "поглощается". (Прием нормализация - 60).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ac}(c - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ a \subseteq c \to a \cup c \setminus a = c)$

из теоремы

$\forall_{bd}(b - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \to d \cup (b \setminus d) = b \cup d)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ b \subseteq c \to b \cup c = c)$

(c) Применение сокращающего тождества к нормализующему тождеству перестановочного типа для получения другого сокращающего тождества. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$, у которого каждая часть имеет одни и те же три переменные. По заголовку f выражения A_2 находится тождество вида $f(z_1, z_2) = z_1$, которое применяется для преобразования A_2. Проверяется, что получается тождество вида $u = t$, где u - переменная, t - выражение с двумя переменными. Оно упрощается ограниченными средствами и сопровождается характеристикой, указывающей, что оно создано только для вывода теорем с помощью справочников поиска теорем. (Прием нормализация - 111).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cd}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \to d/(d/c) = c)$

из теоремы

$\forall_{abd}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \to d/(a/b) = bd/a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ae}(\neg(e = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \to ae/e = a)$

(d) Попытка обращения в константу одного из самых сложных подвыражений заменяющего терма. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией. Левая часть имеет единственный подтерм максимальной сложности, причем его заголовок равен f. В правой части находится подвыражение t с тем же заголовком f. По символу f находится тождество вида $f(x, a) = a$, где a - логический символ, либо вида $f(B_1, B_2) = a$, где B_1, B_2 - выражения с единственной бесповторной переменной x. Это тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием сокращ - 17).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bd}(0 < b \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \to (1/b)^d = 1/b^d)$

из теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 < b \to (a/b)^c = a^c/b^c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to 1^a = 1)$

Применение тождества, исключающего сложное понятие

1. Использование дополнительного тождества для альтернативной свертки заменяющей части. Теорема - определение выражения A с помощью тождества $A = (t_1$ при $P,$ иначе $t_2)$. Находится другое тождество вида $B = (r_1$ при $Q,$ иначе $r_2)$, являющееся определением выражения B. Его переменные переобозначаются так, чтобы они не встречались в исходной теореме. Определяется подстановка C, унифицирующая t_1 с r_1 и одновременно t_2 с r_2. Усматривается эквивалентность результатов применения C к P и к Q. Антецедентами новой теоремы становятся результаты применения C к антецедентам исходных теорем, консеквентом - равенство результатов применения C к A и B. Результат упрощается. (Прием варианты - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_c(c - \text{число} \rightarrow \max(c, -c) = |c|)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow \max(a, b) = (b \text{ при } a \leq b,\ \text{иначе } a))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = (a \text{ при } 0 \leq a,\ \text{иначе } a))$

2. Упрощение заменяющего терма для исключения в нем невырожденного числового атома. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, используемое для перехода к более простым описателям либо для исключения описателей. Внутри A_2 выделяется невырожденный числовой атом t с заголовком f, не имеющий других вхождений в консеквенте. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, выражающее числовой атом B_1 с заголовком f через численные параметры. После необходимой унификации, это тождество применяется к t. Результат упрощается. Проверяется, что в заменяющей части новой теоремы нет невырожденных числовых атомов. (Прием описатель - 60).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bn}(b - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ 0 \leq b\ \&\ 0 \leq n \rightarrow \text{card}(\text{set}_x(\text{card}(x) = n\ \&\ x - \text{set}\ \&\ x \subseteq \{1, \ldots, b\})) = C_b^n)$

   из теоремы

   $\forall_{an}(a - \text{set}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ \text{конечное}(a)\ \&\ 0 \leq n \rightarrow \text{card}(\text{set}_x(x - \text{set}\ \&\ x \subseteq a\ \&\ \text{card}(x) = n)) = C^n_{\text{card(a)}})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_n(n - \text{целое}\ \&\ 0 \leq n \rightarrow \text{card}(\{1, \ldots, n\}) = n)$

3. Попытка получить тождество нормализации, исключающее переменную. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$, уменьшающее оценку сложности. Выражение A_2 бесповторно. Списки параметров выражений A_1, A_2 одинаковы. Внутри A_2 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f.

По символу f находится тождество общей стандартизации вида $f(x_1 \dots x_n) = r$, где $x_1, \dots, x_n$ - переменные, причем оценка сложности правой части меньше, чем левой. Оно применяется к t. Результат упрощается. Проверяется, что список параметров заменяющей части новой теоремы не включает список параметров заменяемой, причем заменяющая часть бесповторная. (Прием упрощение - 21).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bf}(\mathrm{Val}(b) \subseteq \mathrm{Dom}(f)\ \&\ b-\text{функция}\ \&\ f-\text{функция} \rightarrow \mathrm{Dom}(\text{произведение}(f,b)) = \mathrm{Dom}(b))$

из теоремы

$\forall_{fg}(f - \text{функция}\ \&\ g - \text{функция} \rightarrow \mathrm{Dom}(\text{произведение}(f,g)) = \text{прообраз}(g, \mathrm{Dom}(f)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{af}(a - \text{set}\ \&\ \mathrm{Val}(f) \subseteq a\ \&\ f - \text{функция} \rightarrow \text{прообраз}(f,a) = \mathrm{Dom}(f))$

4. Попытка сильного упрощения подвыражения заменяющей части - отсутствие в ней числового атома, включающего все параметры. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложный числовой атом через более простые. Выражение A_2 имеет не менее 3 невырожденных числовых атомов, причем ни один из них не содержит всех параметров выражения A_1. Внутри A_2 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество вида $f(x_1 \dots x_n) = r$, где $x_1, \dots, x_n$ - переменные, причем оценка сложности правой части меньше, чем левой. Это тождество либо является тождестволм общей стандартизации, либо выражает невырожденный числовой атом через более простые. Оно применяется для преобразования подтерма t. Результат упрощается. Проверяется, что новая теорема имеет в заменяемой части невырожденный числовой атом, быть может, домноженный на коэффициент, а число невырожденных числовых атомов в заменяющей части хотя бы на 3 меньше, чем в A_2. (Прием числатом - 36).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{af}(f - \text{комплексное}\ \&\ a - \text{число} \rightarrow \mathrm{Re}(af) = a\mathrm{Re}(f))$

   из теоремы

   $\forall_{cf}(c - \text{комплексное}\ \&\ f - \text{комплексное} \rightarrow \mathrm{Re}(cf) = \mathrm{Re}(c)\mathrm{Re}(f) - \mathrm{Im}(c)\mathrm{Im}(f))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \mathrm{Re}(a) = a)$

5. Рассмотрение вырожденного значения числового атома в заменяющей части. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложный невырожденный атом A_1 через более простые. Внутри A_2 выбирается невырожденный числовой атом t с заголовком f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$ без существенных антецедентов, выражающее сложный числовой атом B_1 с заголовком f через

константный терм B_2. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием числатом - 24).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(\neg(a = b)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка} \to \text{скалумнож}(\text{вектор}(ba), \text{вектор}(ba)) = (l(ab))^2)$

из теоремы

$\forall_{BCD}(\neg(B = C)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \to \text{скалумнож}(\text{вектор}(CB), \text{вектор}(CD)) = \cos(\angle(BCD))l(BC)l(CD))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B) \to \angle(ABA) = 0)$

6. Попытка упрощения заменяющей части равенства, после которого она превращается в переменную. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Выражение A_2 имеет единственную переменную. По заголовку f этого выражения находится тождество вида $f(x_1 \dots x_n) = x_i$. Оно применяется для преобразования A_2. Результат упрощается. Проверяется, что заменяющая часть нового тождества - переменная. (Прием нормализация - 140).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ac}(c - \text{натуральное}\ \&\ c \mid a\ \&\ a - \text{целое} \to c = \text{нод}(a, c))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(\neg(b = 0)\ \&\ b \mid a\ \&\ a - \text{целое}\ \&\ b - \text{целое} \to |b| = \text{нод}(a, b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число}\ \&\ 0 \le a \to |a| = a)$

7. Попытка упрощения расположенной в заменяющей части и более нигде в теореме не появляющейся одноместной операции от переменной. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией. Внутри A_2 выбирается подтерм вида $f(x)$, где x - переменная, а символ f не имеет других вхождений в теорему. Находится тождество вида $f(y) = y$. Оно применяется в $f(x)$. Результат упрощается. (Прием сокращ - 46).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{akn}(\neg(k^2 + n^2 = 0)\ \&\ a - \text{натуральное}\ \&\ k - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое} \to \text{нод}(ak, an) = a \cdot \text{нод}(k, n))$

   из теоремы

   $\forall_{mnk}(m - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ k - \text{целое}\ \&\ \neg(n^2 + k^2 = 0)\ \&\ \neg(m = 0) \to \text{нод}(mn, mk) = |m|\text{нод}(n, k))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число}\ \&\ 0 \le a \to |a| = a)$

8. Попытка свернуть выраженияе с числовым атомом в заменяющей части в виде одного числового атома. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложный невырожденный числовой атом A_1 через более простые. Выражение A_2 имеет не менее двух различных числовых атомов, причем все они невырожденные. Выбирается некоторый такой атом t. В разделе, к которому относится заголовок t, находится тождество $B_1 = B_2$, выражающее сложный невырожденный числовой атом B_1 через более простые. Внутри B_2 встречается отличный от B_2 атом с тем же заголовком, что t. Все параметры дополнительного тождества встречаются в B_2. Находится надтерм T терма t, имеющий тот же заголовок, что B_2. Тождество $B_1 = B_2$ применяется (в направлении справа налево) для преобразования T. Дополнительно предпринимаются действия, направленные на переформулировку левой части нового тождества, сближающую ее с B_1. (Прием числатом - 47).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ a \in \text{события}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}((b, a), c) \ \& \ b - \text{set} \ \&$
   $b \in \text{события}(c) \ \& \ \text{верпространство}(c) \rightarrow$
   $\text{вероятность}(a \cap (\text{элемсобытия}(c) \setminus b), c) =$
   $\text{вероятность}(\text{элемсобытия}(c) \setminus b, c)\text{вероятность}(a, c))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \in \text{события}(c) \ \& \ b \in \text{события}(c) \ \&$
   $\text{верпространство}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}((b, a), c) \rightarrow \text{вероятность}(a \setminus b, c) =$
   $(-\text{вероятность} + 1)\text{вероятность}(a, c))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{set} \ \& \ A \in \text{события}(B) \ \& \ \text{верпространство}(B) \rightarrow$
   $\text{вероятность}(\text{элемсобытия}(B) \setminus A, B) = 1 - \text{вероятность}(A, B))$

Применение тождества, приводящего к более коротким сложным подтермам

1. Попытка использовать дополнительное тождество, декомпозирующее один из числовых атомов определяющей части для последующей свертки. Теорема - определение выражения A посредством равенства $A = g(t_1, t_2)$. По символу g находится тождество декомпозиции $g(x, f(y, z)) = f(g(x, y), g(x, z))$. Рассматривается заголовок s выражения t_2 (операнд, соответствующий $f(y, z)$). В разделе базы теорем, связанном с символом s, находится тождество $B_1 = B_2$, выражающее невырожденный числовой атом B_1 с заголовком s через другие невырожденные числовые атомы, причем заголовком B_2 служит символ f. Это тождество, после унификации, применяется для преобразования t_2, после чего заменяющая часть декомпозируется приведенным выше тождеством для f, g, с упрощение каждого f - члена. Унификация используется усиленная, с привлечением прочих тождеств из базы теорем. Результат упрощается. (Прием определение - 102).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{dfAC}(\neg(\text{вероятность}(A,C)=0)\ \&\ d-\text{set}\ \&\ f-\text{set}\ \&\ A-\text{set}\ \&$
$d\in\text{события}(C)\ \&\ f\in\text{события}(C)\ \&\ A\in\text{события}(C)\ \&\ \text{верпространство}(C)\rightarrow$
$\text{услвероятн}(d\cup f,A,C)=-\text{услвероятн}(d\cap f,A,C)+\text{услвероятн}(d,A,C)+$
$\text{услвероятн}(f,A,C))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A-\text{set}\ \&\ B-\text{set}\ \&\ \neg(\text{вероятность}(A,C)=0)\ \&\ B\in\text{события}(C)\ \&$
$A\in\text{события}(C)\ \&\ \text{верпространство}(C)\rightarrow\text{услвероятн}(B,A,C)=$
$\text{вероятность}(A\cap B,C)/\text{вероятность}(A,C))$

и дополнительных теорем

$\forall_{bde}(\neg(d=0)\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\rightarrow b/d+e/d=(b+e)/d)$

$\forall_{ABC}(A-\text{set}\ \&\ B-\text{set}\ \&\ A\in\text{события}(C)\ \&\ B\in\text{события}(C)\ \&$
$\text{верпространство}(C)\rightarrow\text{вероятность}(A\cup B,C)=\text{вероятность}(A,C)+$
$\text{вероятность}(B,C)-\text{вероятность}(A\cap B,C))$

2. Попытка перехода в заменяющем терме к более простому операнду сложной операции. Теорема - тождество $A_1=A_2$, выполняющее сокращенную перезапись. Внутри A_2 выбирается неоднобуквенное подвыражение с заголовком f. По символу f находится тождество $B_1=B_2$, выражающее корневую сложную операцию f левой части через эту же операцию от более простого терма. Это тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется отсутствие дублирующих параметров. (Прием свертка - 63).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{defg}(\neg(f-1=0)\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(g)-\text{even})\ \&\ 0<f\ \&\ 0<de\ \&\ 0<d^g\ \&$
   $0<e^g\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ g-\text{rational}\rightarrow$
   $g\log_f(de)=\log_f(d^g)+\log_f(e^g))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ 0<a\ \&\ \neg(a-1=0)\ \&\ 0<b\ \&$
   $0<c\rightarrow\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcf}(\neg(c-1=0)\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(f)-\text{even})\ \&\ 0<c\ \&\ 0<ab\ \&\ a-\text{число}\ \&$
   $b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ f-\text{rational}\rightarrow f\log_c(ab)=\log_c(a^fb^f))$

3. Попытка использовать упрощающее тождество, сохраняющее консеквент, но варьирующее антецеденты. Теорема - тождество $A_1=A_2$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией. По заголовку f выражения A_2 находится тождество общей стандартизации $B_1=B_2$, выражающее корневую сложную операцию f выражения B_1 через эту же операцию от более простого терма. При этом выражение B_2 получается из подтерма B_1 отбрасыванием части операндов некоторых операций или заменой этих операций на их операнд. Найденное тождество применяется для преобразования A_2. Результат упрощается. Проверяется, что консеквент новой теоремы отличается от консеквента

исходной теоремы лишь переобозначением переменных без их отождествления. (Прием сокращ - 47).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{dmn}(\neg(d^2+m^2=0)\ \&\ d-$ целое $\&\ m-$ целое $\&\ n-$ целое $\&\ n+1\leq 0\ \&$ взаимнопросты$(d,m)\rightarrow$ нод$(m,dn)=$ нод$(m,n))$

из теоремы

$\forall_{cde}(\neg(d^2+e^2=0)\ \&\ c-$ натуральное $\&\ d-$ целое $\&\ e-$ целое $\&$ взаимнопросты$(d,e)\rightarrow$ нод$(e,cd)=$ нод$(c,e))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{mn}(m-$ целое $\&\ n-$ целое $\&\ \neg(m^2+n^2=0)\rightarrow$ нод$(m,-n)=$ нод$(m,n))$

Применение тождества, варьирующего сложное выражение с сохранением сложности

1. Попытка варьирования тождества с помощью другого тождества, полученного в том же цикле. Теорема - тождество $A_1=A_2$, выражающее численную характеристику операции над нечисловыми объектами через численные характеристики других операций над этими объектами. Внутри A_2 выбирается невырожденный числовой атом t, оценка сложности которого равна оценке сложности выражения A_1, причем этот атом содержит все переменные выражения A_1. В текущем списке вывода находится тождество $B_1=B_2$ с той же характеристикой "Числвыраз", что исходное тождество. Его заменяемая часть B_1 отличается от t лишь переобозначением переменных без их отождествления. Данное тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием Числвыраз - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ade}(a-$ set $\&\ d-$ set $\&\ a\subseteq$ элемсобытия$(e)\ \&\ d\subseteq$ элемсобытия$(e)\ \&$ верпространство$(e)\rightarrow$ вероятность$(a\cup d,e)=-$вероятность$(a\cap d,e)+$ вероятность$(a,e)+$ вероятность$(d,e))$

   из теоремы

   $\forall_{bcC}(b-$ set $\&\ c-$ set $\&\ b\subseteq$ элемсобытия$(C)\ \&\ c\subseteq$ элемсобытия$(C)\ \&$ верпространство$(C)\rightarrow$ вероятность$(b\cup c,C)=$ вероятность$(c,C)+$ вероятность$(b\setminus c,C))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bcC}(b-$ set $\&\ c-$ set $\&\ b\subseteq$ элемсобытия$(C)\ \&$ верпространство$(C)\rightarrow$ вероятность$(b\setminus,C)=-$вероятность$(b\cap c,C)+$ вероятность$(b,C))$

2. Последовательное выражение числовых атомов в одном и том же контексте. Теорема - тождество $A_1=A_2$, у которого A_1 - невырожденный числовой атом, не встречающийся в части A_2, не являющейся числовым атомом, но содержащей невырожденные числовые атомы. В текущем списке вывода находится другое

тождество $B_1 = B_2$ такого же типа, у которого корневая связывающая приставка и список антецедентов такие же, как и исходного тождества. При этом некоторый невырожденный числовой атом t выражения A_2 является результатом переобозначения без отождествлений параметров атома B_1. Найденное тождество применяется для преобразования t. Проверяется, что новый заменяющий терм не содержит атома A_1. Результат упрощается. (Прием числзнач - 18).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&$
$C-\text{точка} \to \angle(BAC) = \arccos((l(AC)-\cos(\angle(ACB))l(BC))/(l(AC)^2+l(BC)^2-$
$2\cos(\angle(ACB))l(AC)l(BC))^{1/2}))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(A=B) \to \angle(BAC) =$
$\arccos((l(AC)^2+l(AB)^2-l(BC)^2)/(2l(AB)l(AC))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(A=B) \to l(BC) =$
$\sqrt{l(AC)^2+l(BC)^2-2\cos(\angle(BAC))l(AB)l(AC)})$

3. Попытка подставить выражение для варьируемого числового атома под описателем "отображение". Теорема - тождество $A_1 = A_2$, у которого A_1 - невырожденный числовой атом, не встречающийся в части A_2, не являющейся числовым атомом, но содержащей невырожденные числовые атомы. Внутри A_2 выбирается подвыражение "$\lambda_{x_1\ldots x_k}(T,P)$". Выбирается невырожденный числовой атом t выражения T, параметры которого пересекаются со списком $x_1,\ldots,x_k$. В том разделе, к которому относится заголовок f выражения t (если t имеет вид "крд(D,K,i)", то в разделе, к которому относится заголовок D), находится тождество $B_1 = B_2$, у которого B_1 - невырожденный числовой атом с заголовком f. Это тождество применяется для преобразования t. Проверяется, что выражение, на которое при этом заменяется t, не содержит невырожденных числовых атомов с переменной из списка $x_1,\ldots,x_k$. Результат упрощается. (Прием числзнач - 32).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acdeg}(e=[c,d]\ \&\ e\subseteq g\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ \text{мточка}(a)\ \&\ \text{равндвиж}(a,g)\ \&$
$\text{Числотр}(e)\ \&\ \text{Числотр}(g) \to \text{длина}(\text{Путь}(a,[c,d])) = (d-c)\text{скорость}(a,g))$

из теоремы

$\forall_{acde}(e=[c,d]\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ \text{мточка}(a)\ \&\ \text{Числотр}(e) \to$
$\text{длина}(\text{Путь}(a,[c,d])) = \int_c^d \text{скорость}(a,t)dt)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{atT}(\text{мточка}(a)\ \&\ \text{Числотр}(T)\ \&\ \text{равндвиж}(a,T)\ \&\ t\in T \to \text{скорость}(a,T) =$
$\text{скорость}(a,t))$

4. Попытка подставить выражение для варьируемого атомарного выражения под описателем "отображение". Аналогично предыдущему, но после выбора числового атома t внутри него выбирается нечисловое атомарное выражение r. В том разделе, к которому относится заголовок f выражения r, находится тождество $B_1 = B_2$, у которого B_1 - атомарное выражение с заголовком f. Это тождество применяется для преобразования r. Проверяется, что выражение, на которое при этом заменяется r, не содержит невырожденных числовых атомов с переменной из списка $x_1, \ldots, x_k$. Результат упрощается. (Прием числзнач - 36).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acdehK}(e = [c,d]\ \&\ e \subseteq h\ \&\ c-$число $\&\ d-$число $\&$ прямкоорд$(K)\ \&$ неподв$(K,h)\ \&$ мточка$(a)\ \&$ Равндвиж$(a,h)\ \&$ Трехмерн$(K)\ \&$ Числотр$(e)\ \&$ Числотр$(h)\ \&$ мтело$(K) \to$ крд(Место$(a,d),K,1) = (d-c)$крд(Скорость$(a,K,h),K,1) +$ крд(Место$(a,c),K,1))$

   из теоремы

   $\forall_{acdeK}(e = [c,d]\ \&\ c -$ число $\&\ d -$ число $\&$ прямкоорд$(K)\ \&$ мточка$(a)\ \&$ Трехмерн$(K)\ \&$ Числотр$(e)\ \&$ мтело$(K) \to$ крд(Место$(a,d),K,1) =$ крд(Место$(a,c),K,1) + \int_c^d$ крд(Скорость$(a,K,t),K,1)dt)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{aKTt}($мточка$(a)\ \&$ Числотр$(T)\ \&$ неподв$(K,T)\ \&$ Равндвиж$(a,T)\ \&\ t \in T \to$ Скорость$(a,K,T) =$ Скорость$(a,K,t))$

5. Попытка частичного преобразования заменяющего произведения. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложный числовой атом через более простые. Выражение A_2 - произведение. Некоторый невырожденный числовой атом t, входящий в A_2, содержит все переменные теоремы. По заголовку f атома t определяется тождество $B_1 = B_2$, у которого некоторый его невырожденный числовой атом с заголовком f содержит все переменные теоремы. Список $t_1, \ldots, t_n$ невырожденных числовых атомов выражения A_2 имеет ту же длину, что список $r_1, \ldots, r_n$ невырожденных числовых атомов равенства $B_1 = B_2$. Находится подстановка C, переводящая атомы $r_1, \ldots, r_n$ в $t_1, \ldots, t_n$. Она применяется для преобразования тождества $B_1 = B_2$. После этого обнаруживается, что список сомножителей выражения B_2 имеет непустое пересечение со списком сомножителей выражения A_2, и это пересечение содержит невырожденный числовой атом. Обе части равенства $A_1 = A_2$ домножаются на сомножители B_2, не вошедшие в указанное пересечение, и далее правая часть преобразуется при помощи равенства $B_1 = B_2$, примененного справа налево. Результат упрощается. (Прием числатом - 58).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ l(AB) = l(BC)\ \&\ A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&$ $C -$ точка $\to 4\cos(\angle(BAC))S($фигура$(ABC)) = l(AC)^2 \sin(\angle(BAC)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&\ C -$ точка $\&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B) \to$ $2S($фигура$(ABC)) = l(AB)l(AC)\sin(\angle(BAC)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ l(AB) = l(BC) \to 2l(AB)\cos(\angle(BAC)) = l(AC))$

Применение варьирующего тождества

1. Попытка превратить тождество свертки в тождество общей стандартизации за счет перестановочного тождества общей стандартизации. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ сокращенной перезаписи, не являющееся тождеством общей стандартизации. Внутри A_2 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество общей стандартизации $B_1 = B_2$ перестановочного типа с заголовком f бесповторного выражения B_1, имеющее не более 2 переменных. Оценка сложности выражения B_1 меньше оценки сложности равенства $A_1 = A_2$. Дополнительное тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что получилось тождество общей стандартизации либо тождество, уменьшающее число выражений максимальной сложности и одновременно приводящее к более простым таким выражениям. (Прием свертка - 75).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acd}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \to (a - d)^c(-1)^c = (d - a)^c)$

   из теоремы

   $\forall_{bc}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \to b^c(-1)^c = (-b)^c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to -(a - b) = b - a)$

2. Попытка варьирования сложных подвыражений заменяющей части для их склейки. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций большей либо равной сложности. Выражение A_2 имеет не менее двух подвыражений максимальной сложности. Выбирается одно из таких выражений - некоторое t, и по его заголовку f находится тождество $B_1 = B_2$, у которого в каждой из частей единственное максимально сложное подвыражение, причем в B_1 - подвыражение с заголовком f. Эти подвыражения различны и имеют одинаковую сложность. Находится подвыражение r выражения A_2, имеющее тот же заголовок g, что выражение B_1. Дополнительное тождество используется для преобразования r. Результат упрощается. Проверяется, что заменяющая часть новой теоремы имеет единственный подтерм максимальной сложности. (Прием сокращ - 21).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(b - \text{число} \to \cos(2b) = -2(\sin b)^2 + 1)$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to \cos(2a) = (\cos a)^2 - (\sin a)^2)$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to (\cos a)^2 = 1 - (\sin a)^2)$

3.2.3 Преобразование заменяемой части эквивалентности

Применение тождества, уменьшающего число переменных

1. Попытка сильно упростить одну из частей нейтральной эквивалентности для извлечения импликации проверочного оператора. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, позволяющая группировать в одной части бинарного отношения две переменные, ранее расположенные в разных частях. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится некоторое несложное упрощающее тождество $B_1 = B_2$ для выражения B_1 с заголовком f. Используются справочники поиска теорем "констнорм", "тожд", "поглощается", "поглощает", "констцелое". Оно применяется для преобразования t. Возникает некоторая эквивалентность $C_1 \leftrightarrow C_2$. Если исходная эквивалентность выполняла общую стандартизацию, проверяется, что число переменных новой эквивалентности не больше, чем у исходной. Далее рассматриваются две версии новой теоремы. В первой версии к антецедентам эквивалентности $C_1 \leftrightarrow C_2$ добавляется C_1, а консеквентом становится C_2; во второй - к антецедентам добавляется отрицание C_2, а консеквентом становится отрицание C_1. Корневые операнды консеквента упрощаются нормализаторами общей стандартизации; список антецедентов тоже упрощается. Проверяется неизбыточность новой теоремы для создания приема проверочного оператора. (Прием группировка - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ b \subseteq e \to \text{непересек}(b, c \setminus e))$

   из теоремы

   $\forall_{acd}(a - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \to \text{непересек}(a, c \setminus d) \leftrightarrow \text{непересек}(c, a \setminus d))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ b \subseteq c \to b \setminus c = \emptyset)$

2. Попытка сильно упростить одну из частей нейтральной эквивалентности для извлечения импликации проверочного оператора. Аналогично предыдущему, но исходная теорема - эквивалентность, обе части которой суть элементарные утверждения, имеющие одно и то же множество переменных, входящих в эти утверждения в равных количествах. (Прием группировки - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(b - \text{число} \ \& \ 0 < b \to -b < 0)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to -b < a \leftrightarrow -a < b)$

и дополнительной теоремы

$-0 = 0$

3. Попытка сильно упростить одну из частей нейтральной эквивалентности для получения эквивалентности общей стандартизации. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, обе части которой суть элементарные утверждения, имеющие одно и то же множество переменных, входящих в эти утверждения в равных количествах. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится некоторое несложное упрощающее тождество $B_1 = B_2$ для выражения B_1 с заголовком f. Используются справочники поиска теорем "констнорм", "тожд", "поглощается", "поглощает", "констцелое". Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что получена эквивалентность общей стандартизации. (Прием группировки - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow -a = 0 \leftrightarrow a = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow b = -a \leftrightarrow -b = a)$

   и дополнительной теоремы

   $-0 = 0$

4. Попытка сильного упрощения подвыражения конъюнктивной заменяемой части. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$, у которой A_1 - конъюнкция. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество общей стандартизации $f(B_1, B_2) = B_3$, у которого B_1, B_2 - выражения с единственной бесповторной переменной, а B_3 - константный терм. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием общнорм - 46).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \rightarrow Im(z) = 0 \leftrightarrow Re(z) = z)$

   из теоремы

   $\forall_{az}(z - \text{комплексное} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow a - Re(z) = 0 \ \& \ Im(z) = 0 \leftrightarrow a = z)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a - a = 0)$

5. Попытка сильного упрощения подвыражения неконъюнктивной заменяемой части. Теорема - Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$, у которой A_1 не является конъюнкцией. Выражение A_1 бесповторно, среди антецедентов нет равенства. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное выражение t с заголовком f. По символу f находится тождество общей стандартизации $B_1 = B_2$, где B_1 - небесповторное выражение с заголовком f, B_2 - переменная.

Это тождество имеет не более 3 переменных и не имеет существенных антецедентов. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется отсутствие антецедентов, указывающих тип значения неоднобуквенных выражений. (Прием общнорм - 82).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_{ce}(c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(c \cap e) \rightarrow \text{конечное}(e) \leftrightarrow \text{конечное}(e \setminus c))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{конечное}(a \cup b) \leftrightarrow \text{конечное}(a))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ce}(c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow c \cap e \cup e \setminus c = e)$$

6. Попытка опрокинуть эквивалентность перегруппировки путем сильного упрощения заменяемого терма. Теорема представляет собой эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, позволяющую группировать в одной части бинарного отношения две переменные, ранее расположенные в разных частях. Среди антецедентов нет равенства переменной не содержащему ее выражению. Внутри A_1 выбирается подвыражение t с заголовком f, имеющее не менее двух корневых операндов. По символу f находится некоторое несложное упрощающее тождество $B_1 = B_2$ для выражения B_1 с заголовком f. Используются справочники поиска теорем "констнорм", "тожд", "поглощается", "констнабор", "упрощстанд", "поглощает". Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что все переменные новой теоремы содержатся среди параметров консеквента, число ее переменных не больше, чем у исходной теоремы, причем нет антецедента, имеющего более 2 параметров. (Прием группировка - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $$\forall_{cde}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ e \subseteq d \rightarrow \text{непересек}(c, e) \leftrightarrow \text{непересек}(e, c \cap d))$$

   из теоремы

   $$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(c, a \cap b) \leftrightarrow \text{непересек}(a, b \cap c))$$

   и дополнительной теоремы

   $$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ c \subseteq b \rightarrow b \cap c = c)$$

7. Попытка опрокинуть эквивалентность общей стандартизации путем сильного упрощения заменяемого терма. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$ общей стандартизации. Среди антецедентов нет равенства переменной не содержащему ее выражению. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится некоторое несложное упрощающее тождество $B_1 = B_2$ для выражения B_1 с заголовком f. Используются справочники поиска теорем "констнорм", "тожд", "упрощимп", "исклтерм", "поглощает". Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается с привлечением уже имеющихся в списке вывода теорем. Проверяется, что все переменные новой

теоремы содержится среди параметров консеквента, нет антецедента, имеющего более 2 параметров, и антецеденты не содержат связанных переменных. (Прием общнорм - 13).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ade}(a - \text{число } \&\ d - \text{число } \&\ e - \text{число} \to d = e - a \leftrightarrow e = a + d)$

из теоремы

$\forall_{bcd}(b - \text{число } \&\ c - \text{число } \&\ d - \text{число} \to c = d \leftrightarrow b + c = b + d)$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to a - a = 0)$

8. Попытка преобразования небиективного параметрического описания в биективное. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(y = g(x_i, t)\ \&\ P)$, дающая явное параметрическое описание для элементарного утверждения A. Выражение t не содержит переменных $X_1, \ldots, x_k$. По символу g находится тождество вида $f(x, g(y, x)) = y$, не имеющее переменных, отличных от x, y. Определяется подстановка C, переводящая $g(y, x)$ в $g(x_i, t)$. Составляется список S результатов применения C к антецедентам дополнительной теоремы, к которому добавляются утверждения $y = g(x_i, t)$ и P, причем исключаются все антецеденты исходной теоремы. Антецеденты дополнительной теоремы дают условия, при которых по y можно однозначно восстановить x_i. Далее создается утверждение Q вида $\exists_{x_1 \ldots x_k}(S)$. Хотя оно и является биективным параметрическим описание, проверяется, что это утверждение является следствием антецедентов исходной теоремы и утверждения A, т.е. охватывает все случаи истинности A. Затем консеквент исходной теоремы заменяется на эквивалентность $A \leftrightarrow Q$. (Прием параметризация - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{set } \&\ a - \text{set} \to b \subseteq a \leftrightarrow \exists_c(c - \text{set } \&\ a = b \cup c\ \&\ \text{непересек}(b, c)))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{set } \&\ a - \text{set} \to b \subseteq a \leftrightarrow \exists_c(c - \text{set } \&\ a = b \cup c))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set } \&\ b - \text{set } \&\ \text{непересек}(a, b) \to (a \cup b) \setminus a = b)$

Применение тождества, исключающего сложное понятие

1. Упрощение заменяемой части для получения усиливающей эквивалентности. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, разрешающая утверждение A_1 относительно переменной x. Внутри A_1 выбирается содержащее x неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, преобразующее выражение B_1 с заголовком f в переменную B_2. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что новая

теорема обеспечивает усиление заменяемого утверждения (например, усиливает неравенство), после чего она снабжается соответствующей характеристикой. (Прием глуб - 54).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{число } \& \ c - \text{целое} \rightarrow b \leq c \leftrightarrow -[-b] \leq c)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \rightarrow b \leq [a] \leftrightarrow -[-b] \leq a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{a}(a - \text{целое} \rightarrow [a] = a)$

2. Упрощение заменяемой части для получения перегруппировочной эквивалентности общей стандартизации. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$ декомпозиции элементарного утверждения A_1 в конъюнкцию бесповторных утверждений. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное выражение t с заголовком f. По символу f находится тождество общей стандартизации вида $f(x, a) = b$, где x - переменная, a - константа, b - либо равно a, либо равно x, либо имеет вид $g(x)$. Это тождество применяется для преобразования t. Упрощаются список антецедентво новой теоремы, а также каждая из частей эквивалентности в ее консеквенте. Проверяется, что получена перегруппировочная эквивалентность либо эквивалентность общей стандартизации с элементарными частями. (Прием и - 36).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ae}(e - \text{set} \rightarrow \neg(a \in e) \leftrightarrow \text{непересек}(e, \{a\}))$

   из теоремы

   $\forall_{bce}(e - \text{set } \& \ c - \text{слово} \rightarrow \neg(b \in e) \ \& \ \text{непересек}(e, \{;c\}) \leftrightarrow \text{непересек}(e, \{b;c\}))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{a}(\text{префикс}(a, \text{пустослово}) = (a))$

3. Упрощение заменяемой части для получения перегруппировочной эквивалентности общей стандартизации. Аналогично предыдущему, но исходная теорема - декомпозиция элементарного утверждения A_1 в дизъюнкцию бесквантворных утверждений. (Прием или - 54).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ad}(a \in \{d\} \leftrightarrow a = d)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(c - \text{слово} \rightarrow a \in \{b;c\} \leftrightarrow a = b \ \vee \ a \in \{;c\})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{a}(\text{префикс}(a, \text{пустослово}) = (a))$

4. Попытка обращения в константу либо переменную двуместной операции из заменяемой части эквивалентности общей стандартизации. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$. Отсутствует антецедент, представляющий собой равенство переменной не содержащему ее выражению. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится дополнительное тождество общей стандартизации, имеющее вид $f(x,a) = b$ (см. выше) либо вид $f(x,g(x,y)) = c$, где c - логический символ либо переменная. После необходимой унификации, не затрагивающей кратные переменные выражения A_1, это тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием общнорм - 41).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bx}(0 < x \ \& \ 0 < b-1 \ \& \ b - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \rightarrow \log_b x < 0 \leftrightarrow x < 1)$

   из теоремы

   $\forall_{axy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ 0 < x \ \& \ 0 < y \ \& \ 0 < a - 1 \ \& \ a - \text{число} \rightarrow \log_a x < \log_a y \leftrightarrow x < y)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \rightarrow \log_a 1 = 0)$

Применение тождества, приводящего к более коротким сложным подтермам

1. Упрощение заменяемой части для варьирования декомпозирующей эквивалентности. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$ декомпозиции элементарного утверждения A_1 в конъюнкцию бесквантворных утверждений. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное выражение t с заголовком f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, выражающее корневую сложную операцию f выражения B_1 через эту же операцию от более простого терма. Это тождество применяется для преобразования t. Упрощаются список антецедентов новой теоремы, а также каждая из частей эквивалентности в ее консеквенте. Проверяется, что получена эквивалентность декомпозиции элементарного утверждения в конъюнкцию бесквантворных утверждений. (Прием и - 75).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcd}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ d \leq 0 \rightarrow 0 \leq b + cd \ \& \ 0 \leq b - cd \leftrightarrow 0 \leq b + d|c|)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a \leq b \ \& \ -a \leq b \leftrightarrow |a| \leq b)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ b \leq 0 \rightarrow -b|a| = |ab|)$

2. Попытка ввода известного коэффициента при упрощаемом выражении с неизвестными. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, позволяющая получить более простые выражения с неизвестными $x_1, \ldots, x_k$. Параметры $a_1, \ldots, a_m$ считаются известными. Выбирается максимально сложное подвыражение t утверждения A_1, не содержащее переменных $x_1, \ldots, x_k$ и содержащее некоторый параметр X, отличный от переменных $a_1, \ldots, a_m$. Этот параметр имеет единственное вхождение в A_1. По заголовку g выражения t находится тождество вида $g(x, h(y, z)) = f(g(x, y), g(x, z))$, где f, h ассоциативны и коммутативны. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что параметр X унифицируется с $h(y, z)$, после чего переменная, унифицированная с y, объявляется неизвестной, а переменная, унифицированная с z - известным параметром. Таким образом, $g(x, z)$ становится коэффициентом при $g(x, y)$. Новая теорема сопровождается характеристикой, указывающей, что она создана для приема, упрощающего выражения с неизвестными. (Прием неизвоценка - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abdef}(\neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \;\&\; \neg(\text{числитель}(f) - \text{even}) \;\&\; a - \text{число} \;\&$
   $b - \text{число} \;\&\; d - \text{число} \;\&\; e - \text{число} \;\&\; f - \text{rational} \rightarrow b^f e^f = ad^f \leftrightarrow da^{1/f} = be)$

   из теоремы

   $\forall_{acdf}(\neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \;\&\; \neg(\text{числитель}(f) - \text{even}) \;\&\; a - \text{число} \;\&$
   $c - \text{число} \;\&\; d - \text{число} \;\&\; f - \text{rational} \rightarrow ad^f = c^f \leftrightarrow c = da^{1/f})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall abc(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; c - \text{rational} \;\&\; \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow$
   $a^c b^c = (ab)^c)$

3. Попытка ввода известного коэффициента при упрощаемом выражении с неизвестными. Аналогично предыдущему, но $A_1 \leftrightarrow A_2$ - эквивалентность общей стандартизации и списки $x_1, \ldots, x_k; a_1, \ldots, a_m$ не рассматриваются. (Прием общнорм - 90).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdef}(\neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \;\&\; \neg(\text{числитель}(f) - \text{even}) \;\&\; c - \text{число} \;\&$
   $d - \text{число} \;\&\; e - \text{число} \;\&\; f - \text{rational} \rightarrow d^f e^f = c^f \leftrightarrow c = de)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; b - \text{rational} \;\&\; \neg(b = 0) \;\&\; \neg(\text{знаменатель}(b) -$
   $\text{even}) \;\&\; \neg(\text{числитель}(b) - \text{even}) \rightarrow a^b = c^b \leftrightarrow a = c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall abc(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; c - \text{rational} \;\&\; \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow$
   $a^c b^c = (ab)^c)$

4. Попытка применить дистрибутивную развертку к заменяемой части эквивалентности общей стандлартизации. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$, имеющая не более 2 переменных. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком g. По символу g находится тождество вида $g(x, h(y, z)) = f(g(x, y), g(x, z))$, где f, h ассоциативны и коммутативны. Оно не является тождеством общей стандартизации. Данное тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что получается эквивалентность общей стандартизации. (Прием общнорм - 30).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ace}(\neg(c = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow a + e = 0 \leftrightarrow\leftrightarrow a/c + e/c = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{bd}(\neg(d = 0)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ d - \text{число} \rightarrow b = 0 \leftrightarrow b/d = 0)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bde}(\neg(d = 0)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow b/d + e/d = (b + e)/d)$

   Сразу заметим, что самостоятельной ценности выводимая теорема не имеет, однако используется при выводе теоремы:

   $\forall_{ace}(\neg(c = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ \neg(a + e = 0) \rightarrow$
   $\neg(a/c + e/c = 0))$

   Последняя теорема порождает прием проверочного оператора "усмне0", причем сумма двух дробей с одинаковыми знаменателями может возникать в качестве его входного данного при сравнении двух дробей.

5. Использование дополнительного тождества для упрощения заменяемой части. Теорема - эквиваленность $A_1 \leftrightarrow A_2$, уменьшающая оценку сложности. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное выражение t с заголовком f, не имеющее связанных внутри A_1 переменных. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, выражающее корневую сложную операцию f выражения B_1 через эту же операцию от более простого терма. Это тождество применяется для преобразования t. Упрощаются антецеденты новой теоремы, а ткже каждая из частей эквивалентности в ее консеквенте. (Прием уменьшение - 17).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcd}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ 0 \le d \rightarrow 0 \le d|c| - b \leftrightarrow b + cd \le 0\ \vee$
   $0 \le cd - b)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow b \le |a| \leftrightarrow b \le a\ \vee\ b \le -a)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ 0 \le b \rightarrow b|a| = |ab|)$

6. Попытка подстановки вместо неизвестной выражения, допускающего декомпозицию по этой неизвестной. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, разрешающая утверждение A_1 относительно некоторой переменной X, имеющей в A_1 более одного вхождения. Рассматривается подвыражение утверждения A_1, имеющее вид $g(t, X)$, где символ g некоммутативный, а t не содержит X. По символу g находится тождество вида $g(x, f(y, z)) = f(g(x, y), g(x, z))$, где символ g некоммутативный. Это тождество применяется для преобразования $g(t, X)$, причем X унифицируется с $f(y, z)$. Результат упрощается таким образом, чтобы получилась эквивалентность для разрешения уравнения с двумя неизвестными y, z относительно одной из этих неизвестных. (Прием глуб - 23).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdf}(\neg(b = 0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ \neg(f = 0) \rightarrow acf + bc^2 - df^2 = 0 \leftrightarrow (c = -f(a + \sqrt{4bd + a^2})/(2b) \ \vee\ c = f(-a + \sqrt{4bd + a^2})/(2b))\ \&\ 0 \leq 4bd + a^2)$

   из теоремы

   $\forall_{abde}(\neg(b = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow ae + be^2 = d \leftrightarrow 0 \leq 4bd + a^2\ \&\ (e = -(a + \sqrt{4bd + a^2})/(2b)\ \vee\ e = (-a + \sqrt{4bd + a^2})/(2b)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ c - \text{rational}\ \&\ neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&\ \neg(b = 0) \rightarrow (a/b)^c = a^c/b^c)$

   Заметим, что данный переход влечет цепочку применений обобщающих приемов, приводящую к "обычной" формуле решения однородного уравнения второй степени.

Применение тождества, упрощающего выражение относительно неизвестной

1. Попытка получения из эквивалентности типа "навешивания операции на обе части двуместного отношения" эквивалентности для исключения сложной операции с неизвестными. Теорема - эквивалентность общей стандартизации вида $A\ \&\ P(t_1, t_2) \leftrightarrow x = y$, где x, y - различные переменные. Некоторое t_i неоднобуквенное и имеет заголовок f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, упрощающее относительно неизвестных некоторый корневой операнд выражения B_1 с заголовком f. Оно применяется для преобразования t_i. Результат упрощается и анализируется для выявления того, относительно каких неизвестных новая теорема упрощает подвыражения своей правой части. (Прием общнорм - 27).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aefgh}(\neg(g = 0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ h-\text{число}\ \&\ \text{числитель}(g)-\text{even}\ \&\ g - \text{rational}\ \&\ 0 \leq e \rightarrow e^h f^g = a^g\ \&\ 0 \leq af \leftrightarrow a = fe^{h/g})$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(b = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \text{числитель}(b) - \text{even}\ \&\ b - \text{rational} \rightarrow a^b = c^b\ \&\ 0 \leq ac \leftrightarrow a = c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcd}(\neg(c=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ 0\leq a\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c)-\text{even})\rightarrow(ba^{d/c})^c=b^ca^d)$

Применение тождества свертки

1. Варьирование декомпозирующей эквивалентности с помощью тождества свертки. Теорема - эквивалентность $A_0\leftrightarrow A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n$, декомпозирующая элементарное утверждение A_0 в конъюнкцию бесквантворных утверждений. Внутри A_0 выбирается подвыражение вида $f(t_1,t_2)$. По символу f находится тождество $B_1=B_2$ без существенных антецедентов, выполняющее свертку в бесповторное выражение B_2 небесповторного выражения B_1 с заголовком f. Оно применяется для преобразования $f(t_1,t_2)$. Результат упрощается. Проверяется, что снова возникает декомпозирующая эквивалентность. (Прием и - 39).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{adef}(a-\text{set}\ \&\ d-\text{set}\ \&\ e-\text{set}\ \&\ f-\text{set}\rightarrow d\subseteq f\cup(a\cap e)\leftrightarrow d\subseteq a\cup f\ \&\ d\subseteq e\cup f)$

   из теоремы

   $\forall_{bcd}(b-\text{set}\ \&\ c-\text{set}\ \&\ d-\text{set}\rightarrow d\subseteq b\cap c\leftrightarrow d\subseteq b\ \&\ d\subseteq c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{cef}(c-\text{set}\ \&\ e-\text{set}\ \&\ f-\text{set}\rightarrow(c\cup f)\cap(e\cup f)=f\cup(c\cap e))$

2. Варьирование декомпозирующей эквивалентности с помощью тождества свертки. Аналогично предыдущему, но исходная теорема имеет вид $A_0\leftrightarrow A_1\ \vee\ \ldots\ \vee\ A_n$. (Прием или - 67).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ade}(d-\text{set}\ \&\ e-\text{set}\rightarrow a\in d\triangle e\leftrightarrow\neg(a\in d)\ \&\ a\in e\ \vee\ \neg(a\in e)\ \&\ a\in d)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(b-\text{set}\ \&\ c-\text{set}\rightarrow a\in b\cup c\leftrightarrow a\in b\ \vee\ a\in c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a-\text{set}\ \&\ b-\text{set}\rightarrow a\triangle b=a\setminus b\cup b\setminus a).$

3. Попытка проварьировать эквивалентность, разрешающую утверждение с единственным вхождением неизвестной, при помощи тождества, создающего кратные вхождения неизвестной. Теорема - эквивалентность $A_1\leftrightarrow A_2$, разрешающая утверждение A_1 относительно неизвестной x, имеющей в A_1 единственное вхождение. A_1 имеет единственное подвыражение t максимальной сложности, причем в это выражение входит переменная x. По заголовку f выражения t находится тождество $B_1=B_2$, у коорого заменяющая часть B_2 с заголовком f бесповторна, а заменяемая - небесповторна. Это тождество не является тождеством общей стандартизации либо дистрибутивной развертки. Оно применяется

(в направлении справа налево) для преобразования t. Результат упрощается, и получается теорема T - промежуточный результат работы приема. Рассматривается выражение r, в которое при этом преобразовании переходит переменная x. Выбирается переменная y выражения r, имеющая в заменяемую часть теоремы T более одного вхождения. Заменяющая часть теоремы T явно разрешается относительно y, для заменяемой - делаются хотя бы некоторые шаги для разрешения относительно y, так как теорема T как раз и создана для ее разрешения. Результат упрощается и сопровождается характеристикой, что он создан для разрешения относительно y. (Прием глуб - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cde}(c - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ e - \text{число} \rightarrow 2de + d^2 = c - e^2 \leftrightarrow (d = -e + \sqrt{c} \ \vee \ d = -(e + \sqrt{c})) \ \& \ 0 \leq c)$

из теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ b - \text{rational } \& \ \text{числитель}(b) - \text{even } \& \ \neg(b = 0) \rightarrow a^b = c \leftrightarrow 0 \leq c \ \& \ (a = c^{1/b} \ \vee \ a = -c^{1/b}))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$

Заметим, что выводимая теорема представляет собой первой звено в цепочке обобщений, приводящих к формуле корней квадратного уравнения.

Применение тождества общей стандартизации

1. Применение упрощающего тождества к заменяемой части. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, используемая для сокращенной переформулировки утверждений. Внутри заменяемой части выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество общей стандартизации $B_1 = B_2$ у которого оценка сложности правой части меньше оценки сложности левой. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием сборка - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(b - \text{число} \rightarrow 0 \leq -b + |b|)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 \leq -b + |a| \leftrightarrow a + b \leq 0 \ \vee \ 0 \leq a - b)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a - a = 0)$

2. Попытка сильного упрощения заменяемой части для теоремы, у которой антецедент сложнее консеквента. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$. Оценка сложности утверждения A_1 меньше оценки сложности N некоторого антецедента A, причем $N \geq 6$. Самый сложный подтерм данного

антецедента - он сам. В разделе базы теорем, к которому относится заголовок утверждения A, находится тождество общей стандартизации $B_1 = B_2$, заменяемая часть которого имеет не более 3 параметров, а список параметров заменяющей части не охватывает всех параметров заменяемой. Это тождество не имеет антецедентов с оценкой сложности большей N. По заголовку f выражения A_1 находится подвыражение t выражения A_1 с тем же заголовком. Дополнительное тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием общнорм - 96).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{dexA}(A - \text{set} \ \& \ d \in A \ \& \ x \in A \ \& \ \text{ассоциативно}(e) \ \& \ \text{обратимо}(e) \ \& \ \text{бинарнаоперация}(e, A) \rightarrow e(d, x) = \text{единица}(e) \leftrightarrow x = \text{обрэлемент}(d, e))$

из теоремы

$\forall_{abcfxA}(A - \text{set} \ \& \ b \in A \ \& \ c \in A \ \& \ x \in A \ \& \ \text{ассоциативно}(f) \ \& \ \text{левединица}(a, f) \ \& \ \text{левобратимо}(f) \ \& \ \text{бинарнаоперация}(f, A) \rightarrow f(b, c) = f(b, x) \leftrightarrow c = x)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{afA}(\text{ассоциативно}(f) \ \& \ A - \text{set} \ \& \ \text{бинарнаоперация}(e, A) \ \& \ \text{обратимо}(f) \ \& \ a \in A \rightarrow f(a, \text{обрэлемент}(a, f)) = \text{единица}(f))$

3. Попытка упростить заменяемую часть с помощью нормализующего тождества для определяемого понятия текущего цикла вывода. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$. Стартовая теорема цикла вывода - определение выражения с заголовком f. Символ f встречается в A_1 более одного раза. Выбирается неоднобуквенное подвыражение t утверждения A_1 с заголовком f. В текущем списке вывода выбирается тождество общей стандартизации $B_1 = B_2$ с заголовком f заменяемой части, имеющее единственную переменную. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается с привлечением прочих теорем текущего списка вывода. (Прием общнорм - 111).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{boolean} \ \& \ d - \text{boolean} \rightarrow c + d = 1 \leftrightarrow c = \neg(d))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \ \& \ c - \text{boolean} \rightarrow a + b = b + c \leftrightarrow a = c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_b(b - \text{boolean} \rightarrow b + \neg(b) = 1)$

   Имеется в виду сложение по модулю 2.

4. Попытка упростить бинарную ассоциативную операцию с помощью тождества, полученного в том же цикле вывода. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$, у которой параметры A_2 - собственное подмножество параметров A_1, причем внутри A_1 выделяется вхождение подвыражения "$f(t_1 \ldots t_n)$", где переменная f обозначает бинарную ассоциативную операцию. В текущем

списке вывода находится тождество общей стандартизации вида $g(r_1, r_2) = B$, где переменная g - символ бинарной ассоциативной операции. Оно применяется для преобразования $f(t_1 \ldots t_n)$, и результат упрощается. (Прием общнорм - 100).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acdfz}(a = \text{операция}(d)\ \&\ c \in \text{носитель}(d)\ \&\ f \in \text{носитель}(d)\ \&\ z \in \text{носитель}(d)\ \&\ \text{группа}(d) \to f = a(c, z) \leftrightarrow z = a(\text{обрэлемент}(c, a), f))$

из теоремы

$\forall_{abxyz}(a = \text{операция}(b)\ \&\ x \in \text{носитель}(b)\ \&\ y \in \text{носитель}(b)\ \&\ z \in \text{носитель}(b)\ \&\ \text{группа}(b) \to a(x, y) = a(x, z) \leftrightarrow y = z)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(c = \text{операция}(b)\ \&\ a \in \text{носитель}(b)\ \&\ \text{группа}(b) \to c(a, \text{обрэлемент}(a, c)) = \text{единица}(c))$

Применение варьирующего тождества

1. Варьирование заменяемой части декомпозирующей эквивалентности с помощью перегруппировочного тождества. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, выполняющая декомпозицию элементарного утверждения A_1 в конъюнкцию бесквантворных утверждений. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество общей стандартизации перегруппировочного типа $B_1 = B_2$ с заголовком f выражения B_1. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что число переменных по сравнению с исходной теоремой не увеличивается и что новая теорема не декомпозирует частный случай утверждения A_1. (Прием и - 35).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcde}(d - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&\ b - \text{слово} \to d \cap \{c; b\} \subseteq e \leftrightarrow d \cap \{; b\} \subseteq e\ \&\ d \cap \{c\} \subseteq e)$

   из теоремы

   $\forall_{adef}(a - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&\ f - \text{set} \to d \cap (a \cup f) \subseteq e \leftrightarrow a \cap d \subseteq e\ \&\ d \cap f \subseteq e)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{слово} \to \{; c\} \cup \{d\} = \{d; c\})$

2. Варьирование заменяемой части дизъюнктивной декомпозирующей эквивалентности с помощью перегруппировочного тождества. Аналогично предыдущему, но A_2 - дизъюнкция бесквантворных утверждений. (Прием или - 68).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to a = 0\ \vee\ |b| = |c| \leftrightarrow |ab| = |ca|)$

   из теоремы

$\forall_{cde}(c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow d = 0\ \vee\ e = |c| \leftrightarrow e|d| = |cd|)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow |a||b| = |ab|)$.

3. Варьирование заменяемой части эквивалентности общей стандартизации с помощью перегруппировочного тождества. Аналогично предыдущему, но A_2 - элементарное утверждение. (Прием общнорм - 28).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(c \in a)\ \&\ a - \text{set}\ \&\ b - \text{слово} \rightarrow a \subseteq \{c; b\} \leftrightarrow a \subseteq \{; b\})$

   из теоремы

   $\forall_{ade}(a - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&\ \text{непересек}(a, d) \rightarrow a \subseteq d \cup e \leftrightarrow a \subseteq e)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{слово} \rightarrow \{; c\} \cup \{d\} = \{d; c\})$

4. Попытка проварьировать подвыражение заменяемой части с помощью тождества "внешзнак". Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. В текущем списке вывода находится тождество $B_1 = B_2$ без существенных антецедентов, сохраняющее сложность самого сложного подвыражения, но уменьшающее сложность его надвыражений. Заголовок левой части - f, причем в правой части символ f встречается однократно. Это тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием общнорм - 109).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ade}(a - \text{boolean}\ \&\ d - \text{boolean}\ \&\ e - \text{boolean} \rightarrow (e \Leftrightarrow \neg(d)) = (a \Leftrightarrow d) \leftrightarrow a = \neg(e))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{boolean}\ \&\ b - \text{boolean}\ \&\ c - \text{boolean} \rightarrow \neg(b \Leftrightarrow c) = (a \Leftrightarrow c) \leftrightarrow a = \neg(b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{boolean}\ \&\ c - \text{boolean} \rightarrow \neg(b \Leftrightarrow c) = c \Leftrightarrow \neg(b))$

3.2.4 Преобразование заменяющей части эквивалентности

Применение тождества, уменьшающего число переменных

1. Попытка получить эквивалентность типа сокращения путем сильного упрощения заменяющей части. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$, у которой список переменных правой части не является собственным подмножеством списка переменных левой. Внутри A_2 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество вида $f(x, g(x, y)) = a$, где a - логический символ либо переменная. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что у новой

эквивалентности список переменных заменяющей части - собственное подмножество списка переменных заменяемой. (Прием общнорм - 36).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acd}(0 < d \;\&\; a - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; d - \text{число} \to a/d < c/d \leftrightarrow a < c)$

из теоремы

$\forall_{bcd}(0 < d \;\&\; b - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; d - \text{число} \to b < c/d \leftrightarrow bd < c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; \neg(b = 0) \to a/b \cdot b = a)$

2. Попытка использовать тождество, определяющее значение отдельной координаты. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$, у которого в определяющей части встречается подтерм "крд(A, K, i)", причем A - переменная. Находится тождество вида "крд$(B_1, Q, j) = B_2$", у которого множество переменных заменяющей части - собственное подмножество множества переменных заменяемой. Оно применяется для преобразования "крд(A, K, i)". Результат упрощается. (Прием определение - 167).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_c(\text{Трехмерн}(c) \to \text{влево}(\text{вектор0}, c))$

   из теоремы

   $\forall_{aK}(\text{Вектор}(a) \;\&\; \text{Трехмерн}(K) \to \text{влево}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 2) = 0 \;\&\; \text{крд}(a, K, 3) = 0 \;\&\; \text{крд}(a, K, 1) \leq 0)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{Ki}(\text{Трехмерн}(K) \;\&\; i \in \{1, 2, 3\} \to \text{крд}(\text{вектор0}, K, i) = 0)$

Применение тождества, исключающего сложное понятие

1. Упрощение заменяющей части для получения эквивалентности общей стандартизации. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, разрешающая утверждение A_1 относительно неизвестной x и не являющаяся эквивалентностью общей стандартизации. Внутри A_2 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество общей стандартизации вида $f(x_1 \ldots x_n) = r$, где $x_1, \ldots, x_n$ - переменные, причем оценка сложности правой части меньше, чем левой. Оно применяется к t. Результат упрощается. Проверяется, что получена эквивалентность типа упрощения. (Прием глуб - 52).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{целое} \to [a] < b \leftrightarrow a < b)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \to [a] < b \leftrightarrow a < -[-b])$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{целое} \to [a] = a)$

2. Попытка упрощения заменяющей части для перехода от эквивалентности перегруппировочного типа к эквивалентности небесповторного утверждения бесповторному. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$, у которой каждая часть элементарна, бесповторна и содержит все переменные теоремы. Некоторая переменная левой части имеет в ней глубину 1, а в правой - глубину, большую 1. Внутри A_2 выбирается вхождение неоднобуквенного выражения t с заголовком f. По символу f находится тождество общей стандартизации $f(B_1, B_2) = B_3$, где B_1, B_2 - бесповторные выражения с единственной переменной x, а B_3 - либо x, либо группа вложенных одноместных операций от x. Это тождество применяется для преобразования t. Антецеденты упрощаются. Проверяется, что заменяемая часть новой теоремы небесповторна, а заменяющая - бесповторна. (Прием общнорм - 92).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cf}(c - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \to \text{непересек}(c, c \setminus f) \leftrightarrow c \subseteq f)$

   из теоремы

   $\forall_{bef}(b - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \to \text{непересек}(b, e \setminus f) \leftrightarrow b \cap e \subseteq f)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_c(c - \text{set} \to c \cap c = c)$

3. Попытка использовать тождество сильного упрощения для перехода от слабой общей стандартизации к сильной. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$, преобразующее бесповторное утверждение так, чтобы выявилась симметрия по переменным. Внутри A_2 выбирается неоднобуквенное выражение t с заголовком f. По символу f находится тождество общей стандартизации вида $f(x, a) = a$, где x - переменная, a - логический символ. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что число переменных новой теоремы меньше, чем у исходной. (Прием общнорм - 67).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bd}(\neg(d = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \to b = 0 \leftrightarrow b/d = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \to b = ac \leftrightarrow a = b/c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to a \cdot 0 = 0)$

Дополнительная теорема предоставляет уравнение, позволяющее исключить сложное понятие в консеквенте исходной теоремы

1. Попытка выразить числовой атом через параметры уравнения для координат множества объектов. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, выражающая некоторое элементарное утверждение A_1 через параметры координат объектов либо параметры уравнений для координат множеств объектов. Внутри A_2 встречается невырожденный числовой атом t. По его заголовку f находится тождество $B_1 = B_2$, представляющее собой уравнение, связывающее числовой атом r, имеющий заголовок f, с параметрами координат объектов либо уравнений для координат множеств объектов. Все параметры объектов, для которых в антецедентах дополнительного тождества имеются координаты либо уравнения, встречаются в равенстве $B_1 = B_2$. Переменные дополнительной теоремы переобозначаются так, чтобы они не встречались в исходной теореме. Затем находится подстановка C, переводящая r в t. Списки антецедентов исходной и дополнительной теорем (после применения к ним C) объединяются. После применения к равенству $B_1 = B_2$ подстановки C оно разрешается относительно t. Результат подставляется в исходную теорему. Новая теорема упрощается. (Прием числопред - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abchijlrABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), r) =$
   $\text{set}_{fg}(c + af + bg = 0\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{окружность}(AB), r) =$
   $\text{set}_{mn}(l + hm^2 + hn^2 + im + jn = 0\ \&\ m - \text{число}\ \&\ n - \text{число})\ \&\ a - \text{число}\ \&$
   $b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ i - \text{число}\ \&\ j - \text{число}\ \&\ l - \text{число}\ \&$
   $A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(r) \rightarrow$
   $\text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{окружность}(AB)) \leftrightarrow 0 < -(-4hl + i^2 + j^2)(a^2 + b^2) +$
   $(2ch - ai - bj)^2)$

   из теоремы

   $\forall_{abcdekABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \text{коорд}(A, k) = (d, e)\ \&$
   $\text{коорд}(\text{прямая}(CD), k) = \text{set}_{fg}(c + af + bg = 0\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&$
   $c - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(k) \rightarrow$
   $\text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{окружность}(AB)) \leftrightarrow (a^2 + b^2)l(AB)^2 < (c + ad + be)^2))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcdABK}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
   $B - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) =$
   $\text{set}_{xy}(d + ax^2 + ay^2 + bx + cy = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}) \rightarrow 4a^2l(AB)^2 = b^2 + c^2 - 4ad)$

2. Попытка выразить числовой атом через параметры уравнения для координат множества объектов. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, переформулирующая нечисловое отношение через отношение для числовых атомов. Внутри A_2 встречается невырожденный числовой атом t. По его заголовку f находится тождество $B_1 = B_2$, представляющее собой уравнение, связывающее числовой атом r, имеющий заголовок f, с параметрами координат объектов либо уравнений для координат множеств объектов. Переменные дополнительной теоремы переобозначаются так, чтобы они не встречались в исходной теореме. Затем

находится подстановка C, переводящая r в t. Списки антецедентов исходной и дополнительной теорем (после применения к ним C) объединяются. После применения к равенству $B_1 = B_2$ подстановки C оно разрешается относительно t. Результат подставляется в исходную теорему. Новая теорема упрощается. (Прием числвыраз - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdekABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \text{коорд}(A, k) = (d, e)\ \&$
$\text{коорд}(\text{прямая}(CD), k) = \text{set}_{fg}(c + af + bg = 0\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{число})\ \&$
$a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
$D - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(k) \to \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{окружность}(AB)) \leftrightarrow$
$(a^2 + b^2)l(AB)^2 < (c + ad + be)^2))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D)\ \&$
$\neg(A = B) \to \text{непересек}(\text{окружность}(AB), \text{прямая}(CD)) \leftrightarrow l(AB) <$
$\text{расстдопрямой}(A, \text{прямая}(CD)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCKabcde}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&$
$C - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) =$
$\text{set}_{xy}(ax + by + c = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(C, K) = (d, e) \to$
$\text{расстдопрямой}(C, \text{прямая}(AB))^2(a^2 + b^2) = (ad + be + c)^2)$

Применение тождества общей стандартизации

1. Попытка уменьшения числа вхождений параметров путем зануления операции. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, дающая явное параметрическое описание для значений неизвестной x. Внутри A_2 выделяется квантор существования $\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_3)$. Внутри A_3 выбирается вхождение неоднобуквенного подтерма $f(t_1, t_2)$, у которого t_1 содержит переменную списка $x_1, \ldots, x_k$, а t_2 не содержит. Существует ноль операции f - такое значение n, что тождественно $f(X, n) = n$. Выражение t_2 неоднобуквенное и имеет заголовок g. Находится бесквантворное тождество $B_1 = n$, у которого B_1 имеет заголовок g. После необходимой унификации оно применяется для преобразования t_2. Результат упрощается. Проверяется, что снова получается эквивалентность для параметрического описания значений неизвестной. Она сопровождается единственной характеристикой, указывающей на это. (Прием неизвпарам - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_x(x - \text{число} \to \sin x = 0 \leftrightarrow \exists_n(x = \pi n\ \&\ n - \text{целое}))$

   из теоремы

   $\forall_{ax}(a - \text{число}\ \&\ x - \text{число} \to \sin x = a \leftrightarrow |a| \le 1\ \&\ \exists_n(n - \text{целое}\ \&$
   $x = \pi n + (-1)^n \arcsin a))$

   и дополнительной теоремы

   $\arcsin 0 = 0$

2. Попытка упрощения самого сложного подвыражения заменяющей части. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, дающая явное параметрическое описание для значений неизвестной x. A_2 не содержит символа "или". Внутри A_2 выбирается самое сложное подвыражение t. Оно не является квантором существования. По его заголовку f находится бесквантворное тождество общей стандартизации $B_1 = B_2$ с заголовком f левой части. После необходимой унификации, оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием неизвпарам - 11).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(\neg(\cos a = 0)\ \&\ a - \text{число} \rightarrow \operatorname{tg} a = 0 \leftrightarrow \exists_n(a = \pi n\ \&\ n - \text{целое}))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ \neg(\cos a = 0)\ \&\ b - \text{число} \rightarrow \operatorname{tg} a = b \leftrightarrow \exists_n(n - \text{целое}\ \&\ a = \operatorname{arctg} b + \pi n))$

   и дополнительной теоремы

   $\operatorname{arctg} 0 = 0$

Применение варьирующего тождества

1. Усмотрение частного случая, в котором увеличивается число перегруппируемых корневых членов заменяющей части эквивалентности, исключающей сложное выражение с неизвестными. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, позволяющая получить более простые выражения с неизвестными $x_1, \ldots, x_k$. Заголовок P заменяемой части A_1 совпадает с заголовком самого сложного конъюнктивного члена A_3 заменяющей части. Этот член содержит все параметры утверждения A_1. Усматривается возможность перегруппировки из одной части бинарного отношения P в другую часть. Внутри того корневого операнда A_3, члены которого можно перегруппировать в другой операнд, выбирается содержащее неизвестную x_i подвыражение $f(t_1, t_2)$, где символ f некоммутативный. Находится тождество $f(B_1, B_2) = B_3$, преобразующее бесповторное выражение $f(B_1, B_2)$ в выражение B_3 с ассоциативно-коммутативным заголовком и не менее чем двумя неконстантными корневыми операндами. Его члены допускают перегруппировку из одной части отношения P в другую. Найденное тождество применяется для преобразования $f(t_1, t_2)$. Результат упрощается. Предпринимается преобразование условия, при котором исходная теорема исключала сложное выражение с неизвестными. Если получается дизъюнктвиное условие, то для каждого подслучая новая теорема упрощается еще раз. (Прием неизвоценка - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bdefh}(b - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ h - \text{натуральное}\ \&\ 0 \le e \rightarrow 2bd + e^h f^2 - b^2 = d^2\ \&\ 0 \le f(d - b) \leftrightarrow d = b + fe^{h/2})$

   из теоремы

   $\forall_{abefgh}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{натуральное}\ \&\ h - \text{натуральное}\ \&\ g - \text{even}\ \&\ 0 \le e \rightarrow e^h f^g - (a - b)^g = 0\ \&\ 0 \le f(a - b) \leftrightarrow a = b + fe^{h/g})$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$

В нашем примере характеристика имеет вид "неизвоценка(первыйтерм и(тип(описать) условие не(известно(e)) натуральное(h) натуральное(g) известно(a) смнеизв(b)))".

2. Развязка стандартизируемого операнда операции, возникающей в заменяющей части. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$ позволяющая получить более простые выражения с неизвестными $x_1, \ldots, x_k$. Все подвыражения правой части, сложность которых максимальна, имеют один и тот же заголовок f. Символ f в левой части не встречаеся. Для операции $f(\ldots)$ выделен операнд, который в задачах целесообразно делать одинаковым для всех вхождений f (например, основание логарифмов). Такой операнд называется стандартизируемым. Стандартизируемые операнды операций f внутри A_2 одинаковы. В разделе базы теорем, к которому относится символ f, находится тождество $B_1 = B_2$, позволяющее варьировать стандартизируемый операнд левой части, имеющей заголовок f. Это тождество применяется для преобразования всех вхождений f в правую часть. Результат упрощается. Указывается, что новая теорема преобразует утверждение к альтернативным сложным подвыражениям с неизвестными. (Прием неизвоценка - 13).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abijk}(\neg(b-1=0) \ \& \ 0<b \ \& \ 0<i \ \& \ a-\text{число} \ \& \ b-\text{число} \ \& \ i-\text{число} \ \& \ j-\text{число} \ \& \ k-\text{число} \rightarrow a+ki^j = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \& \ k = 0 \ \vee \ j\log_b i - \log_b a = -\log_b(-k) \ \& \ k<0 \ \& \ 0<a \ \vee \ j\log_b i - \log_b(-a) = -\log_b k \ \& \ a<0 \ \& \ 0<k)$

из теоремы

$\forall_{aijk}(0<i \ \& \ a-\text{число} \ \& \ i-\text{число} \ \& \ j-\text{число} \ \& \ k-\text{число} \rightarrow a+ki^j = 0 \leftrightarrow \neg(1-i=0) \ \& \ (j-\log_i a = -\log_i(-k) \ \& \ k<0 \ \& \ 0<a \ \vee \ j-\log_i(-a) = -\log_i k \ \& \ a<0 \ \& \ 0<k) \ \vee \ a=0 \ \& \ k=0 \ \vee \ k=-a \ \& \ -i+1=0)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(\neg(a-1=0) \ \& \ \neg(c-1=0) \ \& \ 0<a \ \& \ 0<b \ \& \ 0<c \ \& \ a-\text{число} \ \& \ b-\text{число} \ \& \ c-\text{число} \rightarrow \log_a b/\log_a c = \log_c b)$

В нашем примере характеристика имеет вид "неизвоценка(второйтерм и(тип(описать) условие не(известно(j)) смнеизв(a) известно(i) не(контекст(сомножитель(x6 k) не(известно(x6)) не(контекст(вид(x6 степень(x7 x8)) известно(x7))))) не(контекст(сомножитель(x4 a) не(известно(x4)) не(контекст(вид(x4 степень(x5 x6)) известно(x5)))))))".

Преобразование заменяющей части и свертка

1. Упрощение заменяющей части и обратная свертка по определению данного раздела - случай конъюнктивной заменяющей части. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$. Внутри A_2 выбирается неоднобуквенное подвыражение t, заголовком

f которого служит название отдельной координаты (например, "крд"). Находится тождество $B_1 = B_2$, выражающее координату B_1 сложного объекта через координаты его компонент. Все эти координаты имеют заголовок f. Тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается, и получается промежуточная теорема T. Ее заменяющая часть упрощается относительно антецедентов задачей на описание, меющей цель "редакция", после чего преобразуется к виду д.н.ф. Проверяется, что эта д.н.ф. имеет единственный дизъюнктивный член C. В списке вывода находится теорема, представляющая собой определение (возможно, отличное от исходной теоремы, если ячейка вывода определяла сразу несколько понятий), и усматривается, что она позволяет переформулировать C через ее определяемое понятие. Результат такой переформулировки замещает заменяющую часть теоремы T; добавляются необходимые антецеденты. После этого теорема T снова упрощается. (Прием определение - 156).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bd}(\text{Вектор}(b)\ \&\ \text{Трехмерн}(d) \to \text{вверх}(-b, d) \leftrightarrow \text{вниз}(b, d))$

из теоремы

$\forall_{aK}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \to \text{вверх}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 1) = 0\ \&$
$\text{крд}(a, K, 2) = 0\ \&\ 0 \le \text{крд}(a, K, 3))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{aKi}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\ \&\ i \in \{1, 2, 3\} \to \text{крд}(-a, K, i) = -\text{крд}(a, K, i))$

2. Упрощение заменяющей части и обратная свертка по определению данного раздела - случай дизъюнктивной заменяющей части. Аналогично предыдущему, но указанная выше д.н.ф. имеет больше одного дизъюнктивного члена. В списке вывода находится теорема, представляющая собой определение (возможно, отличное от исходной теоремы, если ячейка вывода определяла сразу несколько понятий), и усматривается, что она позволяет переформулировать фрагмент C_1 некоторого дизъюнктивного члена $C_1\ \&\ C_2$ через ее определяемое понятие. При этом параметры $x_1, \ldots, x_k$ фрагмента C_2 не пересекаются с параметрами C_1. Конъюнкция C_2 и отрицаний условий на $x_1, \ldots, x_k$, извлекаемых из прочих дизъюнктивных членов, упрощается, и добавляется к антецедентам теоремы. Результат переформулировки фрагмента C_1 замещает заменяющую часть теоремы T. После этого теорема T снова упрощается. (Прием определение - 157).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bce}(0 < b\ \&\ b\text{—число}\ \&\ \text{Вектор}(c)\ \&\ \text{Трехмерн}(e) \to \text{вправо}(bc, e) \leftrightarrow \text{вправо}(c, e))$

из теоремы

$\forall_{aK}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \to \text{вправо}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 2) = 0\ \&$
$\text{крд}(a, K, 3) = 0\ \&\ 0 \le \text{крд}(a, K, 1))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abKi}(a - \text{число}\ \&\ \text{Вектор}(b)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\ \&\ i \in \{1, 2, 3\} \to \text{крд}(ab, K, i) =$
$a \cdot \text{крд}(b, K, i))$

3. Попытка применить перегруппировочное либо сокращающее тождество к определяющему элементарному утверждению, чтобы затем свернуть его по тому же самому определению. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$ с элементарным определяющим утверждением A_2. Внутри A_2 находится неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится перегруппировочное либо сокращающее тождество общей стандартизации $B_1 = B_2$ с заголовком f левой части. Оно применяется для преобразования t. После этого предпринимаются попытки исключить из новой теоремы заголовок g утверждения A_2, применяя к ней исходную теорему в направлении справа налево. Результат упрощается. (Прием определение - 174).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdf}(\neg(f = 0)\ \&\ c - \text{целое}\ \&\ d - \text{целое}\ \&\ f - \text{целое} \rightarrow cf|df \leftrightarrow c|d)$

   из теоремы

   $\forall_{mn}(\neg(m = 0)\ \&\ m - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow (n/m) - \text{целое})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{cdf}(\neg(c = 0)\ \&\ \neg(f = 0)\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ f - \text{число} \rightarrow (df)/(cf) = d/c)$

4. Попытка использовать дистрибутивную развертку, упрощающую эквивалентность, и последующую свертку по определению. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$ с элементарным определяющим утверждением A_2. Внутри A_2 находится неоднобуквенное подвыражение t с заголовком g. По символу g находится тождество вида $g(x, h(y, z)) = f(g(x, y), g(x, z))$. Оно используется для преобразования t. Определяется заголовок P заменяющей части полученной теоремы T. По этому заголовку находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$ общей стандартизации утверждения B_1 с заголовком P. Оба утверждения B_1, B_2 бесповторные. Эквивалентность эта используется для преобразования заменяющей части теоремы T. После этого предпринимаются попытки исключить из новой теоремы заголовок Q утверждения A_2, применяя к ней исходную теорему в направлении справа налево. Результат упрощается. (Прием определение - 176).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bde}(d|b\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ d - \text{целое}\ \&\ e - \text{целое} \rightarrow d|(b + e) \leftrightarrow d|e)$

   из теоремы

   $\forall_{mn}(\neg(m = 0)\ \&\ m - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow (n/m) - \text{целое})$

   и дополнительных теорем

   $\forall_{bde}(\neg(d = 0)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow (b/d) + (e/d) = (b + e)/d)$

   $\forall_{mn}(n - \text{число}\ \&\ m - \text{целое} \rightarrow (m + n) - \text{целое} \leftrightarrow n - \text{целое})$

5. Попытка варьирования связанной переменной и обратной свертки. Теорема - эквивалентность $A_0 \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n)$, разворачивающая элементарное утверждение A_0 в квантор существования. Выбирается переменная x_i и рассматриваются утверждения A_j, в которые входит как x_i, так и некоторый параметр правой части эквивалентности. Проверяется, что x_i входит в каждое такое A_j лишь однократно, причем в качестве операнда одной и той же двуместной операции f, противоположным операндом которой служат некоторые параметры $a_1, \ldots, a_m$ правой части теоремы. Каждый такой параметр встречается в правой части однократно. По символу f находится тождество вида $f(P(x), y) = f(x, Q(y))$. В исходной теореме параметры $a_1, \ldots, a_m$ заменяются на выражения $Q(a_1), \ldots, Q(a_m)$, и найденное тождество применяется для того, чтобы перейти в выражениях A_j от переменной x_i к выражению $P(x_i)$. После этого проверяется, что существование значения $P(x_i)$ эквивалентно существованию x_i. Это позволяет свернуть заменяющую часть преобразованной теоремы с помощью исходной теоремы, вернувшись таким образом к некоторой версии утверждения A_0, но уже в правой части эквивалентности. Результат упрощается. (Прием развертка - 34).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefh}(\neg(h = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число} \rightarrow \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d, e, f)) \leftrightarrow \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (ah, bh, ch)))$

   из теоремы

   $\forall_{abcdef}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число} \rightarrow \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d, e, f)) \leftrightarrow \exists_{uv}(u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \& \neg(u^2 + v^2 = 0)\ \&\ au + dv = 0\ \&\ bu + ev = 0\ \&\ cu + fv = 0))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \rightarrow a(bc) = (ab)c)$

6. Нейтральное преобразование выражения в заменяющей части и обратная свертка. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$ элементарного утверждения A_1. Внутри A_2 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f, имеющее с утверждением A_1 не менее 2 общих параметров. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$ перегруппировочного типа, у которого обе части имеют заголовок f. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается, и получается промежуточная теорема T. Заменяющие части исходной теоремы и теоремы T сравниваются, и при помощи вспомогательных задач предпринимается попытка применить к заменяющей части теоремы T исходную теорему, в направлении справа налево. Чтобы такое применение оказалось возможным, предусматривается добавление к новой заменяющей части некоторых вспомогательных утверждений и навешивание квантора существования на их новые параметры. Далее результат упрощается. (Прием определение - 237).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acdeg}(e - \text{set}\ \&\ e \subseteq \text{Dom}(d)\ \&\ \text{образ}(d, e) \subseteq \text{Dom}(a)\ \&\ \text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R}\ \& a - \text{функция}\ \&\ d - \text{функция} \rightarrow \text{Max}(a, \text{образ}(d, e), g, c) \leftrightarrow \exists_B(\text{образ}(d, B) = g\ \&\ \text{Max}(\text{произведение}(a, d), e, B, c)))$

из теоремы

$\forall_{fbAB}(f - \text{функция}\ \&\ A - \text{set}\ \&\ A \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow$
$\text{Max}(f, A, B, b) \leftrightarrow \text{наибольший}(b, \text{образ}(f, A))\ \&\ B = A \cap \text{слой}(f, b))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{fgA}(A - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ g - \text{функция}\ \&\ A \subseteq \text{Dom}(g)\ \&$
$\text{образ}(g, A) \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{образ}(\text{произведение}(f, g), A) = \text{образ}(f, \text{образ}(g, A)))$

7. Использование тождества "вычерк" и обратная свертка. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$ утверждения A_1. Все переменные теоремы содержатся в утверждении A_2. Внутри A_2 выбирается подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, у которого заменяющая часть B_2 получена из выражения B_1 с заголовком f отбрасыванием части операндов некоторых операций. Число переменных этого тождества не более 3. Тождество применяется для преобразования t. После этого усматривается, что заменяющая часть новой теоремы - подстановка в заменяющую часть исходной. Это позволяет свернуть ее с помощью исходного определения. Результат упрощается. (Прием определение - 234).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bfA}(b - \text{set}\ \&\ A - \text{set}\ \&\ A \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow$
   $\text{отобразимо}(A, b) \leftrightarrow \text{отобразимо}(\text{образ}(f, A), b))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set} \rightarrow \text{отобразимо}(a, b) \leftrightarrow \text{card}(b) \leq \text{card}(a)\ \&\ (\neg(b = \emptyset) \vee a = \emptyset))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{Af}(A - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f)\ \&\ A \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{card}(A) =$
   $\text{card}(\text{образ}(f, A)))$

Идентификация связанной переменной квантора существования в заменяющей части при помощи дополнительного тождества

1. Попытка идентифицировать переменную, связанную квантором существования в заменяющей части - вывод эквивалентности. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2\ \&\ \exists_x(A_3)$. Решается задача на исследование, посылки которой суть антецеденты теоремы, а также конъюнктивные члены утверждений A_2 и A_3. После этого усматривается тип T значений переменной x . По данному типу T находится дополнительная теорема, консеквентом которой служит равенство двух переменных X, Y типа T, причем этип переменные симметричным образом входят в антецеденты. Усматривается возможность реализовать ту часть антецедентов, которая содержит X, с помощью посылок задачи на исследование. Тогда содержащие Y антецеденты (после необходимой подстановки) добавляются к антецедентам исходной теоремы, а в консеквенте квантор существования по x отбрасывается, причем в A_3 вместо x подставляется Y. Результат упрощается. (Прием определение - 233).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = E)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ E \in \text{прямая}(CD)\ \&$
$A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AE) \perp$
$\text{прямая}(CD) \rightarrow \text{отрезок}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \leftrightarrow$
$E \in \text{отрезок}(CD)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
$\neg(C = D) \rightarrow \text{отрезок}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \leftrightarrow$
$\text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB)\ \&\ \exists_E(E \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$E \in \text{отрезок}(CD)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$\neg(C = E)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \text{прямая}(CD) \perp \text{прямая}(AB)\ \&$
$\text{прямая}(CE) \perp \text{прямая}(AB)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ E \in \text{прямая}(AB) \rightarrow E = D)$

3.2.5 Применение к обеим частям тождества внешней операции и упрощение

1. Попытка навесить внешнюю операцию на условное выражение с константой для обобщения сверточного тождества. Теорема - тождество $A_1 = (t_1 \text{ при } P, \text{ иначе } t_2)$, у которого некоторое t_i - логический символ. Находится тождество $f(x, t_i) = x$ без существенных посылок, у которого символ f коммутативный. В качестве x выбирается новая переменная. Операция f применяется к обеим частям исходного тождества, причем в правой части она заносится внутрь условного выражения и $f(x, t_i)$ заменяется на x. Результат упрощается. (Прием свертка - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(\neg(b = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow -a\text{sg}(b) = (a \text{ при } b < 0, \text{ иначе } -a))$

   из теоремы

   $\forall_b(\neg(b = 0)\ \&\ b - \text{число} \rightarrow -\text{sg}(b) = (1 \text{ при } b < 0, \text{ иначе } -1))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a \cdot 1 = a)$

3.2.6 Применение к обеим частям двух тождеств двуместной операции и сокращение

1. Попытка сокращения заменяющих частей двух тождеств. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, используемое для разложения на комплексные либо вещественные множители выражения A_1. Выражение A_2 имеет ровно два подвыражения максимальной сложности, причем каждое из них входит в A_2 однократно. Выбирается одно из этих выражений - некоторое t. Проверяется, что его оценка

сложности не меньше 5 и что оно неконстантное. Проверяется, что его вхождение в A_2 - мультипликативное, т.е. расположено только под операциями умножения, изменения знака или в основания степенных выражений. В разделе базы теорем, к которому относится заголовок f выражения t, находится другое тождество $B_1 = B_2$, используемое для разложения на множители, у которого заменяющая часть имеет мультипликативное вхождение подвыражения r с заголовком f. Его переменные переобозначены так, чтобы не встречаться в исходном тождестве. Определяется подстановка вместо параметров выражения r, переводящая его в t. Эта подстановка преобразует всю дополнительную теорему. После этого предпринимается упрощение частного заменяющих частей исходного и дополнительного тождеств (рассматриваются два случая - для того, какая часть будет в числителе). Проверяется, что результат R_1 имеет единственное подвыражение максимальной сложности. Определяется соответствующее частное R_2 заменяемых частей. Консеквентом новой теоремы становится равенство $R_1 = R_2$; антецеденты теорем объединяются. Результат упрощается. (Прием нормзаголовок - 21).

Пример: вывод теоремы

$\forall_b(\neg(\cos(b/2) = 0)\ \&\ b - \text{число} \to \sin b/(1 + \cos b) = \text{tg}(b/2))$

из теоремы

$\forall_b(b - \text{число} \to \sin b = 2\sin(b/2)\cos(b/2))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to 1 + \cos a = 2\cos(a/2)^2)$

3.2.7 Преобразование подтерма консеквента

Применение тождества, уменьшающего число переменных

1. Попытка исключения параметра атомарного подвыражения. Теорема - тождество, содержащее более одного нечислового атомарного выражения заданного типа. Выбирается некоторое такое подвыражение t, и по его заголовку f находится тождество общей стандартизации $B_1 = B_2$, имеющее бесповторный заменяющий терм и повторный заменяемый. Множество переменных правой части - собственное подмножество переменных левой. Число существенных антецедентов не более 2, число переменных - не более 3. Это тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием Атомарное - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cde}(e - \text{число}\ \&\ \text{мточка}(c)\ \&\ \text{мточка}(d) \to \text{Скорость}(c,d,e) + \text{Скорость}(d,c,e) = \text{вектор0})$

   из теоремы

   $\forall_{abct}(\text{мточка}(a)\ \&\ \text{мточка}(c)\ \&\ \text{мтело}(b)\ \&\ t - \text{число} \to$
   $\text{Скорость}(a,c,t) + \text{Скорость}(c,b,t) = \text{Скорость}(a,b,t))$

   и дополнительной теоремы

$\forall_{at}$(мточка(a) & $t -$ число $\rightarrow$ Скорость$(a, a, t) =$ вектор0)

2. Попытка сильного упрощения подвыражения числового атома, встречающегося в консеквенте. Теорема - соотношение для невырожденных числовых атомов. В консеквенте теоремы выбирается невырожденный числовой атом A, а внутри A - неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится тождество общей стандартизации вида $f(x, y) = a$, где a - логический символ либо переменная. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 46).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcC}(c \subseteq b$ & $b \in$ события(C) & $c \in$ события(C) & верпространство$(C) \rightarrow$ вероятность$(c, C) =$ вероятность(b, C)услвероятн$(c, b, C))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A \in$ события(C) & $B \in$ события(C) & верпространство$(C) \rightarrow$ вероятность$(A \cap B, C) =$ вероятность(A, C)услвероятн$(B, A, C))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bc}(b -$ set & $c -$ set & $c \subseteq b \rightarrow b \cap c = c)$

3. Попытка обращения неоднобуквенного подтерма консеквента в однобуквенный. Теорема - кванторная импликация, используемая для создания приема проверочного оператора. Все ее антецеденты несущественные. В консеквенте выбирается неоднобуквенное выражение t с заголовком f, содержащее лишь часть параметров консеквента и имеющее единственное вхождение в консеквент. По символу f находится тождество общей стандартизации вида $f(x, y) = a$, где a - логический символ либо переменная. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что консеквент новой теоремы содержит все ее переменные. (Прием спуск - 58).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{gmn}(\neg(m^2 + n^2 = 0)$ & $g -$ натуральное & $m -$ целое & $n -$ целое & взаимнопросты$(m, n) \rightarrow$ нод$(n, gm) \mid g)$

   из теоремы

   $\forall_{bfg}(\neg(b^2 + f^2 = 0)$ & $g -$ натуральное & $b -$ целое & $f -$ целое $\rightarrow$ нод$(f, bg) \mid g \cdot$ нод$(b, f))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{mn}(m -$ целое & $n -$ целое & $\neg(m^2 + n^2 = 0)$ & взаимнопросты$(m, n) \rightarrow$ нод$(m, n) = 1)$

Применение тождества, исключающего сложное понятие

1. Использование определения сложного понятия.

   (a) Попытка исключить операцию над описателем "отображение" с помощью определения некоторого понятия. Теорема имеет элементарные антецеденты и бескванторный консеквент, внутри которого выделяется подтерм вида "$F(A)$", где заголовок A - символ "отображение". По символу F находится другая теорема с консеквентом вида $B_1 \leftrightarrow F(B_2) = B_3$ & B_4, представляющая собой определение утверждения B_1. При этом заголовком B_2 служит символ "отображение". Ее переменные переобозначаются так, чтобы не входили в исходную теорему. Определяется подстановка C, унифицирующая выражения A и B_2. Антецедентами новой теоремы становятся результаты применения C к антецедентам исходных теорем, из которых исключаются результаты применения C к конъюнктивным членам B_4. Кроме того, добавляется результат применения C к B_1. Определяется результат B_5 применения C к B_2. Консеквентом новой теоремы становится результат замены в консеквенте исходной теоремы выражения A на B_5 и одновременного применения подстановки C к прочим вхождениям переменных в исходный консеквент. Результат упрощается. (Прием отображение - 28).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcd}(b-\text{set}$ & $c-\text{set}$ & конечное(d) & разбиение$(c,d) \rightarrow c \times b = \bigcup_{a,a\in d}(a \times b))$

   из теоремы

   $\forall_{bd}(b-\text{set}$ & конечное(d) & классмножеств$(d) \rightarrow \bigcup_{a,a\in d} a \times b = \bigcup_{a,a\in d}(a \times b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set} \rightarrow$ разбиение$(a,b) \leftrightarrow$ классмножеств(b) & Разделимы(b) & $a = \bigcup_{x,x\in b} x)$

   (b) Попытка проварьировать числовой атом консеквента с помощью определения через него другого выражения. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, связывающее некоторый невырожденный числовой атом t с параметрами координат $x_1, \ldots, x_k$. Каждое из выражений A_1, A_2 содержит эти параметры. По заголовку f атома t находится тождество $B_1 = B_2$, у которого заголовок определяющей части B_2 равен f. Это тождество применяется (в направлении справа налево) для преобразования t. Проверяется, что каждый нечисловой атом консеквента новой теоремы встречается в ее антецедентах. Антецеденты новой теоремы упрощаются. Проверяется, что она связывает некоторый невырожденный числовой атом с параметрами координат, и она снабжается единственной характеристикой, указывающей на это. (Прием числкоэфф - 17).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcefghK}(\neg(a = b)$ & $\neg(a = c)$ & коорд(вектор$(ab), K) = (f, g)$ & коорд(вектор$(ac), K) = (e, h)$ & $a -$ точка & $b -$ точка & $c -$ точка & прямкоорд$(K) \rightarrow ef + gh = \sqrt{e^2 + h^2} \cdot \sqrt{f^2 + g^2} \cos($уголмежду(вектор$(ab)$, вектор$(ac))))$

   из теоремы

$\forall_{efghABCK}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(AB),K)=(f,g)\ \&$
$\text{коорд}(\text{вектор}(AC),K)=(e,h)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&$
$\text{прямкоорд}(K)\to ef+gh=\sqrt{e^2+h^2}\cdot\sqrt{f^2+g^2}\cos(\angle(BAC)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(A=B)\to$
$\text{уголмежду}(\text{вектор}(AB),\text{вектор}(AC))=\angle(BAC))$

(c) Попытка расшифровки по определению самого сложного числового атома. Теорема - соотношение для невырожденных числовых атомов. Консеквент имеет более одного такого атома, причем самый сложный из них атом t - единственный и имеет единственное вхождение в консеквент. По его заголовку f находится определение $B_1=B_2$ атомов с заголовком f. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 73).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(\neg(\text{вероятность}(a,c)=0)\ \&\ a-\text{set}\ \&\ b-\text{set}\ \&\ a\in\text{события}(c)\ \&$
$b\in\text{события}(c)\ \&\ \text{верпространство}(c)\ \&\ \text{незавсобытия}((b,a),c)\to$
$\text{вероятность}(a\cap b,c)=\text{вероятность}(a,c)\text{вероятность}(b,c))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(\text{вероятность}(B,C)=0)\ \&\ Aa-\text{set}\ \&\ B-\text{set}\ \&\ A\in\text{события}(C)\ \&$
$B\in\text{события}(C)\ \&\ \text{верпространство}(C)\ \&\ \text{незавсобытия}((A,B),C)\to$
$\text{услвероятн}(A,B,C)=\text{вероятность}(A,C))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A-\text{set}\ \&\ B-\text{set}\ \&\ \neg(\text{вероятность}(A,C))\ \&\ B\in\text{события}(C)\ \&$
$A\in\text{события}(C)\ \&\ \text{верпространство}(C)\to\text{услвероятн}(B,A,C)=$
$\text{вероятность}(A\cap B,C)/\text{вероятность}(A,C))$

(d) Примерка теоремы с двумя функциональными переменными в консеквенте к конкретным двум функциям, участвующим в определении третьей. Теорема - кванторная импликация, используемая для создания приема проверочного оператора. Консеквент ее имеет вид $P(\lambda_x(Q(f(x),g(x)),A(x)),\ldots)$, где f,g - переменные, причем в антецедентах имеются утверждения $P(f,\ldots)$ и $P(g,\ldots)$. Находится тождество $B_1=Q(B_2,B_3)$, являющееся определением выражения B_1. Оно используется для преобразования $Q(f(x),g(x))$, причем вместо f,g подставляются функции, значения которых определяются выражениями B_2,B_3, а область определения - антецедентами дополнительного тождества. Результат упрощается. (Прием спуск - 62).

Пример: вывод теоремы

$\forall_b(b-\text{комплексное}\to\text{Непрерывно}(\lambda_c(\sin c,c-\text{комплексное}),b)$

из теоремы

$\forall_{beg}(\text{Непрерывно}(g,b)\ \&\ \neg(0\in\text{Val}(g))\ \&\ \text{Dom}(g)=\text{Dom}(e)\ \&$
$\text{Непрерывно}(e,b)\ \&\ \text{Dom}(e)\subseteq\mathbb{C}\ \&\ \text{Val}(e)\subseteq\mathbb{C}\ \&\ \text{Val}(g)\subseteq\mathbb{C}\ \&$
$b\in\text{Dom}(e)\ \&\ e-\text{функция}\ \&\ g-\text{функция}\ \&\ \text{Предельныточка}(b,\text{Dom}(e))\to$
$\text{Непрерывно}(\lambda_c(e(c)/g(c),c\in\text{Dom}(g)),b))$

и дополнительной теоремы

$\forall_z(z - \text{комплексное} \to \sin z = (\exp(iz) - \exp(-iz))/(2i))$

2. Попытка упростить подвыражение консеквента. Теорема - равенство $A_1 = A_2$ двух атомарных выражений. В текущем списке вывода находится другое равенство $B_1 = B_2$ двух атомарных выражений, у которого сложность B_2 меньше сложности B_1. Заголовок выражения B_1 - символ f. Внутри консеквента исходной теоремы находится подвыражение t с заголовком f. Оно преобразуется дополнительным равенством. Результат упрощается. (Прием Атомарное - 24).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcefghi}(e = [a, b]\ \&\ i = [f, g]\ \&\ \text{обратныйпуть}(\text{Путь}(h, i)) = \text{Путь}(c, e)\ \&$
   $a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{число}\ \&\ \text{мточка}(c)\ \&\ \text{мточка}(h)\ \&$
   $\text{Числотр}(e)\ \&\ \text{Числотр}(i) \to \text{Место}(h, f) = \text{Место}(c, b))$

   из теоремы

   $\forall_{abcde}(e = [a, b]\ \&\ \text{Путь}(c, e) = \text{обратныйпуть}(d)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&$
   $\text{мточка}(c)\ \&\ \text{Числотр}(e)\ \&\ \text{оркрив}(d) \to \text{началопути}(d) = \text{Место}(c, b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abce}(e = [a, b]\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \text{мточка}(c)\ \&\ \text{Числотр}(e) \to$
   $\text{началопути}(\text{Путь}(c, e)) = \text{Место}(c, a))$

3. Попытка зануления координаты - множителя одной из частей равенства. Теорема - соотношение "$\text{крд}(A_1, K, i) - \text{крд}(A_2, K, i) = a \cdot \text{крд}(A_3, K, i)$". Находится другая теорема с консеквентом "$\text{крд}(B, K, i) = 0$". Она применяется для преобразования "$\text{крд}(A_3, K, i)$". Результат упрощается. (Прием нормкрд - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcdegst}(0 < s - t\ \&\ c \in \{1, 3\}\ \&\ s \in e\ \&\ t \in e\ \&\ \text{неподв}(d, e)\ \&\ \text{мточка}(b)\ \&$
   $\text{Равндвиж}(b, e)\ \&\ \text{вперед}(\text{Скорость}(b, d, e), g)\ \&\ \text{Трехмерн}(g)\ \&\ \text{Числотр}(e)\ \&$
   $\text{мтело}(d) \to \text{крд}(\text{Место}(b, s), g, c) = \text{крд}(\text{Место}(b, t), g, c))$

   из теоремы

   $\forall_{abdestK}(0 < s - t\ \&\ s \in e\ \&\ t \in e\ \&\ \text{неподв}(d, e)\ \&\ \text{мточка}(b)\ \&\ \text{Равндвиж}(b, e)\ \&$
   $\text{Трехмерн}(K)\ \&\ \text{Числотр}(e)\ \&\ \text{мтело}(d)\ \&\ a \in \{1, 2, 3\} \to \text{крд}(\text{Место}(b, s), K, a) -$
   $\text{крд}(\text{Место}(b, t), K, a) = \text{длина}([t, s])\text{крд}(\text{Скорость}(b, d, e), K, a))$

   и теоремы

   $\forall_{abd}(\text{Вектор}(b)\ \&\ \text{назад}(-b, d)\ \&\ \text{Трехмерн}(d)\ \&\ a \in \{1, 3\} \to \text{крд}(b, d, a) = 0)$

4. Применение дополнительного тождества для сильного упрощения одной из частей равенства, в результате которого возникает тождество общей стандартизации. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ перегруппировочного типа. В одной из его частей выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f, не входящим в другую часть. Находится тождество $B_1 = B_2$, преобразующее выражение

B_1 с заголовком f в выражение B_2, имеющее меньшую оценку сложности. Это тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что возникает тождество общей стандартизации. (Прием перестановка - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \text{Dom}(a)\ \&\ a - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(\text{сужение}(a,b)) \rightarrow \text{card}(b) = \text{card}(\text{образ}(a,b)))$

из теоремы

$\forall_f(f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \text{card}(\text{Dom}(f)) = \text{card}(\text{Val}(f)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{Af}(A - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ A \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{Val}(\text{сужение}(f,A)) = \text{образ}(f,A))$

5. Попытка использования тождества, выражающего сложный числовой атом через более простые. Теорема - тождество, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат. В ее консеквенте выбирается невырожденный числовой атом t с заголовком f, имеющий единственное вхождение. Находится тождество $B_1 = B_2$, выражающее числовой атом B_1 с заголовком f через более простые числовые атомы. Это тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием числкоэфф - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefghiK}(\neg(f = g)\ \&\ \neg(h = i)\ \&\ \text{коорд}(h,K) = (d,e)\ \&$
   $\text{коорд}(\text{прямая}(fg),K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&$
   $a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ f - \text{точка}\ \&\ g - \text{точка}\ \&\ h - \text{точка}\ \&$
   $i - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(fg) - \text{касательная к окружность}(hi)\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow$
   $(c + ad + be)^2 = (a^2 + b^2)l(hi)^2)$

   из теоремы

   $\forall_{abcdeACDK}(\neg(C = D)\ \&\ \text{коорд}(A,K) = (d,e)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD),K) =$
   $\text{set}_{xy}(c + ax + by = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&$
   $c - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow$
   $(c + ad + be)^2 = (a^2 + b^2)\text{расстдопрямой}(A, \text{прямая}(CD))^2)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D)\ \&$
   $\neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) - \text{касательная к окружность}(CD) \rightarrow$
   $\text{расстдопрямой}(C, \text{прямая}(AB)) = l(CD))$

6. Попытка подставить константное значение числового атома с добавлением условий на числовые атомы в антецедентах. Теорема - тождество с невырожденными числовыми атомами. В его консеквенте выбирается невырожденный числовой атом t с заголовком f, имеющий единственное вхождение в теорему. Находится тождество $B_1 = B_2$, выражающее числовой атом B_1 с заголовком f через константное выражение B_2. В антецедентах этого тождества встречаются

невырожденные числовые атомы. Проверяется, что самый сложный подтерм T консеквента исходной теоремы единственный, причем он содержит единственный невырожденный числовой атом, и этот атом - t. Проверяется, что оценки сложности антецедентов дополнительной теоремы меньше оценки сложности атома t. Дополнительная теорема применяется для преобразования атома t. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 44).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcDE}(\neg(b=c)\ \&\ \neg(D=E)\ \&\ l(ab)=l(bc)\ \&\ l(ac)=l(bc)\ \&\ a-\text{точка}\ \&$
$b-\text{точка}\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&$
$\text{окружность}(DE)\text{описана около фигура}(abc)\rightarrow\sqrt{3}l(DE)=l(bc))$

из теоремы

$\forall_{ABCDE}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&$
$\neg(B=C)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ \neg(D=E)\ \&$
$\text{окружность}(DE)\text{описана около фигура}(ABC)\rightarrow 2\sin(\angle(ABC))l(DE)=l(AC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ l(AB)=l(BC)\ \&$
$l(AB)=l(AC)\rightarrow\angle(ABC)=\pi/3)$

7. Попытка использовать тождество, дающее явное выражение для числового атома глубины большей единицы. Теорема - равенство для невырожденных числовых атомов. Число таких атомов в консеквенте не менее двух, причем единственный из них - некоторый атом t - имеет глубину, большую 1. Его заголовок - f, число корневых операндов равно 1. Вхождение атома t в консеквент единственное. Символ f не встречается в стартовой теореме ячейки вывода. В разделе символа f находится тождество вида $f(B_1)=B_2$, быть может, с ненулевым коэффициентом при $f(B_1)$. Оно выражает сложный атом $f(B_1)$ через более простые. После деления на ненулевой коэффициент, если он есть, данное тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 81).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcDE}(\neg(D=E)\ \&\ a-\text{точка}\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&$
$E-\text{точка}\ \&\ \text{окружность}(DE)\text{описана около фигура}(abc)\rightarrow l(ab)l(ac)l(bc)=$
$\sqrt{l(bc)+l(ac)-l(ab)}\cdot\sqrt{l(bc)+l(ab)-l(ac)}\cdot\sqrt{l(ac)+l(ab)-l(bc)}\cdot$
$\sqrt{l(ab)+l(ac)+l(bc)}l(DE))$

из теоремы

$\forall_{ABCDE}(\neg(D=E)\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&$
$C-\text{точка}\ \&\ \text{окружность}(DE)\text{описана около фигура}(ABC)\rightarrow$
$l(AB)l(AC)l(BC)=4l(DE)S(\text{фигура}(ABC)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\rightarrow S(\text{фигура}(ABC))=$
$\sqrt{(l(BC)+l(AC)-l(AB))(l(BC)+l(AB)-l(AC))}\cdot$
$\sqrt{(l(AB)+l(AC)-l(BC))(l(AB)+l(BC)+l(AC))}/4)$

8. Попытка упрощения результирующего выражения. Значение операнда t_i консеквента $P(t_1 \dots t_n)$ однозначно определяется значениями остальных его операндов. Внутри t_i выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. Находится тождество общей стандартизации $B_1 = B_2$, преобразующее выражение B_1 с заголовком f к выражению B_2 с меньшей оценкой сложности. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием опредзнач - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{dfx}(d - \text{set} \ \& \ d \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ f - \text{функция} \ \&$
   $\text{взаимнооднозначно}(f) \ \& \ \text{возрастает}(f, d) \ \& \ \text{наибольший}(x, d) \rightarrow$
   $\text{Max}(f, d, \{x\}, f(x)))$

   из теоремы

   $\forall_{acd}(d - \text{set} \ \& \ d \subseteq \text{Dom}(c) \ \& \ \text{Dom}(c) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(c) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ c - \text{функция} \ \&$
   $\text{неубывает}(, d) \ \& \ \text{наибольший}(x, d) \rightarrow \text{Max}(, d, d \cap \text{слой}(c, c(a)), c(a)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{fx}(f - \text{функция} \ \& \ x \in \text{Dom}(f) \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \text{слой}(f, f(x)) = \{x\})$

9. Попытка развязки консеквента с помощью тождества "упрощтерм". Консеквент теоремы имеет вид $P(\lambda_{x_1 \dots x_k}(B, A), C)$ и определяет значение C характеристики P функции $\lambda_{x_1 \dots x_k}(B, A)$ для некоторого специального вида таких функций. Внутри B выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. Находится тождество $B_1 = B_2$, упрощающее сложное выражение B_1 с заголовком f при помощи новых переменных, вводимых самым сложным антецедентом D. Исходная теорема не имеет антецедентов с тем же заголовком, что D, параметры которых пересекались бы с параметрами терма t. Тождество $B_1 = B_2$ применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием функперех - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ace}(\forall_f(f \in \text{Dom}(e) \rightarrow \text{дифференцируема}(e, f)) \ \& \ \text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \&$
   $\text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(e) \subseteq \text{Dom}(a) \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \ \&$
   $\text{первообразная}(a, c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(e(x))\text{производная}(e, x), x \in \text{Dom}(e)),$
   $\lambda_d(c(e(d)), d \in \text{Dom}(e))))$

   из теоремы

   $\forall_{ce}(\forall_f(f \in \text{Dom}(e) \rightarrow \text{дифференцируема}(e, f)) \ \& \ \forall_x(x \in \text{Dom}(e) \ \&$
   $\text{дифференцируема}(c, e(x)) \rightarrow \text{дифференцируема}(\lambda_d(c(e(d)), d \in \text{Dom}(e) \ \&$
   $\text{дифференцируема}(c, e(d))), x)) \ \& \ \text{Dom}(c) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(c) \subseteq \mathbb{R} \ \&$
   $\text{Val}(e) \subseteq \text{Dom}(c) \ \& \ c - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \rightarrow$
   $\text{первообразная}(\lambda_x(\text{производная}(c, e(x))\text{производная}(e, x), x \in \text{Dom}(e) \ \&$
   $\text{дифференцируема}(c, e(x))), \lambda_d(c(e(d)), d \in \text{Dom}(e) \ \& \ \text{дифференцируема}(c, e(d)))))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{fgx}(\text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ x \in \text{Dom}(g) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(f, g) \rightarrow$
   $\text{производная}(g, x) = f(x))$

10. Попытка поглотить сомножитель с самым сложным числовым атомом еще более сложным числовым атомом. Теорема - соотношение "$A_1 \cdot A_2 = A_3$ для невырожденных числовых атомов, где A_1 - сомножитель, содержащий единственный самый сложный атом P. Этот атом имеет единственное вхождение в консеквент. По заголовку f атома P находится тождество "$B)1 = B_2 \cdot B_3$", у которого все переменные содержатся в невырожденном числовом атоме консеквента Q, входящем в B_3. Самый сложный невырожденный числовой атом дополнительного тождества содержится в B_1. После применения к дополнительной теореме походящей подстановки выражение B_3 переводится в A_1; B_1 и B_2 - в некоторые выражения C_1, C_2. Затем выводится равенство "$C_1 \cdot A_2 = C_2 \cdot A_3$". Результат упрощается. (Прием числовойатом - 80).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ABCDE}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \text{окружность}(DE)\text{описана около фигура}(ABC) \to l(AB)l(AC)l(BC) = 4l(DE)S(\text{фигура}(ABC)))$

    из теоремы

    $\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \text{окружность}(DE)\text{описана около фигура}(ABC) \to 2\sin(\angle(ABC))l(DE) = l(AC))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B) \to 2S(\text{фигура}(ABC)) = l(AB)l(AC)\sin(\angle(BAC)))$

11. Попытка упрощения терма "значение(f, A)" при помощи тождества, устраняющего функциональную переменную. Теорема - импликация, которую можно использовать для приема вывода в посылках. В ее консеквенте выбирается подвыражение вида "значение(f, t)", где t - выражение, не являющееся переменной. По заголовку s выражения t, отличному от символов "набор", "значение", находится тождество вида "значение$(g, T) = B$", где заголовком выражения T служит символ s, g - переменная, а выражение B не имеет символа "значение". Это тождество применяется для преобразования выражения "значение(f, t)". Результат упрощается. (Прием вывод - 86).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abcfAB}(b = \text{операция}(A)\ \&\ c = \text{операция}(B)\ \&\ a \in \text{носитель}(A)\ \&\ \text{гомоморфизм}(f, A, B)\ \&\ \text{группа}(A)\ \&\ \text{группа}(B) \to f(\text{обрэлемент}(a, b)) = \text{обрэлемент}(f(a), c))$

    из теоремы

    $\forall_{abcfAB}(b = \text{операция}(A)\ \&\ c = \text{операция}(B)\ \&\ a \in \text{носитель}(A)\ \&\ \text{гомоморфизм}(f, A, B)\ \&\ \text{группоид}(B)\ \&\ \text{группа}(A) \to f(\text{единица}(b)) = c(f(\text{обрэлемент}(a, b)), f(a)))$

    и дополнительной теоремы

$\forall_{abfAB}(a = \text{операция}(B)\ \&\ b = \text{операция}(A)\ \&\ \text{гомоморфизм}(f, A, B)\ \&$
$\text{группа}(A)\ \&\ \text{группа}(B) \to \text{единица}(a) = f(\text{единица}(b)))$

Дополнительная теорема предоставляет уравнение, позволяющее исключить сложное понятие в консеквенте исходной теоремы

1. Попытка использования дополнительного соотношения пропорциональности для сокращения на сложный множитель. Теорема - соотношение пропорциональности для невырожденных числовых атомов, которое можно представить в виде "$A_1 \cdot A_2 = A_3$", выделив сомножитель A_1, сложность которого больше сложности любого числового атома консеквента. Этот сомножитель имеет единственный невырожденный числовой атом t с заголовком f. По символу f атома P находится тождество "$B_1 = B_2 \cdot B_3$", у которого все переменные содержатся в невырожденном числовом атоме консеквента Q с заголовком f, входящем в B_3. После унификации A_3 с B_1 и A_1 с B_3 оно превращается в "$A_3 = C_2 \cdot A_1$". Антецеденты теорем объединяются, к ним добавляется условие "$\neg(A_1 = 0)$", и консеквентом становится "$A_2 = C_2$". Результат упрощается. (Прием пропорция - 14).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cABC}(\neg(c = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(\angle(ABC) = \pi/2)\ \&\ \neg(A \in \text{прямая}(BC))\ \&$
   $2\angle(ABC) = \angle(BAC)\ \&\ c \in \text{прямая}(AB)\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
   $B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(cC) \perp \text{прямая}(BC) \to 2l(AC) = l(cB))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(B = C)\ \&\ \neg(A \in \text{прямая}(BC))\ \&\ 2\angle(ABC) = \angle(BAC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
   $B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \to 2\cos(\angle(ABC))l(AC) = l(BC))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = C)\ \&$
   $\neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \to l(AB) = \cos(\angle(ABC))l(BC))$

2. Попытка использования двух соотношений для исключения тригонометрической функции угла. Теорема - соотношение для невырожденных числовых атомов, содержащее синус либо косинус некоторого угла ABC. Эта функция угла расположена в консеквенте только под символами "умножение", "плюс", "минус", "равно". Выбирается некоторая другая теорема, с аналогичным условием на вхождение синуса либо косинуса угла abc. Наконец, выбирается из фиксированного списка третья теоремы, устанавливающая простое соотношение для двух углов (равенство углов либо равенство их суммы пи). После необходимой унификации, отождествляющей углы ABC и abc, предпринимается поыптка вывести линейную комбинацию сотношений первых двух теорем, в которой тригонометрическая функция угла ABC отсутствует. (Прием числовойатом - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{defgh}(\neg(d = e)\ \&\ \neg(d = f)\ \&\ \neg(d = g)\ \&\ \neg(d = h)\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&$
   $f - \text{точка}\ \&\ g - \text{точка}\ \&\ h - \text{точка}\ \&\ \text{точкалуча}(d, e, f)\ \&\ \text{точкалуча}(d, g, h) \to$
   $(l(de)l(df) - l(dg)l(dh))(l(df)l(dg) - l(de)l(dh)) = l(fh)^2 l(de)l(dg) - l(eg)^2 l(df)l(dh))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B) \rightarrow 2l(AB)l(AC)\cos(\angle(BAC)) = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)$

Эта же самая теоремы вступает в данном примере и как первая дополнительная. Роль второй дополнительной играет теорема:

$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \neg(A = E)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ \text{точкалуча}(A, B, C)\ \&\ \text{точкалуча}(A, D, E) \rightarrow \angle(BAD) = \angle(CAE))$

Применение тождества, приводящего к более коротким сложным подтермам

1. Попытка использовать дистрибутивность для преобразования самого сложного подтерма консеквента. Теорема - импликация, используемая для создания приема проверочного оператора. Консеквент имеет единственный максимально сложный подтерм t с заголовком f. Он не встречается в антецедентах. По символу f находится тождество вида $f(g(x, y), g(x, z)) = g(x, f(y, z))$. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием спуск - 56).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abck}(\neg(b^2 + c^2 = 0)\ \&\ a - \text{натуральное}\ \&\ k \mid ab\ \&\ k \mid ac\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ c - \text{целое}\ \&\ k - \text{целое} \rightarrow k \mid a \cdot \text{нод}(b, c))$

   из теоремы

   $\forall_{mnk}(m - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ neg(m^2 + n^2 = 0)\ \&\ k - \text{целое}\ \&\ k \mid m\ \&\ k \mid n \rightarrow k \mid \text{нод}(m, n))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{akn}(\neg(k^2 + n^2 = 0)\ \&\ a - \text{натуральное}\ \&\ k - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое} \rightarrow \text{нод}(ak, an) = a \cdot \text{нод}(k, n))$

2. Попытка перейти к более простым операндам в самом сложном подвыражении консеквента. Консеквент теоремы имеет вид "$\exists_x(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_k)$". Его единственное подвыражение t максимальной сложности содержит x и встречается однократно - в некотором A_i. Оценка сложности выражения t не меньше 5. По заголовку f выражения t находится тождество $B_1 = B_2$, упрощающее выражение под корневой операцией f терма B_1 и не вводящее новых операций большей либо равной сложности. Оно применяется для преобразования t. Предпринимается контроль того, что связанная переменная x преобразованием не затрагивается, а содержащие идентифицированную с x переменную y антецеденты дополнительной теоремы переходят в утверждения, которые суть следствия утверждений $A_1, \ldots, A_k$. Результат упрощается. (Прием допконтекст - 25).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{cn}(\neg(c = \text{тождфунк}(\{1,\ldots,n\}))$ & перестановка$(c,\{1,\ldots,n\})$ &
$n -$ натуральное $\rightarrow \exists_d(\neg(d =$ пустоеслово) & $c =$ функпроизв(d) &
Val$(d) \subseteq$ транспозиции(n) & $d -$ слово))

из теоремы

$\forall_{bcn}($перестановка$(b,\{1,\ldots,n\})$ & перестановка$(c,\{1,\ldots,n\})$ &
$n -$ натуральное $\rightarrow \exists_a(c =$ функпроизв(префикс$(b,a))$ &
Val$(a) \subseteq$ транспозиции(n) & $a -$ слово))

и дополнительной теоремы

$\forall_{aA}(a -$ слово & $\forall_x(x \in \text{Val}(a) \rightarrow x -$ функция & Val$(x) \subseteq A)$ & $A -$ set $\rightarrow$
функпроизв(префикс(тождфунк$(A),a)) =$
(функпроизв(a) при $\neg(a =$ пустоеслово), иначе тождфунк$(A)))$

Применение тождества общей стандартизации

1. Использование тождества из того же цикла вывода для упрощения самого сложного подвыражения консеквента. Теорема - простая импликация, выражающая свойство некоторого сложного выражения t с заголовком f. В текущем списке вывода находится тождество общей стандартизации $B_1 = B_2$ для выражения B_1 с заголовком f. Оно является варьирующим сложный подтерм с сохранением оценки сложности, даже если применяется в обратном направлении. Данное тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием свойства - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_c(c -$ число $\rightarrow c \leq |c|)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число $\rightarrow a \leq \max(a,b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_c(c -$ число $\rightarrow \max(c,-c) = |c|)$

2. Попытка упрощения самого сложного подвыражения консеквента при помощи дополнительного тождества. Теорема - импликация для приема проверочного оператора. Единственный самый сложный подтерм консеквента - выражение t с заголовком f. Находится тождество $B_1 = B_2$, уменьшающее оценку сложности выражения B_1 с заголовком f либо выполняющее свертку B_1. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется отсутствие антецедентов, глубина которых больше 2. (Прием легковидеть - 29).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdA}(d =$ операция(A) & $b \in$ носитель(A) & алгстепень$(b,d,c) \in a$ &
   $c -$ натуральное & группа(A) & подгруппа$(a,A) \rightarrow$ алгстепень$(b,d,-c) \in a)$

   из теоремы

$\forall_{afxA}$(группа(A) & f = операция(A) & $x \in a$ & подгруппа(a, A) → обрэлемент(x, f) $\in a$)

и дополнительной теоремы

$\forall_{abfA}$(A − set & $a \in A$ & ассоциативно(f) & обратимо(f) & бинарнооперация(f, A) & b − натуральное → обрэлемент(алгстепень(a, f, b), f) = алгстепень($a, f, -b$))

3. Попытка исключения сложной подоперации в определении значения функции при помощи дополнительного тождества. Консеквент теоремы имеет вид "$P(\lambda_{x_1 \ldots x_k}(B, A), C)$" и определяет значение C характеристики P функции $\lambda_{x_1 \ldots x_k}(B, A)$ для некоторого специального вида таких функций. Выражение B имеет единственное подвыражение t максимальной сложности. Выражение t имеет переменную f, не входящую в список $x_1, \ldots, x_k$ причем "функция(f)" - антецедент теоремы. В разделе, к которому относится заголовок q выражения t, находится тождество общей стандартизации $B_1 = B_2$, у которого заголовок левой части - q, причем эта часть содержит описатель "отображение". Правая часть тождества не содержит описателей и символа q. Данное тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием функперех - 11).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ach}$($\forall_f$($f \in h \rightarrow$ Квазивнутр(f, h)) & h − set & $h \subseteq$ Dom(a) & a − функция & первообразная(a, c) → первообразная($\lambda_x(a(x), x \in h), \lambda_d(c(d), d \in h)$))

   из теоремы

   $\forall_{ace}$($\forall_f$($f \in$ Dom(e) → дифференцируема(e, f)) & Dom(a) $\subseteq \mathbb{R}$ & Dom(e) $\subseteq \mathbb{R}$ & Val(e) $\subseteq$ Dom(a) & a − функция & e − функция & первообразная(a, c) → первообразная($\lambda_x(a(e(x))$производная(e, x), $x \in$ Dom(e)), $\lambda_d(c(e(d)), d \in$ Dom(e))))

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{aA}$(A − set & Квазивнутр(a, A) & $A \subseteq \mathbb{R}$ → производная($\lambda_x(x, x \in A), a$) = 1)

4. Рассмотрение частных случаев выражений заданного типа для варьирования их свойства. Теорема - простая импликация, выражающая свойство некоторого сложного атомарного выражения t. Это выражение входит в консеквент в виде $P(t)$, где P - одноместная операция, тип значения которой - f. Для t имеется определение вида $t = D$, причем существует параметрическое описание объектов типа f, в котором определяющее объект выражение - с тем же заголовком, что D. В том разделе, к которому относится f, находится тождество общей стандартизации $P(r) = B$. Переменные этого тождества переобозначаются так, чтобы не входили в исходную теорему. Антецеденты исходной теоремы и данного тождества объединяются, к ним добавляется равенство $t = r$, в консеквенте исходной теоремы $P(t)$ заменяется на B. Результат упрощается. (Прием свойства - 9).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{atABT}$(Отрезок(A,B) = Путь(a,T) & $t \in T$ & $A-$ точка & $B-$ точка & мточка(a) & Числотр$(T) \rightarrow$ Место$(a,t) \in$ отрезок(AB))

из теоремы

$\forall_{atT}(t \in T$ & мточка(a) & Числотр$(T) \rightarrow$ Место$(a,t) \in$ точкипути(Путь$(a,T)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{AB}(A-$ точка & $B-$ точка $\rightarrow$ точкипути(Отрезок$(AB))$ = отрезок$(AB))$

5. Попытка варьирования упрощающим тождеством бинарной операции в консеквенте. Теорема - кванторная импликация, используемая для приема вывода следствий в посылках задачи. В ее консеквенте находится подвыражение вида "$f(a,b)$", где f,a,b - переменные, причем имеется антецедент вида "$f =$ операция(G)". Стартовая теорема ячейки вывода - определение утверждения с заголовком P. Некоторый антецедент исходной теоремы данного приема тоже имеет заголовок P. В разделе "группоиды" базы теорем находится тождество общей стандартизации вида "$A(B,C) = D$". Символ P в этом тождестве не встречается. Найденное тождество используется для преобразования подвыражения "$f(a,b)$". Результат упрощается. (Прием вывод - 84).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdfAB}(b =$ операция(A) & $d =$ операция(B) & $a \in$ носитель(A) & $c \in$ носитель(A) & левединица(a,b) & гомоморфизм(f,A,B) & группоид(A) & группоид$(B) \rightarrow f(c) = d(f(a),f(c)))$

   из теоремы

   $\forall_{fghxyAB}$(группоид(A) & группоид(B) & $g =$ операция(A) & $h =$ операция(B) & $x \in$ носитель(A) & $y \in$ носитель(A) & гомоморфизм$(f,A,B) \rightarrow f(g(x,y)) = h(f(x),f(y)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{afxA}(A-$set & бинарнооперация(f,A) & $x \in A$ & левединица$(a,f) \rightarrow f(a,x) = x)$

Применение тождества свертки

1. Попытка разложения на множители для сокращения. Теорема - соотношение пропорциональности для двух невырожденных числовых атомов. Его можно представить в виде "$A_1 \cdot A_2 = A_3 \cdot A_4$", где A_1, A_3 - сомножители, сложность которых больше сложности любого невырожденного числового атома консеквента. Каждый из этих сомножителей содержит невырожденный числовой атом. По заголовку f сомножителя A_1 находится тождество свертки, у которого заменяющая часть имеет заголовок f и бесповторна, а заменяемая - не бесповторна. Это тождество представляется в виде "$B_1 \cdot B_2 = B_3$", где заголовки множителей B_1, A_3 одинаковы. Переменные дополнительного тождества переобозначаются так, чтобы не входили в исходное тождество. После унификации B_1 с A_3 новое тождество приобретает вид "$A_3 \cdot C_2 = C_3$", находятся такие

наименьшие подтермы D_1, D_2, что A_1 и C_3 отличаются только на них. Антецеденты теорем объединяются; к ним добавляются равенство $D_1 = D_2$ и условие "$\neg(A_3 = 0)$". Консеквентом становится "$A_2 \cdot C_2 = A_4$". Результат упрощается. (Прием пропорция - 13).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(B = C)\ \&\ \neg(A \in \text{прямая}(BC))\ \&\ 2\angle(ABC) = \angle(BAC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow 2\cos(\angle(ABC))l(AC) = l(BC))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C) \rightarrow \sin(\angle(BAC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \sin(2a) = 2\sin a \cos a)$

Применение варьирующего тождества

1. Варьирование сложного атомарного выражения в консеквенте. Теорема - тождество, содержащее более одного нечислового атомарного выражения типа P. В консеквенте выбирается некоторое самое сложное атомарное подвыражение типа P с заголовком f. Находится тождество $B_1 = B_2$, где B_1, B_2 - атомарные выражения с заголовком f. Оно используется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием Атомарное - 21).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcde}(\neg(b = c)\ \&\ \neg(b = e)\ \&\ \neg(c = d)\ \&\ \neg(d = e)\ \&\ \neg(\text{прямая}(bc) = \text{прямая}(be))\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(bc) \parallel \text{прямая}(de)\ \&\ \text{прямая}(be) \parallel \text{прямая}(cd) \rightarrow \text{вектор}(bc) = -\text{вектор}(de))$

   из теоремы

   $\forall_{aAB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \text{вектор}(AB) = a \rightarrow \text{вектор}(BA) = -a)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(CD)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AD)) \rightarrow \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(DC))$

2. Попытка отождествления двух числовых атомов в выводимом равенстве. Теорема - соотношение для невырожденных числовых атомов, количество которых не менее 2. Выбираются два различных таких атома A_1, A_2 с одним и тем же заголовком f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, где B_1, B_2 - невырожденные числовые атомы с заголовком f, причем все параметры антецедентов входят в консеквент. Число антецедентов данного тождества, имеющих вид равенства, не более одного. Переменные дополнительного тождества переобозначаются так, чтобы не входить в исходное тождество. Предпринимается

унификация A_1 с B_1, A_2 - с B_2. Антецеденты теорем объединяются, к ним добавляется равенство $A_1 = A_2$. Сначала упрощается консеквент новой теоремы - при помощи задачи на описание с целью "редакция", а затем новая теорема упрощается целиком. (Прием числовойатом - 24).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ l(AB) = l(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
$B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \to 2\angle(ABC) + \angle(BAC) = \pi)$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&$
$\neg(A = B) \to \angle(ABC) + \angle(BCA) + \angle(BAC) = \pi)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&$
$l(AB) = l(BC) \to \angle(BAC) = \angle(BCA))$

3. Попытка проварьировать самый сложный числовой атом. Теорема - соотношение для невырожденных числовых атомов. Самый сложный из них единственный и имеет единственное вхождение в консеквент - это некоторый атом t с заголовком f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, выражающее атом B_1 с заголовком f через другой атом той же сложности. Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 34).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = d)\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ \neg(b = d)\ \&\ b \in \text{отрезок}(ac)\ \&$
   $a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(ac) \perp \text{прямая}(ad) \to$
   $l(ab) = -\cos(\angle(cbd))l(bd))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = C)\ \&$
   $\neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \to l(AB) = \cos(\angle(ABC))l(BC))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&$
   $\neg(B = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ B \in \text{отрезок}(AC) \to \angle(ABD) = -\angle(CBD) + \pi)$

4. Попытка использовать тождество, выражающее один из числовых атомов через несколько других, для перехода к тому же самому количеству числовых атомов. Теорема - соотношение для невырожденных числовых атомов, количество N которых не менее 2. Среди них выбирается атом t с заголовком f, являющийся одним из наиболее сложных атомов консеквента и имеющий единственное вхождение в консеквент. Находится тождество $B_1 = B_2$, выражающее числовой атом B_1 с заголовком f через другие невырожденные числовые атомы, количество которых более одного, причем такое, что все его переменные содержатся в B_1. Это тождество используется для преобразования t. Проверяется, что общее

количество невырожденных числовых атомов в новой теореме такое же, как в старой. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 38).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(a=c)\ \&\ \neg(b=c)\ \&\ a-$ точка $\&\ b-$ точка $\&\ c-$ точка $\rightarrow \sin(\angle(acb)+\angle(bac))l(bc)=\sin(\angle(bac))l(ac))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\rightarrow \sin(\angle(BAC))l(AC)=\sin(\angle(ABC))l(BC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(A=B)\rightarrow \angle(ABC)=-\angle(ACB)-\angle(BAC)+\pi)$

5. Попытка получить тождество для префиксной рекурсии из тождества для конкатенации. Теорема - тождество общей стандартизации, в консеквенте которого встречается подвыражение t с заголовком "конкатенация". Находится тождество $B_1=B_2$ перегруппировочного типа, заголовок левой части которого - символ "конкатенация". Оно применяется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется, что получено тождество для префиксной рекурсии. (Прием нормализация - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(b-$ слово $\rightarrow \{;b\}\cup\{a\}=\{a;b\})$

   из теоремы

   $\forall_{cd}(c-$ слово $\&\ d-$ слово $\rightarrow \{;c\}\cup\{;d\}=\{;d;c\})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}((a;b)=$ префикс(a,b)

   Здесь ";$d;c$" обозначает "конкатенация($d\,c$))", "$a;b$" - "конкатенация(набор(a)b)"; "$\{;b\}$" - "перечень(b)".

6. Повторное применение соотношения пропорциональности с отождествлением части антецедентов. Теорема - соотношение пропорциональности "$A_1\cdot A_2=A_3\cdot A_4$" для невырожденных числовых атомов A_1 и A_3. Все переменные теоремы содержатся в ее консеквенте; отсутствуют равенства в антецедентах. Хотя бы две переменные консеквента не входят в A_1, A_3. Число переменных теоремы не более 5. Имеется существенный антецедент, все параметры которого входят в A_1, A_3. В списке вывода находится тождество "$B_1\cdot B_2=B_3\cdot B_4$" - соотношение пропорциональности для невырожденных числовых атомов B_1, B_3. Допускается его совпадение с исходной теоремой. Переменные такого тождества переобозначаются так, чтобы не встречаться в исходной теореме. Проверяется, что некоторое переобозначение переменных без отождествлений переводит антецеденты дополнительного тождества, параметры которых включаются в параметры пары B_1, B_3, в антецеденты исходного тождества, параметры которых

встречаются в A_1, A_3. Проверяется, что после такого переобозначения второе тождество приобретает вид "$A_1 \cdot C_1 = A_3 \cdot C_2$. Антецеденты теорем объединяются, к ним добавляются утверждения "$\neg(A_1 = 0)$", "$\neg(A_3 = 0)$", а консеквентом становится "$C_1 \cdot A_4 = C_2 \cdot A_2$". (Прием пропорция - 16).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ceABCDE}(\neg(c = C)\ \&\ \neg(e = A)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ \neg(A = E)\ \&$
$\neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(\text{прямая}(eA) = \text{прямая}(AE))\ \&\ \neg(\text{прямая}(AE) =$
$\text{прямая}(BC))\ \&\ c \in \text{прямая}(eA)\ \&\ B \in \text{прямая}(AD)\ \&\ C \in \text{прямая}(AE)\ \&$
$c - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&$
$E - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(cC) \parallel \text{прямая}(eE)\ \&\ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(DE) \rightarrow$
$l(cC)l(AD) = l(eE)l(AB))$

из теоремы

$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$\neg(A = E)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ B \in \text{прямая}(AD)\ \&$
$\text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC)\ \&\ C \in \text{прямая}(AE)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AE) =$
$\text{прямая}(BC)) \rightarrow l(AD)l(AC) = l(AE)l(AB))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$\neg(A = E)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ B \in \text{прямая}(AD)\ \&$
$\text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC)\ \&\ C \in \text{прямая}(AE)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AE) =$
$\text{прямая}(AD)) \rightarrow l(AB)l(DE) = l(AD)l(BC))$

Характеристика - "пропорция$(l(AC), l(AE))$".

7. Попытка использовать ранее найденные тождества для численных характеристик двуместных операций. Теорема - тождество $x = A$, где x - нечисловая переменная, A - выражение с невырожденными числовыми атомами. Все эти атомы имеют вид $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, где $f_1, \ldots, f_n$ - символы одноместных операций. В разделе, к которому относится символ f_1, находится тождество вида $f_1(g(y, z)) = p_1$, где y, z - различные переменные, исчерпывающие список переменных данного тождества. В исходную теорему вместо x подставляется $g(y, z)$, после чего в разделах символов $f_2, \ldots, f_n$ находятся тождества того же вида, что и для f_1, позволяющие преобразовать $f_i(g(y, z))$. Полученный после таких преобразований результат упрощается. (Прием Числзнач - 1).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{nz}(\neg(z = 0)\ \&\ z - \text{комплексное}\ \&\ n - \text{натуральное} \rightarrow z^n = |z|^n \cos(n \cdot \arg(z)) +$
$|z|^n \sin(n \cdot \sin(\arg(z)))i)$

из теоремы

$\forall_z(z - \text{комплексное} \rightarrow z = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin \arg(z)))$

и дополнительных теорем

$\forall_z n(z - \text{комплексное}\ \&\ n - \text{число}\ \&\ 0 < n \rightarrow |z^n| = |z|^n)$

$\forall_z n(z - \text{комплексное}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ \neg(z = 0) \rightarrow \arg(z^n) = \text{нормарг}(n \cdot \arg(z)))$

8. Попытка проварьировать самое сложное подвыражение консеквента. Консеквент теоремы имеет вид "$\exists_x(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n)$". Рассматривается самое сложное подвыражение t консеквента. Проверяется, что оно содержит x и что оценка его сложности не меньше 5. По заголовку f этого выражения находится тождество общей стандартизации $B_1 = B_2$, заголовки обеих частей которого равны f, причем эти части - самые сложные подтермы самих себя. Оно применяется для преобразования t. Направление замены - обратное, причем проверяется, что связанная переменная x не затрагивается. Если антецеденты дополнительного тождества после унификации начинают содержать x, то они переформулируются при помощи задачи на описание (возможно, с некоторым их усилением) так, чтобы x из них было исключено. Эатем они добавляются к антецедентам исходной теоремы. Список антецедентов упрощается. (Прием допконтекст - 19).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bfn}(b - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ b \le n\ \&\ 0 \le b\ \&\ \text{Dom}(f) = \{1,\ldots,n\}\ \&$
   $f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \to \exists_a(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \{1,\ldots,n\}\ \&$
   $\text{card}(\text{образ}(f,a)) = b))$

   из теоремы

   $\forall_{bn}(b - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ b \le n\ \&\ 0 \le b \to \exists_a(\text{card}(a) = b\ \&\ a - \text{set}\ \&$
   $a \subseteq \{1,\ldots,n\}))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{Af}(A - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f)\ \&\ A \subseteq \text{Dom}(f) \to$
   $\text{card}(A) = \text{card}(\text{образ}(f,A)))$

9. Попытка перехода в консеквенте от одной точки к множеству точек (обычно - от момента времени к временному промежутку). Теорема - соотношение $A_1 = A_2$ для невырожденных числовых атомов. A_1 - числовой атом. Внутри A_2 выбирается неоднобуквенное атомарное нечисловое выражение t с заголовком f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$ двух атомарных нечисловых выражений с заголовком f, такое, что B_2 получается из B_1 заменой некоторой переменной x на переменную X, а в антецедентах имеется условие "$x \in X$". Переменные этого тождества переобозначены так, чтобы не входить в исходную теорему. Находится подстановка C, переводящая t в B_1. Эта подстановка переводит в x некоторую переменную y, имеющую единственное вхождение в A_2. Переменная y встречается в единственном антецеденте исходной теоремы, причем этот антецедент имеет вид "$y \in D$". Этот антецедент исключается, к прочим антецедентам применяется C, добавляются отличные от "$x \in X$" антецеденты дополнительной теоремы, а также утверждение "$X \subseteq D_1$", где D_1 - результат применения к D подстановки C. Консеквентом становится равенство $E_1 = E_2$, где E_1 - результат применения C к выражению A_1 и последующей замены x на X; E_2 - результат замены в A_2 подвыражения t на B_2 и одновременного применения подстановки C к остальной части A_2. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 93).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdeg}(g \subseteq \text{внутренность}(c)\ \&\ \text{мточка}(d)\ \&\ \text{движениепо}(d,e,c)\ \&$
   $\text{движется}(d,e,c)\ \&\ \text{констнорм}(d,e,g)\ \&\ \text{Числотр}(c)\ \&\ \text{Числотр}(g)\ \&$

мтело$(e) \to$ длина(силатрения$(d,e,g)) =$ длина(нормреакция$(d,e,g)) \cdot$ коэффтрения$(d,e))$

из теоремы

$\forall_{abct}(t \in$ внутренность(c) & движениепо(a,b,c) & движется(a,b,c) & Числотр$(c) \to$ длина(силатрения$(a,b,t)) =$ длина(нормреакция$(a,b,t)) \cdot$ коэффтрения$(a,b))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abtT}($Числотр(T) & мточка(a) & мтело(b) & констнорм(a,b,T) & $t \in T \to$ нормреакция$(a,b,T) =$ нормреакция$(a,b,t))$

10. Попытка перейти к элементу множества значений параметра в атомарном выражении - одной из частей равенства в консеквенте. Теорема - нечисловое равенство $A_1 = A_2$. По типу значения A_1 находится атомарное подвыражение D консеквента, имеющее этот тип. По заголовку f выражения D находится другая теорема - равенство $B_1 = B_2$, у которого B_2 получено из B_1 заменой переменной T на t, причем имеется антецедент "$t \in T$". Дополнительная теорема используется для преобразования D. Результат упрощается. (Прием Равно - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bce}(c \in e$ & мточка(b) & Равндвиж(b,e) & Числотр$(e) \to$ Сила$(b,c) =$ вектор0$)$

из теоремы

$\forall_{aT}($мточка(a) & Равндвиж(a,T) & Числотр$(T) \to$ Сила$(a,T) =$ вектор0$)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{atKT}($мточка(a) & Числотр(T) & КонстСила(a,T) & $t \in T \to$ Сила$(a,T) =$ Сила$(a,t))$

Дополнительная теорема определяет подстановку вместо переменной

1. Замена переменной для функции на операцию над функциями и попытка обратной свертки. Теорема - определении операции над функциями, имеющее вид "$F(\ldots g \ldots) = \lambda_{x_1 \ldots x_k}(t,P)$"; g - переменная, для которой имеется антецедент "$g -$ функция". По типу r значений функции g находится другое определение функции, имеющее вид "$B = \lambda_{y_1 \ldots y_m}(s,Q)$", где тип значений выражения s равен r. Переменные второй теоремы переобозначаются так, чтобы не входить в первую. Антецеденты второй теоремы объединяются с результатами подстановки в антецеденты первой выражения "$\lambda_{y_1 \ldots y_m}(s,Q)$" вместо переменной g. Проверяется непротиворечивость этого списка S. Результат подстановка в "$\lambda_{x_1 \ldots x_k}(t,P)$" выражения "$\lambda_{y_1 \ldots y_m}(s,Q)$" вместо переменной g сначала упрощается, затем сворачивается при помощи задачи на преобразование, с разблокировкой приемов, основанных на уже полученных в списке вывода теоремах. Проверяется, что результат R не содержит описателя "отображение". Создается импликация с антецедентами S и консеквентом "$F(\ldots B \ldots) = R$". Она упрощается. (Прием определение - 208).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(\text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ b - \text{функция}\ \&\ a - \text{число} \to a \cdot (-b) = -(ab))$

из теоремы

$\forall_{af}(a - \text{число}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \to af = \lambda_x(af(x), x \in \text{Dom}(f)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_f(f - \text{функция}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \to -f = \lambda_x(-f(x), x \in \text{Dom}(f)))$

Консеквент переформулируется в терминах параметров уравнения для координат множества объектов, предоставляемого дополнительным тождеством

1. Попытка использования координат для исключения промежуточного объекта. Консеквент теоремы имеет вид "$t_1 \in t_2$". Список S_1 всех антецедентов, содержащих подвыражение t_2, непуст. Наиболее сложный заголовок этих антецедентов - символ f. По символу f находится такое тождество "$\text{коорд}(B_1, K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(B_2)$", что список S_2 всех его антецедентов, содержащих B_1, имеет равную длину со списком S_1, а f - самый сложный заголовок утверждений этого списка. Если рассмотреть все антецеденты $C_1, \ldots, C_m$, параметры которых пересекаются с параметрами X выражения B_1, то из оставшихся антецедентов вытекает существование значений X, для которых истинны все $C_1, \ldots, C_m$ Переменные дополнительного тождества переобозначены так, что не входят в первую теорему. Находится подстановка D вместо параметров списка S_2, переводящая список S_2 в S_1, а выражение B_1 - в t_2. Проверяется, что список всех не вошедших в S_1 антецедентов первой теоремы , параметры которых пересекаются с параметрами t_2, является подсписком списка пересекающихся с этими параметрами результатов применения подстановки D к не вошедшим в S_2 антецедентам второй теоремы. Затем создается импликация, антецеденты которой суть не имеющие параметров терма t_2 антецеденты первой теоремы и не имеющие этих параметров результаты применения D к антецедентам второй теоремы. Консеквентом служит утверждение "$\text{коорд}(t_1, K) \in \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(B_2)$". Результат упрощается. (Прием отношение - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdgrABCDE}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \text{коорд}(E, r) = (d, g)\ \&$
   $\text{коорд}(\text{прямая}(CD), r) = \text{set}_{jk}(c + aj + bk = 0\ \&\ j - \text{число}\ \&\ k - \text{число})\ \&$
   $E \in \text{прямая}(CD)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&$
   $c - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
   $\text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB)\ \&\ \text{прямкоорд}(r) \to$
   $\exists_{hi}(ag + bh - ai - bd = 0\ \&\ \text{коорд}(A, r) = (h, i)\ \&\ h - \text{число}\ \&\ i - \text{число}))$

   из теоремы

   $\forall_{efABCDE}(\neg(e = f)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ E \in \text{прямая}(ef)\ \&$
   $E \in \text{прямая}(CD)\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ f - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&$
   $C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(ef) \perp \text{прямая}(CD)\ \&$
   $\text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \to A \in \text{прямая}(ef))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcpqABCDEK}($ $a-$число & $b-$число & $c-$число & $A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & прямкоорд(K) & $\neg(B=C)$ & $\neg(A=D)$ & коорд(прямая$(AD),K) = \text{set}_{xy}(ax+by+c=0$ & $x-$число & $y-$число) & прямая$(AD) \perp$ прямая(BC) & $E \in$ прямая(BC) & коорд$(E,K) = (p,q) \rightarrow$ коорд(прямая$(BC),K) = \text{set}_{uv}(bu-av+aq-bp=0$ & $u-$число & $v-$число))

Дополнительное тождество преобразует консеквент, после чего предпринимается замена переменной

1. Примерка тождеств, упрощающих выражение под описателем "отображение". Теорема - импликация с консеквентом "$F(\lambda_x(A_2,A_1),A_3)$", определяющим характеристику A_3 некоторого отображения (например, превообразную при интегрировании). По заголовку f выражения A_2 находится исключающее описатель "отображение" тождество вида $B_1=B_2$, заголовок левой части которого равен f. Оно применяется для преобразования A_2. Для подвыражений T преобразованного A_2, имеющих своим корневым операндом переменную для функции, выбираются новые переменные для функций g, и после решения уравнений вида $T=g(X)$ происходит переход в теореме к переменным g. Результат упрощается. (Прием функ - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ae}(\text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R}$ & $a-$функция & первообразная$(a,e) \rightarrow$ первообразная$(\lambda_x(-a(x), x \in \text{Dom}(e)), \lambda_c(-e(c), c \in \text{Dom}(e))))$

   из теоремы

   $\forall_g(\forall_x(x \in \text{Dom}(g) \rightarrow$ дифференцируема$(g,x))$ & $\text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R}$ & $\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}$ & $g-$функция $\rightarrow$ первообразная$(\lambda_x($производная$(g,x), x \in \text{Dom}(g)), g))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ae}(\text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R}$ & $\text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R}$ & $a \in \text{Dom}(e)$ & $e-$функция & дифференцируема$(e,a) \rightarrow$ производная$(\lambda_c(-e(c), c \in \text{Dom}(e)), a) =$ $-$ производная$(e,a))$

   Исходная теорема получила характеристику "функ" после того, как в левую часть эквивалентности для определения первообразной был подставлен описатель "отображение", подсказанный правой частью.

Подвыражение консеквента теоремы унифицируется с одной из альтернатив условного выражения в дополнительном тождестве, после чего предпринимается попытка заменить это подвыражение на все условное выражение

1. Использование дополнительного тождества свертки условного выражения. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$. Заголовки обеих частей равны. Левая часть отличается от правой лишь заменой некоторого подвыражения t_1 на t_2. По заголовку f выражения t_1 находится тождество свертки

вида "(r_1 при B_1, иначе r_2) = B_2", у которого выражение r_1 имеет заголовок f (рассматривается также аналогичный случай для r_2) и содержит все переменные теоремы. Предварительно переменные тождества переобозначаются так, чтобы не входить в исходную теорему. Находится подстановка C, переводящая r_1 в t_1 и одновременно r_2 в t_2. Определяется результат A_3 замены в A_1 выражения t_1 на результат применения C к B_2. Создается импликация, антецеденты которой суть результаты применения C к антецедентам исходной и дополнительной теоремы, а консеквент - эквивалентность $A_3 \leftrightarrow A_4$. Она упрощается. (Прием общнорм - 71).

Пример: вывод теоремы

$\forall_m(m - \text{число} \rightarrow |m| - \text{целое} \leftrightarrow m - \text{целое})$

из теоремы

$\forall_m(m - \text{число} \rightarrow -m - \text{целое} \leftrightarrow m - \text{целое})$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = (a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } -a))$

Одно или несколько дополнительных тождеств преобразуют консеквент, исключая некоторую его переменную. По этой переменной антецеденты сворачиваются

1. Попытка перехода в консеквенте от одной точки множества к множеству точек (обычно - от момента времени к временному промежутку). Теорема - кванторная импликация для приема вывода следствий в посылках. Внутри ее консеквента выбирается неоднобуквенное атомарное нечисловое выражение t с заголовком f. По символу f находится равенство $B_1 = B_2$ двух атомарных нечисловых выражений с заголовком f, такое, что B_2 получается из B_1 заменой некоторой переменной x на переменную X, а в антецедентах имеется условие "$x \in X$". Переменные этого равенства переобозначены так, чтобы не входить в исходную теорему. Находится подстановка C, переводящая t в B_1. Эта подстановка перевходит в x некоторую переменную y, имеющую единственное вхождение в консеквент исходной теоремы. Переменная y встречается в единственном антецеденте исходной теоремы, причем этот антецедент имеет вид "$y \in D$". Этот антецедент исключается, к прочим антецедентам применяется C, добавляются отличные от "$x \in X$" антецеденты дополнительной теоремы, а также утверждение "$X \subseteq D_1$", где D_1 - результат применения к D подстановки C. Консеквентом становится результат применения C к консеквенту исходной теоремы и последующей замены x на X. Результат упрощается. (Прием вывод - 93).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abehK}(h \subseteq \text{внутренность}(a)$ & движвлево(b, K, a) & неподв(e, a) & мточка(b) & движениепо(b, e, a) & движется(b, e, a) & Трехмерн(K) & Числотр(a) & Числотр(h) & мтело(e) & констрение$(b, e, h) \rightarrow$ вправо(силатрения$(b, e, h), K))$

из теоремы

$\forall_{acdfK}(f \in$ внутренность(a) & движвлево(c, K, a) & неподв(d, a) & движениепо(c, d, a) & движется(c, d, a) & Трехмерн(K) & Числотр$(a) \rightarrow$ вправо(силатрения$(c, d, f), K))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abtT}($Числотр(T) & мточка(a) & мтело(b) & констрение(a, b, T) & $t \in T \rightarrow$ силатрения$(a, b, T) =$ силатрения$(a, b, t))$

2. Попытка перехода от момента времени к временному промежутку. Аналогично предыдущему, но теорема - соотношение для атомарных нечисловых выражений. При этом вместо одног дополнительного тождества используется несколько - для перехода в нескольких подвыражениях t от переменной x к переменной X (Прием Атомарное - 26).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abfT}(f \subseteq T$ & мточка(a) & движениепо(a, b, T) & констсила(a, b, f) & мповерхн(b) & констнорм(a, b, f) & Числотр(f) & Числотр$(T) \rightarrow$ сила$(a, b, f) =$ силатрения$(a, b, f) +$ нормреакция$(a, b, f))$

из теоремы

$\forall_{abt}($Числотр(T) & мточка(a) & мповерхн(b) & движениепо(a, b, T) & $t \in T \rightarrow$ сила$(a, b, t) =$ силатрения$(a, b, t) +$ нормреакция$(a, b, t))$

и дополнительных теоремы

$\forall_{abtT}($Числотр(T) & мточка(a) & мтело(b) & констсила(a, b, T) & $t \in T \rightarrow$ сила$(a, b, T) =$ сила$(a, b, t))$

$\forall_{abtT}($Числотр(T) & мточка(a) & мтело(b) & констрение(a, b, T) & $t \in T \rightarrow$ силатрения$(a, b, T) =$ силатрения$(a, b, t))$

$\forall_{abtT}($Числотр(T) & мточка(a) & мтело(b) & констнорм(a, b, T) & $t \in T \rightarrow$ нормреакция$(a, b, T) =$ нормреакция$(a, b, t))$

3.3 Вывод эквивалентности, комбинирующей уравнения

1. Использование дополнительного группировочного тождества для получения эквивалентности, комбинирующей уравнения с целью исключения части числовых атомов. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, обеспечивающее уменьшение оценки сложности. По заголовку f выражения A_1 находится дополнительное тождество вида $h(f(x, z), B) = f(x, g(y, z))$, где h - ассоциативная и коммутативная операция. Оно применяется для преобразования A_1. Получается теорема с консеквентом вида $h(Q_1, Q_2) = f(Q_3, Q_4)$. Для новых переменных a, b в антецеденты выносится равенство $h(Q_1, a) = b$. Выбираются еще две новые переменные c, d, и консеквентом становится эквивалентность $h(a, c, f(Q_3, Q_4) \leftrightarrow h(b, c, Q_2) =$

d. Дополнительно для упрощения левой части предпринимается замена переменной: некоторое неоднобуквенное подвыражение с переменной X обозначается переменной Y. Теорема создается для приема, идентифицирующего левую часть консеквента с некоторым уравнением, а равенство в антецедентах - с другим уравнением. Это явно указывается в ее единственной характеристике. (Прием упрощение - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdfgh}(a - \text{число} \ \& \ g - \text{rational} \ \& \ d - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(d) - \text{even}) \ \& \ \text{числитель}(g) - \text{even} \ \& \ |a|^d b = c \rightarrow bfa^g = h \leftrightarrow cf|a|^{g-d} = h)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \rightarrow |a|^b = a^b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$

3.4 Одновременное преобразование антецедента и консеквента

1. Попытка проварьировать теорему с помощью дополнительного определения. Теорема имеет вид "$A_1 \ \& \ A_2 \rightarrow A_3$", где A_1, A_2 - бесповторные существенные антецеденты, A_3 - бесповторный консеквент; каждый - не более чем с двумя переменными, причем переменные A_3 - симметрическая разность множеств переменных A_1, A_2. Утверждения A_1, A_2 имеют один и тот же заголовок f. Находится эквивалентность "$B_1 \leftrightarrow B_2 \ \& \ B_3$" - определение утверждения B_1, у которого B_2 имеет заголовок f и содержит все переменные теоремы. Определяются подстановка C_1, переводящая B_2 в A_1, и подстановка C_2, переводящая B_2 в A_3. Добавляются необходимые антецеденты, чтобы можно было заменить A_1 на результат применения C_1 к B_1, а A_3 - на результат применения C_2 к B_1. Результат упрощается. (Прием транзитоперанд - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{dGM}(\text{орграф}(d) \ \& \ \text{цепь}(M, G) \ \& \ \text{подграф}(G, d) \rightarrow \text{цепь}(M, d))$

   из теоремы

   $\forall_{dGM}(\text{орграф}(d) \ \& \ \text{маршрут}(M, G) \ \& \ \text{подграф}(G, d) \rightarrow \text{маршрут}(M, d))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{MG}(\text{орграф}(G) \rightarrow \text{цепь}(M, G) \leftrightarrow \text{маршрут}(M, G) \ \& \ \text{различны}(M(2)))$

3.5 Использование эквивалентности для варьирования консеквента теоремы

3.5.1 Варьирование тождества с условным выражением при помощи эквивалентности

1. Попытка проварьировать условие в условном выражении из заменяемой части тождества свертки, используя эквивалентность общей стандартизации. Теорема - тождество сокращенной перезаписи $A_1 = A_2$, у которого в левой части встречается условное выражение "$(t_1$ при $P,$ иначе $t_2)$", все переменные которого свободны в A_1. Внутри P выбирается подутверждение Q с заголовком f. По символу f находится эквивалентность общей стандартизации $B_1 \leftrightarrow B_2$ с элементарными бесповторными частями и заголовком f левой части. Если Q не имеет константного корневого операнда, то и B_1 не имеет. Дополнительная эквивалентность применяется для преобразования Q. Результат упрощается. (Прием свертка - 50).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ac}(a - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ 0 \le c \to c|a| = (ac \text{ при } 0 < a \ \& \ 0 < c, \text{ иначе } -ac))$

   из теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ 0 \le c \to c|b| = (-bc \text{ при } b < 0 \ \& \ 0 < c, \text{ иначе } bc))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to -a < 0 \leftrightarrow 0 < a)$

2. Попытка проварьировать тождество свертки условного выражения путем применения к условию сокращающей эквивалентности. Аналогично предыдущему, но используется эквивалентность общей стандартизации $B_1 \leftrightarrow B_2$, у которой заменяемая часть имеет единственную небесповторную переменную, а заменяющее утверждение бесповторно. (Прием свертка - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cde}(c - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ e - \text{число} \to \max(c + e, d + e) = e + \max(c, d))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \to \max(a, b) = (b \text{ при } a \le b, \text{ иначе } a))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число} \to a \le b \leftrightarrow a + c \le b + c)$

3. Попытка упрощения равенства переменной в заменяющей части. Теорема - тождество вида "$A = (t_1$ при $P,$ иначе $t_2)$", преобразовующее сложное выражение A в условное выражене с более простыми операндами. Внутри правой части выбирается равенство $x = t$, где x - переменная, тип значения Q которой определяется антецедентом $Q(x)$. По символу Q находится эквивалентность общей

стандартизации "$y = B_1 \leftrightarrow B_2$", где тип значения переменной y равен Q. Она применяется для преобразования равенства $x = t$. Результат упрощается. (Прием варианты - 17).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{boolean} \ \& \ c - \text{boolean} \rightarrow b \cdot \neg(c) = (1 \text{ при } b = 1 \ \& \ c = 0, \text{ иначе } 0))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \cdot b = (1 \text{ при } a = 1 \ \& \ b = 1, \text{ иначе } 0))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{boolean} \rightarrow \neg(a) = 1 \leftrightarrow a = 0)$

3.5.2 Упрощение заменяемой части эквивалентности другой эквивалентностью

Применение эквивалентности общей стандартизации

1. Попытка упростить заменяемую часть эквивалентности при помощи стандартизирующей эквивалентности двух элементарных бесповторных утверждений. Теорема - эквивалентность $A_0 \leftrightarrow A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n$, декомпозирующая элементарное утверждение A_0 в конъюнкцию бесповторных утверждений. Внутри A_0 выбирается подутверждение P с заголовком f. По символу f находится эквивалентность общей стандартизации $B_1 \leftrightarrow B_2$, заменяемая часть которой имеет заголовок f, причем обе части - элементарные бесповторные утверждения. Она применяется для преобразования P. Результат упрощается. (Прием и - 40).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abce}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow a \subseteq e \cup (b \setminus c) \leftrightarrow a \subseteq b \cup e \ \& \ a \cap c \subseteq e)$

   из теоремы

   $\forall_{bcd}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow d \subseteq b \setminus c \leftrightarrow d \subseteq b \ \& \ \text{непересек}(c, d))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow b \subseteq c \cup e \leftrightarrow b \setminus c \subseteq e)$

2. Попытка упростить заменяемую часть эквивалентности при помощи стандартизирующей эквивалентности двух элементарных бесповторных утверждений. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное утверждение P с заголовком f. По символу f находится эквивалентность общей стандартизации $B_1 \leftrightarrow B_2$, у которой обе части суть элементарные бесповторные утверждения, причем заголовок левой части - f. Эта эквивалентность применяется для преобразования P. Результат проверяется на неизбыточность и упрощается. (Прием общнорм - 31).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{be}(b - \text{set} \rightarrow b = \{e\} \leftrightarrow \forall_c(c = e \leftrightarrow c \in b))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \to a = b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \leftrightarrow c \in b))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a = b \leftrightarrow a \in \{b\})$

3. Попытка упростить заменяемую часть эквивалентности при помощи стандартизирующей эквивалентности двух элементарных бесповторных утверждений. Аналогично предыдущему, но теорема - эквивалентность, используемая для сокращенной переформулировки утверждений. Для упрощения привлекаются задачи на описание. (Прием сборка - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acd}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \to c \subseteq d \ \& \ a \in d \leftrightarrow c \cup \{a\} \subseteq d)$

   из теоремы

   $\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \to b \cup c \subseteq e \leftrightarrow b \subseteq e \ \& \ c \subseteq e)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{be}(e - \text{set} \to \{b\} \subseteq e \leftrightarrow b \in e)$

4. Попытка упростить заменяемую часть эквивалентности при помощи стандартизирующей эквивалентности двух элементарных бесповторных утверждений. Аналогично предыдущему, но теорема - эквивалентность, преобразующая некоторое утверждение A_1 с помощью утверждений в антецедентах A_2, параметры которого не пересекаются с параметрами A_1, причем заменяющая часть содержит параметры как A_1, так и A_2. (Прием усмгруппа - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abef}(a - \text{число} \ \& \ b = a \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \to f = e \leftrightarrow a - f = b - e)$

   из теоремы

   $\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a = b \to c = d \leftrightarrow a + c = b + d)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to -b = -a \leftrightarrow b = a)$

5. Попытка упростить конъюнктивный член заменяемого утверждения. Теорема - эквивалентность общей стандартизации без антецедентов, у которой в заменяемой части расположена конъюнкция. Выбирается некоторый операнд P этой конъюнкции. По его заголовку f находится эквивалентность общей стандартизации $B_1 \leftrightarrow B_2$, у которой обе части - бесповторные элементарные утверждения с единственной переменной, причем заголовок левой части равен f. Эта эквивалентность используется для преобразования P. Результат упрощается. (Прием общнорм - 74).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a - \text{целое} \to 0 < a \leftrightarrow a - \text{натуральное})$

из теоремы

$\forall_n(n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n - 1 \leftrightarrow n - \text{натуральное})$

и дополнительной теоремы

$\forall_n(n - \text{целое} \to 0 < n \leftrightarrow 0 \leq n - 1)$

6. Попытка ввести дополнительное ограничение на переменную для ее исключения из заменяемой части. Теорема - эквивалентность $P(a, f(x, y)) \leftrightarrow A$, созданная для исключения вспомогательных параметров в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". Выражение a однобуквенное; x, y - переменные. По символу P находится эквивалентность общей стандартизации $P(b, f(z, v)) \leftrightarrow B$, у которой b однобуквенное; z, v - переменные, а B - двуместное отношение с однобуквенными операндами, содержащее лишь одну из переменных z, v. Эта эквивалентность применяется для преобразования левой части исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием вспомописание - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCabfghk}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ g = (A, f, h) \ \& \ \text{коорд}(B, g) = (a, 0) \ \& \ \text{коорд}(C, g) = (b, k) \ \& \ 0 < a \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{прямкоорд}(g) \to 0 < b \leftrightarrow 0 < -\angle(BAC) + \pi/2)$

   из теоремы

   $\forall_{ABCcfghjk}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ g = (A, f, h) \ \& \ \text{коорд}(B, g) = (c, 0) \ \& \ \text{коорд}(C, g) = (j, k) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{прямкоорд}(g) \to 0 < cj \leftrightarrow 0 < -\angle(BAC) + \pi/2)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to 0 < b \leftrightarrow 0 < ab)$

Применение эквивалентности конъюнктивно-дизъюнктивной декомпозиции

1. Применение дизъюнктивной декомпозирующей эквивалентности к антецеденту заменяемой импликации и последующая свертка подимпликаций. Теорема - эквивалентность для кванторной свертки: "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n \to A_0) \leftrightarrow D$". Выбирается элементарный антецедент A_1 с заголовком f. По символу f находится эквивалентность "$B_0 \leftrightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_m$", выполняющая дизъюнктивную декомпозицию элементарного утверждения B_0 с заголовком f. Эта эквивалентность применяется для преобразования A_i (вместо $x_1, \ldots, x_k$ подстановки не происходит). Кванторная импликация с дизъюнкцией в антецеденте распадается на m кванторных импликаций, каждая из которых сворачивается в элементарное утверждение с помощью задачи на преобразование (блокировки снимаются). Получается кванторная эквивалентность с конъюнкцией элементарных утверждений в левой части. Она упрощается. (Прием кванторнаясвертка - 13).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bef}(e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ f \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{нижняяграань}(b, e \cup f) \leftrightarrow$
$\text{нижняяграань}(b, e) \ \& \ \text{нижняяграань}(b, f))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{нижняяграань}(b, a) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$

2. Попытка использовать разделяющую эквивалентность для самого сложного подутверждения в заменяемом кванторе. Теорема - эквивалентность "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n) \leftrightarrow A_0$" для приема развертки квантора существования в дизъюнкцию. В дизъюнкцию разворачивается правая часть, заголовком которой тоже служит квантор существования. Наиболее сложное подвыражение t не содержащих символа "значение" конъюнктивных членов под левым квантором существования единственное. По его заголовку f находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$, декомпозирующая утверждение B_1 в конъюнкцию B_2 с разделением некоторой пары переменных, находящихся внутри B_1 под операцией f. Эта эквивалентность используется для преобразования содержащего t подутверждения левой части исходной теоремы. Левая часть результата - квантор существования, и его подкванторные утверждения разрешаются относительно переменных его связывающей приставки. Результат упрощается. (Прием дизъюнкциявсех - 3).

Пример: вывод теоремы приема

$\forall_{bde}(d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \rightarrow \exists_c(b(c) \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ c \leq e \ \& \ d \leq c) \leftrightarrow$
$\exists_a(a \in \{0, \ldots, e - d\} \ \& \ b(a + d)))$

из теоремы приема

$\forall_{bmn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow \exists_c(c \in \{m, \ldots, n\} \ \& \ b(c)) \leftrightarrow$
$\exists_a(a \in \{0, \ldots, n - m\} \ \& \ b(a + m)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{mnx}(m{-}\text{целое} \ \& \ n{-}\text{целое} \rightarrow x \in \{m, \ldots, n\} \leftrightarrow x{-}\text{целое} \ \& \ 0 \leq x{-}m \ \& \ 0 \leq n{-}x)$

3. Попытка опрокинуть эквивалентность общей стандартизации путем расшифровки фрагмента заменяемого терма. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$. По заголовку f конъюнктивного члена t левой части находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$ декомпозиции бесповторного элементарного утверждения B_1 с заголовком f в конъюнкцию бесповторных элементарных утверждений B_2. Она применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием общнорм - 42).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \text{точкалуча}(A, B, C) \leftrightarrow$
$\neg(A = B) \ \& \ \neg(A \in \text{интервал}(BC)) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \to \text{точкалуча}(A, B, C) \leftrightarrow \neg(A = B)\ \&\ C \in \text{луч}(AB))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B) \to C \in \text{луч}(AB) \leftrightarrow C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \neg(A \in \text{интервал}(BC)))$

4. Попытка упростить заменяемую часть с помощью эквивалентности, соединяющей два элементарных утверждения в одно. Теорема - эквивалентность $A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n \leftrightarrow A_0$, сворачивающая конъюнкцию в утверждение A_0. По заголовку f некоторого A_i находится эквивалентность $B_1\ \&\ B_2 \leftrightarrow B_0$, сворачивающая конъюнкцию двух элементарных бесповторных утверждений B_1, B_2 с равными списками переменных в одно элементарное бесповторное утверждение. B_1 имеет заголовок f. Эта эквивалентность используется для преобразования A_i и некоторого другого A_j. Результат упрощается. (Прием сборка - 16).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{mx}(x - \text{число}\ \&\ m - \text{целое} \to x \in \{m, \ldots, m\} \leftrightarrow m = x\ \&\ x - \text{целое})$

   из теоремы

   $\forall_{mnx}(m{-}\text{целое}\ \&\ n{-}\text{целое} \to x \in \{m, \ldots, n\} \leftrightarrow x{-}\text{целое}\ \&\ 0 \le x{-}m\ \&\ 0 \le n{-}x)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to 0 \le a - b\ \&\ 0 \le b - a \leftrightarrow a = b)$

5. Попытка упростить подкванторное утверждение при помощи эквивалентности, сильно зависящей от типа значения переменной. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$ кванторной расшифровки утверждения A_1. Среди антецедентов имеется утверждение $P(x)$, указывающее тип P значения переменной x. По символу P находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$ преобразования утверждения B_1 в конъюнкцию бесповторных элементарных утверждений, у которой все антецеденты - одноместные предикаты с заголовком P, причем они не входят в список утверждений, сопровождающих консеквент по о.д.з. Внутри A_1 находится подутверждение Q с тем же заголовком, что у B_1, причем это подутверждение и B_1 имеют также общий заголовок некоторого корневого операнда. Дополнительная эквивалентность используется для преобразования Q. Результат упрощается. (Прием развертка - 138).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_m(m - \text{натуральное} \to m = 1 \leftrightarrow m \mid 1)$

   из теоремы

   $\forall_{mn}(m - \text{натуральное}\ \&\ n - \text{натуральное} \to \exists_k(n = km\ \&\ k - \text{натуральное}) \leftrightarrow m \mid n)$

   и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{натуральное } \& \ b - \text{натуральное} \to ab = 1 \leftrightarrow a = 1 \ \& \ b = 1)$

6. Варьирование эквивалентности кванторной свертки с помощью простейших дизъюнктивно-конъюнктивных декомпозиций. Теорема - эквивалентность кванторной свертки $\forall_x(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n \to A_0) \leftrightarrow D$. По заголовку f некоторого A_i находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$ декомпозиции элементарного бесповторного утверждения B_1 с заголовком f в конъюнкцию B_2 элементарных бесповторных утверждений. Она используется для преобразвания A_i. Результат упрощается. Рассматривается также случай преобразования A_0 после контрапозиции, а также случаи, когда заголовками утверждений служат отрицания. По мере надобности, вместо конъюнктивной декомпозиции используется дизъюнктивная. (Прием кванторнаясвертка - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bef}(b - \text{set } \& \ e - \text{set } \& \ f - \text{set} \to e \cap f \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in e \ \& \ c \in f \to c \in b))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set } \& \ b - \text{set} \to a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \to c \in b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(b - \text{set } \& \ c - \text{set} \to a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$

Применение эквивалентности, выполняющей кванторную расшифровку

1. Применение параметрического описания к антецеденту заменяемой импликации. Теорема - эквивалентность "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n \to A_0) \leftrightarrow D$" для свертки квантора общности в бескванторное утверждение. Выбирается элементарное A_i с заголовком f. По символу f находится явное параметрическое описание $B_1 \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_n}(z = t \ \& \ B_2)$ значений переменной z - параметра утверждения B_1 с заголовком f. Оно применяется для преобразования A_i. Результат упрощается. (Прием кванторнаясвертка - 14).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bef}(e - \text{set } \& \ e \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \text{образ}(f, e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ f - \text{функция } \& \ b - \text{число} \to \text{нижняягрань}(b, \text{образ}(f, e)) \leftrightarrow \forall_g(g \in e \to b \leq f(g)))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set } \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \to \text{нижняягрань}(b, a) \to \forall_c(c \in a \to b \leq c))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abf}(f - \text{функция } \& \ b - \text{set } \& \ b \subseteq \text{Dom}(f) \to a \in \text{образ}(f, b) \leftrightarrow \exists_x(a = f(x) \ \& \ x \in b))$

2. Использование эквивалентности, преобразующей элементарный антецедент заменяемой импликации к виду квантора существования. Аналогично предыдущему, но дополнительная теорема $B_1 \leftrightarrow B_2$ выполняет кванторную расшифровку элементарного утверждения B_1. Если B_2 - квантор существования, то B_1

имеет заголовок f; если B_2 - квантор общности, то B_1 - отрицание утверждения с заголовком f. (Прием кванторнаясвертка - 20).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{be}(\bigcup(e) \subseteq \mathbb{R}$ & $e -$ функция & $b -$ число & семействомножеств$(e) \rightarrow$ нижняягрань$(b, \bigcup(e)) \leftrightarrow \forall_f(f \in \mathrm{Dom}(e) \rightarrow$ нижняягрань$(b, e(f))))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a -$ set & $a \subseteq \mathbb{R}$ & $b -$ число $\rightarrow$ нижняягрань$(b, a) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{af}(f -$ функция & семействомножеств$(f) \rightarrow a \in \bigcup(f) \leftrightarrow \exists_x(x \in \mathrm{Dom}(f)$ & $a \in f(x)))$

Применение эквивалентности, выполняющей расшифровку по определению

1. Расшифровка подутверждения заменяемой части по определению для исключения описателя "класс". Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, у которой заменяемая часть A_1 содержит описатели, а заменяющая часть A_2 не имеет связанных переменных и сложность ее не превосходит сложности заменяемой части. Внутри A_1 выбирается маскимально сложный подтерм - утверждение P с заголовком f, содержащее описатель "класс". Находится определение $B_1 \leftrightarrow B_2$ утверждения B_1 с заголовком f, у которого определяющая часть не содержит описателей. Оно используется для преобразования подтерма P. Результат упрощается. Проверяется, что консеквент новой теоремы не содержит описателя "класс". (Прием нормсвязок - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abd}(\neg(a^2 + b^2 = 0)$ & $a -$ целое & $b -$ целое $\rightarrow d =$ нод$(a, b) \leftrightarrow$
   $\forall_f(f -$ натуральное & $f \mid a$ & $f \mid b \rightarrow f \leq d)$ & $d -$ натуральное & $d \mid a$ & $d \mid b)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a -$ целое & $b -$ целое & $\neg(a^2 + b^2 = 0) \rightarrow c =$ нод$(a, b) \leftrightarrow$
   наибольший$(c, \mathrm{set}_n(n -$ натуральное & $n \mid a$ & $n \mid b)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(b -$ set & $b \subseteq \mathbb{R} \rightarrow$ наибольший$(a, b) \leftrightarrow a \in b$ & $\forall_c(c \in b \rightarrow c \leq a))$

Применение варьирующей эквивалентности

1. Попытка использовать перестановочную эквивалентность, исключающую часть символов операций. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, используемая для приема сокращенной переформулировки утверждения. Рассматривается конъюнктивный член P левой части. По его заголовку f находится эквивалентность

$B_1 \leftrightarrow B_2$ перегруппировочного типа, у которой заголовок утверждения B_1 равен f. Список S_1 логических символов правой части (с учетом кратности) - собственный подсписок такого списка S_2 левой части. Список логических символов утверждения P (с учетом кратности) - подсписок списка S_2, причем символы в обоих списках одинаковые. Дополнительная эквивалентность используется для преобразования P. Результат упрощается. (Прием сборка - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cd}(c - \text{число } \& \ d - \text{число} \rightarrow c + d \leq 0 \ \& \ 0 \leq c - d \leftrightarrow d + |c| \leq 0)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 \leq a + b \ \& \ 0 \leq b - a \leftrightarrow 0 \leq b - |a|)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 \leq -a - b \leftrightarrow a + b \leq 0)$

Применение усиливающей эквивалентности

1. Попытка исключить квантор при помощи эквивалентности, формирующей значение переменной. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$ для кванторной расшифровки бесквантороного утверждения A_1. Внутри A_2 выбирается подутверждение P с отличным от символа "принадлежит" заголовком f, имеющее связанные в A_2 переменные. По символу f находится эквивалентность $B \leftrightarrow x = t$, у которой заголовком утверждения B служит символ f, а x - переменная, не входящая в t. Эта эквивалентность используется для преобразования P. Результат упрощается. Проверяется, что консеквент новой теоремы не имеет связанных переменных. (Прием развертка - 131).

2. Попытка использовать эквивалентность, ослабляющую ограничение на тип значения двуместного отношения. Теорема - эквивалентность $\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A)n) \leftrightarrow D$ для приема развертки квантора существования в дизъюнкцию. Заголовок правой части - квантор существования, который, собственно, и разворачивается в дизъюнкцию. Выбирается A_i, имеющее вид $P(x, t)$, где x - переменная, для которой некоторый антецедент $Q(x)$ указывает ее тип значения Q. Эта переменная имеет единственное вхождение в левую часть. По символу P находится эквивалентность $R(y, z) \leftrightarrow P(s_1, s_2)$, у которой y, z - переменные, причем тип значения Q одной из них - собственный подтип значения другой. В правой части оба выражения s_1, s_2 имеют тип Q. Эта эквивалентность используется (в направлении справа налево) для преобразования A_i. Результат упрощается. Новая теорема сопровождается той же характеристикой, что исходная. (Прием дизъюнкциявсех - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bfg}(f - \text{число } \& \ g - \text{число} \rightarrow \exists_c(c < g \ \& \ b(c) \ \& \ c - \text{целое } \& \ f \leq c) \leftrightarrow$
$\exists_a(a \in \{0, \ldots, -1 - [-g] + [-f]\} \ \& \ b(a - [-f])))$

из теоремы

$\forall_{bdg}(g - \text{число} \ \& \ d - \text{целое} \rightarrow \exists_c(c < g \ \& \ b(c) \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ d \leq c) \leftrightarrow \exists_a(a \in \{0, \ldots, -d - 1 - [-g]\} \ \& \ b(a + d)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ax}(a - \text{целое} \ \& \ x - \text{число} \rightarrow x \leq a \leftrightarrow -[-x] \leq a)$

Преобразование заменяемой части эквивалентности с помощью равенства - одной из частей другой эквивалентности, с дополнительной проверкой корректности

1. Использование эквивалентности, выражающей условие декомпозируемости числового атома. Теорема - эквивалентность $(A_1 = A_2) \leftrightarrow A_3$, усиливающая равенство в левой части. Выражения A_1, A_2 численные, причем $A_1 \geq A_2$. Внутри A_1 выбирается невырожденный числовой атом t с заголовком f, не встречающийся в A_2. Проверяется, что A_1 зависит от t монотонно неубывающим образом. Находится эквивалентность $(B_1 = B_2) \leftrightarrow B_3$, у которой слева расположено равенство, декомпозирующее числовой атом B_1 с заголовком f через более простые невырожденные числовые атомы, а справа - некоторое элементарное утверждение. Ее переменные переобозначаются так, чтобы не входить в исходную теорему. Проверяется, что $B_2 \geq B_1$. После унификации t с B_1 равенство $B_1 = B_2$ используется для преобразования A_1, причем A_2 заменяется на $(A_2 \ \& \ B_3)$. Результат упрощается. (Прием усиление - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acd}(a - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ a \subseteq c \cup d \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ \text{конечное}(d) \rightarrow \text{card}(c) + \text{card}(d) = \text{card}(a) \leftrightarrow a = c \cup d \ \& \ \text{непересек}(c, d))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq b \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a) = \text{card}(b) \leftrightarrow a = b)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a \cup b) = \text{card}(a) + \text{card}(b) \leftrightarrow \text{непересек}(a, b))$

3.5.3 Варьирование заменяющей части эквивалентности другой эквивалентностью

Применение дополнительной эквивалентности к заменяющей части и обратная свертка после преобразования

1. Преобразование без добавления антецедентов.

   (a) Попытка извлечь из декомпозирующей эквивалентности упрощающую эквивалентность для дополнительного оганичения, используя встречную свертку. Теорема - эквивалентность $A_0 \leftrightarrow A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n$ декомпозициия элементарного утвержденияе A_0 конъюнкцию элементарных утверждений. Выбирается утверждение A_i с заголовком f, и по символу f находится

другая эквивалентность $B_0 \leftrightarrow B_1$ & ... & B_m аналогичного типа. Заголовки B_0 и некоторого B_j равны f, причем B_0 получается из B_j подстановкой некоторого неоднобуквенного выражения вместо переменной x. Переменные этой эквивалентности переобозначаются так, чтобы не входить в исходную теорему. После необходимой унификации дополнительная эквивалентность преобразует A_i. После добавления к A_0 конъюнкции B_1 & B_{j-1} & B_{j+1} & ... & B_m и исключения ее членов из правой части появляется возможность свернуть эту правую часть в элементарное утверждение, снова используя исходную теорему. Результат упрощается. (Прием и - 50).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(b - \text{set}\ \&\ c - \text{set} \rightarrow \text{Val}(a) \subseteq c\ \&\ \text{последовательность}(a, b) \leftrightarrow \text{последовательность}(a, b \cap c))$

из теоремы

$\forall_{aB}(B - \text{set} \rightarrow \text{последовательность}(a, B) \leftrightarrow a - \text{функция}\ \& \ \text{Dom}(a) = \mathbb{N}\ \&\ \text{Val}(a) \subseteq B)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bcd}(b - \text{set}\ \&\ c - \text{set}\ \&\ d - \text{set} \rightarrow d \subseteq b \cap c \leftrightarrow d \subseteq b\ \&\ d \subseteq c)$

(b) Попытка сильного упрощения заменяющего терма, не имеющего вида равенства, и обратной свертки в равенство. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$. Заголовок заменяемой части A_1 - равенство, заменяющая часть - элементарное утверждение, не являющееся равенством. Параметры обеих частей одинаковы. По заголовку f заменяющей части находится эквивалентность общей стандартизации $B_1 \leftrightarrow B_2$ утверждения B_1 с заголовком f обеих частей, у которой утверждение B_2 бесповторно, а B_1 имеет не более одной повторной переменной. Эта эквивалентность используется для преобразования A_2. Сразу после этого заменяющая часть полученной теоремы преобразуется с помощью исходной теоремы, применяемой в обратном направлении. Результат упрощается. (Прием общнорм - 84).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{mn}(n - \text{натуральное}\ \&\ m - \text{целое} \rightarrow (-m)(\text{mod}(n)) = 0 \leftrightarrow m(\text{mod}(n)) = 0)$

из теоремы

$\forall_{mn}(n - \text{натуральное}\ \&\ m - \text{целое} \rightarrow m(\text{mod}(n)) = 0 \leftrightarrow n \mid m)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{mn}(m - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое} \rightarrow m \mid n \leftrightarrow m \mid (-n))$

(c) Попытка декомпозиции заменяющего терма, не имеющего вида равенства, и обратной свертки для каждого конъюнктивного члена. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$. Заголовок бесповторной части A_1 - равенство, заменяющая часть - элементарное утверждение, не являющееся равенством. Параметры обеих частей одинаковы. По заголовку f заменяющей части находится эквивалентность $B_0 \leftrightarrow B_1$ & ... & B_n

декомпозиции элементарного утверждения B_0 с заголовком f в конъюнкцию элементарных утверждений с таким же заголовком. Она применяется для преобразования A_2. После этого каждый конъюнктивный член заменяющей части полученной теоремы сворачивается в равенство при помощи исходной теоремы, применяемой в обратном направлении. Результат упрощается. (Прием общнорм - 86).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abn}(b - \text{натуральное} \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ a - \text{целое} \rightarrow$
$a(\text{mod}(\text{нок}(b,n))) = 0 \leftrightarrow a(\text{mod}(b)) = 0 \ \& \ a(\text{mod}(n)) = 0)$

из теоремы

$\forall_{mn}(n - \text{натуральное} \ \& \ m - \text{целое} \rightarrow m(\text{mod}(n)) = 0 \leftrightarrow n \mid m)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{kmn}(k - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ \neg(n = 0) \ \& \ \neg(m = 0) \rightarrow$
$m \mid k \ \& \ n \mid k \leftrightarrow \text{нок}(m,n) \mid k)$

(d) Нейтральное преобразование утверждения в заменяющей части. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$. Внутри определяющей части A_2 выбирается неоднобуквенное утверждение P с заголовком f, содержащее не менее двух параметров утверждения A_1. По символу f находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$ перегруппировочного типа, у которой обе части элементарный, имеют заголовок f и равные длины. Все переменные этой теоремы суть параметры утверждения B_1. Данная эквивалентность используется для преобразования P. Проверяется, что новых антецедентов это не добавляет. Затем усматривается возможность свернуть в элементарное утверждение заменяющую часть полученной теоремы при помощи исходной теоремы. (Прием определение - 221).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abG}(\text{граф}(G) \rightarrow \text{смежны}(a,b,G) \leftrightarrow \text{смежны}(b,a,G))$

из теоремы

$\forall_{abG}(\text{граф}(G) \rightarrow \text{смежны}(a,b,G) \leftrightarrow a \in \text{вершины}(G) \ \& \ b \in \text{вершины}(G) \ \&$
$\exists_r(r \in \text{ребра}(G) \ \& \ \text{ведет}(r,a,b,G)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{Gabr}(\text{граф}(G) \rightarrow \text{ведет}(r,a,b,G) \leftrightarrow \text{ведет}(r,b,a,G))$

(e) Дизъюнктивная декомпозиция антецедента определяющей импликации с последующей сверткой в бескванторные утверждения. Теорема - определение "$D \leftrightarrow \forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n \rightarrow A_0)$". Выбирается элементарный антецедент A_i, содержащий переменную, отличную от $x_1, \ldots, x_k$. По его заголовку f находится эквивалентность $B_0 \leftrightarrow B_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ B_m$ декомпозиции элементарного утверждения B_0 с заголовком f в дизъюнкцию элементарных утверждений. Она применяется для преобразования A_i. Результат упрощается с разблокировкой приемов, основанных на исходной теореме. Это позволяет свернуть конъюнкцию возникающих при упрощении кванторных импликаций в конъюнкцию элементарных утверждений. (Прием определение - 56).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bef}(b - \text{set } \& \ e - \text{set } \& \ f - \text{set} \to e \cup f \subseteq b \leftrightarrow e \subseteq b \ \& \ f \subseteq b)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set } \& \ b - \text{set} \to a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \to c \in b))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(b - \text{set } \& \ c - \text{set} \to a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$

(f) Попытка использовать старую сокращающую эквивалентность для прлучения новой. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow P(t_1, t_2)$, где t_1, t_2 - выражения, заголовком которых служит одна и та же ассоциативная и коммутативная операция f. Находится кванторная эквивалентность вида $P(f(x,z), f(y,z)) \leftrightarrow P(x,y)$. Она используется для преобразования $P(t_1, t_2)$ (в качестве z берется новая переменная). Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность преобразованного утверждения A_1 исходному A_1. Результат упрощается. (Прием общнорм - 47).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdf}(\neg(c = 0) \ \& \ \neg(d = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a - \text{число } \& \ b - \text{число } \&$
$c - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ f - \text{число} \to a/(cd) = b/(cf) \leftrightarrow a/d = b/f)$

из теоремы

$\forall_{abdf}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ f - \text{число} \to$
$af = bd \leftrightarrow a/d = b/f)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число} \to ab = bc \leftrightarrow a = c)$

2. Добавляется антецедент - недостающий для преобразования фрагмент заменяющей части.

(a) Попытка извлечь из декомпозирующей эквивалентности упрощающую эквивалентность с дополнительным антецедентом, используя встречную свертку. Теорема - эквивалентность $A_0 \leftrightarrow A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n$, декомпозирующая элементарное утверждение в конъюнкцию бесквантормых утверждений. В правой части выбирается некоторое A_i, и по его заголовку f находится эквивалентность $B_0 \leftrightarrow B_1 \ \& \ \ldots \ \& \ B_m$ декомпозиции элементарного бесповторного утверждения B_0 с заголовком f в конъюнкцию элементарных бесповторных утверждений. Некоторое B_j тоже имеет заголовок f, причем B_0 получается из него некоторой подстановкой. Переменные дополнительной эквивалентности переобозначены так, чтобы не входить в исходную теорему. Некоторая подстановка C переводит B_j в A_i. Утверждения $C(B_1), \ldots, C(B_{j-1}), C(B_{j+1}), \ldots, C(B_m)$ и результаты применения C к антецедентам дополнительной теоремы добавляются к антецедентам исходной теоремы; A_i заменяется на $C(B_0)$, и правая часть полученной эквивалентности сворачивается в элементарное утверждение при помощи исходной теоремы, применяемой в обратном направлении. (Прием и - 43).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bdef}(e - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ f(1) \in e \to f \in (d \cap e) \times b \leftrightarrow f \in d \times b)$

из теоремы

$\forall_{abf}(a{-}\text{set} \ \& \ b{-}\text{set} \to f \in a{\times}b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f{-}\text{слово})$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \to a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$

3. Исходная версия заменяемой части переносится в антецеденты и позволяет отбросить часть конъюнктивных членов заменяющей часи после ее преобразования.

   (a) Попытка упрощения конъюнктивного члена заменяющей части и обратной свертки. Теорема - эквивалентность $A_0 \leftrightarrow A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n$, декомпозирующая элементарное утверждение в конъюнкцию бесповторных утверждений. В правой части выбирается некоторое A_i, и по его заголовку f находится эквивалентность общей стандартизации $B_1 \leftrightarrow B_2$, обе части которой суть элементарные бесповторные утверждения, причем заголовок левой части - символ f. Переменные этой эквивалентности переобозначены так, чтобы не встречаться в исходной эквивалентности. Находится подстановка C, унифицирующая B_1 и A_i, причем она не изменяет утверждений $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$. Утверждение A_0 переносится в антецеденты исходной теоремы, а консеквентом становится эквивалентность $C(B_2$ и $C(A_0)$. Результат упрощается. (Прием и- 73).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abdf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ f \in a \times b \to d = f(1) \leftrightarrow f \in \{d\} \times b)$

   из теоремы

   $\forall_{abf}(a{-}\text{set} \ \& \ b{-}\text{set} \to f \in a{\times}b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f{-}\text{слово})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a = b \leftrightarrow a \in \{b\})$

Дополнительная эквивалентность преобразует фрагменты заменяющей части в дизъюнктивно-конъюнктивные конструкции, и для их приведения к элементарному виду добавляются новые антецеденты

1. Расшифровка членов консеквента в дизъюнкции, перенесение отрицаний дизъюнктивных членов в антецеденты, и исключение невырожденных числовых атомов. Консеквент теоремы - конъюнкция элементарных утверждений $A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n$. Рассматривается заголовок P какого-либо из конъюнктивных членов консеквента, и находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2 \ \vee \ B_3$, являющаяся определением утверждения B_1 с заголовком P. Утверждения B_2, B_3 элементарны, причем B_2 - не равенство. Данная эквивалентность применяется для преобразования каждого A_i с заголовком P, содержащего невырожденные числовые

атомы, причем каждый раз отрицание утверждения, возникающего из B_3, переносится в антецеденты. Антецеденты упрощаются, и проверяется отсутствие в них невырожденных числовых атомов. Результат упрощается. Если в итоге возникает конъюнкция, в списке вывода регистрируется каждый ее конъюнктивный член. (Прием конъюнкция - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC))\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow 0 < \angle(ABC)\ \&\ \angle(ABC) < \pi)$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C) \rightarrow 0 \leq \angle(ABC)\ \&\ \angle(ABC) \leq \pi)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow a < b\ \vee\ a = b \leftrightarrow a \leq b)$

Дополнительная эквивалентность преобразует подкванторное утверждение в заменяющей части

1. Попытка развертки внутреннего консеквента в квантор общности и перестановки его с внешним квантором существования. Теорема - эквивалентность кванторной расшифровки $A_1 \leftrightarrow A_2$. Внутри A_2 находится квантор общности $\forall_{x_1 \ldots x_k}(D_1\ \&\ \ldots\ \&\ D_n \rightarrow D_0)$, расположенный внутри подкванторного утверждения E_j квантора существования $\exists_{y_1 \ldots y_m}(E_1\ \&\ \ldots\ \&\ E_p)$. Последний расположен внутри консеквента другого квантора общности, расположенного в A_2. По заголовку f единственного самого сложного подтерма элементарного консеквента D_0 в разделе символа f находится эквивалентность $B \leftrightarrow \forall_{z_1 \ldots z_s}(F_1\ \&\ \ldots\ \&\ F_r \rightarrow F_0)$ кванторной расшифровки, у которой заголовки утверждений B, D_0 совпадают, причем B содержит символ f. Эта эквивалентность используется для преобразования D_0. При помощи задачи на доказательство устанавливается возможность вынесения антецедентов $F_1, \ldots, F_r$ за рамки квантора существования. Затем решается задача на преобразование правой части полученной эквивалентности с целью исключения в ней кванторов. Проверяется, что число связанных переменных в этой части уменьшается. (Прием развертка - 129).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abn}(n - \text{натуральное}\ \&\ \text{последовательность}(b, \mathbb{R}^n)\ \&\ \text{числнабор}(a, n) \rightarrow a = \lim(b) \leftrightarrow \forall_e(e \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow a(e) = \lim(\lambda_f(b(f)(e), f - \text{натуральное}))))$

   из теоремы

   $\forall_{abn}(n - \text{натуральное}\ \&\ \text{последовательность}(b, \mathbb{R}^n)\ \&\ \text{числнабор}(a, n) \rightarrow a = \lim(b) \leftrightarrow \forall_j(\text{Val}(j) \subseteq (0, \infty)\ \&\ \text{числнабор}(j, n) \rightarrow \exists_g(\forall_f(f - \text{натуральное}\ \&\ g \leq f \rightarrow b(f) \in \text{евклпрямокр}(a, j))\ \&\ g - \text{натуральное})))$

   и дополнительной теоремы

$\forall_{abnx}(n - \text{натуральное} \ \& \ \text{числнабор}(a,n) \ \& \ \text{числнабор}(b,n) \rightarrow$
$x \in \text{евклпрямокр}(a,b) \leftrightarrow \text{числнабор}(x,n) \ \& \ \forall_i(i \in \{1,\ldots,n\} \rightarrow$
$a(i) - b(i) < x(i) \ \& \ x(i) < a(i) + b(i)))$

Простое преобразование заменяющей части

1. Применение эквивалентности общей стандартизации.

   (a) Попытка подстановки константного терма для упрощения равенства. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$ некоторого утверждения A_1. Среди конъюнктивных членов A_2 имеется равенство $x = t$, где x - переменная. По заголовку f выражения t находится эквивалентность общей стандартизации вида $B_1 = K \leftrightarrow B_2$ где B_1 имеет заголовок f; K - константный терм. Она применяется для преобразования равенства $x = t$. Результат упрощается. (Прием определение - 30).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aB}(a - \text{функция} \rightarrow \text{Отображение}(a,\emptyset,B) \leftrightarrow a = \text{пустоеслово} \ \& \ B - \text{set})$

   из теоремы

   $\forall_{fAB}(\text{Отображение}(f,A,B) \leftrightarrow f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = A \ \& \ B - \text{set} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq B)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_f(f - \text{функция} \rightarrow \text{Dom}(f) = \emptyset \leftrightarrow f = \text{пустоеслово})$

   (b) Попытка исключить квантор общности в определяющей части путем сильного упрощения антецедента этого квантора. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$ некоторого утверждения A_1. Внутри A_2 усматривается квантор общности $\forall_{x_1\ldots x_k}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n \rightarrow A_0)$. Выбирается существенный антецедент A_i, и по его заголовку f находится эквивалентность общей стандартизации $B_1 \leftrightarrow B_2$ с элементарными бесповторными частями. Она применяется для преобразования A_i. Результат упрощается. Проверяется, что новая теорема не имеет квантора общности в консеквенте. (Прием определение - 57).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ae}(e - \text{число} \rightarrow \text{наименьший}(a,\{e\}) \leftrightarrow a = e)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{наименьший}(a,b) \leftrightarrow a \in b \ \& \ \forall_c(c \in b \rightarrow a \leq c))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a = b \leftrightarrow a \in \{b\})$

   (c) Попытка использования упрощающей эквивалентности для фиксации связанной переменной квантора, входящего в заменяющую часть эквивалентности кванторной расшифровки. Теорема - эквивалентность кванторной расшифровки $A_1 \leftrightarrow A_2$. Внутри A_2 усматривается квантор общности $\forall_{x_1\ldots x_k}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n \rightarrow A_0)$. Выбирается антецедент A_i, и по его заголовку f находится эквивалентность общей стандартизации вида $B \leftrightarrow x = t$

с элементарными бесповторными частями; x - переменная, не входящая в t. Она применяется для преобразования A_i. Результат упрощается. Проверяется, что консеквент новой теоремы не имеет связанных переменных. Данный прием применяется также к кванторам существования, которые рассматриваются как отрицания кванторов общности. (Прием развертка - 40).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{be}(e - \text{число} \to \text{нижняяграань}(b, \{e\}) \leftrightarrow b - \text{число} \ \& \ b \leq e)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \to \text{нижняяграань}(b, a) \leftrightarrow b - \text{число} \ \& \ \forall_c(c \in a \to b \leq c))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a = b \leftrightarrow a \in \{b\})$

(d) Попытка варьирования консеквента заменяющей импликации и свертки этой импликации в утверждение, не имеющее квантора общности. Теорема - эквивалентность кванторной расшифровки $D \leftrightarrow \forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n \to A_0)$. Наиболее сложный подтерм утверждения A_0 - оно само. Сложность его не менее сложности D. В разделе символа f - заголовка утверждения A_0 - находится эквивалентность общей стандартизации $B_1 \leftrightarrow B_2$, у которой обе части элементарны, причем заголовок B_2 - символ f. Эта эквивалентность применяется (в направлении справа налево) для преобразования A_0. После этого, при помощи задачи на описание, удается свернуть правую часть новой эквивалентности в утверждение, не содержащее квантора общности. Результат упрощается. (Прием развертка - 73).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ac}(\neg(\emptyset \in \text{Val}(c)) \ \& \ \forall_f(f \in \text{Dom}(c) \to \text{огрснизу}(c(f))) \ \& \ c - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(c) \ \& \ \text{подмнож}(c, \mathbb{R}) \to \text{нижняяграань}(a, \bigcup(c)) \leftrightarrow \text{нижняяграань}(a, \text{set}_b(\exists_f(b = \text{inf}c(f) \ \& \ f \in \text{Dom}(c)))))$

из теоремы

$\forall_{be}(\bigcup(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{семействомножеств}(e) \to \text{нижняяграань}(b, \bigcup(e)) \leftrightarrow \forall_f(f \in \text{Dom}(e) \to \text{нижняяграань}(b, e(f))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bc}(\neg(c = \emptyset) \ \& \ c - \text{set} \ \& \ c \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{огрснизу}(c) \to b \leq \text{inf}(c) \leftrightarrow \text{нижняяграань}(b, c))$

(e) Попытка объединить эквивалентность исключения сложного понятия с сокращением. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, уменьшающая сложность выражения. По заголовку f неоднобуквенного подвыражения t терма A_2 находится кванторная эквивалентность вида $B_1 \leftrightarrow B_2 \ \vee \ B_3$ либо $B_1 \leftrightarrow B_2 \ \& \ B_3$, у которой B_1 имеет единственную небесповторную переменную x, а B_2, B_3 бесповторны. Внутри B_1 встречается подвыражение $f(x, y)$ для бесповторной переменной y. Утверждение B_2 содержит только x, утверждение B_3 не содержит x. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Предпринимается попытка таким образом применить дополнительную эквивалентность для преобразования A_2, чтобы

переменная x не оказалась внутри двух подтермов, подставляемых вместо переменных одного и того же подвыражения A_1. Такое преобразование может выполняться неоднократно, до тех пор, пока это возможно. Результат упрощается. (Прием уменьшение - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abdfhi}(\neg(d=0)\ \&\ \neg(f=0)\ \&\ \neg(i=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ h-\text{число}\ \&\ i-\text{число}\rightarrow ah/(di)=bh/(fi)\leftrightarrow h=0\ \vee\ af=bd)$

из теоремы

$\forall_{abdf}(\neg(d=0)\ \&\ \neg(f=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\rightarrow af=bd\leftrightarrow a/d=b/f)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abe}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\rightarrow a=e\ \vee\ b=0\leftrightarrow ab=be)$

2. Применение эквивалентности конъюнктивно-дизъюнктивной декомпозиции.

   (a) Попытка использовать сокращающую эквивалентность для перехода от слабой общей стандартизации к сильной. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1\leftrightarrow A_2$, преобразующая бесповторное утверждение A_1 так, чтобы выявилась симметрия по переменным. В заменяющей части выбирается неоднобуквенное выражение t с заголовком f. По символу f находится эквивалентность $B_1\leftrightarrow B_2$, выполняющая декомпозицию элементарного утверждения B_1 с единственной небесповторной переменной в конъюнкцию либо дизъюнкцию бесповторных элементарных утверждений. Внутри B_1 имеется подтерм $f(a,b)$, где a - небесповторная переменная, b - бесповторная. Внутри A_2 находится надтерм выражения t, имеющий тот же заголовок, что B_1 и этот надтерм преобразуется при помощи дополнительной эквивалентности. Проверяется, что число переменных новой теоремы меньше, чем у старой. Результат упрощается. (Прием общнорм - 29).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ceg}(\neg(c=0)\ \&\ \neg(g=0)\ \&\ c-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ g-\text{число}\rightarrow c=g\ \vee\ e=0\leftrightarrow e/c=e/g)$

   из теоремы

   $\forall_{abdf}(\neg(d=0)\ \&\ \neg(f=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\rightarrow af=bd\leftrightarrow a/d=b/f)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abe}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\rightarrow a=e\ \vee\ b=0\leftrightarrow ab=be)$

   (b) Попытка декомпозиции условий на параметры. Теорема - эквивалентность $A_1\leftrightarrow A_2$, выражающая утверждение A_1 через параметры координат. Внутри A_1 выбирается подутверждение P с заголовком f. По символу f находится эквивалентность $B_0\leftrightarrow B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_n$ декомпозиции элементарного

бесповторного утверждения B_0 с заголовком f в конъюнкцию элементарных бесповторных утверждений. Она применяется для преобразования P. Результат упрощается. (Прием числопред - 13).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{dhijklmnABCDEFK}(\neg(B=C)\ \&\ \neg(E=F)\ \&\ \neg(A\in\text{прямая}(BC))\ \&$
$\neg(D\in\text{прямая}(EF))\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(ABC),K)=$
$\text{set}_{xyz}(d+ix+jy+kz=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&$
$\text{коорд}(\text{плоскость}(DEF),K)=\text{set}_{uvw}(h+lu+mv+nw=0\ \&\ u-\text{число}\ \&$
$v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\ \&\ d-\text{число}\ \&\ h-\text{число}\ \&\ i-\text{число}\ \&$
$j-\text{число}\ \&\ k-\text{число}\ \&\ l-\text{число}\ \&\ m-\text{число}\ \&\ n-\text{число}\ \&\ A-\text{точка}\ \&$
$B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\rightarrow$
$\text{плоскость}(ABC)\parallel\text{плоскость}(DEF)\leftrightarrow im-jl=0\ \&\ in-kl=0\ \&$
$jn-km=0)$

из теоремы

$\forall_{ABCDEFKabcdefgh}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&$
$e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ g-\text{число}\ \&\ h-\text{число}\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&$
$C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&$
$\neg(E=F)\ \&\ \neg(D\in\text{прямая}(EF))\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(A\in\text{прямая}(BC))\ \&$
$\text{коорд}(\text{плоскость}(ABC),K)=\text{set}_{xyz}(ax+by+cz+d=0\ \&\ x-\text{число}\ \&$
$y-\text{число}\ \&\ z-\text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(DEF),K)=$
$\text{set}_{uvw}(eu+fv+gw+h=0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\rightarrow$
$\text{плоскость}(ABC)\parallel\text{плоскость}(DEF)\leftrightarrow\text{пропорцнаборы}((a,b,c),(e,f,g)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcdef}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\rightarrow$
$\text{пропорцнаборы}((a,b,c),(d,e,f))\leftrightarrow ae-bd=0\ \&\ af-cd=0\ \&\ bf-ce=0)$

3. Применение эквивалентности, выполняющей расшифровку по определению.

(a) Попытка использовать эквивалентность, определяющую одноместный предикат через многоместный. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1\leftrightarrow A_2$. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подутверждение P с заголовком f. Затем находится определение $B_1\leftrightarrow B_2$ некоторого элементарного утверждения B_1 вида $Q(x)$, у которого B_2 имеет заголовок f, причем длина B_2 больше 2. Это определение применяется (в направлении справа налево) для преобразования P. Проверяется, что новая теорема имеет меньше переменных, чем исходная. Результат упрощается. (Прием общнорм - 83).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a-\text{целое}\rightarrow a(\text{mod }2)=0\leftrightarrow a-\text{even})$

из теоремы

$\forall_{mn}(n-\text{натуральное}\ \&\ m-\text{целое}\rightarrow m(\text{mod }n)=0\leftrightarrow n|m)$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a-\text{целое}\rightarrow a-\text{even}\leftrightarrow 2|a)$

(b) Попытка кванторной расшифровки определяющего утверждения. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$ некоторого утверждения A_1. Внутри A_2 имеется равенство $t_1 = t_2$. По заголовку f выражения t_1 находится эквивалентность $(r = x) \leftrightarrow B$, являющаяся определением равенства выражения r с заголовком f заданному значению, причем B содержит квантор. Эта эквивалентность используется для преобразования равенства $t_1 = t_2$. Результат упрощается. (Прием определение - 49).

Пример: вывод теоремы

$\forall_f(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \rightarrow \text{сходится}(f) \leftrightarrow \exists_a(\forall_d(0 < d \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \exists_g(\forall_e(e - \text{натуральное} \ \& \ g \leq e \rightarrow |-a + f(e)| < d) \ \& \ g - \text{натуральное})) \ \& \ a - \text{число}))$

из теоремы

$\forall_f(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \rightarrow \text{сходится}(f) \leftrightarrow \exists_a(a - \text{число} \ \& \ a = \lim(f)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ \text{последовательность}(b, \mathbb{R}) \rightarrow \lim(b) = a \leftrightarrow \forall_e(e - \text{число} \ \& \ 0 < e \rightarrow \exists_n(n - \text{натуральное} \ \& \ \forall_m(m - \text{натуральное} \ \& \ n \leq m \rightarrow |b(m) - a| < e))))$

4. Применение эквивалентности, выполняющей кванторную расшифровку.

(a) Попытка получения параметрического описания заменяющей части с помощью ранее найденного параметрического описания ее фрагмента. Теорема - определение $D \leftrightarrow A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n$ некоторого утверждения D; возможен случай $n = 1$. Правая часть не имеет связанных переменных. Выбирается некоторый логический символ f правой части, и находится параметрическое описание $B_1 \ \& \ \ldots \ \& \ B_m \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(E)$ некоторого утверждения $B_1 \ \& \ \ldots \ \& \ B_m$, $m \leq n$, у которого f - заголовок наиболее сложного подтерма. Левая часть дополнительной эквивалентности унифицируется с подмножеством конъюнктивных членов $A_1, ldots, A_n$, заменяемым на правую часть этой эквивалентности. Квантор существования выносится наружу. Результат упрощается. (Прием определение - 24).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{be}(b - \text{set} \rightarrow \text{кортеж}(e, 2, b) \leftrightarrow \exists_{cd}(e = (c, d) \ \& \ c \in b \ \& \ d \in b))$

из теоремы

$\forall_{anb}(b - \text{set} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \rightarrow \text{кортеж}(a, n, b) \leftrightarrow a - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\} \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_f(f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = \{1, 2\} \leftrightarrow \exists_{ab}(f = (a, b)))$

(b) Попытка вывести эквивалентность для дизъюнктивной развертки. Теорема - эквивалентность для кванторной расшифровки $A_0 \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n)$. Выбирается некоторое элементарное A_i с заголовком f. По символу

f находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_m}(B_2)$, которую можно использовать для приема развертки квантора существования в конечную дизъюнкцию, причем f - заголовок B_1. Она применяется для преобразования A_i. Результат упрощается. (Прием развертка - 86).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bfgi}(\mathrm{Dom}(g) = \{1, \ldots, i\}\ \&\ b - \mathrm{set}\ \&\ g - \text{функция}\ \&\ i - \text{натуральное} \rightarrow f \in \{; \lambda_h(g(h), h \in \{1, \ldots, i\})\} \times b \leftrightarrow \exists_{dh}(f = (g(h), d)\ \&\ d \in b\ \&\ h \in \{1, \ldots, i\}))$

из теоремы

$\forall_{abf}(a - \mathrm{set}\ \&\ b - \mathrm{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow \exists_{cd}(f = (c, d)\ \&\ c \in a\ \&\ d \in b))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{adf}(d - \text{функция}\ \&\ \mathrm{Dom}(d) = \{1, \ldots, f\}\ \&\ f - \text{натуральное} \rightarrow a \in \{; \lambda_e(d(e), e \in \{1, \ldots, f\})\} \leftrightarrow \exists_e(e \in \{1, \ldots, f\}\ \&\ a = d(e)))$

Прием, основанный на выводимой теореме, разворачивает квантор существования по d, h в дизъюнкцию кванторов существования по d. Впрочем, повторное применение данного приема позволяет совсем исключить квантор существования в заменяющей дизъюнкции.

3.5.4 Эквивалентность позволяет ввести дополнительное условие в заменяемую часть параметрического описания

1. Попытка рассмотрения дополнительного условия. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(y = f(t_1, t_2)\ \&\ A_2)$, представляющая собой такое явное параметрическое описание, у которого параметры однозначно определяются по параметризуемому объекту. Находится эквивалентность $Q(f(x, y), z) \leftrightarrow B_1\ \&\ B_2$, декомпозирующая относительно переменных бесповторную левую часть в два бесповторных утверждения B_1, B_2. Ее переменные переобозначены так, чтобы не входить в исходную теорему. После унификации $f(t_1, t_2)$ и $f(x, y)$ к левой части исходной эквивалентности добавляется условие $Q(y, r)$. Если некоторое B_i не зависит после унификации от переменных $x_1, \ldots, x_k$, то оно переносится в антецеденты. Иначе оно помещается под правый квантор существования; подкванторные утверждения, отличные от равенства для y, явно разрешаются относительно переменных $x_1, \ldots, x_k$. Антецеденты упрощаются. (Прием биекция - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abf}(b \subseteq f\ \&\ b - \mathrm{set}\ \&\ f - \mathrm{set} \rightarrow a - \mathrm{set}\ \&\ b \subseteq a\ \&\ a \subseteq f \leftrightarrow \exists_c(a = b \cup c\ \&\ c \subseteq f \setminus b\ \&\ c - \mathrm{set}))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(b - \mathrm{set}\ \&\ a - \mathrm{set} \rightarrow b \subseteq a \leftrightarrow \exists_c(c - \mathrm{set}\ \&\ a = b \cup c\ \&\ \text{непересек}(b, c)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bce}(b - \mathrm{set}\ \&\ c - \mathrm{set}\ \&\ e - \mathrm{set} \rightarrow b \cup c \subseteq e \leftrightarrow b \subseteq e\ \&\ c \subseteq e).$

2. Использование эквивалентности общей стандартизации для рассмотрения дополнительного условия. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(y = t \,\&\, A_2)$, дающая явное параметрическое описание значений y, удовлетворяющих условию A_1. По заголовку f выражения t находится эквивалентность общей стандартизации $B_1 \leftrightarrow B_2$, у которой среди подтермов корневых операндов утверждения B_1, имеющих максимальную сложность, имеется единственный корневой операнд T, причем f - его заголовок. Переменные ее переобозначены так, чтобы не входить в исходную теорему. После унификации t с T под квантор существования в исходную теорему заносится B_2, а к A_1 добавляется конъюнктивный член - не содержащий переменных $x_1, \ldots, x_k$ результат замены в B_1 подтерма T на y. Антецеденты исходной и дополнительной теорем объединяются. Результат упрощается. (Прием параметризация - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $$\forall_{ad}(a - \text{set} \,\&\, d - \text{set} \rightarrow \text{card}(a) = 1 \,\&\, a \subseteq d \leftrightarrow \exists_b(a = \{b\} \,\&\, b \in d))$$

   из теоремы

   $$\forall_a(a - \text{set} \rightarrow \exists_b(a = \{b\}) \leftrightarrow \text{card}(a) = 1)$$

   и дополнительной теоремы

   $$\forall_{be}(e - \text{set} \rightarrow \{b\} \subseteq e \leftrightarrow b \in e)$$

3.5.5 Преобразование конъюнктивных членов консеквента к виду дизъюнкции и добавление к антецедентам части подслучаев

1. Расшифровка членов консеквента в дизъюнкции, перенесение конъюнкции основных подслучаев в антецеденты и вывод конъюнкции отрицаний остаточных подслучаев, в которой исключены невырожденные числовые атомы. Теорема - кванторная импликация с элементарными антецедентами и конъюнкцией A_1 & ... & A_n в консеквенте. Рассматривается логический символ P, являющийся заголовком каких-либо A_i. Находится определение $B_1 \leftrightarrow B_2 \vee B_3$ утверждения с заголовком P. Утверждение B_2 имеет отличный от равенства заголовок, причем из B_2 вытекает отрицание B_3. Это определение используется для преобразования каждого содержащего невырожденные числовые атомы утверждения A_i, имеющего заголовок P. Затем все утверждения, полученные из члена B_2, переносятся в антецеденты, а в консеквенте эти A_i заменяются на отрицания B_3. Результирующий консеквент упрощается задачей на описание; проверяется отсутствие в нем невырожденных числовых атомов. Затем новая теорема упрощается. (Прием конъюнкция - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \,\&\, \neg(B = C) \,\&\, 0 < \angle(ABC) \,\&\, \angle(ABC) < \pi \,\&\, A - \text{точка} \,\&\, B - \text{точка} \,\&\, C - \text{точка} \rightarrow \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)))$$

   из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C) \rightarrow 0 \leq \angle(ABC)\ \&\ \angle(ABC) \leq \pi)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow a < b\ \vee\ a = b \leftrightarrow a \leq b)$

2. Расшифровка членов консеквента в дизъюнкции и вывод условия, при котором имеет место дизъюнкция частных подслучаев. Начало приема такое же, как в предыдущем случае. Однако, перенесение в антецеденты утверждений B_2 не выполняется. Вместо этого проверяется, что утверждения B_3 преобразуются в равенства для одного и того же невырожденного числового атома. Отрицание конъюнкции отрицаний этих равенств переносится в антецеденты, которые упрощаются так, чтобы в них не осталось невырожденных числовых атомов. Консеквентом становится дизъюнкция равенств, возникших из B_3. (Прием конъюнкция - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow \angle(ABC) = 0\ \vee\ \angle(ABC) = \pi)$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C) \rightarrow 0 \leq \angle(ABC)\ \&\ \angle(ABC) \leq \pi)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow a < b\ \vee\ a = b \leftrightarrow a \leq b)$

3. Расшифровка консеквента в дизъюнкцию, перенесение дизъюнктивного члена в антецеденты и исключение невырожденных числовых атомов. Теорема - кванторная импликация, выражающая свойством некоторого "сложного" объекта. По заголовку ее консеквента находится определение утверждений с таким же заголовком. Оно преобразует консеквент в дизъюнкцию $A_1 \vee A_2$. Выбирается то A_1, которое не имеет заголовком равенство. Оно становится новым консеквентом, а отрицание A_2 переносится в антецеденты. Проверяется, что в антецедентах имеются невырожденные числовые атомы, и эти антецеденты упрощаются так, чтобы таких атомов не осталось. Результат упрощается. (Прием свойства - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C \in \text{прямая}(AB))\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow 0 < \angle(ABC))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow 0 \leq \angle(ABC))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow a < b\ \vee\ a = b \leftrightarrow a \leq b)$

3.5.6 Преобразование консеквента импликации с помощью дополнительной эквивалентности

Определение условия, при котором нарушается истинность консеквента, обобщение его с помощью дополнительных параметров, и перенесение этих параметров в исходную теорему

1. Усмотрение в консеквенте отрицания конъюнкции подобных утверждений и использование дополнительной эквивалентности для их одновременной декомпозиции с вынесением наружу общей части. Теорема - кванторная импликация, консеквент которой имеет вид отрицания равенства для параметров координат. Само это равенство преобразуется в конъюнкцию A_1 & ... & A_n равенств, не имеющих общих переменных и отличающихся друг от друга только переобозначением переменных. По типу значения операндов данных равенств находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2 \vee B_3$, декомпозирующая равенство B_1 для операндов этого типа в дизъюнкцию бесповторных равенств. Эта эквивалентность используется для преобразования каждого A_i таким образом, что B_2 во всех случаях переходит в одно и то же утверждение D. Консеквент преобразованной таким образом исходной теоремы заменяется на отрицание D. Результат упрощается. (Прием Крд - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcghijKP}(\text{коорд}(P,K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число}\ \&$
   $\text{пропорцнаборы}((g+x, a+y, b+z), (ch, ci, cj)))\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&$
   $c - \text{число}\ \&\ g - \text{число}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ i - \text{число}\ \&\ j - \text{число}\ \&\ \text{Прямая}(P)\ \&$
   $\text{Трехмерн}(K) \rightarrow \neg(c = 0))$

   из теоремы

   $\forall_{abdefgKP}(\text{коорд}(P,K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число}\ \&$
   $\text{пропорцнаборы}((d,e,f), (g+x, a+y, b+z)))\ \&\ a - \text{число}\ \&\ \text{-число}\ \&\ d - \text{число}\ \&$
   $e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{число}\ \&\ \text{Прямая}(P)\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow$
   $\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow ab = 0 \leftrightarrow a = 0\ \vee\ b = 0)$

Преобразование консеквента импликации при помощи дополнительной эквивалентности

1. Применение эквивалентности общей стандартизации.

   (a) Использование эквивалентности общей стандартизации для исключения операнда консеквента, не встречающегося в антецедентах. Консеквент теоремы - отличный от равенства нечисловой двуместный предикат $P(t_1, t_2)$. Атомарное выражение t_1 не встречается в антецедентах. В разделе символа P находится эквивалентность общей стандартизации $P(B_1, B_2) \leftrightarrow B_3$, левая часть которой содержит заголовок выражения t_1. Выражение B_1 не встречается в антецедентах. Переменные переобозначены так, чтобы не встречаться в исходной теореме. Эта эквивалентность применяется для

преобразования $P(t_1, t_2)$, причем B_1 унифицируется с t_1, а B_2 - с t_2. Проверяется непротиворечивость антецедентов новой теоремы. Затем она упрощается. (Прием отношение - 42).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{dABCD}(\neg(d = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ l(AC) = l(BC)\ \&$
$l(AD) = l(BD)\ \&\ C \in$ плоскость$(dAB)\ \&\ D \in$ прямая$(AB)\ \&\ d -$ точка $\&$
$A -$ точка $\&$ $B -$ точка $\&$ $C -$ точка $\&$ $D -$ точка $\&$ прямая$(dD)\ \perp$
прямая$(AB) \rightarrow C \in$ прямая$(dD))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ l(AC) = l(BC)\ \&\ l(AD) = l(BD)\ \&$
$D \in$ прямая$(AB)\ \&\ A -$ точка $\&$ $B -$ точка $\&$ $C -$ точка $\&$ $D -$ точка $\rightarrow$
прямая$(AB) \perp$ прямая$(CD))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDE}(A -$ точка $\&$ $B -$ точка $\&$ $C -$ точка $\&$ $D -$ точка $\&$ $E -$ точка $\&$
$\neg(C = E)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&$ прямая$(CD) \perp$ прямая$(AB)\ \&$
$E \in$ плоскость$(ABD)\ \&\ C \in$ прямая$(AB) \rightarrow$ прямая$(CE) \perp$ прямая$(AB) \leftrightarrow$
$E \in$ прямая$(CD))$

2. Применение эквивалентности, исключающей сложное понятие.

   (a) Использование определения заголовка консеквента. Теорема - простая импликация с бесповторными антецедентами и консеквентом, содержащим все переменные антецедентов. Заголовок f консеквента отличен от символов "не", "равно", "меньше", "меньшеилиравно". Находится определение $B_1 \leftrightarrow B_2$ утверждения B_1 с заголовком f. Оно используется для преобразования консеквента исходной теоремы. Результат упрощается и проверяется на непротиворечивость антецедентов. Если после этого возникает конъюнкция импликаций, они регистрируются в списке вывода по отдельности. (Прием попыткаспуска - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}($параллелограмм$(abcd)\ \&\ a -$ точка $\&$ $b -$ точка $\&$ $c -$ точка $\&$ $d -$
   точка $\rightarrow \neg(a \in$ прямая$(bc)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}($параллелограмм$(ABCD)\ \&\ A -$ точка $\&$ $B -$ точка $\&$ $C -$ точка $\&$
   $D -$ точка $\rightarrow$ четырехугольник$(ABCD))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCD}(A -$ точка $\&$ $B -$ точка $\&$ $C -$ точка $\&$ $D -$ точка $\rightarrow$
   четырехугольник$(ABCD) \leftrightarrow \neg(B = C)\ \&\ \neg(A \in$ прямая$(BC))\ \&$
   $\neg(D \in$ прямая$(AB))\ \&\ \neg(D \in$ прямая$(BC))\ \&$ однасторона$(A, D,$ прямая$(BC))$
   $\&$ однасторона$(C, D,$ прямая$(AB)))$

(b) Попытка упростить самый сложный подтерм консеквента. Теорема - эквивалентность вида $A_0 \leftrightarrow \exists_x(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n)$. Самый сложный подтерм консеквента - некоторое A_i. По заголовку f этого A_i находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$, уменьшающая оценку сложности утверждения B_1 с заголовком f. Переменные ее переобозначены так, чтобы не встречаться в исходной теореме. Данная эквивалентность применяется для преобразования A_i, причем подстановка выполняется только вместо параметров утверждения B_1. Те антецеденты дополнительной теоремы, которые при этом содержат x и не являются следствиями антецедентов исходной теоремы, пополненными утверждениями $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$, но являются следствиями этих антецедентов и всех $A_1, \ldots, A_n$, заносятся под квантор существования. Проверяется, что других антецедентов с x нет. Не содержащие x антецеденты дополнительной теоремы добавляются к списку антецедентов новой теоремы. Результат упрощается. (Прием допконтекст - 24).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcn}(\text{перестановка}(b, \{1, \ldots, n\})\ \&\ \text{перестановка}(c, \{1, \ldots, n\})\ \&$
$n - \text{натуральное} \rightarrow \exists_a(c = \text{функпроизв}(\text{префикс}(b, a))\ \&$
$\text{Val}(a) \subseteq \text{транспозиции}(n)\ \&\ a - \text{слово}))$

из теоремы

$\forall_{bcn}(n - \text{натуральное}\ \&\ \text{перестановка}(b, \{1, \ldots, n\})\ \&$
$\text{перестановка}(c, \{1, \ldots, n\}) \rightarrow \exists_a(\text{Переводит}(a, b, c)\ \&$
$\text{Val}(a) \subseteq \text{транспозиции}(n)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{pfg}(f - \text{функция}\ \&\ g - \text{функция}\ \&\ p - \text{слово}\ \&$
$\forall_x(x \in \text{Val}(p) \rightarrow x - \text{функция}) \rightarrow \text{Переводит}(p, f, g) \leftrightarrow$
$g = \text{функпроизв}(\text{префикс}(f, p)))$

3. Применение усиливающей эквивалентности.

(a) Переход к равенству в консеквенте. Теорема - кванторная импликация, используемая для создания приема вывода следствий в посылках задачи. Консеквент A имеет своим заголовком символ f, отличный от равенства и отрицания. По этому символу находится эквивалентность $B \leftrightarrow (t_1 = t_2)$ без существенных антецедентов, заголовок левой части которой - символ f. Она применяется для преобразования A. Результат упрощается. (Прием вывод - 78).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bGMQ}(Q - \text{set}\ \&\ Q \subseteq \text{вершины}(G)\ \&\ b \in \text{вершины}(G)\ \&\ \text{орграф}(G)\ \&$
$\text{соединяет}(\{b\}, Q, G, M) \rightarrow \text{исхвершина}(M) = b)$

из теоремы

$\forall_{GMPQ}(P - \text{set}\ \&\ Q - \text{set}\ \&\ P \subseteq \text{вершины}(G)\ \&\ Q \subseteq \text{вершины}(G)\ \&$
$\text{орграф}(G)\ \&\ \text{соединяет}(P, Q, G, M) \rightarrow \text{исхвершина}(M) \in P)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a = b \leftrightarrow a \in \{b\})$

(b) Попытка варьирования равенства с бинарной операцией в консеквенте усиливающей эквивалентностью. Теорема - кванторная импликация, используемая для создания приема вывода следствий в посылках задачи. Ее консеквент имеет вид $A_1 = A_2$, причем в нем встречается подвыражение вида $f(t_1, t_2)$, где f - переменная, для которой в антецедентах явно указано, что ее значение - бинарная операций. В разделе "группоиды" находится усиливающая эквивалентность вида $(P_1 = P_2) \leftrightarrow (Q_1 = Q_2)$. Она применяется для преобразования $A_1 = A_2$. Результат упрощается. (Прием вывод - 85).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcfAB}(b = \text{операция}(B)\ \&\ c = \text{операция}(A)\ \&\ a \in \text{носитель}(A)\ \&$
$\text{левединица}(a, c)\ \&\ \text{гомоморфизм}(f, A, B)\ \&\ \text{группоид}(A)\ \&\ \text{группа}(B) \rightarrow$
$\text{единица}(b) = f(a))$

из теоремы

$\forall_{abcdfAB}(b = \text{операция}(A)\ \&\ d = \text{операция}(B)\ \&\ a \in \text{носитель}(A)\ \&$
$c \in \text{носитель}(A)\ \&\ \text{левединица}(a, b)\ \&\ \text{гомоморфизм}(f, A, B)\ \&\ \text{группоид}(A)$
$\&\ \text{группоид}(B) \rightarrow f(c) = d(f(a), f(c)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{degxA}(A - \text{set}\ \&\ g \in A\ \&\ x \in A\ \&\ \text{ассоциативно}(e)\ \&\ \text{обратимо}(e)\ \&$
$\text{Единица}(d, e)\ \&\ \text{бинарнооперация}(e, A) \rightarrow e(x, g) = g \leftrightarrow d = x)$

4. Применение варьирующей эквивалентности.

(a) Использование перегруппировочной эквивалентности для исключения уникального условия на о.д.з. консеквента. Консеквент теоремы - отличный от равенства нечисловой двуместный предикат A. Он имеет единственный максимально сложный подтерм t с заголовком f. В о.д.з. выражения t входит утверждение, не входящее в о.д.з. антецедентов. По символу f находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$, имеющая бесповторные части, причем в каждом направлении своего применения она позволяет сгруппировать в одной части бинарного отношения две переменные, ранее расположенные в различных частях. Наиболее сложный символ одной из частей этой эквивалентности - f. Данная эквивалентность применяется для преобразования утверждения A (рассматриваются оба направления ее применения). Результат упрощается. (Прием отношение - 41).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcdAB}(\neg(b = c)\ \&\ \neg(c = d)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ l(bA) = l(bB)\ \&\ l(cA) = l(cB)\ \&$
$l(dA) = l(dB)\ \&\ b \in \text{плоскость}(cAB)\ \&\ d \in \text{прямая}(AB)\ \&\ b - \text{точка}\ \&$
$c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \rightarrow d \in \text{прямая}(bc))$

из теоремы

$\forall_{aABCD}(\neg(a = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ l(aA) = l(aB)\ \&\ l(AC) = l(BC)\ \&$
$l(AD) = l(BD)\ \&\ C \in \text{плоскость}(aAB)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ a - \text{точка}\ \&$
$A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \rightarrow C \in \text{прямая}(aD))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \rightarrow C \in \text{прямая}(AB) \leftrightarrow A \in \text{прямая}(BC))$

(b) Варьирование консеквента импликации, используемой для проверочного оператора, при помощи стандартизирующей эквивалентности двух элементарных бесповторных утверждений либо перегруппировочной эквивалентности. Теорема - кванторная импликация, используемая для создания приема проверочного оператора, причем все ее антецеденты тоже обрабатываются проверочными операторами. Внутри ее консеквента выбирается подутверждение A с заголовком f. По символу f находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$ общей стандартизации либо перегруппировки с бесповторными частями. Заголовок B_1 - символ f. Она применяется для преобразования A. Результат упрощается. (Прием спуск - 29).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cde}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ c \subseteq d \cup e \ \& \ \text{конечное}(e) \rightarrow \text{конечное}(c \setminus d))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \neg(\text{конечное}(b)) \rightarrow \neg(b \subseteq a))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow b \subseteq c \cup e \leftrightarrow b \setminus c \subseteq e)$

(c) Варьирование консеквента импликации, используемой для проверочного оператора, при помощи стандартизирующей эквивалентности двух элементарных бесповторных утверждений либо перегруппировочной эквивалентности. Аналогично предыдущему, но у исходной теоремы один из антецедентов непосредственно идентифицируемый, а остальные обрабатываются проверочными операторами. (Прием легковидеть - 13).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq b \ \& \ \neg(a = \emptyset) \rightarrow \neg(b = \emptyset))$

из теоремы

$\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ a \subseteq d \ \& \ \neg(a \subseteq e) \rightarrow \neg(d \subseteq e))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{a}(a - \text{set} \rightarrow a = \emptyset \leftrightarrow a \subseteq \emptyset)$

Варьирование косвенного определения путем эквивалентного преобразования определяющей части

1. Использование дополнительной теоремы для декомпозиции определяющей части и последующая попытка вывести явное выражение для определяемого терма. Консеквент теоремы имеет вид $P(t_1 \ldots t_n)$, причем значение t_i, если вообще существует, однозначно определено значениями $t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n$. В консеквенте, вне t_i, выбирается подутверждение A с заголовком f. По символу f

находится эквивалентность $B_0 \leftrightarrow B_1$ & ... & B_n декомпозирующая элементарное бесповторное утверждение B_0 с заголовком f в конъюнкцию элементарных бесповторных утверждений. Переменные переобозначены так, чтобы не встречаться в исходной теореме, эта эквивалентность применяется для преобразования A, причем связанные переменные A унификацией не затрагиваются. Если возникают антецеденты со связанными в консеквенте переменными, проверяется, что они суть следствия контекстов этих связанных переменных, после чего отбрасываются. Предпринимается попытка при помощи задачи на исслелование выразить явным образом измененное выражение t_i через параметры измененных прочих t_j. Допускается ввод дополнительных посылок, которые затем присоединяются к антецедентам теоремы. Разрешается использовать приемы, основанные на уже имеющихся в списке вывода теоремах. Консеквентом становится найденное равенство для измененного t_i. Результат упрощается. (Прием опредзначение - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{de}(\neg(d = \emptyset)$ & $\neg(e = \emptyset)$ & $d -$ set & $e -$ set & $d \subseteq \mathbb{R}$ & $e \subseteq \mathbb{R}$ & огрснизу(d) & огрснизу$(e) \rightarrow \inf(d \cup e) = \min(\inf(d), \inf(e)))$

из теоремы

$\forall_a(a -$ set & огрснизу(a) & $\neg(a = \emptyset) \rightarrow$ наибольший$(\inf(a), \mathrm{set}_b($нижняягрань$(b, a))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bef}(e -$ set & $f -$ set & $e \subseteq \mathbb{R}$ & $f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow$ нижняягрань$(b, e \cup f) \leftrightarrow$ нижняягрань(b, e) & нижняягрань$(b, f))$

2. Вывод равенства путем варьирования определяющей части и обратной свертки. Консеквент теоремы имеет вид $P(t_1, t_2)$, причем значение t_1, если вообще существует, однозначно определено значением t_2. Внутри t_2 выбирается подутверждение A вида $f(x, y)$, где переменная x связанная в t_2, а переменная y - свободная и не имеет других вхождений в t_2. Находится эквивалентность вида $f(z, r_1) \leftrightarrow f(z, r_2)$, где z - переменная. Переменные ее переобозначены так, чтобы не входить в исходную теорему. Рассматривается два варианта унификации $f(x, y)$: сначала с $f(z, r_1)$, затем - с $f(z, r_2)$. Антецеденты проварьированных теорем объединяются, консеквентом становится равенство двух измененных при этих унификациях выражений t_1. Результат упрощается. (Прием опредзначение - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_e(\neg(\mathrm{Dom}(e) = \emptyset)$ & $\neg(\emptyset \in \mathrm{Val}(e))$ & $e -$ функция & семействомножеств(e) & огрснизу$(\bigcup(e))$ & подмнож$(e, \mathbb{R}) \rightarrow \inf(\bigcup(e)) = \inf(\mathrm{set}_d(\exists_g(d = \inf(e(g))$ & $g \in \mathrm{Dom}(e)))))$

из теоремы

$\forall_a(a -$ set & огрснизу(a) & $\neg(a = \emptyset)$ & $a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow$ наибольший$(\inf(a),$ $\mathrm{set}_b($нижняягрань$(b, a))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ac}(\neg(\emptyset \in \mathrm{Val}(c))\ \&\ \forall_f(f \in \mathrm{Dom}(c) \to \text{огрснизу}(c(f)))\ \&\ c - \text{функция}\ \&$ $\text{семействомножеств}(c)\ \&\ \text{подмнож}(c, \mathbb{R}) \to \text{нижняягрань}(a, \bigcup(c)) \leftrightarrow$ $\text{нижняягрань}(a, \mathrm{set}_b(\exists_f(b = \inf(c(f))\ \&\ f \in \mathrm{Dom}(c)))))$

3.5.7 Варьирование описателя "класс" с помощью дополнительной эквивалентности

Дополнительная эквивалентность преобразует утверждение под описателем, и далее выполняется обратная свертка

1. Попытка использовать декомпозирующую либо упрощающую эквивалентность для варьирования тождества, исключающего описатель. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель "класс". Внутри этого описателя выбирается подутверждение P с заголовком f. По символу f находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$, у которой бесповторное элементарное утверждение B_1 имеет заголовок f, а B_2 - бесповторное элементарное утверждение, либо конъюнкция или дизъюнкция таких утверждений. Эта эквивалентность не содержит символов, относящихся к разделам, которые не были представлены в исходной теореме. Она применяется для преобразования P. Результат упрощается, причем отменяется блокировка приемов, основанных на стартовой теореме цикла вывода. Проверяется, что полученная теорема не содержит символов "класс", "вариант". (Прием описатель - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bc}(\mathrm{Dom}(b) = \mathrm{Dom}(c)\ \&\ b - \text{функция}\ \&\ c - \text{функция}\ \&\ \text{семействомножеств}(b)\ \&$ $\text{семействомножеств}(c) \to \bigcup_{a,a \in \mathrm{Dom}(c)}(b(a) \cup c(a)) = \bigcup(b) \cup \bigcup(c))$

   из теоремы

   $\forall_f(f - \text{функция}\ \&\ \text{семействомножеств}(f) \to \bigcup(f) = \mathrm{set}_x(\exists_y(y \in \mathrm{Dom}(f)\ \&$ $x \in f(y))))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(b - \text{set}\ \&\ c - \text{set} \to a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b\ \vee\ a \in c)$

2. Попытка использовать декомпозирующую эквивалентность и подстановку константы для варьирования тождества, исключающего описатель. Начало программы приема совпадает с предыдущим приемом; дополнительная теорема выбирается теми же средствами. Однако, результирующая теорема T предыдущего приема содержит символ "класс". При этом число антецедентов ее, имеющих вид "функция(F)", больше, чем у исходной теоремы. Выбирается произвольный такой антецедент, и в качестве функции F в теорему T подставляется константная функция. Результат упрощается. Проверяется, что он не содержит символа "класс", но содержит символ "отображение", причем не содержит термов "отображение(...)", задающих константную функцию. (Прием описатель - 10).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{cd}(d - \text{set}\ \&\ c - \text{функция}\ \&\ \text{семействомножеств}(c) \to \bigcup_{a,a\in\text{Dom}(c)}(d \cap c(a)) = d \cap \bigcup(c))$

из теоремы

$\forall_f(f - \text{функция}\ \&\ \text{семействомножеств}(f) \to \bigcup(f) = \text{set}_x(\exists_y(y \in \text{Dom}(f)\ \&\ x \in f(y))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(b - \text{set}\ \&\ c - \text{set} \to a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b\ \&\ a \in c)$

Дополнительная эквивалентность варьирует утверждение под описателем "класс"

1. Попытка упрощения операции над описателем "класс" с помощью параметрического описания подутверждения. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель "класс". Внутри этого описателя выбирается подутверждение P с заголовком f. Находится параметрическое описание $B_1 \leftrightarrow \exists_{x_1\ldots x_k}(B_2)$ утверждения B_1, у которого f служит заголовком самого сложного подтерма. Эта эквивалентность используется для преобразования P. Заменяющая часть нового тождества упрощается; проверяется, что результат упрощения не содержит квантора существования. Затем вся новая теорема упрощается. (Прием описатель - 17).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_e(e - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(e) \to \text{card}(\text{подмножества}(e)) = 2^{\text{card}(e)})$

   из теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(A)\ \&\ \text{конечное}(B)\ \&\ \neg(\text{card}(B) = 0) \to \text{card}(\text{set}_f(\text{Отображение}(f, A, B))) = \text{card}(B)^{\text{card}(A)})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{fAB}(A - \text{set}\ \&\ \neg(a = b) \to \text{Отображение}(f, A, \{a, b\}) \leftrightarrow \exists_C(C \subseteq A\ \&\ C - \text{set}\ \&\ f = \lambda_x((a\ \text{при}\ x \in C,\ \text{иначе}\ b), x \in A)))$

2. Попытка использовать перестановочную эквивалентность для варьирования исключаемого описателя. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель "класс". Внутри этого описателя выбирается подутверждение P с заголовком f. Находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$ перегруппировочного типа, у которой заголовком B_1 служит f. Она применяется для преобразования P. Результат упрощается. (Прием описатель - 40).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to \sup(\text{set}_n(n < a\ \&\ n - \text{целое})) = -[-a + 1])$

   из теоремы

   $\forall_b(b - \text{число} \to \inf(\text{set}_n(b < n\ \&\ n - \text{целое})) = [b + 1])$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow -b < a \leftrightarrow -a < b)$

3. Варьирование тождества, исключающего описатель, с помощью определения некоторого понятия. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(D_1 \ \& \ \ldots \ \& \ D_m)$". Утверждение под описателем "класс" преобразуется задачей на описание с целью упрощения и развертки по определениям. По некоторому логическому символу f, встречающемуся после этого под описателем, находится определение $B_1 \leftrightarrow B_2$ некоторого утверждения, у которого f - заголовок самого сложного подтерма определяющей части B_2. Утверждение B_2 преобразуется задачей на описание так же, как выше. После этого определение используется для преобразования утверждения под описателем "класс" (направление замены - от B_2 к B_1). Результат упрощается. (Прием описатель - 16).

   Пример: вывод тождества

   $\forall_{cd}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ \text{конечное}(d) \rightarrow \text{card}(c \times d) = \text{card}(c)\text{card}(d))$

   из тождества

   $\forall_{abcd}(\neg(a = b) \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ \text{конечное}(d) \rightarrow$
   $\text{card}(\text{set}_f(\text{Dom}(f) = \{a, b\} \ \& \ f(a) \in c \ \& \ f(b) \in d \ \& \ f - \text{функция})) = \text{card}(c)\text{card}(d))$

   и дополнительного тождества

   $\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово})$

4. Попытка упрощения условия под описателем "класс" с помощью эквивалентности общей стандартизации. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(D1 \ \& \ \ldots \ \& \ D_m)$". По заголовку f конъюнктивного члена D_i находится эквивалентность общей стандартизации $B_1 \leftrightarrow B_2$, у которой обе части - конъюнкции элементарных утверждений, прием f - самый сложный заголовок конъюнктивного члена заменяемой части B_1. Эта эквивалентность используется для преобразования конъюнкции $D_1 \ \& \ \ldots \ \& \ D_m$. Результат упрощается. (Прием описатель - 19).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{AB}(\text{card}(A) = \text{card}(B) \ \& \ A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(B) \rightarrow$
   $\text{card}(\text{set}_f(B = \text{Val}(f) \ \& \ \text{Dom}(f) = A \ \& \ f - \text{функция})) = \text{card}(B)!)$

   из теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(B) \ \& \ \text{card}(A) \leq \text{card}(B) \rightarrow$
   $\text{card}(\text{set}_f(\text{Отображение}(f, A, B) \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f))) =$
   $\text{card}(B)!/(\text{card}(B) - \text{card}(A))!)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABf}(\text{card}(A) = \text{card}(B) \ \& \ \text{конечное}(A) \rightarrow \text{Отображение}(f, A, B) \ \&$
   $\text{взаимнооднозначно}(f) \leftrightarrow f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = A \ \& \ \text{Val}(f) = B)$

5. Попытка упрощения конъюнктивного члена под описателем "класс" с помощью разделяющей эквивалентности. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(D1\ \&\ \ldots\ \&\ D_m)$". Внутри некоторого конъюнктивного члена D_i выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f. По символу f находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$, декомпозирующая бесповторное элементарное утверждение B_1 в конъюнкцию либо дизъюнкцию бесповторных элементарных утверждений. При этом f - заголовок подвыражения левой части, переменные которого оказываются в различных конъюнктивных членах правой части. Данная эквивалентность используется для преобразования D_i. Результат упрощается. (Прием описатель - 36).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ a \subseteq \mathbb{R}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{комплформа}(a \times b) = \text{set}_z(z - \text{комплексное}\ \&\ \text{Re}(z) \in a\ \&\ \text{Im}(z) \in b))$

   из теоремы

   $\forall_A(A - \text{set}\ \&\ A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{комплформа}(A) = \text{set}_z(z - \text{комплексное}\ \&\ (\text{Re}(z), \text{Im}(z)) \in A))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcd}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set} \rightarrow (c, d) \in a \times b \leftrightarrow c \in a\ \&\ d \in b)$

6. Попытка упрощения конъюнктивного члена под описателем "класс" с помощью эквивалентности общей стандартизации. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(D1\ \&\ \ldots\ \&\ D_m)$". Выбирается некоторое D_i, и по его заголовку f находится эквивалентность общей стандартизации $B_1 \leftrightarrow B_2$ с бесповторными элементарными частями, у которой f - заголовок левой части, причем правая часть его не содержит f и имеет сложность, меньшую сложности левой части. Кроме того, эта эквивалентность имеет единственную переменную. Она применяется для преобразования D_i. Результат упрощается. (Прием описатель - 48).

   Пример: вывод теоремы

   $\text{card}(\text{set}_b(b - \text{натуральное}\ \&\ b - \text{even})) = \text{счетное}$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{натуральное} \rightarrow \text{card}(\text{set}_b(a|b\ \&\ b - \text{натуральное})) = \text{счетное})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{целое} \rightarrow a - \text{even} \leftrightarrow 2|a)$

7. Попытка расширения типа значения параметра в описателе "класс" при помощи эквивалентности с характеристикой "подтип"ъ (случай 1). Теорема - тождество "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A_1) = A_2$. Внутри A_1 выбирается подутверждение $f(t_1, t_2)$. По символу f находится эквивалентность $g(x, y) \leftrightarrow f(r_1, r_2)$, где тип T значения одной из переменных x, y - собственный подтип значения другой. Оба выражения r_1, r_2 имеют тип значения T. Проверяется, что исходная теорема имеет

антецедент вида $T(z)$, где z - переменная, входящая в $f(t_1, t_2)$. Затем найденная эквивалентность применяется в направлении справа налево для преобразования $f(t_1, t_2)$. Результат упрощается. (Прием описатель - 51).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_{bn}(b - \text{число } \& \ n - \text{целое} \rightarrow \{1 + [b], \ldots, n\} = \text{set}_x(b < x \ \& \ x - \text{целое } \& \ x \leq n))$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое } \& \ n - \text{целое} \rightarrow \{m, \ldots, n\} = \text{set}_x(x - \text{целое } \& \ m \leq x \ \& \ x \leq n))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ax}(x - \text{число } \& \ a - \text{число} \rightarrow x < a \leftrightarrow [x] + 1 \leq a)$$

8. Попытка расширения типа значения параметра в описателе "класс" при помощи эквивалентности с характеристикой "подтип"ъ (случай 2). Теорема - тождество "$A_1 = A_2$", исключающее описатель "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(D1 \ \& \ \ldots \ \& \ D_m)$" (вообще говоря, - собственный подтерм левой части). Некоторое D_i имеет вид $f(t_1, t_2)$. По символу f находится эквивалентность общей стандартизации $f(r_1, r_2) \leftrightarrow f(x, y)$, где тип T значения одной из переменных x, y - собственный подтип значения другой. Оба выражения r_1, r_2 имеют тип значения T. Каждый параметр терма D_i, свободный в опиателе, имеет в нем единственное вхождение. Эта эквивалентность применяется для преобразования $f(t_1, t_2)$. Результат упрощается. Проверяется, что антецеденты не содержат неоднобуквенных неконстантных подвыражений. (Прием описатель - 50).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число } \& \ c - \text{число} \rightarrow \{1 + [b], \ldots, [c]\} = \text{set}_x(b < x \ \& \ x - \text{целое } \& \ x \leq c))$$

из теоремы

$$\forall_{bn}(b - \text{число } \& \ n - \text{целое} \rightarrow \{1 + [b], \ldots, n\} = \text{set}_x(b < x \ \& \ x - \text{целое } \& \ x \leq n))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ax}(x - \text{число } \& \ a - \text{число} \rightarrow a \leq [x] \leftrightarrow a \leq x)$$

9. Попытка использовать перегруппировочную эквивалентность для варьирования тождества, преобразующего параметрическое описание класса в операцию над семейством. Теорема - тождество, преобразующее параметрическое описание класса в операцию над семейством. Внутри описателя "класс" выбирается подутверждение P с заголовком f. По символу f находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$ общей стандартизации с заголовком f левой части и бесповторными элементарными частями. Она применяется для преобразования P. Результат упрощается. (Прием семействоэлементов - 2).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_b(\neg(b = \text{пустоеслово}) \ \& \ b - \text{слово} \rightarrow \prod_{i=1}^{l(b)}\{b(i)\} = \{b\})$$

из теоремы

$\forall_A$(семействомножеств(A) & A – слово & $\neg(A =$ пустоеслово$) \to \prod_{i=1}^{l(A)} A(i) =$ $\mathrm{set}_x(x -$ слово & $l(x) = l(A)$ & $\forall_i(i \in \{1, \ldots, l(A)\} \to x(i) \in A(i))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a = b \to a \in \{b\})$

10. Попытка использования дополнительной эквивалентности для развязки консеквента. Консеквент теоремы - равенство "координ$(A, K) = \mathrm{set}_{x_1 \ldots x_k}(D_1$ & $\ldots$ & $D_n)$". Выбирается D_i, имеющее вид $P(t_1, t_2)$, где некоторое t_j не содержит переменных $x_1, \ldots, x_k$, причем существует антецедент $s_1 = s_2$, у которого одна часть содержит параметр терма t_j, а другаяя - не содержит параметров D_i. Находится эквивалентность вида $P(r_1, r_2) \leftrightarrow P(r_3, r_2)$, которая используется для преобразования $P(t_1, t_2)$. Результат упрощается. (Прием уравнмножество - 19).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcghijklmnK}(\neg(a = g)$ & $\neg(l^2 + m^2 + n^2 = 0)$ & координ$(a, K) = (b, c, k)$ & координ$(g, K) = (h, i, j)$ & $l -$ число & $m -$ число & $n -$ число & $a -$ точка & $g -$ точка & пропорцнаборы$((l, m, n), (b - h, c - i, k - j))$ & Трехмерн$(K) \to$ координ(прямая$(ag), K) = \mathrm{set}_{xyz}(x -$ число & $y -$ число & $z -$ число & пропорцнаборы$((l, m, n), (x - h, y - i, z - j))))$

из теоремы

$\forall_{abcghijkK}(\neg(a = g)$ & координ$(a, K) = (b, c, k)$ & координ$(g, K) = (h, i, j)$ & $a -$ точка & $g -$ точка &Трехмерн$(K) \to$ координ(прямая$(ag), K) =$ $\mathrm{set}_{xyz}(x -$ число & $y -$ число & $z -$ число & пропорцнаборы$((b - h, c - i,$ $k - j), (x - h, y - i, z - j))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcdefklm}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0)$ & $\neg(a^2 + b^2 + c^2 = 0)$ & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $k -$ число & $l -$ число & $m -$ число & пропорцнаборы$((a, b, c), (d, e, f)) \to$ пропорцнаборы$((d, e, f),$ $(k, l, m)) \leftrightarrow$ пропорцнаборы$((a, b, c), (k, l, m)))$

3.5.8 Варьирование тождества с помощью эквивалентности для равенств

1. Попытка преобразовать тождество для бинарной ассоциативной операции при помощи упрощающей эквивалентности. Теорема - тождество общей стандартизации $f(t_1, \ldots, t_n) = t_0$, причем f - бинарная ассциативная операция на некотором множестве A. Имеется антецедент P, сложность заголовка которого больше сложности консеквента. Выбирается новая переменная x, и теорема преобразуется к виду $f(x, t_1, \ldots, t_n) = f(x, t_0)$, с добавлением антецедента "$x \in A$". Обе части упрощаются. В разделе, к которому относится заголовок P, находится эквивалентность общей стандартизации вида $g(r_1, \ldots, r_n) = r_0 \leftrightarrow B$. Она применяется для преобразования консеквента модифицированной указанным образом исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием нормализация - 133).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{adh}(h-\text{set} \,\&\, a \in h \,\&\, \text{ассоциативно}(d) \,\&\, \text{обратимо}(d) \,\&\, \text{бинарнооперация}(d,h) \rightarrow$
$\text{единица}(d) = d(\text{обрэлемент}(a,d),a))$

из теоремы

$\forall_{afA}(A-\text{set} \,\&\, a \in A \,\&\, \text{ассоциативно}(f) \,\&\, \text{обратимо}(f) \,\&\, \text{бинарнооперация}(f,A) \rightarrow$
$f(a, \text{обрэлемент}(a,f)) = \text{единица}(f))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{degxA}(A-\text{set} \,\&\, g \in A \,\&\, x \in A \,\&\, \text{ассоциативно}(e) \,\&\, \text{обратимо}(e) \,\&$
$\text{Единица}(d,e) \,\&\, \text{бинарнооперация}(e,A) \rightarrow e(x,g) = g \leftrightarrow d = x)$

2. Попытка перехода к числовым равенствам. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, содержащее более одного атомарного выражения некоторого типа f. Находится эквивалентность вида $x = y \leftrightarrow B$, переформулирующая условие равенства двух объектов x, y типа f в конъюнкцию равенств для их численных параметров. Эта эквивалентность используется для преобразования равенства - консеквента исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием Атомарное - 20).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bdestK}(0 < s - t \,\&\, s \in e \,\&\, t \in e \,\&\, \text{неподв}(d,e) \,\&\, \text{мточка}(b) \,\&\, \text{Равндвиж}(b,e) \,\&$
   $\text{Трехмерн}(K) \,\&\, \text{Числотр}(e) \,\&\, \text{мтело}(d) \rightarrow \text{крд}(\text{Место}(b,s),K,1) -$
   $\text{крд}(\text{Место}(b,t),K,1) = \text{длина}([t,s])\text{крд}(\text{Скорость}(b,d,e),K,1))$

   из теоремы

   $\forall_{bcdest}(c = [t,s] \,\&\, c \subseteq e \,\&\, s - \text{число} \,\&\, t - \text{число} \,\&\, \text{неподв}(d,e) \,\&\, \text{мточка}(b) \,\&$
   $\text{Равндвиж}(b,e) \,\&\, \text{Числотр}(c) \,\&\, \text{Числотр}(e) \,\&\, \text{мтело}(d) \rightarrow$
   $\text{вектор}(\text{Место}(b,t)\text{Место}(b,s)) = \text{длина}(c)\text{Скорость}(b,d,e))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{uvK}(\text{Вектор}(u) \,\&\, \text{Вектор}(v) \,\&\, \text{Трехмерн}(K) \rightarrow u = v \leftrightarrow$
   $\text{крд}(u,K,1) = \text{крд}(v,K,1) \,\&\, \text{крд}(u,K,2) = \text{крд}(v,K,2) \,\&$
   $\text{крд}(u,K,3) = \text{крд}(v,K,3))$

3. Попытка варьирования тождества группировки сложных выражений с помощью эквивалентности, варьирующей равенство. Тождество $A_1 = A_2$ выполняет группировку сложных операций. Заменяемое выражение A_1 имеет два корневых операнда. Его заголовком служит символ f. По символу f находится эквивалентность вида $t_1 = t_2 \leftrightarrow r_1 = r_2$, обе части которой бесповторны, причем применение ее позволяет группировать в одной части равенства две переменные, ранее расположенные в разных частях. Наиболее сложный символ ее левой части - f. Дополнительная теорема используется для преобразования консеквента исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием группмножитель - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(a-1=0) \,\&\, \neg(c-1=0) \,\&\, 0 < a \,\&\, 0 < b \,\&\, 0 < c \,\&\, a - \text{число} \,\&$
   $b - \text{число} \,\&\, c - \text{число} \rightarrow \log_a b = \log_a c \log_c b)$

из теоремы

$\forall_{abc}(\neg(a-1=0)\ \&\ \neg(c-1=0)\ \&\ 0<a\ \&\ 0<b\ \&\ 0<c\ \&\ a-$ число $\&$
$b-$ число $\&$ $c-$ число $\to \log_a b/\log_a c=\log_c b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(\neg(c=0)\ \&\ a-$ число $\&$ $b-$ число $\&$ $c-$ число $\to b=ac\leftrightarrow a=b/c)$

3.6 Преобразование эквивалентности в тождество

1. Попытка ввести упрощающее тождество путем упрощения подвыражения заменяющей части эквивалентности. Теорема - эквивалентность "$(t=a)\leftrightarrow x=p\ \&\ A$" разрешения равенства $t=a$ относительно некоторой переменной x; a - переменная, не входящая в t и в антецеденты. Выражение p содержит единственную переменную a. По заголовку f выражения p находится тождество $B_1=B_2$, либо выражающее корневую сложную операцию f выражения B_1 через эту же операцию от более простого терма, либо уменьшающее оценку сложности. Оно применяется для преобразования p. Получается теорема вида $(t_1=t_0)\leftrightarrow a=p_1\ \&\ A_1$. Правая часть разрешается относительно единственного параметра терма t_0, результат подставляется в t_0, и преобразованное таким образом равенство $t_1=t_0$ становится консеквентом новой теоремы. Результат упрощается. (Прием глуб - 28).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a-$ число $\&\ 0\le a+1\ \&\ 0\le 1-a\to \arcsin(-a)=-\arcsin a)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a-$ число $\&\ 0\le a+1\ \&\ 0\le 1-a\to \arcsin a=b\leftrightarrow a=\sin b\ \&\ b-$ число $\&$
   $0\le\pi-2b\ \&\ 0\le\pi+2b)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a-$ число $\to \sin(-a)=-\sin a)$

2. Вывод тождества определения характеристики класса с помощью эквивалентности для принадлежности множеству. Теорема - эквивалентность "$(A_1=A_2)\leftrightarrow \exists_{x_1\ldots x_k}(y=t\ \&\ A_3)$", дающая явное параметрическое описание значений y, удовлетворяющих условию $A_1=A_2$. При этом y входит в A_1 и не входит в A_2. По заголовку f выражения t находится эквивалентность общей стандартизации "$z\in T\leftrightarrow B$", где заголовок выражения T равен f. Переменные ее переобозначены так, чтобы не входить в исходную теорему. После унификации t с T определяются результаты подстановки в A_1 вместо y выражения "$\mathrm{set}_z(B\ \&\ P)$", где P - новая переменная, и символа "$\emptyset$". После упрощения эти результаты дают выражения R_1, R_2. Консеквентом новой теоремы становится равенство "$R_1=(R_1$ при P, иначе $R_2)$". Ее список антецедентов состоит из антецедентов исходной теоремы, утверждений A_3 и преобразованных антецедентов дополнительной теоремы. Список антецедентов упрощается. (Прием параметризация - 19).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{be}(\text{card}(\text{set}_c(c = b \ \& \ e)) = (1 \text{ при } e, \text{ иначе } 0))$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{set} \rightarrow \exists_b(a = \{b\}) \leftrightarrow \text{card}(a) = 1)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a = b \leftrightarrow a \in \{b\})$

3.7 Преобразование эквивалентности в импликацию

Дополнительное тождество преобразует заменяемую часть эквивалентности, после чего заменяющая часть добавляется к списку антецедентов

1. Извлечение импликации для проверочного оператора из результата варьирования декомпозирующей эквивалентности с помощью тождеств свертки. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$ декомпозиции элементарного утверждения A_1 в конъюнкцию бесквантворных утверждений. Внутри A_1 выбирается подвыражение $f(t_1, t_2)$. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, обеспечивающее свертку небесповторного выражения B_1 с заголовком f в бесповторное выражение. Оно применяется для преобразования $f(t_1, t_2)$. Полученная эквивалентность преобразуется в импликацию, консеквентом которой становится заменяемая часть, а конъюнктивные члены заменяющей переносятся в антецеденты. После упрощения антецедентов и проверки неизбыточности новой импликации для создания проверочного оператора, она регистрируется и сопровождается указаниями, что она создана для проверочного оператора. (Прием и - 38).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(b-\text{set} \ \& \ a-\text{set} \ \& \ c-\text{set} \ \& \ d-\text{set} \ \& \ \text{непересек}(b, a \setminus c) \ \& \ \text{непересек}(b, a \setminus d) \rightarrow \text{непересек}(b, a \setminus (c \cap d)))$

   из теоремы

   $\forall_{bef}(b - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(b, e \cup f) \leftrightarrow \text{непересек}(b, e) \ \& \ \text{непересек}(b, f))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bcf}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow b \setminus c \cup b \setminus f = b \setminus (c \cap f))$

Заменяемая часть добавляется к антецедентам, после чего заменяющая часть преобразуется дополнительным тождеством, сворачивается обратно и становится консеквентом

1. Развязка пары числовых атомов, содержащих все переменные определяющей эквивалентности. Теорема - определение "$P(x_1 \ldots x_k) \leftrightarrow A_1$" некоторого отношения P. Определяющая часть A_1 содержит ровно два невырожденных числовых атома t_1, t_2 с одним и тем же заголовком f, причем все переменные теоремы

встречаются в этих атомах. Чтобы получить импликацию вида $P(y_1 \dots y_k) \to P(x_1 \dots x_k)$, создается дубликат $P(y_1 \dots y_k) \leftrightarrow A_2$ исходной теоремы. При этом атомы t_1, t_2 превращаются в атомы r_1, r_2. Находится тождество $B_1 = B_2$ для двух числовых атомов с заголовком f. Оно используется дважды - для вывода равенства $t_1 = r_1$ и равенства $t_2 = r_2$. Проверяется, что при соответствующем объединении антецедентов утверждение A_1 становится следствием A_2. Результат упрощается. (Прием определение - 119).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcfghij}(\neg(b = f)$ & $\neg(c = f)$ & $\neg(f = g)$ & $\neg(f = h)$ & $\neg(f = i)$ & $\neg(f = j)$ & биссектриса$(ifbg)$ & $b-$точка & $c-$точка & $f-$точка & $g-$точка & $h-$точка & $i-$точка & $j-$точка & точкалуча(f, b, c) & точкалуча(f, g, h) & точкалуча$(f, i, j) \to$ биссектриса$(jfch))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & $\neg(A = B)$ & $\neg(A = D)$ & $\neg(A = C) \to$ биссектриса$(BACD) \leftrightarrow \angle(CAD) = \angle(DAB)$ & разныестороны$(B, C,$ прямая$(AD))$ & $\angle(CAD) \le \pi/2)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDE}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & $E-$точка & $\neg(A = E)$ & $\neg(A = C)$ & $\neg(A = B)$ & $\neg(A = D)$ & точкалуча(A, B, C) & точкалуча$(A, D, E) \to \angle(BAD) = \angle(CAE))$

Исходная теорема определяет терм "биссектриса$(BACD)$".

Расщепление варьируемой переменной параметрического описания

1. Использование тождества обобщенной дистрибутивности для расщепления варьируемой переменной. Теорема - эквивалентность вида "$A_1 \leftrightarrow \exists_u(a = g(b, u)$ & $A_2)$", дающая явное параметрическое описание для A_1. Находится тождество вида $g(x, h(y, z)) = f(g(x, y), g(x, z))$. Рассматриваются две версии исходной теоремы, в которых вместо переменной a берутся новые переменные a_1, a_2. Соответствующие версии D_1, D_2 утверждения A_1 становятся антецедентами новой теоремы. Затем дополнительное тождество позволяет установить, что из $a_1 = g(b, u_1), a_2 = g(b, u_2)$ вытекает $f(a_1, a_2) = g(b, h(u_1, u_2))$. Консеквентом новой теоремы становится версия утверждения A_1, соответствующая значению $f(a_1, a_2)$ переменной a. (Прием параметризация - 24).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{amn}(m|a$ & $m|n$ & $a-$целое & $m-$целое & $n-$целое $\to m|(a + n))$

   из теоремы

   $\forall_{mn}(m-$целое & $n-$целое $\to m|n \leftrightarrow \exists_k(k-$целое & $n = mk))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a-$число & $b-$число & $c-$число $\to ab + ac = a(b + c))$

Преобразование заменяющей части эквивалентности с помощью дополнительной теоремы и перенесение этой части в антецеденты

1. Вывод приема подбора примера с помощью подбора примера для самого сложного конъюнктивного члена в кванторном определении. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(D_1 \ \& \ \ldots \ \& \ D_n)$. Выбирается D_i, содержащее самое сложное подвыражение t определяющей части. По его заголовку f находится кванторная импликация, обеспечивающая попытку обратного вывода с переходом к более простым понятиям. Некоторый ее антецедент имеет вид $x = p$, а заголовок самого сложного подтерма консеквента - f. Переменные импликации переобозначены так, чтобы не входить в исходную теорему. D_i унифицируется с консеквентом импликации, после чего заменяется на конъюнкцию ее антецедентов. Затем квантор существования в правой части эквивалентности переносится в антецеденты, а в консеквенте остается левая часть. Список антецедентов упрощается. (Прием определение - 51).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_f(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \ \& \ \exists_a(f = \lambda_c(a, c - \text{натуральное}) \ \& \ a - \text{число}) \rightarrow \text{сходится}(f))$

   из теоремы

   $\forall_f(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \rightarrow \text{сходится}(f) \leftrightarrow \exists_a(a - \text{число} \ \& \ a = \lim(f)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ax}(a - \text{число} \ \& \ x = \lambda_n(a, n - \text{натуральное}) \rightarrow \lim(x) = a)$

2. Попытка сильно упростить подвыражение под квантором существования заменяющей части и извлечь импликацию для проверочного оператора. Теорема - эквивалентность вида "$A_1 \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(A_2) \ \& \ A_3$", где A_1 и все конъюнктивные члены утверждения A_3 элементарны. Утверждение A_2 не содержит символа "или". Внутри A_2 выбирается неоднобуквенное выражение t с заголовком f. Находится тождество $B_1 = B_2$, уменьшающее оценку сложности не содержащего константных неоднобуквенных подтермов выражения B_1 с заголовком f. Это тождество применяется для преобразования f. Результат упрощается. Проверяется, что правая часть полученной эквивалентности содержит квантор существования. Затем эта часть переносится в антецеденты, а консеквентом становится элементарная левая часть. Результат снова упрощается. Проверяется, что оценка сложности антецедентов меньше оценки сложности консеквента. (Прием развертка - 58).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abA}(\text{Dom}(b) = A \ \& \ \{1, \ldots, a\} = \text{Val}(b) \ \& \ b - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(b) \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow \text{перестановка}(\text{обрфункция}(b), A))$

   из теоремы

   $\forall_{fA}(A - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(A) \rightarrow \text{перестановка}(f, A) \leftrightarrow \exists_a(\text{Dom}(f) = \{1, \ldots, a\} \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ 0 \leq a) \ \& \ A = \text{Val}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f))$

и дополнительной теоремы

$\forall_f(f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \to \text{Dom}(\text{обрфункция}(f)) = \text{Val}(f))$

3. Попытка получения импликации, выводящей ограничение на параметры при усмотрении различия объектов. Теорема - эквивалентность $P(t_1, t_2) \leftrightarrow A$, выражающая отношение P для двух атомарных нечисловых выражений t_1, t_2 через параметры координат. Заголовком обоих выражений t_1, t_2 служит один и тот же символ f. Проверяется наличие специального проверочного оператора для усмотрения различия объектов типа f. В разделе символа P находится теорема, консеквентом которой служит равенство $r_1 = r_2$ двух нечисловых атомарных выражений с заголовком f. Эта же теорема имеет антецедент $P(r_1, r_2)$. Предпринимается контрапозиция этого антецедента с консеквентом. Переменные дополнительной теоремы предварительно переобозначаются так, чтобы не встречаться в исходной теореме. Далее консеквент "$\neg(P(r_1, r_2))$" унифицируется с "$\neg(P(t_1, t_2))$"; антецеденты теорем объединяются, а консеквентом становится отрицание A. Список антецедентов упрощается. (Прием числопред - 3).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdefhijkGK}(\text{коорд}(\text{прямая}(hi), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&$
$y - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(jk), K) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&$
$v - \text{число})\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&$
$f - \text{число}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ h - \text{точка}\ \&\ i - \text{точка}\ \&\ j - \text{точка}\ \&\ k - \text{точка}\ \&$
$\neg(j = k)\ \&\ \neg(h = i)\ \&\ G \in \text{прямая}(hi)\ \&\ G \in \text{прямая}(jk)\ \&$
$\neg(\text{прямая}(hi) = \text{прямая}(jk)) \to \neg(ae - bd = 0))$

   из теоремы

$\forall_{abcdefhijkK}(\neg(h = i)\ \&\ \neg(j = k)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(hi), K) =$
$\text{set}_{xy}(c + ax + by = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&$
$\text{коорд}(\text{прямая}(jk), K) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число})\ \&$
$a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&$
$h - \text{точка}\ \&\ i - \text{точка}\ \&\ j - \text{точка}\ \&\ k - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K) \to$
$\text{прямая}(hi) \parallel \text{прямая}(jk) \leftrightarrow ae - bd = 0)$

   и дополнительной теоремы

$\forall_{ABEFG}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \neg(E = F)\ \&$
$\neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(EF)\ \&\ G \in \text{прямая}(AB)\ \&$
$G \in \text{прямая}(EF) \to \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(EF))$

Реализация заменяемой части эквивалентности

1. Попытка реализации заменяемой части и исключения квантора существования в заменяющей. Теорема - эквивалентность $P(t_1 \ldots t_n) \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(A)$, у которой в левой части находится предикат, значения части операндов которого однозначно определяются значениями других операндов, причем P встречается и в правой части. В разделе символа P находится импликация, консеквент которой имеет заголовок P. Утверждение $P(t_1 \ldots t_n)$ после этого реализуется с

помощью дополнительной теоремы. Результат упрощается. Проверяется, что консеквент полученной теоремы имеет вид $\exists_{y_1 \ldots y_m}(D_1 \;\&\; P(r_1 \ldots r_n)$. Утверждение $D_1 \;\&\; P(r_1 \ldots r_n)$ разрешается при помощи задачи на описание относительно $y_1, \ldots, y_m$. Проверяется, что ответ содержит равенства $y_1 = s_1, \ldots, y_m = s_m$. Эти равенства добавляются к антецедентам, а консеквент заменяется на $P(r_1 \ldots r_n)$. Результат снова упрощается. (Прием выч - 18).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{defhB}(e - \text{set} \;\&\; e \subseteq \text{Dom}(d) \;\&\; \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \;\&\; \text{образ}(d, e) \subseteq \text{Dom}(f) \;\&\; \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \;\&\; \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \;\&\; d - \text{функция} \;\&\; f - \text{функция} \;\&\; \text{Min}(d, e, B, h) \;\&\; \text{убывает}(f, \text{образ}(d, e)) \rightarrow \text{Max}(\text{произведение}(f, d), e, B, f(h)))$

из теоремы

$\forall_{acdeg}(e - \text{set} \;\&\; e \subseteq \text{Dom}(d) \;\&\; \text{образ}(d, e) \subseteq \text{Dom}(a) \;\&\; \text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R} \;\&\; a - \text{функция} \;\&\; d - \text{функция} \rightarrow \text{Max}(a, \text{образ}(d, e), g, c) \leftrightarrow \exists_B(\text{образ}(d, B) = g \;\&\; \text{Max}(\text{произведение}(a, d), e, B, c)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{dfx}(d - \text{set} \;\&\; d \subseteq \text{Dom}(f) \;\&\; \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \;\&\; \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \;\&\; f - \text{функция} \;\&\; \text{убывает}(f, d) \;\&\; \text{наименьший}(x, d) \rightarrow \text{Max}(f, d, \{x\}, f(x)))$

2. Частичная реализация конъюнктивного члена заменяемой части. Теорема - эквивалентность общей стандартизации вида $A_1 \;\&\; \ldots \;\&\; A_n \leftrightarrow A_0$. Выбирается некоторое A_i с заголовком f, и по символу f находится импликация, консеквент которой имеет заголовок f. Она используется для реализации A_i: после унификации антецеденты двух теорем объединяются, причем A_i исключается из консеквента. Конъюнкция оставшихся A_j упрощается и переносится в антецеденты. Консеквентом остается A_0. (Прием общнорм - 94).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcG}(\neg(b = c) \;\&\; \text{орграф}(G) \;\&\; \text{ведет}(a, b, c, G) \rightarrow \text{простаяцепь}(((b, c), (a)), G))$

   из теоремы

   $\forall_{MG}(\text{орграф}(G) \rightarrow \text{простаяцепь}(M, G) \leftrightarrow \text{цепь}(M, G) \;\&\; \text{различны}(M(1)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcG}(\text{орграф}(G) \;\&\; \text{ведет}(a, b, c, G) \rightarrow \text{цепь}(((b, c), (a)), G))$

Реализация фрагмента заменяющей части и преобразование эквивалентности в импликацию, консеквентом которой становится заменяемая часть

1. Попытка реализации конъюнктивного члена, определяющего одно из искомых значений, с переходом от эквивалентности к импликации. Теорема - определение $P(t_1 \ldots t_n) \leftrightarrow A_1 \;\&\; \ldots \;\&\; A_n$ некоторого отношения P, часть операндов которого однозначно определяется значениями остальных опрандов. Однозначно определяемые операнды в данной теореме - переменные, причем некоторое

A_i имеет вид $Q(\ldots x \ldots)$, где x - одна из указанных переменных. В свою очередь, значение операнда x отношения Q однозначно определяется значениями остальных операндов. Находится импликация, консеквент которой имеет заголовок Q. Она используется для реализации A_i: после унификации антецеденты двух теорем объединяются, прочие A_j переносятся в антецеденты, а консеквентом становится $P(t_1 \ldots t_n)$. Результат упрощается. (Прием определение - 241).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acd}(d - \text{set} \ \& \ d \subseteq \text{Dom}(c) \ \& \ \text{Dom}(c) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(c) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ c - \text{функция} \ \&$
$\text{неубывает}(c, d) \ \& \ \text{наибольший}(a, d) \rightarrow \text{Max}(c, d, d \cap \text{слой}(c, c(a)), c(a)))$

из теоремы

$\forall_{fbAB}(f - \text{функция} \ \& \ A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{Max}(f, A, B, b) \leftrightarrow$
$\text{наибольший}(b, \text{образ}(f, A)) \ \& \ B = A \cap \text{слой}(f, b))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{afA}(f - \text{функция} \ \& \ A - \text{set} \ \& \ \text{неубывает}(f, A) \ \& \ A \subseteq \text{Dom}(f) \ \&$
$\text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{наибольший}(a, A) \rightarrow \text{наибольший}(f(a), \text{образ}(f, A)))$

2. Использование дополнительной импликации для реализации элементарной определяющей части. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$ утверждения A_1 посредством элементарного утверждения A_2. Подтерм t утверждения A_2, имеющий максимальную сложность, единственный, и представляет собой выражение с заголовком f. В разделе символа f находится импликация, консеквент B которой содержит f и имеет тот же заголовок, что утверждение A_2. Связанные переменные в B отсутствуют. Эта импликация - либо тождество общей стандартизации, либо нечисловое равенство, либо используется для создания приема вывода следствий или приема проверочного оператора. Консеквент дополнительной теоремы заменяется на "$B \leftrightarrow$ истина", после чего она применяется для преобразования A_2. Результат упрощается. (Прием определение - 256).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{an}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R}^n \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow \text{замкнутое}(\text{замыкание}(a)))$

   из теоремы

   $\forall_{nA}(n - \text{натуральное} \ \& \ A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \text{замкнутое}(A) \leftrightarrow A = \text{замыкание}(A))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{cn}(c - \text{set} \ \& \ c \subseteq \mathbb{R}^n \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow \text{замыкание}(\text{замыкание}(c)) =$
   $\text{замыкание}(c))$

3. Вывод одного условия существования из другого. Теорема - эквивалентность вида $A_0 \leftrightarrow \exists_x(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n)$. Выбирается некоторый логический символ f, входящий в правую часть и не являющийся общелогическим. В разделе этого символа находится теорема с консеквентом вида $\exists_y(B_1 \ \& \ \ldots \ \& \ B_n)$, содержащим все не являющиеся общелогическими символы правой части исходной теоремы. Переменные ее переобозначаются так, чтобы не входить в исходную теорему.

Усматривается подстановка C, переводящая A_1 & ... & A_n в B_1 & ... & B_n, причем x переходит в y. Эта подстановка применяется к антецедентам исходной теоремы, добавляются антецеденты дополнительной теоремы, а консеквентом становится результат применения C к A_0. Результат упрощается. (Прием развертка - 111).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a - \text{функция} \to \text{card}(\text{Val}(a)) \leq \text{card}(\text{Dom}(a)))$

из теоремы

$\forall_{AB}(A - \text{set}\ \&\ B - \text{set} \to \text{card}(A) \leq \text{card}(B) \leftrightarrow$
$\exists_f(f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f)\ \&\ \text{Dom}(f) = A\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq B))$

и дополнительной теоремы

$\forall_f(f - \text{функция} \to \exists_g(g - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(g)\ \&$
$\text{Dom}(g) = \text{Val}(f)\ \&\ \text{Val}(g) \subseteq \text{Dom}(f)))$

4. Попытка обращения в логическую константу элементарного подутверждения консеквента, расположенного под квантором. Теорема - эквивалентность вида $A_1 \leftrightarrow A_2$ с элементарной левой частью и содержащей кванторы правой. В правой части выбирается расположенное под квантором элементарное подутверждение P, заголовок f которого отличен от "не". Если оно является конъюнктивным членом некоторой конъюнкции, то все ее члены элементарны. По символу f находится кванторная импликация, консеквент которой имеет вид "$f(\ldots)$" либо "$\neg(f(\ldots))$". В первом случае он преобразуется к виду "$f(\ldots) \leftrightarrow$ истина", во втором - к виду "$f(\ldots) \leftrightarrow$ ложь". Полученная таким образом эквивалентность применяется для преобразования P. Результат упрощается. (Прием развертка - 114).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{конечное}(a) \to \text{замкнутое}(a))$

из теоремы

$\forall_A(A - \text{set}\ \&\ A \subseteq \mathbb{R} \to \text{замкнутое}(A) \leftrightarrow \forall_x(\text{предельныточка}(x, A) \to x \in A))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{конечное}(a) \to \neg(\text{предельныточка}(b, a)))$

5. Попытка использовать обобщенную транзитивность для получения альтернативного достаточного условия. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, у которой левая часть элементарная, а в правой выделяются два квантора общности - K_1 и K_2, причем K_2 расположен в консеквенте квантора K_1. Консеквент P квантора K_2 элементарный и имеет заголовок f. Утверждение A_2 переносится в антецеденты, а консеквентом становится A_1. Находится кванторная импликация обобщенной транзитивности: $g(x, y)\ \&\ f(y, z) \to f(x, z)$. Переменные ее переобозначены так, чтобы не входить в исходную теорему. Усматривается подстановка, переводящая $f(x, z)$ в P, после чего P заменяется на $g(t_1, t_2)\ \&\ f(t_2, t_3)$

для некоторых t_1, t_2, t_3. Затем, для реализации $g(t_1, t_2)$ находится еще одна дополнительная теоремы, консеквент которой имеет вид $\exists_{y_1 \ldots y_m}(B \ \& \ g(r_1, r_2))$. Эта теорема используется для исключения $g(t_1, t_2)$, причем B замещает антецеденты кванторной импликации K_1. Для обоснования корректности замены решаются задачи на доказательство. Результат упрощается. (Прием развертка - 127).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abn}(\forall_j(\text{Val}(j) \subseteq (0, \infty) \ \&$ числнабор$(j, n) \rightarrow \exists_g(\forall_f(f -$ натуральное $\& \ g \leq f \rightarrow$ $b(f) \in$ евклпрямокр$(a, j)) \ \&\ g -$ натуральное$)) \ \&\ n -$ натуральное $\&$ последовательность$(b, \mathbb{R}^n) \ \&$ числнабор$(a, n) \rightarrow a = \lim(b))$

из теоремы

$\forall_{abn}(n -$ натуральное $\&$ последовательность$(b, \mathbb{R}^n) \ \&$ числнабор$(a, n) \rightarrow$ $a = \lim(b) \leftrightarrow \forall_e(0 < e \ \&\ e -$ число $\rightarrow \exists_g(\forall_f(f -$ натуральное $\& \ g \leq f \rightarrow$ $b(f) \in$ евклокр$(a, e)) \ \&\ g -$ натуральное$)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{adf}(0 < a \ \&\ a -$ число $\&\ f -$ натуральное $\&$ числнабор$(d, f) \rightarrow$ $\exists_c(\text{Val}(c) \subseteq (0, \infty) \ \&$ числнабор$(c, f) \ \&$ евклпрямокр$(d, c) \subseteq$ евклокр$(d, a)))$

6. Попытка получить пример определяемого предиката с помощью подбора примера конъюнктивного члена определяющей части. Теорема - определение $A_0 \leftrightarrow A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n$ с конъюнктивной определяющей частью. Выбирается некоторое A_i, и по его заголовку f находится теорема без существенных посылок, консеквент которой имеет заголовок f, причем отсутствуют символы из новых разделов. Эта теорема используется для реализации A_i. Антецеденты теорем объединяются. Проверяется, что остаток определяющей части - следствие объединенного списка антецедентов, и консеквентом становится A_0. Список антецедентов упрощается. (Прием определение - 166).

   Пример: вывод теоремы

   $1 -$ натуральное

   из теоремы

   $\forall_n(n -$ натуральное $\leftrightarrow n -$ целое $\& \ 1 \leq n)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a -$ число $\rightarrow a \leq a)$

7. Попытка использовать определение самого сложного понятия заменяющей части. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$. Наиболее сложный символ f определяющей части единственный. Находится определение этого символа. Его консеквент - конъюнкция утверждений, содержащих f. Предпринимается попытка найти подстановку, переводящую некоторые из членов консеквента дополнительной теоремы в конъюнктивные члены утверждения A_2. Антецеденты исходной теоремы объединяются с результатами применения данной подстановки

к антецедентам дополнительной теоремы. Консеквентом становится A_1. Новая теорема упрощается. (Прием определение - 168).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{Kad}(\text{коорд}(a,K)=(0,0,d)\ \&\ \text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\rightarrow \text{вертикнапр}(a,K))$

из теоремы

$\forall_{Ka}(\text{Трехмерн}(K)\ \&\ \text{Вектор}(a)\rightarrow \text{вертикнапр}(a,K)\leftrightarrow \text{крд}(a,K,1)=0\ \&\ \text{крд}(a,K,2)=0)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{AKabc}(\text{Трехмерн}(K)\ \&\ \text{Вектор}(A)\ \&\ \text{коорд}(A,K)=(a,b,c)\rightarrow \text{крд}(A,K,1)=a\ \&\ \text{крд}(A,K,2)=b\ \&\ \text{крд}(A,K,3)=c)$

Идентификация связанной переменной квантора существования в заменяющей части при помощи дополнительного тождества и вывод импликации

1. Попытка идентифицировать переменную, связанную квантором существования в заменяющей части - вывод импликации. Теорема - определение вида $A_1\leftrightarrow A_2\ \&\ \exists_x(A_3)$, где все конъюнктивные члены утверждения A_2 элементарны. При помощи задачи на исследование Z, посылками которой служат антецеденты, A_2 и конъюнктивные члены A_3, определяется тип T значения переменной x. По этому типу находится теорема с консеквентом вида $u=v$, антецедентом $T(u)$, причем такая, что переменные u,v ходят в антецеденты симметричным образом. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Рассматривается конъюнкция K антецедентов дополнительной теоремы, содержащих u, в которых u заменено на x. Вместо прочих ее переменных реализуется подстановка, переводящая ее члены в посылки задачи Z. Получается конъюнкция K_1, которая добавляется к антецедентам исходной теоремы, вместе с A_1 и не содержащими u,v антецедентами дополнительной теоремы, к которым применена эта же подстановка. Консеквентом становится A_3. Результат упрощается. (Прием определение - 232).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDE}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ E\in\text{прямая}(CD)\ \&\ E\in\text{окружность}(AB)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ \text{отрезок}(CD)-\text{касательная к окружность}(AB)\rightarrow E\in\text{отрезок}(CD))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\rightarrow \text{отрезок}(CD)-\text{касательная к окружность}(AB)\leftrightarrow \text{прямая}(CD)-\text{касательная к окружность}(AB)\ \&\ \exists_E(E\in\text{окружность}(AB)\ \&\ E\in\text{отрезок}(CD)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ \neg(D=E)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ \text{прямая}(AB)-\text{касательная к окружность}(DE)\ \&\ C-\text{точка}\ \&$

$C \in$ окружность(DE) & $C \in$ прямая(AB) & $F -$ точка &
$F \in$ окружность(DE) & $F \in$ прямая$(AB) \to C = F)$

Заменяемая часть переводится в антецеденты, а заменяющая часть при помощи дополнительной теоремы упрощается до элементарного утверждения

1. Попытка использовать тождество, вычисляющее операцию над семейством. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, преобразующая бесквантворное утверждение A_1 в утверждение с кванторами. Внутри A_2 выбирается подвыражение вида "$P(\lambda_{x_1 \ldots x_k}(D_2, D_1))$", расположенное в консеквенте квантора общности K, причем так, что каждый его надтерм в A_2 - конъюнкция либо квантор существования либо консеквент кванторной импликации, либо квантор общности. Внутри консеквента импликации K нет квантора общности - надтерма указанного подвыражения. По символу P находится тождество "$P($отображение$(\ldots)) = B$", исключающее описатель "отображение". A_1 переносится в антецеденты, консеквентом остается A_2. Затем дополнительное тождество применяется для преобразования "$P(\lambda_{x_1 \ldots x_k}(D_2, D_1))$". Результат упрощается. (Прием развертка - 126).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a($сходится$(\lambda_d(\sum_{c=1}^{d} a(c), d -$ натуральное$))$ & последовательность$(a, \mathbb{R}) \to \lim(a) = 0)$

   из теоремы

   $\forall_b($последовательность$(b, \mathbb{R}) \to$ сходится$(\lambda_d(\sum_{c=1}^{d} b(c), d -$ натуральное$)) \leftrightarrow \forall_x(0 < x$ & $x -$ число $\to \exists_n(\forall_{km}(n < k$ & $k -$ натуральное & $m -$ натуральное & $k \le m \to |\sum_{c=k+1}^{m} b(c)| < x)$ & $n -$ натуральное$)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{fn}(f-$функция & Val$(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $n-$целое & $n \in$ Dom$(f) \to \sum i = n^n f(i) = f(n))$

2. Попытка использовать обобщенную транзитивность для получения условия сохранения свойства. Теорема - эквивалентност $A_1 \leftrightarrow A_2$, преобразующая бесквантворное утверждение A_1 в утверждение с кванторами. Внутри A_2 выбирается некорневая кванторная импликация K, причем так, что каждый ее надтерм в A_2 - конъюнкция либо квантор существования либо консеквент кванторной импликации либо квантор общности. Рассматривается консеквент $f(t_1, t_2)$ импликации K. Проверяется, что его оценка сложности больше 6. Находится теорема вида $f(x, y)$ & $g(y, z) \to f(x, z)$. Ее переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Утверждение A_2 переносится в антецеденты исходной теоремы, а консеквентом остается A_1. Консеквент $f(t_1, t_2)$ преобразуется в $f(t_1, y)$ & $g(y, t_2)$, после чего преобразованное A_2 разбивается в конъюнкцию двух утверждений, одно из которых сворачивается при помощи исходной теоремы в новую версию утверждения A_1. Результат упрощается. (Прием развертка - 128).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{abg}(\forall_c(c - $ натуральное $\& \ a \le c \to |b(c)| \le g(c)) \ \& \ a - $ натуральное $\&$
сходится$(\lambda_d(\sum_{c=1}^{d} g(c), d - $ натуральное$)) \ \&$ последовательность$(b, \mathbb{R}) \ \&$
последовательность$(g, \mathbb{R}) \to$ сходится$(\lambda_d(\sum_{c=1}^{d} b(c), d - $ натуральное$)))$

из теоремы

$\forall_b($последовательность$(b, \mathbb{R}) \to$ сходится$(\lambda_d(\sum_{c=1}^{d} b(c), d - $ натуральное$)) \leftrightarrow$
$\forall_x(0 < x \ \& \ x - $ число $\to \exists_n(\forall_{km}(n < k \ \& \ k - $ натуральное $\&$
$m - $ натуральное $\&$
$k \le m \to |\sum_{c=k+1}^{m} b(c)| < x) \ \& \ n - $ натуральное$)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{cde}(e < c \ \& \ c - $ число $\& \ d - $ число $\& \ e - $ число $\& \ d \le e \to d < c)$

Дополнительная эквивалентность позволяет получить альтернативные бескванторные переформулировки заменяемой кванторной импликации, после чего заменяющая часть и одна из переформулировок переносятся в антецеденты, а другая становится консеквентом

1. Кванторное тождество позволяет получить две альтернативные переформулировки свойства, выражаемого обеими частями дополнительной эквивалентности, которые позволяют свернуть кванторную импликацию. Теорема имеет вид "$A_1 \leftrightarrow \forall_{x_1 \ldots x_k}(A_2 \to t_1 = t_2)$". По заголовку f выражения t_2 находится эквивалентность общей стандартизации $P(\ldots r \ldots) \leftrightarrow B$, у которой r - максимально сложный подтерм корневых операндов, причем его заголовок равен f. Усматривается подстановка C, переводящая r в t_2. Находятся результаты R_1, R_2 упрощения кванторных импликаций "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_2 \to P(\ldots t_1 \ldots)$", "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_2 \to C(B))$". R_2 и A_1 переносятся в антецеденты новой теоремы, а консеквентом становится R_1. Результат упрощается. (Прием развертка - 139).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fg}(g =$ функраспред$(f) \ \& \ g - $ функция $\&$
   последовательность$(f,$ Числфунк$(\mathrm{Dom}(g))) \ \&$ функсходится$(f) \to \mathrm{Val}(g) \subseteq \mathbb{R})$

   из теоремы

   $\forall_{fg}(g - $ функция $\&$ последовательность$(f,$ Числфунк$(\mathrm{Dom}(g))) \to$
   $g =$ функпредел$(f) \leftrightarrow \forall_x(x \in \mathrm{Dom}(g) \to g(x) =$
   $\lim(\lambda_n(f(n)(x), n - $ натуральное$))))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_f($последовательность$(f, \mathbb{R}) \to$ сходится$(f) \leftrightarrow \lim(f) - $ число$)$

Дополнительная эквивалентность преобразует заменяемую часть эквивалентности, после чего заменяющая часть добавляется к списку антецедентов

1. Расшифровка по определению самого сложного подвыражения заменяемой части и переход к импликации с квантором существования в консеквенте. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, исключающая символы с наибольшей оценкой

сложности. Заменяемая часть имеет единственное подвыражение t с наибольшей оценкой сложности. По его заголовку f находится эквивалентность вида $B_1 = x \leftrightarrow B_2$, где заголовок выражения B_1 - символ f; x - переменная, не входящая в B_1. Ее переменные переобозначаются так, чтобы не входить в исходную теорему. Ко второй теореме применяется подстановка, переводящая B_1 в t. Определяется результат A_3 замены в A_1 подвыражения t на переменную x. Консеквентом новой теоремы становится $\exists_x(A_3\ \&\ B_2)$. Утверждение A_2 переносится в антецеденты; добавляются антецеденты дополнительной теоремы, и результат упрощается. (Прием уменьшение - 23).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aghmnA}(a = \text{операция}(A)\ \&\ h \in \text{носитель}(A)\ \&\ \text{алгстепень}(h, a, m) \in g\ \&$
$\text{алгстепень}(h, a, n) \in g\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ m - \text{целое}\ \&\ \text{группа}(A)\ \&$
$\text{подгруппа}(g, A) \rightarrow \exists_{be}(m = b + en\ \&\ b \in \{0, \ldots, n-1\}\ \&$
$\text{алгстепень}(h, a, b) \in g\ \&\ e - \text{целое}))$

из теоремы

$\forall_{aghmnA}(a = \text{операция}(A)\ \&\ h \in \text{носитель}(A)\ \&\ \text{алгстепень}(h, a, n) \in g\ \&$
$n - \text{натуральное}\ \&\ m - \text{целое}\ \&\ \text{группа}(A)\ \&\ \text{подгруппа}(g, A) \rightarrow$
$\text{алгстепень}(h, a, m) \in g \leftrightarrow \text{алгстепень}(h, a, m(\text{mod } n)) \in g)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{mnk}(m - \text{целое}\ \&\ n - \text{натуральное} \rightarrow m(\text{mod } n) = k \leftrightarrow k \in \{0, \ldots, n-1\}\ \&$
$\exists_p(p - \text{целое}\ \&\ m = k + np))$

3.8 Усмотрение эквивалентности консеквента преобразованному антецеденту

1. Попытка использовать обобщенную транзитивность для такого преобразования антецедента, после которого усматривается эквивалентность его консеквенту. Теорема имеет антецедент вида "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \rightarrow \exists_{y_1 \ldots y_m}(A_2))$", причем внутри A_2 встречается кванторная импликация "$\forall_{z_1 \ldots z_m}(A_3 \rightarrow f(t_1, t_2))$". Все ее надтермы имеют заголовок "и", либо "существует", либо "длялюбого", либо суть консеквенты кванторных импликаций. Находится теорема вида $f(x, y)\ \&\ g(y, z) \rightarrow f(x, z)$. Переменные переобозначены и не встречаются в исходной теореме. $f(t_1, t_2)$ заменяется на $f(t_1, y)\ \&\ g(y, t_2)$. Для реализации $g(y, t_2)$ находится еще одна дополнительная теорема с консеквентом вида $\exists_u(D\ \&\ g(r_1, r_2))$. Проверяется, что ее антецеденты истинны в контексте преобразования выражения $g(y, t_2)$. При этом $f(t_1, y)$ преобразуется в некоторое $f(s_1, s_2)$. Для преобразованного таким образом исходного антецедента удается доказать, то он является следствием консеквента исходной теоремы. Окончательный результат получается преобразование исходной теоремы в эквивалентность ее консеквента антецеденту "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \rightarrow \exists_{y_1 \ldots y_m}(A_2))$". (Прием существант - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abn}(n - \text{натуральное}\ \&\ \text{последовательность}(b, \mathbb{R}^n)\ \&\ \text{числнабор}(a, n) \rightarrow$
   $a = \lim(b) \leftrightarrow \forall_j(\text{Val}(j) \subseteq (0, \infty)\ \&\ \text{числнабор}(j, n) \rightarrow$

$\exists_g(\forall_f(f - $ натуральное $\& \ g \leq f \rightarrow b(f) \in$ евклпрямокр$(a, j)) \ \&$
$g -$ натуральное$)))$

из теоремы

$\forall_{abn}(\forall_j(\mathrm{Val}(j) \subseteq (0, \infty) \ \&$ числнабор$(j, n) \rightarrow \exists_g(\forall_f(f -$ натуральное $\&$
$g \leq f \rightarrow b(f) \in$ евклпрямокр$(a, j)) \ \& \ g -$ натуральное$)) \ \&$
$n -$ натуральное $\&$ последовательность$(b, \mathbb{R}^n) \ \&$ числнабор$(a, n) \rightarrow$
$a = \lim(b))$

и дополнительных теорем

$\forall_{abc}(a - \mathrm{set} \ \& \ b - \mathrm{set} \ \& \ a \subseteq b \ \& \ c \in a \rightarrow c \in b)$

$\forall_{abn}(n -$ натуральное $\&$ числнабор$(a, n) \ \&$ числнабор$(b, n) \ \&$
$\mathrm{Val}(b) \subseteq (0, \infty) \rightarrow \exists_c(c -$ число $\& \ 0 < c \ \&$ евклокр$(a, c) \subseteq$
евклпрямокр$(a, b)))$

3.9 Односторонняя модификация эквивалентности

1. Попытка ослабления условия на параметры, расположенного в заменяющей части. Теорема - эквивалентность "$A_1 \leftrightarrow x = t \ \& \ A_2$" разрешения утверждения A_1 относительно переменной x. Рассматривается не содержащий x конъюнктивный член $f(t_1, t_2)$ утверждения A_2. Находится теорема вида $f(y, z) \rightarrow g(y, z)$, вводящая в рассмотрение более слабое, чем f, отношение g. Проверяется, что $g(t_1, t_2) \ \& \ \neg(f(t_1, t_2))$ эквивалентно равенству $y = r$ для некоторой переменной y. После этого утверждение A_1 разрешается относительно x для подслучая $y = r$. Учитываются условия на о.д.з., возникающие в этом подслучае. Окончательный результат получается склейкой общего и частного случаев. (Прием глуб - 37).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(0 < b \ \& \ a -$ число $\& \ b -$ число $\& \ c -$ число $\& \ 0 \leq a \rightarrow c = a^b \leftrightarrow a = c^{1/b} \ \&$
   $0 \leq c)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a -$ число $\& \ b -$ число $\& \ \neg(b = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ c -$ число $\rightarrow a^b = c \leftrightarrow$
   $a = c^{1/b} \ \& \ 0 < c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a -$ число $\& \ b -$ число $\& \ a < b \rightarrow a \leq b)$

2. Попытка использовать обобщенную транзитивность для получения условия существования. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$, не имеющее антецедентов. Все переменные A_1 содержатся в списке X переменных утверждения A_2. Выбирается конъюнктивный член $f(t_1, t_2)$ утверждения A_2, такой, что t_2 - константа, и находится теорема вида $g(x, y) \ \& \ f(y, z) \rightarrow g(x, z)$ Ее переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Составляется список S_1 результатов подстановки в отличные от $f(y, z)$ антецеденты этой теоремы выражений t_1, t_2 вместо

переменных y, z. Выделяется подсписок S_2 списка S_1, образованный утверждениями, содержащими t_2, и подсписок S_3 остальных утверждений. Проверяется, что "$\exists_X(S_2\ \&\ A_2)$" - следствие S_3 и $g(x, t_2)$. Антецедентами новой теоремы становятся утверждения списка S_3, а консеквентом - "$\exists_X(A_1\ \&\ S_2) \leftrightarrow g(x, t_2)$". Результат упрощается. (Прием определение - 165).

Пример: вывод теоремы

$\forall_c(c - \text{число} \rightarrow \exists_n(n < c\ \&\ n - \text{натуральное}) \leftrightarrow 1 < c)$

из теоремы

$\forall_n(n - \text{натуральное} \leftrightarrow n - \text{целое}\ \&\ 1 \leq n)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{cde}(e < c\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ d \leq e \rightarrow d < c)$

3.10 Варьирование заменяющей части эквивалентности при помощи импликации

Использование дополнительной импликации для реализации фрагмента заменяющей части эквивалентности

1. Попытка реализации конъюнктивного члена заменяющей части. Теорема - эквивалентность $A_0 \leftrightarrow A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n$ бесповторного элементарного утверждения A_0 конъюнкции элементарных бесповторных утверждений. Выбирается некоторое $A_i, i > 0$, и по его заголовку f находится теорема без существенных антецедентов, консеквент которой имеет заголовок f, причем отсутствуют символы из новых разделов. Эта теорема используется для реализации A_i. Результат упрощается. (Прием и - 45).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abB}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = B)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \rightarrow$
   $\text{прямая}(aB) = \text{прямая}(aB) \leftrightarrow B \in \text{прямая}(ab))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D)\ \&$
   $\neg(A = B) \rightarrow \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD) \leftrightarrow A \in \text{прямая}(CD)\ \&$
   $B \in \text{прямая}(CD))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B) \rightarrow A \in \text{прямая}(AB))$.

2. Попытка реализации подутверждения определяющей части константным утверждением. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$. Внутри A_2 выбирается подутверждение P с заголовком f. Находится бескванторная (не содержащая переменных) теорема с заголовком f. Она используется для реализации P. Результат упрощается. (Прием определение - 55).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a - \text{set} \to \text{разбиение}(a, \emptyset) \leftrightarrow a = \emptyset)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set} \to \text{разбиение}(a, b) \leftrightarrow \text{классмножеств}(b)\ \&\ \text{Разделимы}(b)\ \&\ a = \bigcup_{x, x \in b} x)$

и дополнительной теоремы

Разделимы($\emptyset$)

3. Попытка обращения в логическую константу квантора, входящего в заменяющую часть эквивалентности кванторной расшифровки. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, причем конъюнктивным членом правой части служит некоторый квантор K. Внутри K выбирается элементарное подутверждение P с заголовком f. По символу f находится импликация без существенных антецедентов, консеквентом которой служит утверждение с заголовком f, либо отрицание такого утверждения. В этом консеквенте встречается константа (логический символ) Q. Выбирается новая переменная x, на которую переобозначается Q, причем вводится антецедент $x = Q$. Затем консеквент дополнительной теоремы преобразуется к виду эквивалентности утверждения с заголовком f логической константе. Дополнительная теорема используется для преобразования P. Результат упрощается. Проверяется, что консеквент новой теоремы бескванторный, а сложность его не меньше сложности A_1. (Прием развертка - 38).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{af}(f - \text{функция} \to \text{слой}(f, a) = \emptyset \leftrightarrow \neg(a \in \text{Val}(f)))$

   из теоремы

   $\forall_{abf}(b - \text{set}\ \&\ f - \text{функция} \to \text{слой}(f, a) \subseteq b \leftrightarrow \forall_x(f(x) = a\ \&\ x \in \text{Dom}(f) \to x \in b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(\neg(a \in \emptyset))$

4. Использование эквивалентности общей стандартизации для перехода от константного примера к неконстантному. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$, у которой параметры бесповторной заменяющей части - собственное подмножество параметров элементарной заменяемой. Заменяющая часть имеет вид $P(x_1 \ldots x_k)$, где $x_1, \ldots, x_k$ - переменные. Находится бескванторное утверждение $P(t_1 \ldots t_k)$, которое используется для реализации $P(x_1 \ldots x_k)$. Результат упрощается. (Прием общнорм - 14).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_c(c - \text{число} \to c < c + 1)$

   из теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a < b \leftrightarrow a + c < b + c)$

и дополнительной теоремы

$0 < 1$.

5. Попытка сильного упрощения подтерма квантора общности в заменяющей части, не имеющего связанных переменных. Теорема - эквивалентность кванторной расшифровки $A_1 \leftrightarrow A_2$. Внутри утверждения A_2 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с заголовком f, не имеющее связанных переменных, но расположенное внутри некоторой кванторной импликации. Находится теорема вида $P(x, y) \rightarrow f(x, y) = a$, где a - логический символ либо одна из переменных x, y. Она используется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием развертка - 125).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abn}(\neg(a \in b) \ \& \ b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R}^n \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow \text{предельныточка}(a, b) \leftrightarrow \text{точкаприкосн}(a, b))$

   из теоремы

   $\forall_{anA}(A - \text{set} \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \text{предельныточка}(a, A) \leftrightarrow \text{числнабор}(a, n) \ \& \ \forall_x(x - \text{число} \ \& \ 0 < x \rightarrow \neg(\text{непересек}(\text{евклокр}(a, x), A \setminus \{a\}))))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(b, c) \rightarrow b \setminus c = b)$

6. Попытка обращения в логическую константу элементарного подутверждения консеквента, расположенного под квантором. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, у которой заменяемая часть имеет связанные переменные, а заменяющая - не имеет. Сложность заменяющей части не больше сложности заменяемой. Внутри A_1 выбирается элементарное подутверждение P с заголовком f, отличным от символа "не", причем расположенное в A_1 внутри квантора. Находится импликация без существенных антецедентов, консеквентом которой служит утверждение с заголовком f, либо отрицание такого утверждения. Этот консеквент преобразуется к виду эквивалентности утверждения с заголовком f логической константе. Дополнительная эквивалентность используеся для преобразования P. Результат упрощается. (Прием связпарам - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_f(\neg(\text{Dom}(f) = \emptyset) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(f) \rightarrow \bigcap(f) = \emptyset \leftrightarrow \forall_a(\exists_x(\neg(a \in x) \ \& \ x \in \text{Val}(f))))$

   из теоремы

   $\forall_{bf}(\neg(\text{Dom}(f) = \emptyset) \ \& \ b - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(f) \rightarrow \bigcap(f) \subseteq b \leftrightarrow \forall_a(\forall_x(x \in \text{Val}(f) \rightarrow a \in x) \rightarrow a \in b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(\neg(a \in \emptyset))$

Использование дополнительной импликации для вывода следствия из заменяющей части эквивалентности и обратной свертки

1. Усмотрение транзитивного отношения в определении свойства функции. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$ некоторого свойства A_1 функции f. Переменная f имеет единственное вхождение в A_2, причем в виде $P(t_1, f(t_2))$. Утверждение $P(t_1, f(t_2))$ может иметь своими надтермами в A_2 только конъюнкции, дизъюнкции, кванторы существования или общности, и консеквенты кванторных импликаций. Находится теорема вида $P(x, y)$ & $Q(y, z) \to P(x, z)$. Выбирается новая переменная g, и рассматривается подстановка C, переводящая x в t_1, y в $f(t_2)$, z в $g(t_2)$. Утверждение A_1 переносится в антецеденты исходной теоремы, консеквентом становится результат замены в A_1 переменной f на g, причем к антецедентам также добавляются свойства функции g, аналогичные таковым для f, и импликация вида "$\forall_{y_1 \ldots y_m}(D \to Q(f(t_2), g(t_2)))$" для подходящих D и переменных $y_1, \ldots, y_m$. Результат упрощается. (Прием определение - 46).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bf}(\forall_c(c - \text{натуральное} \to b(c) \le f(c))$ & $\lim(f) = -\infty$ &
   последовательность$(b, \mathbb{R})$ & последовательность$(f, \mathbb{R}) \to \lim(b) = -\infty)$

   из теоремы

   $\forall_f(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \to \lim(f) = -\infty \leftrightarrow \forall_a(a - \text{число} \to$
   $\exists_n(n - \text{натуральное}$ & $\forall_m(m - \text{натуральное}$ & $n < m \to f(m) < a))))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{cde}(e < c$ & $c - \text{число}$ & $d - \text{число}$ & $e - \text{число}$ & $d \le e \to d < c)$

2. Попытка использовать импликацию, выводящую консеквент определяющей части из более простого однотипного утверждения. Теорема - определение "$A_1 \leftrightarrow \forall_{x_1 \ldots x_k}(D_1$ & $\ldots$ & $D_m \to D_0)$". Утверждение D_0 элементарно и содержит подтерм "значение(...)". По его заголовку f находится теорема вида "B & $f(t_1 \ldots t_k) \to f(r_1 \ldots r_k)$", у которой антецедент $f(t_1 \ldots t_k)$ получается из $f(r_1 \ldots r_k)$ заменой некоторого подтерма T на содержащуюся в нем переменную y. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Рассматривается подстановка C, переводящая $f(t_1 \ldots t_k)$ в D_0. Проверяется, что она переводит переменную y в выражение вида $F(x_i)$. Выбирается новая переменная z. Рассматриваются два варианта исходной теоремы - для подстановки вместо F выражения "Вставка(F, z, y)" и "Вставка(F, z, T)". Они используются для свертки в версии A_2, A_3 утверждения A_1 соответствующих кванторных импликаций. Антецедентом новой теоремы становятся антецеденты исходной теоремы, к которым добавляются обработанные подстановкой C и не содержащие $x_1, \ldots, x_k$ антецеденты второй теоремы, а также утверждения A_2, "слово(F)", "$z \in \{1, \ldots, l(F)+1\}$". Консеквентом становится A_3. Проверяется, что содержащие $x_1, \ldots, x_k$ обработанные подстановкой C антецеденты второй теоремы - следствия $D_1, \ldots, D_m$. Результат упрощается. (Прием определение - 223).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcdf}(b-\text{set}$ & $c-\text{set}$ & $d \in \{1, \ldots, l(f)+1\}$ & $f-\text{слово}$ & семействомножеств(f) &
   несовместны(Вставка$(f, d, b)) \to$ несовместны(Вставка$(f, d, b \setminus c)))$

из теоремы

$\forall_f$(семействомножеств$(f) \to$ несовместны$(f) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in \mathrm{Dom}(f)$ &
$y \in \mathrm{Dom}(f)$ & $\neg(x = y) \to$ непересек$(f(x), f(y))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a - \mathrm{set}$ & $b - \mathrm{set}$ & $c - \mathrm{set}$ & непересек$(a, b) \to$ непересек$(a, b \setminus c))$

3. Попытка усмотреть сохранение определяемого отношения при варьировании части его операндов. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$. A_2 - либо квантор существования, одним из конъюнктивных членов подкванторного утверждения которого служит кванторная импликация "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(D_1$ & $\ldots$ & $D_n \to D_0)$", либо конъюнкция, одним из членов которой служит эта импликация. По заголовку f утверждения D_0 находится импликация вида B & $f(t_1 \ldots t_m) \to f(r_1 \ldots r_m)$. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Рассматривается подстановка C, переводящая $f(t_1 \ldots t_m)$ в D_0. Проверяется, что эта же подстановка переводит $f(r_1 \ldots r_m)$ такую версию утверждения D_0, для которой исходная теорема позволяет свернуть кванторное утверждение в некоторую версию A_3 утверждения A_1. Тогда A_1 переносится в антецеденты, а консеквентом становится A_3. Добавляются антецеденты, обусловленные второй теоремой, и предпринимаются необходимые проверки. Результат упрощается. (Прием определение - 235).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{dGM}$(орграф(d) & маршрут(M, G) & подграф$(G, d) \to$ маршрут$(M, d))$

   из теоремы

   $\forall_{GM}$(орграф$(G) \to$ маршрут$(M, G) \leftrightarrow \exists_{ABn}(n -$ натуральное &
   кортеж$(A, n,$ вершины$(G))$ & $M = (A, B)$ & кортеж$(B, n - 1,$ ребра$(G))$ &
   $\forall_i(i \in \{1, \ldots, n - 1\} \to$ ведет$(B(i), A(i), A(i + 1), G))))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcGH}$(орграф(G) & ведет(a, b, c, H) & подграф$(H, G) \to$ ведет$(a, b, c, G))$

4. Попытка развертки по определению, использования монотонности многоместного предиката и обратной свертки. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$ кванторной развертки. Конъюнктивными членам A_2 служат элементарные утверждения, а также кванторные импликации, среди антецедентов которых встречается многоместное отношение P. Находится теорема вида B & $P(t_1 \ldots t_n) \to P(r_1 \ldots r_n)$. Переменные ее переобозначены и не входят в исходную теорему. Эта теорема используется для унификации антецедентов исходной теоремы с $P(r_1 \ldots r_n)$ и заменой их на $P(t_1 \ldots t_n)$. Эта замена не затрагивает связанных переменных кванторных импликаций и позволяет перейти к новой версии A_2 утверждения A_1. Утверждение A_1 переносится в антецеденты, а консеквентом становится A_2. Добавляются антецеденты, обусловленные второй теоремой, и предпринимаются необходимые проверки. Результат упрощается. (Прием развертка - 141).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ah}(\text{простграф}(a)\ \&\ \text{подграф}(h,a) \to \text{простграф}(h))$

из теоремы

$\forall_a(\text{простграф}(a) \leftrightarrow \text{граф}(a)\ \&\ \forall_{pbc}(\text{ведет}(p,b,c,a) \to \neg(b=c))\ \&$
$\forall_{pqbc}(\text{ведет}(p,b,c,a)\ \&\ \text{ведет}(q,b,c,a) \to p=q))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcGH}(\text{граф}(G)\ \&\ \text{ведет}(a,b,c,H)\ \&\ \text{подграф}(H,G) \to \text{ведет}(a,b,c,G))$

Перенесение в антецеденты заменяемой части и некоторого условия, при котором квантор общности в заменяющей части теряет одну из переменных связывающей приставки. Затем дополнительная теорема типа транзитивности позволяет переформулировать этот квантор в виде эквивалентности

1. Попытка использовать транзитивность для получения эквивалентности кванторной свертки (1-й прием). Теорема - эквивалентность $A \leftrightarrow \forall_{xy}(D(x)\ \&\ D(y)\ \&\ Q(x,y) \to P(E(x),E(y)))$, где P - транзитивное отношение. Кванторная импликация $\forall_x(D(x) \to y=x\ \vee\ Q(x,y))$ сворачивается в бесквантороное утверждение B, утверждения A и B переносятся в антецеденты, выбирается новая переменная b, и консеквентом становится эквивалентность $\forall_x(D(x) \to P(b,E(x))) \leftrightarrow P(b,E(y))$. Результат упрощается. (Прием развертка - 44).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abfy}(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ f - \text{функция}\ \&$
   $b - \text{число}\ \&\ \text{убывает}(f,a)\ \&\ \text{наибольший}(y,a) \to \forall_x(x \in a \to b < f(x)) \leftrightarrow$
   $b < f(y))$

   из теоремы

   $\forall_{afg}(a - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \to$
   $\text{убывает}(f,a) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in a\ \&\ y \in a\ \&\ 0 < y - x \to 0 < f(x) - f(y)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ a < b\ \&\ b < c \to a < c)$

Попытка использовать дополнительную теорему для варьирования квантора в заменяющей части

1. Попытка использовать транзитивность для получения эквивалентности кванторной свертки (2-й прием). Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2\ \&\ \forall_x(D \to P(y,x))$. Находится теорема вида $Q(u,v)\ \&\ P(v,w) \to Q(u,w)$. Выбирается новая переменная b, утверждение A_1 переносится в антецеденты, а консеквентом становится эквивалентность $\forall_x(D \to Q(b,x)) \leftrightarrow Q(b,y)$. Предпринимаются добавления антецедентов, необходимые для использования второй теоремы, а также необходимые проверки. Результат упрощается. (Прием развертка - 99).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bde}(b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ \text{наименьший}(e, b) \to \forall_f(f \in b \to d < f) \leftrightarrow d < e)$

из теоремы

$\forall_{ab}(b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R} \to \text{наименьший}(a, b) \leftrightarrow a \in b\ \&\ \forall_c(c \in b \to a \leq c))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ade}(a < d\ \&\ a - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ d \leq e \to a < e)$

2. Попытка ослабить условие под квантором существования, перейдя от частного случая определяемого понятия к общему случаю. Теорема - эквивалентность вида $A \leftrightarrow \exists_x(D_1\ \&\ \ldots\ \&\ D_n)$, где утверждения $D_1, \ldots, D_n$ не имеют связанных переменных. Максимально сложный подтерм этих утверждений единственный - некоторое выражение $f(t_1 \ldots t_n)$. Переменная x входит в него однократно - в некоторое t_j. Данное выражение входит в некоторое D_i. Каждое из остальных D_k имеет единственный параметр x. Находится определение $f(y_1 \ldots y_n) = r$, у которого число параметров правой части не менее 2. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Рассматривается утверждение R вида $\exists_{yj}(f(t_1 \ldots t_{j-1} y_j t_{j+1} \ldots t_n)\ \&\ E)$, где E - конъюнкция результатов подстановки $t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n$ вместо $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n$ в содержащие y_j антецеденты дополнительной теоремы. Проверяется эквивалентность $R \leftrightarrow \exists_x(D_1\ \&\ \ldots\ \&\ D_n)$. Новая теорема имеет консеквент $R \leftrightarrow A$. Ее антецеденты получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы результатов подстановки $t_1, \ldots, t_{j-1}, t_{j+1}, \ldots, t_n$ вместо $y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_n$ в не содержащие y_j антецеденты дополнительной теоремы. Результат упрощается. (Прием развертка - 103).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{eA}(A \subseteq \mathbb{R}^e\ \&\ e - \text{натуральное} \to \text{огрмнож}(A) \leftrightarrow$
$\exists_c(A \subseteq \text{евклпрямокр}(\text{констнабор}(0, e), c)\ \&\ \text{числнабор}(c, e)))$

из теоремы

$\forall_{nA}(A \subseteq \mathbb{R}^n\ \&\ n - \text{натуральное} \to \text{огрмнож}(A) \leftrightarrow$
$\exists_b(A \subseteq \text{евклпрямокр}(\text{констнабор}(0, n), \text{констнабор}(b, n))\ \&\ b - \text{число}))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abn}(n - \text{натуральное}\ \&\ \text{числнабор}(a, n)\ \&\ \text{числнабор}(b, n) \to \text{евклпрямокр}(a, b) = \text{set}_x(\text{числнабор}(x, n)\ \&\ \forall_i(i \in \{1, \ldots, n\} \to a(i) - b(i) < x(i)\ \&\ x(i) < a(i) + b(i))))$

3. Попытка проварьировать самый сложный подтерм под квантором существования. Теорема - эквивалентность вида $A \leftrightarrow \exists_x(D_1\ \&\ \ldots\ \&\ D_n)$. Максимально сложный подтерм утверждений D_i единственный - некоторое выражение t с заголовком f. Содержащее его утверждение содержит все параметры утверждений D_i. В разделе символа f находится теорема с консеквентом вида $\exists_y(E_1\ \&\ \ldots\ \&\ E_m)$, содержащим подтерм r с заголовком f. Этот подтерм не содержит y.

Находится подстановка C, переводящая r в t. Решается задача на исследование, посылкми которой служат антецеденты исходной теоремы, результаты применения C к антецедентам дополнительной теоремы и результаты применения C к утверждениям $E_1, \ldots, E_m$. Целью является исключение x. После решения составляется список S всех содержащих y, не содержащих x и не имеющих заголовка "актив" посылок задачи. Проверяется, что $\exists_y(S) \leftrightarrow \exists_x(D_1\ \&\ \ldots\ \&\ D_n)$ - следствие антецедентов исходнйо теоремы. Новая теорема имеет консеквент $A \leftrightarrow \exists_y(S)$ и антецеденты исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием развертка - 104).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{eA}(A \subseteq \mathbb{R}^e\ \&\ e - \text{натуральное} \rightarrow \text{огрмнож}(A) \leftrightarrow$
$\exists_a(A \subseteq \text{евклокр}(\text{констнабор}(0, e), a)\ \&\ a - \text{число}))$

из теоремы

$\forall_{eA}(A \subseteq \mathbb{R}^e\ \&\ e - \text{натуральное} \rightarrow \text{огрмнож}(A) \leftrightarrow$
$\exists_c(A \subseteq \text{евклпрямокр}(\text{констнабор}(0, e), a)\ \&\ \text{числнабор}(c, e)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{cdf}(f - \text{натуральное}\ \&\ \text{числнабор}(c, f)\ \&\ \text{числнабор}(d, f) \rightarrow$
$\exists_b(\text{евклпрямокр}(d, c) \subseteq \text{евклокр}(d, b)\ \&\ b - \text{число}))$

3.11 Варьирование заменяемой части эквивалентности при помощи импликации

Использование дополнительной импликации для реализации фрагмента заменяемой части эквивалентности

1. Попытка обращения в логическую константу заменяемого квантора в эквивалентности кванторной свертки. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, где A_1 - квантор общности либо существования. Рассматривается элементарное подкванторное утверждение P квантора A_1. По его заголовку f находится теорема с консеквентом вида $f(\ldots)$ либо $\neg(f(\ldots))$, не имеющая существенных антецедентов. Она преобразуется к виду эквивалентности утверждения $f(\ldots)$ логической константе; предварительно внутри консеквента выявляется некоторая константа C, которая заменяется на новую переменную x, а в антецеденты добавляется равенство $x = C$. Дополнительная эквивалентность используется для преобразования P. Результат упрощается. (Прием кванторнаясвертка - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(b - \text{set} \rightarrow \emptyset \subseteq b)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set} \rightarrow a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow c \in b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(\neg(a \in \emptyset))$

2. Реализация конъюнктивного члена заменяемого терма. Теорема - эквивалентность общей стандартизации A_1 & ... & $A_n \leftrightarrow D$. По заголовку f некоторого A_i находится теорема с консеквентом вида $f(\ldots)$ либо $\neg(f(\ldots))$, не имеющая существенных антецедентов. Она преобразуется к виду эквивалентности утверждения $f(\ldots)$ логической константе и используется для преобразования A_i. Результат упрощается. (Прием общнорм - 44).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cmn}(c - \text{set} \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow \mathbb{Z} \subseteq c \cup \{m, \ldots, n\} \leftrightarrow \mathbb{Z} \subseteq c \cup [m, n])$

   из теоремы

   $\forall_{amn}(a - \text{set} \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow a \subseteq \{m, \ldots, n\} \leftrightarrow a \subseteq [m, n] \ \& \ a \subseteq \mathbb{Z})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow b \setminus c \subseteq b)$

3. Попытка использования примера для получения частного случая тождества, исключающего описатель. Теорема - тождество вида "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A_1) = A_2$", исключающее описатель "класс". Внутри A_1 выбирается элементарное подутверждение P. По его заголовку f находится теорема с консеквентом вида $f(\ldots)$ либо $\neg(f(\ldots))$, не имеющая существенных антецедентов. Она преобразуется к виду эквивалентности утверждения $f(\ldots)$ логической константе; предварительно внутри консеквента выявляется некоторая константа C, которая заменяется на новую переменную x, а в антецеденты добавляется равенство $x = C$. Дополнительная эквивалентность используется для преобразования P. Результат упрощается. (Прием описатель - 11).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_f(f - \text{функция} \rightarrow \text{прообраз}(f, \emptyset) = \emptyset)$

   из теоремы

   $\forall_{af}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow \text{прообраз}(f, a) = \text{set}_x(x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f(x) \in a))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(\neg(a \in \emptyset))$

4. Попытка получения параметрического описания для подтипа. Консеквент теоремы имеет вид $A_1 \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(A_2 \ \& \ y = t)$, где переменная y отлична от $x_1, \ldots, x_k$ и не входит в t. Рассматривается конъюнктивный член $P(y)$ утверждения A_1, и находится теорема вида B_1 & $B_2 \rightarrow P(z)$, где переменная z входит в единственный антецедент B_2. Переменные ее переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется результат B_3 замены в B_2 переменной z на y, после чего формируется результат A_3 замены в A_1 подутверждения $P(y)$ на B_3. Определяется результат B_4 подстановки в B_3 выражения t вместо переменной y, после чего утверждения A_2, B_4 разрешаются относительно $x_1, \ldots, x_k$. Результат разбивается в конъюнкцию R_1 членов, содержащих $x_1, \ldots, x_k$, и конъюнкцию R_2

остальных членов. Утверждения B_1, R_2 переносятся в антецеденты новой теоремы, консеквентом становится $A_3 \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(R_1 \ \& \ y = t)$. Добавляются антецеденты, необходимые для корректности новой теоремы. Результат упрощается. (Прием параметризация - 10).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcei}(e - \text{set} \ \& \ b \in e \ \& \ i - \text{натуральное} \ \& \ 0 \leq -i + \text{card}(e) \ \& \ \text{конечное}(e) \rightarrow \text{перестановка}(c, e) \ \& \ b = c(i) \leftrightarrow \exists_a(\text{перестановка}(a, e \backslash \{b\}) \ \& \ c = \text{Вставка}(a, i, b)))$

из теоремы

$\forall_{bci}(i - \text{натуральное} \ \& \ i \leq l(c) \rightarrow c - \text{слово} \ \& \ b = c(i) \leftrightarrow \exists_a(a - \text{слово} \ \& \ i = \{1, \ldots, l(a) + 1\} \ \& \ c = \text{Вставка}(a, i, b)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(b) \ \& \ \text{перестановка}(a, b) \rightarrow a - \text{слово})$

5. Попытка исключения кванторной импликации в параметризуемом условии путем перехода к более сильному элементарному утверждению. Консеквент теоремы имеет вид $\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \rightarrow t_1 = t_2 \ \& \ A_2) \ \& \ A_3 \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_m}(z = r \ \& \ A_4)$. t_1 - единственный невырожденный числовой атом в $t_1 = t_2 \ \& \ A_2$. По его заголовку f находится теорема $B_1 = B_2$, выражающая невырожденный числовой атом B_1 с заголовком f через более простые атомы. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка C, переводящая B_1 в t_1. Решается задача на описание, условиями которой служат A_3 и $\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \rightarrow A_2 \ \& \ D)$, где D - все содержащие $x_1, \ldots, x_k$ результаты применения C к антецедентам второй теоремы. Неизвестных эта задача не имеет и решается с целями "редакция", "свертка". Результатом R_1 служит некоторое утверждение, не имеющее связанных переменных. Определяется результат R_2 подстановки в R_1 выражения r вместо z, и решается задача на описание с условиями A_4, R_2. Неизвестные - переменные $y_1, \ldots, y_m$. Ответ R_3 не содержит связанных переменных. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $R_1 \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_m}(R_3 \ \& \ z = r)$, антецедентами - антецеденты исходной теоремы и не содержащие $x_1, \ldots, x_k$ результаты применения C к антецедентам второй теоремы. Результат упрощается. (Прием параметризация - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cde}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow \text{кортеж}(c, l(c), d \times e) \leftrightarrow \exists_{ab}(c = \text{кортежпар}(a, b) \ \& \ \text{кортеж}(a, l(a), d) \ \& \ \text{кортеж}(b, l(a), e)))$

из теоремы

$\forall_c(\forall_i(i \in \{1, \ldots, l(c)\} \rightarrow l(c(i)) = 2 \ \& \ c(i) - \text{слово}) \ \& \ c - \text{слово} \leftrightarrow \exists_{ab}(c = \text{кортежпар}(a, b) \ \& \ l(a) = l(b) \ \& \ a - \text{слово} \ \& \ b - \text{слово}))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ f \in a \times b \rightarrow l(f) = 2)$

6. Использование дополнительной импликации для исключения одного из дизъюнктивных членов. Консеквент теоремы имеет вид $A_1 \vee \ldots \vee A_n$. Отрицание некоторого элементарного A_i упрощается и превращается в утверждение P. Находится единственный максимально сложный подтерм t утверждения P. В разделе, связанном с заголовком f терма t, находится теорема, консеквент которой содержит f и имеет тот же заголовок, что P. Все переменные теоремы входят в ее консеквент. Определяется подстановка C, переводящая указанный консеквент в P. Результаты применения ее к антецедентам дополнительной теоремы добавляются к антецедентам исходной теоремы, а консеквентом становится результат исключения A_i из консеквента исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием дизъюнкция - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(C - \text{точка } \& \ B \in \text{прямая}(AC) \ \& \ A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \&$
   $0 < -l(AB) + l(AC) \to B \in \text{отрезок}(AC) \ \vee \ A \in \text{отрезок}(BC))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \& \ C - \text{точка } \& \ \neg(A = C) \ \& \ B \in \text{прямая}(AC) \to$
   $B \in \text{отрезок}(AC) \ \vee \ C \in \text{отрезок}(AB) \ \vee \ A \in \text{отрезок}(BC))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \& \ 0 < -l(AB) + l(AC) \to \neg(C \in \text{отрезок}(AB)))$

7. Применение дополнительной импликации для исключения конъюнктивного члена заменяемой части. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n \leftrightarrow A_0$. Выбирается A_i, оценка сложности которого больше 4, причем такое, что самый сложный его подтерм - оно само. В разделе, к которому относится заголовок f утверждения A_i, находится теорема вида $B_1 \ \& \ B_2 \to B_3$, такая, что B_3 имеет заголовок f, причем антецедент B_2 имеет тот же заголовок, что некоторое A_j, отличное от A_i и имеющее сложность, большую 4. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка C, переводящая B_3 в A_i и B_2 в A_j. К антецедентам исходной теоремы присоединяется $C(B_1)$. Консеквентом становится $A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_{i-1} \ \& \ A_{i+1} \ \& \ \ldots \ \& \ A_n \leftrightarrow A_0$. (Прием общнорм - 97).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{afA}(A - \text{set } \& \ \text{ассоциативно}(f) \ \& \ \text{обратимо}(f) \ \& \ \text{бинарнооперация}(f, A) \to$
   $\text{правединица}(a, f) \leftrightarrow a = \text{единица}(f))$

   из теоремы

   $\forall_{af}(\text{левединица}(a, f) \ \& \ \text{правединица}(a, f) \leftrightarrow \text{Единица}(a, f))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bcA}(A - \text{set } \& \ \text{ассоциативно}(c) \ \& \ \text{обратимо}(c) \ \& \ \text{правединица}(b, c) \ \&$
   $\text{бинарнооперация}(c, A) \to \text{левединица}(b, c))$

8. Попытка реализации квантора существования, находящегося под отрицанием в заменяющей части, и перенесение его в антецеденты. Консеквентом становится отрицание заменяемой части. Теорема - эквивалентность вида A_1 & $\neg(\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_2$ & $A_3) \leftrightarrow A_4$, у которой A_4 не имеет связанных переменных. A_3 - некоторый конъюнктивный член подкванторного утверждения, наиболее сложным подтермом которого является он сам. По заголовку f утверждения A_3 находится теорема без существенных антецедентов, консеквент B которой имеет заголовок f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Находится подстановка C, переводящая A_3 в B. Антецедентами новой теоремы становятся результаты применения C к антецедентам исходной теоремы, антецеденты дополнительной теоремы и $C(A_2)$. Консеквентом становится $\neg(C(A_4))$. Результат упрощается. (Прием связпарам - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(\neg(a-1=0)$ & $\neg(b-1=0)$ & $b-$натуральное & $a-$целое $\rightarrow \neg($простое$(ab)))$

   из теоремы

   $\forall_m($простое$(m) \leftrightarrow m-$натуральное & $1<m$ & $\neg(\exists_n(n-$натуральное & $n \mid m$ & $\neg(n=1)$ & $\neg(n=m))))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{km}(k-$целое & $m-$целое $\rightarrow m \mid km)$

Использование дополнительной импликации для вывода следствий из заменяемой части эквивалентности и обратной свертки

1. Попытка декомпозиции консеквента сворачиваемой кванторной импликации. Теорема - эквивалентность вида $\forall_x(x \in y \rightarrow P(z,x)) \leftrightarrow A$. Находится другая теорема вида $P(a,b)$ & $P(c,d) \rightarrow P(f(a,c),g(b,d))$. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Выбираются новые переменные y_1, y_2, и кванторные импликации $\forall_x(x \in y_1 \rightarrow P(a,x))$, $\forall_x(x \in y_2 \rightarrow P(c,x))$ сворачиваются при помощи исходной теоремы в утверждения A_1, A_2. Затем импликация $\forall_x(x \in \mathrm{set}_u(\exists_{vw}(v \in y_1$ & $w \in y_2$ & $u = g(v,w))) \rightarrow P(f(a,c),x))$ сворачивается в утверждение A_3. A_1 и A_2 добавляются к антецедентам, а консеквентом становится A_3. Результат упрощается. (Прием кванторнаясвертка - 11).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{dfhi}(h-$set & $i-$set & $h \subseteq \mathbb{R}$ & $i \subseteq \mathbb{R}$ & нижняяграньь(d,h) & нижняяграньь$(f,i) \rightarrow$ нижняяграньь$(d+f, \mathrm{set}_j(\exists_{eg}(j=e+g$ & $e \in h$ & $g \in i))))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a-\mathrm{set}$ & $a \subseteq \mathbb{R}$ & $b-$число $\rightarrow$ нижняяграньь$(b,a) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcd}(a-$число & $b-$число & $c-$число & $d-$число & $a \leq b$ & $c \leq d \rightarrow a+c \leq b+d)$

2. Развязка консеквента по транзитивности. Теорема - эквивалентность вида $\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \to P(x_i, y)) \leftrightarrow A_3$. Находится другая теорема вида $P(a,b)$ & $Q(b,c) \to P(a,c)$. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Импликация $\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \to P(x_i, b))$ сворачивается при помощи исходной теоремы в утверждение D. К антецедентам исходной теоремы добавляются $D, Q(b,y)$, консеквентом становится A_3. Результат упрощается. (Прием кванторнаясвертка - 21).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abe}(a - \text{set}$ & $a \subseteq \mathbb{R}$ & $b -$ число & $e -$ число & нижняягрань(e,a) & $b \leq e \to$ нижняягрань$(b,a))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set}$ & $a \subseteq \mathbb{R}$ & $b -$ число $\to$ нижняягрань$(b,a) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \to b \leq c))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $a \leq b$ & $b \leq c \to a \leq c)$

Перенесение в антецеденты заменяющей части и части антецедентов дополнительной теоремы, применение которой к заменяемой импликации позволяет ее свернуть

1. Попытка реализации антецедента сворачиваемой импликации с помощью дополнительной простой импликации. Теорема - эквивалентность вида $\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1$ & $\ldots$ & $A_n \to A_0) \leftrightarrow D$. Выбирается элементарное A_i вида $P(t_1, t_2)$. Находится другая теорема вида $P(a,b)$ & $Q(b,c) \to P(a,c)$. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. После унификации $P(a,c)$ с A_i рассматривается импликация, полученная из $\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1$ & $\ldots$ & $A_n \to A_0$ заменой A_i на $P(a,b)$. При помощи исходной теоремы она сворачивается в элементарное утверждение E. Затем к антецедентам исходной теоремы добавляются E и $Q(b,c)$. Консеквентом становится D. Результат упрощается. (Прием кванторнаясвертка - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcf}(a - \text{set}$ & $b - \text{set}$ & $c - \text{set}$ & $a \subseteq \text{Dom}(f)$ & $c \subseteq a$ & образ$(f,a) \subseteq b$ & $f -$ функция $\to$ образ$(f,c) \subseteq b)$

   из теоремы

   $\forall_{abf}(a - \text{set}$ & $b - \text{set}$ & $a \subseteq \text{Dom}(f)$ & $f -$ функция $\to$ образ$(f,a) \subseteq b \leftrightarrow$ $\forall_y(y \in a \to f(y) \in b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{set}$ & $b - \text{set}$ & $a \subseteq b$ & $c \in a \to c \in b)$

3.12 Использование параметрического описания

3.12.1 Свертка параметрического описания

Параметрическое описание вида объеков данного типа позволяет перейти в теореме от выражения для общего вида объекта такого типа к переменной данного типа

1. Попытка исключить параметрическое задание объектов заданного типа. Теорема - эквивалентность $A_0 \leftrightarrow A_1$ элементарного утверждения A_0 конъюнкции A_1 элементарных утверждений. Внутри A_0 выбирается неоднобуквенное подвыражение t. Определяется тип T значения этого подвыражения. Находится параметрическое описание $T(x) \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_m}(x = r \ \& \ B)$, не имеющее антецедентов. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Находится подстановка C, переводящая t в r. Она применяется к исходной теореме. Равенство $x = r$ разрешается относительно $y_1, \ldots, y_m$ таким образом, чтобы эти параметры были выражены через x. Определяется результат D_1 подстановки в A_1 найденных для $y_1, \ldots, y_m$ значений и результат D_2 замены подвыражения t утверждения A_0 на x. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $D_1 \leftrightarrow D_2$. Результат упрощается. (Прием и - 72).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdz}(z - \text{комплексное} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow z = c + di \leftrightarrow c = Re(z) \ \& \ d = Im(z))$

   из теоремы

   $\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow a + bi = c + di \leftrightarrow a = c \ \& \ b = d)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$.

2. Попытка исключения параметрического задания объекта. Начало такое же, как в предыдущем приеме. После определения подстановки C проверяется, что все переменные исходной теоремы содержатся в t и что результаты применения C к антецедентам исходной теоремы содержатся в B. Проверяется, что параметры терма t встречаются в консеквенте только внутри вхождений t. Решается задача на исследование, посылками которой служат $x = r, B$ и $C(A_1)$. После этого выбирается ее посылка P, единственным параметром которой служит x. Проверяется, что $C(A_1)$ - следствие $x = r, B, P$. Антецедентом новой теоремы становится $T(x)$, консеквентом - эквивалентность утверждению P результата замены всех вхождений t в A_0 на переменную x. (Прием и - 71).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \rightarrow |z| = 0 \leftrightarrow z = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow |c + di| = 0 \leftrightarrow c = 0 \ \& \ d = 0)$

и дополнительной теоремы

$\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$

3. Попытка использовать параметрическое описание объектов заданного типа. Аналогично предыдущему, но теорема - эквивалентность общей стандартизации и A_1 - элементарное утверждение. (Прием общнорм - 69).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \to z - \text{число} \leftrightarrow Im(z) = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \to c + di - \text{число} \leftrightarrow d = 0)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$

4. Использование параметрического описания для исключения стандартного обозначений объектов данного типа. Аналогично предыдущему, но теорема - эквивалентность, выражающая утверждение через параметры координат. (Прием числопред - 11).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdpqBK}(\text{коорд}(d, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \&$
   $\text{коорд}(B, K) = (p, q) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{Прямая}(d) \ \&$
   $\text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(B) \to d \parallel B \leftrightarrow ap + bq = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{abcABCKpq}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \&$
   $\text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(AC), K) =$
   $\text{set}_{xy}(ax + by + c = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (p, q) \to$
   $\text{прямая}(AC) \parallel B \leftrightarrow ap + bq = 0)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_A(\text{Прямая}(A) \leftrightarrow \exists_{BC}(B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A = \text{прямая}(BC)))$

5. Попытка использовать параметрическое описание для объектов заданного типа. Теорема - тождество свертки $A_1 = A_2$. В консеквенте выбирается неоднобуквенное подвыражение t, содержащее все переменные теоремы. Определяется тип T значения этого подвыражения. Находится параметрическое описание $T(x) \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_m}(x = r \ \& \ B)$, не имеющее антецедентов. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Находится подстановка C, переводящая t в r. Проверяется, что она лишь переобозначает переменные. Эта подстановка применяется к исходной теореме. Проверяется, что новые антецеденты - следствия $x = r, B$. Выбираются новые переменные u, v, и для преобразованных версий A_3, A_4 выражений A_1, A_2 решается система уравнений $u = A_3, v = A_4$ с целью выразить неизвестные u, v через известный параметр x. Посылки -

$x = r, B$. По найденным значениям U, V неизвестных u, v создается консеквент $U = V$ новой теоремы. Антецедент - $T(x)$. Результат упрощается. (Прием свертка - 67).

Пример: вывод теоремы

$\forall_z(z - \text{комплексное} \to -z\text{сопряженное}(z) = -(|z|^2))$

из теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{комплексное} \ \& \ c - \text{комплексное} \to -b^2 - c^2 = (b + ci)(-b + ci))$

и дополнительной теоремы

$\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy)$

6. Использование параметрического описания для исключения стандартного обозначений объектов данного типа. Теорема имеет консеквент вида "координат$(A, K) =$ set$(\ldots)$", причем A - неоднобуквенное выражение с заголовком f. Находится эквивалентность вида $P(x) \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(x = r \ \& \ B)$, где выражение r имеет заголовок f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка C вместо $x_1, \ldots, x_k$, переводящая r в t. Составляется список S, образованный антецедентами дополнительной теоремы, утверждением $P(x)$ и необходимыми для сопровождения $P(x)$ по о.д.з. утверждениями. Решается задача на описание, условиями которой служат результаты применения C к $x = r, B$, а посылками - S. Неизвестные - параметры A. Явное описание не требуется. Антецеденты новой теоремы получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы ответа задачи и $P(x)$, а также заменой A на x. Консеквент получается из консеквента исходной теоремы заменой A на x. Результат упрощается. (Прием уравнмножество - 14).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcefABK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{координат}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{координат}(\text{вектор}(AB), K) = (e, f) \ \& \ A \in c \ \& \ B \in c \ \& \ \text{Прямая}(c) \ \& \ \text{систкоординат}(K) \to \text{координат}(c, K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + et \ \& \ y = b + ft \ \& \ t - \text{число})))$

из теоремы

$\forall_{abefABK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{координат}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{координат}(\text{вектор}(AB), K) = (e, f) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоординат}(K) \to \text{координат}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + et \ \& \ y = b + ft \ \& \ t - \text{число})))$

и дополнительной теоремы

$\forall_A(\text{Прямая}(A) \leftrightarrow \exists_{BC}(B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A = \text{прямая}(BC)))$

7. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Внутри A_1 находится такое атомарное подвыражение t, что каждый его параметр встречается в консеквенте и существенных антецедентах только внутри вхождений t. Определяется тип T значения выражения t. Находится не содержащая антецедентов теорема вида $T(x) \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_n}(x = r \ \& \ B)$. Переменные

переобозначены и не входят в исходную теорему. Усматривается подстановка C, переводящая r в t. Проверяется, что содержащие параметры t несущественные антецеденты исходной теоремы - следствия $C(B)$. Затем в исходной теореме t заменяется на x, исключаются несущественные антецеденты с параметрами t добавляется антецедент $T(x)$. (Прием нормализация - 92).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ \text{Вектор}(c) \to b(ac) = (ab)c)$

из теоремы

$\forall_{abAB}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \to b(a\text{вектор}(AB)) = (ab)\text{вектор}(AB))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \& \ a = \text{вектор}(AB)))$

8. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, содержащее более одного нечислового атомарного выражения заданного типа. (Прием Атомарное - 6).

   Пример: вывод импликации

   $\forall_{Aace}(a - \text{число } \& \ c - \text{точка } \& \ A - \text{точка } \& \ \text{Вектор}(e) \to a(e + \text{вектор}(Ac)) = ae + a\text{вектор}(Ac))$

   из импликации

   $\forall_{Aabcd}(a - \text{число } \& \ b - \text{точка } \& \ c - \text{точка } \& \ d - \text{точка } \& \ A - \text{точка } \to a(\text{вектор}(bd) + \text{вектор}(Ac)) = a\text{вектор}(bd) + a\text{вектор}(Ac))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_e(\text{Вектор}(e) \leftrightarrow \exists_{fg}(f - \text{точка } \& \ g - \text{точка } \& \ e = \text{вектор}(fg)))$

9. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество для координат объектов. (Прием коорд - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aefK}(\text{коорд}(a, K) = (e, f) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(a) \to \text{коорд}(-a, K) = (-e, -f))$

   из теоремы

   $\forall_{efABK}(\text{коорд}(\text{вектор}(BA), K) = (e, f) \ \& \ A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \& \ \text{систкоорд}(K) \to \text{коорд}(-\text{вектор}(BA), K) = (-e, -f))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \& \ a = \text{вектор}(AB)))$

10. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, переформулирующая нечисловое отношение через соотношение для числовых атомов. Составляется список $t_1, \ldots, t_n$ всех атомарных нечисловых подвыражений консеквента, имеющих один и тот же тип T и заголовок f. Проверяется, что параметры этих подвыражений встречаются в консеквенте только внутри данных подвыражений. Находится не содержащая антецедентов теорема вида $T(x) \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_n}(x = r \ \& \ B)$, где r имеет заголовок f. Выбираются новые переменные $z_1, \ldots, z_n$, и находится результат $A_3 \leftrightarrow A_4$ замены в консеквенте исходной теоремы атомов $t_1, \ldots, t_n$ на эти переменные. Список антецедентов исходной теоремы разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих параметры термов $t_1, \ldots, t_n$, и подсписок S_2 остальных утверждений. Решается задача на описание с условиями $S_2, t_1 = z_1, \ldots, t_n = z_n$ и посылками $S_1, T(z_1), \ldots, T(z_n)$. Неизвестные - параметры выражений $t_1, \ldots, t_n$. Все они несущественные и в процессе решения исключаются. Консеквентом новой теоремы становится $A_3 \leftrightarrow A_4$, антецедентами - $S_1, T(z_1), \ldots, T(z_n)$ и ответ задачи на описание. Результат упрощается. (Прием числвыраз - 8).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{de}(\neg(d = \text{вектор0}) \ \& \ \neg(e = \text{вектор0}) \ \& \ \text{Вектор}(d) \ \& \ \text{Вектор}(e) \rightarrow$
    $\text{уголмежду}(d, e) = 0 \leftrightarrow \text{однонаправлены}(d, e))$

    из теоремы

    $\forall_{abc}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \rightarrow$
    $\text{уголмежду}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(ac)) = 0 \leftrightarrow \text{однонаправлены}(\text{вектор}(ab),$
    $\text{вектор}(ac)))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$

11. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком. Аналогично предыдущему, но теорема - импликация без существенных антецедентов, имеющая элементарный консеквент. (Прием элементарно - 11).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_a(\text{Вектор}(a) \rightarrow \text{однонаправлены}(a, a))$

    из теоремы

    $\forall_{CD}(C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{однонаправлены}(\text{вектор}(CD), \text{вектор}(CD)))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$

12. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество $A_1 = A_2$, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат. (Прием числкоэфф - 15).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{afgK}(\text{коорд}(a, K) = (f, g)\ \&\ \text{Вектор}(a)\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \to \text{длина}(a) = \sqrt{f^2 + g^2})$

    из теоремы

    $\forall_{cdfgK}(\text{коорд}(\text{вектор}(cd), K) = (f, g)\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \to \text{длина}(\text{вектор}(cd)) = \sqrt{f^2 + g^2})$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ a = \text{вектор}(AB)))$

13. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество свертки. (Прием свертка - 66).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abe}(a - \text{число}\ \&\ \text{Вектор}(e)\ \&\ \text{Вектор}(b) \to a(e + b) = ae + ab)$

    из теоремы

    $\forall_{aceA}(a - \text{число}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ \text{Вектор}(e)\ \&\ a(e + \text{вектор}(Ac)) = ae + a\text{вектор}(Ac))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ a = \text{вектор}(AB)))$

14. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций большей либо равной сложности. (Прием сокращ - 28).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ab}(b - \text{число}\ \&\ \text{Вектор}(a) \to (-b)a = -(ba))$

    из теоремы

    $\forall_{bAB}(b - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \to (-b)\text{вектор}(AB) = -(b\text{вектор}(AB)))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ a = \text{вектор}(AB)))$

15. Использование параметрического описания для исключения атомарных выражений - случай, когда заменяющая часть не содержит переменных атомарного выражения. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$. Внутри A_1 находится такое атомарное подвыражение t, что каждый его параметр встречается в консеквенте и существенных антецедентах только внутри вхождений t. Проверяется, что A_2 не содержит параметров t. Определяется тип T значения выражения t. Находится не содержащая антецедентов теорема вида $T(x) \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_n}(x = r \ \& \ B)$. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Усматривается подстановка C, переводящая t в r. Рассматривается список S_1 антецедентов исходной теоремы, содержащих параметры t, и список S_2 остальных антецедентов. Устанавливается, что после применения подстановки C к утверждениям S_1 лишь единственный результат D не является следствием B. Находится результат R преобразования r в предположении $\neg(D)$. Он не содержит параметров t. Проверяется, что из равенства $x = R$ следует результат A_3 замены в A_1 подвыражения t на переменную x. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $A_3 \leftrightarrow A_2 \ \vee \ x = R$, антецедентами - S_2 и $T(x)$. Результат упрощается. (Прием общнорм - 58).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(c) \rightarrow ac = bc \leftrightarrow a = b \ \vee \ c = \text{вектор0})$

    из теоремы

    $\forall_{abAB}(\neg(A = B) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow$
    $a \cdot \text{вектор}(AB) = b \cdot \text{вектор}(AB) \leftrightarrow a = b)$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$

16. Использование параметрического описания для исключения атомарных выражений - случай, когда заменяющая часть содержит переменные атомарного выражения. Начало такое же, как в предыдущем случае, однако не требуется, чтобы параметры t не входили в A_2, и устанавливается, что все результаты применения C к утверждениям S_1 суть следствия B. Выражение r упрощается относительно посылок $B, C(A_2), S_2$. Проверяется, что результат R не содержит параметров t. Устанавливается, что результат A_3 замены в A_1 подтерма t на x - следствие $T(x)$, равенства $x = R$ и S_2. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $A_3 \leftrightarrow x = R$, антецедентами - $T(x), S_2$. (Прием обощнорм - 56).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_c(\text{Вектор}(c) \rightarrow \text{длина}(c) = 0 \leftrightarrow c = \text{вектор0})$

    из теоремы

    $\forall_{ab}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(ab)) = 0 \leftrightarrow a = b)$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$

17. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком. Консеквент теоремы - равенство двух атомарных выражений (возможно, числовых). В этом консеквенте выделяются все атомарные нечисловые подвыражения $t_1, \ldots, t_n$ с одним и тем же заголовком f, имеющие тип T. Проверяется, что каждый параметр этих подвыражений встречается в консеквенте только внутри одного из них. Находится не содержащая антецедентов теорема вида $T(x) \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_n}(x = r \ \& \ B)$, у которой заголовок r равен f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Выбираются новые переменные $z_1, \ldots, z_n$; определяется результат A замены в консеквенте исходной теоремы атомов $t_1, \ldots, t_n$ на переменные $z_1, \ldots, z_n$. Список антецедентов исходной теоремы разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих параметры атомов $t_1, \ldots, t_n$, и подсписок S_2 остальных утверждений. Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения S_2 и утверждения $T(z_1), \ldots, T(z_n)$, а условиями - S_1 и $t_1 = z_1, \ldots, t_n = z_n$. Неизвестные - параметры выражений $t_1, \ldots, t_n$, причем все они несущественные. Антецедентами новой теоремы становятся конъюнктивные члены ответаЮ S_2 и $T(z_1), \ldots, T(z_n)$. Консеквент - A. Результат упрощается. (Прием равны - 11).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{fghi}(\neg(f = \text{вектор0}) \ \& \ \neg(g = \text{вектор0}) \ \& \ \neg(h = \text{вектор0}) \ \& \ \neg(i = \text{вектор0}) \ \&$
    $\text{Вектор}(f) \ \& \ \text{Вектор}(g) \ \& \ \text{Вектор}(h) \ \& \ \text{Вектор}(i) \ \& \ \text{однонаправлены}(f, h) \ \&$
    $\text{однонаправлены}(g, i) \rightarrow \text{уголмежду}(f, g) = \text{уголмежду}(h, i))$

    из теоремы

    $\forall_{abcde}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(a = e) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \&$
    $c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \text{точкалуча}(a, b, c) \ \& \ \text{точкалуча}(a, d, e) \rightarrow$
    $\text{уголмежду}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(ad)) = \text{уголмежду}(\text{вектор}(ac), \text{вектор}(ae)))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$

18. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком. Аналогично предыдущему, но теорема - соотношение для невырожденных числовых атомов. Дополнительно предпринимается попытка выразить числовые атомы консеквента, не содержащие подвыражений $t_1, \ldots, t_n$, через эти подвыражения. (Прием числовойатом - 50).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{bc}(\text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ \text{однонаправлены}(b, c) \rightarrow \text{длина}(b + c) = \text{длина}(b) +$
    $\text{длина}(c))$

    из теоремы

    $\forall_{adA}(\neg(d = A) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ \text{точкалуча}(A, d, a) \rightarrow$
    $\text{длина}(\text{вектор}(Aa) + \text{вектор}(Ad)) = \text{длина}(\text{вектор}(Aa)) + \text{длина}(\text{вектор}(Ad)))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$

19. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком. Аналогично предыдущему, но теорема - кванторная импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. (Прием вывод - 39).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abe}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Вектор}(b)\ \&\ \text{Вектор}(e)\ \&\ \text{однонаправлены}(a,b)\ \&\ \text{однонаправлены}(b,e) \rightarrow \text{однонаправлены}(a,e))$

    из теоремы

    $\forall_{ABCDcd}(c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{однонаправлены}(\text{вектор}(cd), \text{вектор}(CD))\ \&\ \text{однонаправлены}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD)) \rightarrow \text{однонаправлены}(\text{вектор}(cd), \text{вектор}(AB)))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ a = \text{вектор}(AB)))$

20. Переход к теореме, усматривающей тип множества, заданного уравнением. Теорема имеет антецедент вида "координ$(A,K) = \text{set}(\ldots)$" и консеквент вида "$A = t$". По заголовку f выражения t находится эквивалентность вида "$P(x) \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(x = r\ \&\ B)$", где выражение r имеет заголовок f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Все переменные теоремы встречаются в равенстве $x = r$. Определяется подстановка C, переводящая $x = r$ в $A = t$. Проверяется, что результаты применения C к антецедентам дополнительной теоремы и утверждения B - следствия антецедентов исходной теоремы. Определяется список X параметров антецедентов исходной теоремы, отличных от A, не являющихся параметрами антецедента "координ$(A,K) = \text{set}(\ldots)$". Составляется непустой список S_1 всех антецедентов исходной теоремы, имеющих параметры X. Остальные антецеденты, отличные от "координ$(A,K) = \text{set}(\ldots)$", образуют список S_2. Утверждения S_1 разрешаются относительно посылок S_2 с несущественными неизвестными X. Проверяется, что ответ R не содержит переменных X. Новая теорема имеет консеквент $P(A)$ и антецеденты $S_2, R, \text{координ}(A,K) = \text{set}(\ldots)$". Ее антецеденты упрощаются. (Прием уравндробь - 7).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abcefK}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ \neg(c^2 + f^2 = 0)\ \&\ \text{координ}(e,K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + ft\ \&\ y = b + ct\ \&\ t - \text{число})) \rightarrow \text{Прямая}(e))$

    из теоремы

    $\forall_{abcefABK}(\neg(A = B)\ \&\ \text{координ}(e,K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + ft\ \&\ y = b + ct\ \&\ t - \text{число}))\ \&\ \text{координ}(A,K) = (a,b)\ \&\ \text{координ}(B,K) = (a + f, b + c)\ \&\ c - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K) \rightarrow e = \text{прямая}(AB))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_A(\text{Прямая}(A) \leftrightarrow \exists_{BC}(B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ A = \text{прямая}(BC)))$

21. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком - случай единственного подвыражения. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложный числовой атом A_1 через более простые. Внутри A_1 выбирается нечисловое атомарное подвыражение t с заголовком r. Список его параметров - X. Проверяется, что все переменные списка X встречаются в консеквенте и существенных антецедентах только внутри t. Определяется тип T значения выражения t. Находится теорема вида $T(x) \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_n}(x = r \ \& \ B)$, у которой r имеет заголовок f и не содержит параметров, отличных от $y_1, \ldots, y_n$. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Усматривается подстановка C, переводящая r в t. Список антецедентов исходной теоремы разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих переменные X не внутри вхождений t и подсписок S_2 остальных утверждений. В списке S_2 вхождения t заменяются на x. Решается задача на описание с условиями $S_1, x = t$ и посылками S_2. Неизвестные - X, причем все они несущественные. Ответ R не содержит этих переменных. Антецедентами новой теоремы служат S_2, R; консеквентом - результат замены в консеквенте исходной теоремы t на x. Результат упрощается. (Прием числатом - 12).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(b) \rightarrow \text{длина}(ab) = |a|\text{длина}(b))$

    из теоремы

    $\forall_{aAB}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow$
    $\text{длина}(a\text{вектор}(AB)) = |a|\text{длина}(\text{вектор}(AB)))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$

22. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком - случай нескольких подвыражений. Аналогично предыдущему, но консеквент имеет несколько атомарных подвыражений типа T с одним и тем же заголовком f. Для каждого из них вводится свое обозначение x. (Прием числатом - 20).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{de}(\neg(d = \text{вектор0}) \ \& \ \neg(e = \text{вектор0}) \ \& \ \text{Вектор}(d) \ \& \ \text{Вектор}(e) \ \&$
    $\text{однонаправлены}(d, e) \rightarrow \text{уголмежду}(d, e) = 0)$

    из теоремы

    $\forall_{abc}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ a\text{—точка} \ \& \ b\text{—точка} \ \& \ c\text{—точка} \ \& \ \text{точкалуча}(a, b, c) \rightarrow$
    $\text{уголмежду}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(ac)) = 0)$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$

Теорема преобразуется с помощью вспомогательной задачи, выражающей параметрическое описание объектов заданного типа через одноместные операции над такими объектами

1. Усмотрение возможности выразить все параметры параметрического описания объектов заданного типа через одноместные операции от этого объекта. Теорема - определение $f(t) = x$ одноместной операции f; x - переменная. Выражение t бесповторное и содержит все переменные теоремы. По его типу значения T находится теорема вида $T(z) \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_k}(z = r \ \& \ B)$. Определяется подстановка C, переводящая t в r. Проверяется, что результаты применения C к антецедентам исходной теоремы содержатся среди конъюнктивных членов B. Усматривается, что C переводит переменную x в некоторое y_i. Решается задача на описание с условиями $z = r, B$ и единственной посылкой $T(z)$. Неизвестные - переменные $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_k$; единственный известный параметр - z. После решения определяются значения неизвестных $Q_1, \ldots, Q_{i-1}, Q_{i+1}, \ldots, Q_k$. Находится результат R подстановки в r выражений $Q_1, \ldots, Q_{i-1}, f(z), Q_{i+1}, \ldots, Q_k$ вместо переменных $y_1, \ldots, y_k$. Консеквентом новой теоремы становится равенство $R = z$, единственным антецедентом - $T(z)$. (Прием определение - 142).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \rightarrow \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z) = z)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \mathrm{Im}(a + bi) = b)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$

2. Попытка выразить определяемую одноместную операцию над выражением из параметрического описания объектов заданного типа через ранее определенные операции над такими объектами. Теорема - определение $f(t_1) = t_2$ одноместной операции f. Выражение t_1 содержит все переменные теоремы. По его типу значения T находится теорема $T(z) \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_k}(z = r \ \& \ B)$. Определяется подстановка C, переводящая t_1 в r. Проверяется, что результаты применения C к антецедентам исходной теоремы суть следствия B. При помощи задачи на описание выражение $C(t_2)$ выражается через z; посылками служат $z = r$ и B. По результату R создается консеквент $R = f(z)$ новой теоремы. Антецедентом является $T(z)$. (Прием определение - 143).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \rightarrow \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} = |z|)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$

3. Рассмотрение дополнительных упрощающих тождеств, позволяющих сократить операцию над определяемой операцией и ее операндом. Аналогично предыдущему, но перед решением задачи на описание находится сильно упрощающее тождество для объектов типа T, имеющее две переменные. Оно подсказывает рассмотрение некоторой операции $F(t_1, t_2)$, позволяющей воспользоваться данным тождеством. $F(t_1, t_2)$ упрощается и приобретает вид R_1. Далее R_1 с помощью задачи на описание выражается через z. По результату R_2 создается консеквент $F(z, f(z)) = R_2$. Антецедент - $T(z)$. Результат упрощается. (Прием определение - 161).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \to z + \text{сопряженное}(z) = 2\text{Re}(z))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to \text{сопряженное}(a + bi) = a - bi)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z = x + iy))$

4. Попытка навесить одноместную операцию на определяющее выражение заданного типа и использовать параметрическое описание для исключения невырожденных выражений этого типа. Теорема - определение $F(t_1) = t_2$ одноместной операции F. По заголовку f выражения t_2 определяется тип T значения этого выражения. Находится теорема вида $T(z) \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_k}(z = r\ \&\ B)$, где заголовок выражения s равен f. Подвыражение s второй дополнительной теоремы преобразуется при помощи исходной теоремы, применяемой в обратном направлении. Получается теорема с консеквентом вида $G(F(t_3)) = t_4$. Далее, аналогично предыдущим приемам, используется вторая теорема: t_3 заменяется на переменную z; t_4 выражается через z с помощью задачи на описание, и получается теорема с консеквентом вида $G(F(z)) = t_5$ и антецедентом $T(z)$. (Прием определение - 80).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_c(\text{Вектор}(c) \to \text{длина}(-c) = \text{длина}(c))$

   из теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \to -\text{вектор}(AB) = \text{вектор}(BA))$

   и дополнительных теорем

   $\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ a = \text{вектор}(AB)))$

   $\forall_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \to \text{длина}(\text{вектор}(AB)) = l(AB))$

3.12.2 Развертка параметрического описания

Переход от переменной для объектов заданного типа к выражению для их общего вида

1. Использование явного параметрического описания рассматриваемых объектов. Теорема - кванторная импликация, консеквент которой - конъюнкция неравенств и отрицаний равенств для параметров координат. Рассматривается антецедент вида $P(A)$ где A - переменная, не входящая в консеквент. Находится теорема вида $P(x) \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(x = r \ \& \ B)$. Она применяется для преобразования $P(A)$. Результат упрощается. (Прием Крд - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcBCK}(\neg(B = C)$ & коорд(прямая$(BC), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0$ &
   $x -$ число & $y -$ число) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $B -$ точка &
   $C -$ точка & систкоорд$(K) \rightarrow \neg(a^2 + b^2 = 0))$

   из теоремы

   $\forall_{abcKP}($коорд$(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) &
   $a-$число & $b-$число & $c-$число & Прямая(P) & систкоорд$(K) \rightarrow \neg(a^2+b^2 = 0))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_A($Прямая$(A) \leftrightarrow \exists_{BC}(B -$ точка & $C -$ точка & $\neg(B = C)$ & $A =$ прямая$(BC)))$

2. Использование явного параметрического описания рассматриваемых объектов. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, выражающая некоторое утверждение A_1 через параметры координат. Рассматривается антецедент вида $P(y)$, где y - переменная, не входящая в консеквент. Находится теорема вида $P(x) \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(x = r \ \& \ B)$. Она применяется для преобразования $P(y)$. Результат упрощается. (Прием числопред - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcefpqACK}(\neg(A = C)$ & коорд(прямая$(AC), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0$ &
   $x -$ число & $y -$ число) & коорд(вектор$(ef), K) = (p, q)$ & $a -$ число &
   $b -$ число & $c -$ число & $f -$ точка & $A -$ точка & $C -$ точка & систкоорд$(K) \rightarrow$
   прямая$(AC) \parallel$ вектор$(ef) \leftrightarrow ap + bq = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{abcABCKpq}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $A -$ точка & $C -$ точка &
   систкоорд(K) & Вектор(B) & $\neg(A = C)$ & коорд(прямая$(AC), K) =$
   $\text{set}_{xy}(ax + by + c = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & коорд$(B, K) = (p, q) \rightarrow$
   прямая$(AC) \parallel B \leftrightarrow ap + bq = 0)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a($Вектор$(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A -$ точка & $B -$ точка & $a =$ вектор$(AB)))$

3. Использование стандартного обозначения для объектов специального типа. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество без невырожденных числовых атомов, содержащее параметры уравнения для координат множества точек. (Прием числсвязь - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcefghpqBK}(\neg(b=c)\ \&\ \neg(e^2+g^2=0)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(p,q)\ \&$
   $\text{коорд}(\text{прямая}(bc),K)=\text{set}_{jk}(\exists_i(j=f+ei\ \&\ k=h+gi\ \&\ i-\text{число}))\ \&$
   $e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ g-\text{число}\ \&\ h-\text{число}\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ c-\text{точка}\ \&$
   $B\parallel\text{прямая}(bc)\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \text{Вектор}(B)\rightarrow gp-eq=0)$

   из теоремы

   $\forall_{defghpqBK}(\neg(e^2+g^2=0)\ \&\ \text{коорд}(d,K)=\text{set}_{jk}(\exists_i(j=f+ei\ \&\ k=h+gi\ \&$
   $i-\text{число}))\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(p,q)\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ g-\text{число}\ \&$
   $h-\text{число}\ \&\ \text{Прямая}(d)\ \&\ d\parallel B\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \text{Вектор}(B)\rightarrow gp-eq=0)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_A(\text{Прямая}(A)\leftrightarrow\exists_{BC}(B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ A=\text{прямая}(BC)))$

4. Использование явного параметрического описания рассматриваемых объектов. Аналогично предыдущему, но теорема - кванторная импликация с квантором существования в консеквенте, дающим общий вид уравнения для координат множества объектов. (Прием координаты - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ghijBCK}(\neg(B=C)\ \&\ \text{коорд}(g,K)=(h,i,j)\ \&\ g\in\text{прямая}(BC)\ \&\ B-\text{точка}\ \&$
   $C-\text{точка}\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\rightarrow\exists_{def}(\neg(d^2+e^2+f^2=0)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(BC),K)=$
   $\text{set}_{xyz}(x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((d,e,f),(x-h,y-$
   $i,z-j)))\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}))$

   из теоремы

   $\forall_{ghijKP}(\text{коорд}(g,K)=(h,i,j)\ \&\ g\in P\ \&\ \text{Прямая}(P)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\rightarrow$
   $\exists_{def}(\neg(d^2+e^2+f^2=0)\ \&\ \text{коорд}(P,K)=\text{set}_{xyz}(x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&$
   $z-\text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((d,e,f),(x-h,y-i,z-j)))\ \&\ d-\text{число}\ \&$
   $e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_A(\text{Прямая}(A)\leftrightarrow\exists_{BC}(B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ A=\text{прямая}(BC)))$

5. Использование стандартного обозначения для объектов специального типа. Аналогично предыдущему, но теорема - кванторная импликация, которую можно использовать для приема вывода следствий в посылках задачи. (Прием вывод - 27).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ACbcd}(\neg(b=c)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(d\in\text{прямая}(bc))\ \&\ A\in\text{плоскость}(bcd)\ \&$
   $C\in\text{плоскость}(bcd)\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ d-\text{точка}\rightarrow$
   $\text{прямая}(AC)\subseteq\text{плоскость}(bcd))$

из теоремы

$\forall_{ACD}(\neg(A = C)\ \&\ A \in D\ \&\ C \in D\ \&\ \text{Плоскость}(D) \rightarrow \text{прямая}(AC) \subseteq D)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{A}(\text{Плоскость}(A) \leftrightarrow \exists_{BCD}(B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&$
$\neg(B = C)\ \&\ \neg(D \in \text{прямая}(BC))\ \&\ A = \text{плоскость}(BCD)))$

6. Варьирование параметра параметрического описания с помощью другого параметрического описания. Аналогично предыдущему, но дополнительная теорема может иметь дополнительные конъюнктивные члены в левой части, т.е. имеет вид $B_1\ \&\ P(y) \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_m}(y = r\ \&\ B_2)$. Она применяется для преобразования сразу нескольких конъюнктивных членов A_p, включая A_i. (Прием связка - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefK}(\neg(a^2 + b^2 = 0)\ \&\ \text{коорд}(d, K) = (e, f)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&$
   $c - \text{число}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \exists_{h}(\neg(d = h)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(dh), K) =$
   $\text{set}_{xy}(c + ax + by = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ h - \text{точка}) \rightarrow c + ae + bf = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{abcdefK}(\neg(a^2 + b^2 = 0)\ \&\ \text{коорд}(d, K) = (e, f)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&$
   $c - \text{число}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \exists_{P}(\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by =$
   $0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ d \in P\ \&\ \text{Прямая}(P)) \rightarrow c + ae + bf = 0)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{AP}(A - \text{точка} \rightarrow \text{Прямая}(P)\ \&\ A \in P \leftrightarrow \exists_{B}(B - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
   $P = \text{прямая}(AB)))$

7. Переход к параметрическому описанию объекта, для которого определяется отношение. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$ некоторого отношения A_1. Рассматривается антецедент вида $P(y)$, где y - переменная, входящая в A_1 Находится теорема вида $P(x) \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(x = r\ \&\ B)$. Она применяется для преобразования $P(y)$. Результат упрощается. (Прием определение - 158).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcK}(b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вверх}(\text{вектор}(bc), K) \leftrightarrow$
   $\text{крд}(b, K, 1) = \text{крд}(c, K, 1)\ \&\ \text{крд}(b, K, 2) = \text{крд}(c, K, 2)\ \&$
   $0 \leq -\text{крд}(b, K, 3) + \text{крд}(c, K, 3))$

   из теоремы

   $\forall_{aK}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вверх}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 1) = 0\ \&$
   $\text{крд}(a, K, 2) = 0\ \&\ 0 \leq \text{крд}(a, K, 3))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{a}(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ a = \text{вектор}(AB)))$

8. Использование явного параметрического описания рассматриваемых объектов. Теорема - эквивалентность вида $\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n) \leftrightarrow A_0$. Некоторое A_i имеет вид $P(x_j)$, x_j - связанная переменная квантора существования. Находится теорема вида $P(y) \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_m}(y = r \ \& \ B)$. Она применяется для преобразования $P(x_j)$. Связанная переменная x_j при этом заменяется в кванторе существования на переменные $y_1, \ldots, y_m$. Результат упрощается. (Прием связка - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcK}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Двумерн}(K) \rightarrow \exists_{BC}(\neg(B = C) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \&$
   $B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка}) \leftrightarrow \neg(a^2 + b^2 = 0))$

   из теоремы

   $\forall_{abcK}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Двумерн}(K) \rightarrow \exists_P(\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ \text{Прямая}(P)) \leftrightarrow \neg(a^2 + b^2 = 0))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_A(\text{Прямая}(A) \leftrightarrow \exists_{BC}(B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A = \text{прямая}(BC)))$

Варьирование выражения для объектов заданного типа, использующее два различных их параметрических описания

1. Переход к альтернативному параметрическому описанию объектов данного типа. Теорема - определение $f(t_1) = t_2$ некоторой операции f. Все переменные этой теоремы встречаются в выражении t_1. По типу значения T этого выражения находится теорема вида $T(z) \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_k}(z = r \ \& \ B)$. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему; антецеденты отсутствуют. Определяется подстановка C переводящая t_1 в r. По типу T находится другая дополнительная теорема вида $T(u) \leftrightarrow \exists_{v_1 \ldots v_m}(u = s \ \& \ D)$. Переменные переобозначены и не входят в две предыдущие теоремы. Решается задача на описание, условиями которой служат результаты применения C к антецедентам исходной теоремы и $B, r = s$. Посылки - D. Неизвестные - $y_1, \ldots, y_k$. Ответ преобразуется к виду д.н.ф., после чего выбирается некоторый дизъюнктивный член E, определяющий значения $p_1, \ldots, p_k$ неизвестных $y_1, \ldots, y_k$. Консеквентом новой теоремы становится равенство выражения $f(s)$ результату подстановки $p_1, \ldots, p_k$ вместо $y_1, \ldots, y_k$ в $C(t_2)$. Антецеденты - D и не содержащие $y_1, \ldots, y_k$ конъюнктивные члены E. Результат упрощается. (Прием определение - 145).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{xy}(0 < x \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \rightarrow \arg(x + yi) = \text{arctg}(y/x))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 < b + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - b \ \& \ 0 < a \rightarrow \arg(a(\cos b + i \sin b)) = b)$

   и дополнительных теорем

$\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ -\pi < b \ \& \ b \leq \pi \ \&$
$0 \leq a \ \& \ z = a(\cos b + i \sin b)))$

$\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$

3.12.3 Шаблон параметрического описания позволяет применить исходное тождество к сложному подвыражению таким образом, чтобы в противоположной его части другое сложное подвыражение было заменено на переменную

1. Использование дополнительного параметрического описания для обозначения сложного подвыражения заменяемой части новой переменной. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, уменьшающее оценку сложности. Имеется единственный параметр x левой части, не входящий в правую часть, для которого нет антецедента, содержащего x и какую-либо другую переменную. Внутри A_1 переменная x входит как корневой операнд подтерма t_1 вида $f(\ldots x \ldots)$. По символу f находится теорема, консеквентом которой служит утверждение вида $\exists_y(z = r \ \& \ B)$, причем r имеет единственное вхождение y - как корневой операнд подтерма вида $f(\ldots y \ldots)$. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Заголовком выражения r служит такой символ g, что t_1 расположено внутри подтерма t_2 (возможно, совпадающего с t_1), имеющего заголовок g. Определяется подстановка C, унифицирующая термы t_2 и r, при которой x переходит в y. Список антецедентов исходной теоремы разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Находится результат замены в A_1 подтерма t_2 на $C(z)$ и одновременного применения C к остальной части A_1. Консеквентом новой теоремы становится равенство этого результата выражению $C(A_2)$. Кванторная импликация $\forall_x(C(z = r \ \& \ B) \rightarrow C(S_1))$ сворачивается в утверждение E без связанных переменных. Антецедентами становятся результаты применения C к утверждениям S_2 и антецедентам дополнительной теоремы, а также утверждение E. Результат упрощается. (Прием упрощение - 33).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aghm}(a = \text{операция}(h) \ \& \ g \in \text{носитель}(h) \ \& \ \text{порядокэлемента}(g, h) - \text{натуральное}$
   $\& \ m - \text{целое} \ \& \ 0 \leq m \ \& \ \text{группа}(h) \rightarrow \text{алгстепень}(g, a, m) =$
   $\text{алгстепень}(g, a, m(\text{mod}/\text{порядокэлемента}(g, h))))$

   из теоремы

   $\forall_{acegh}(a = \text{операция}(h) \ \& \ g \in \text{носитель}(h) \ \& \ \text{порядокэлемента}(g, h) - \text{натуральное}$
   $\& \ c - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \ \& \ 0 \leq e \ \& \ \text{группа}(h) \rightarrow$
   $\text{алгстепень}(g, a, c + e \cdot \text{порядокэлемента}(g, h)) = \text{алгстепень}(g, a, c))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{mn}(n - \text{натуральное} \ \& \ m - \text{целое} \rightarrow \exists_p(np + m(\text{mod } n) = m \ \& \ p - \text{целое}))$

2. Использование дополнительного параметрического описания для обозначения сложного подвыражения заменяемой части новой переменной. Аналогично предыдущему, но теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, у которой сложности обеих частей одинаковы, чприем при переходе к A_2 уменьшается максимальная сложность собственных подтермов максимально сложных термов. (Прием упрощ-плюс - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aghmnA}(a = \text{операция}(A)\ \&\ h \in \text{носитель}(A)\ \&\ \text{алгстепень}(h, a, n) \in g\ \&$
   $n - \text{натуральное}\ \&\ m - \text{целое}\ \&\ \text{группа}(A)\ \&\ \text{подгруппа}(g, A) \rightarrow$
   $\text{алгстепень}(h, a, m) \in g \leftrightarrow \text{алгстепень}(h, a, m(\text{mod}\ n)) \in g)$

   из теоремы

   $\forall_{adghijA}(a = \text{операция}(A)\ \&\ h \in \text{носитель}(A)\ \&\ \text{алгстепень}(h, a, i) \in g\ \&$
   $i - \text{натуральное}\ \&\ d - \text{целое}\ \&\ j - \text{целое}\ \&\ \text{группа}(A)\ \&\ \text{подгруппа}(g, A) \rightarrow$
   $\text{алгстепень}(h, a, d) \in g \leftrightarrow \text{алгстепень}(h, a, d + ij) \in g)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{mn}(n - \text{натуральное}\ \&\ m - \text{целое} \rightarrow \exists_p(np + m(\text{mod}\ n) = m\ \&\ p - \text{целое}))$

3.13 Использование уравнений для координат множеств точек

1. Переход к параметрическому описанию уравнения множества точек для параметризации координат элемента этого множества. Теорема - кванторная импликация с консеквентом вида "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_1\ \&\ \text{коорд}(M, K) = \text{set}_{y_1 \ldots y_m}(A_2))$", причем параметрами описателя "класс" служат только переменные $x_1, \ldots, x_k$. Выражение M имеет своим заголовком логический символ f, заголовок A_2 отличен от символа "существует". Самый сложный подтерм t утверждения A_2 имеет заголовок g. Определяется тождество вида "$\text{set}_{u_1 \ldots u_n}(B_1) = \text{set}_{u_1 \ldots u_n}(\exists_{v_1 \ldots v_m}(u_1 = r_1\ \&\ \ldots\ \&\ u_n = r_n\ \&\ B_2))$", у которого g - заголовок самого сложного подтерма левой части. Создается вспомогательная теорема, полученная из исходной добавлением к антецедентам утверждений $A_1, \text{коорд}(M, K) = \text{set}_{y_1 \ldots y_m}(A_2)$. Ее консеквент - терм "$\text{фикс}(\text{set}_{y_1 \ldots y_m}(A_2))$". Дополнительно тождество используется для преобразования подтерма "set(...)" в консеквенте вспомогательной теоремы. Получается теорема T с консеквентом вида "$\text{фикс}(\text{set}_{w_1 \ldots w_n}(\exists_{z_1 \ldots z_m}(w_1 = s_1\ \&\ \ldots\ \&\ w_n = s_n\ \&\ D)))$". Выбирается новая переменная P; к антецедентам теоремы T добавляется "$P \in M$". Консеквент теоремы T заменяется на "$\exists_{z_1 \ldots z_m}(D\ \&\ \text{коорд}(P, K) = (s_1, \ldots, s_n))$". Результат упрощается. (Прием координаты - 13).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{achijklBCK}(\neg(B = C)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&$
   $z - \text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((j, k, l), (c + x, h + y, i + z)))\ \&\ a \in \text{прямая}(BC)\ \&$
   $c - \text{число}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ i - \text{число}\ \&\ j - \text{число}\ \&\ k - \text{число}\ \&\ l - \text{число}\ \&$
   $B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow$
   $\exists_m(\text{коорд}(a, K) = (jm - c, km - h, lm - i)\ \&\ m - \text{число}))$

из теоремы

$\forall_{BCK}(\neg(B=C)\ \&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&$ Трехмерн$(K)\rightarrow$
$\exists_{abdefg}(\neg(d^2+e^2+f^2=0)\ \&$ коорд(прямая$(BC),K)=\mathrm{set}_{xyz}(x-$число $\&$
$y-$число $\&\ z-$число $\&$ пропорцнаборы$((d,e,f),(g+x,a+y,b+z)))\ \&$
$a-$число $\&\ b-$число $\&\ d-$число $\&\ e-$число $\&\ f-$число $\&\ g-$число$))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcdef}(\neg(d^2+e^2+f^2=0)\ \&\ a-$число $\&\ b-$число $\&\ d-$число $\&\ e-$число $\&$
$f-$число $\rightarrow\mathrm{set}_{xyz}(x-$число $\&\ y-$число $\&\ z-$число $\&$ пропорцнаборы$((d,e,f),$
$(a+x,b+y,c+z)))=\mathrm{xyz}(\exists_g(x=dg-a\ \&\ y=eg-b\ \&\ z=fg-c\ \&\ g-$число$)))$

2. Определение условия включения двух множеств объектов через их координаты. Теорема - кванторная импликация с консеквентом вида $\exists_{x_1\ldots x_k}(A_1\ \&$ коорд$(M,K)=\mathrm{set}_{y_1\ldots y_m}(A_2))$, определяющим общий вид уравнения для координат точек множества M. По заголовку f выражения M находится теорема без существенных антецедентов с консеквентом вида "$N_1\subseteq M_1\leftrightarrow B$", причем заголовок M_1 равен f. По заголовку g выражения N_1 находится теорема с консеквентом вида $\exists_{z_1\ldots z_n}(D_1\ \&$ коорд$(N,K)=\mathrm{set}_{u_1\ldots u_m}(D_2))$, у которой заголовок N равен g. Она определяет общий вид уравнения для координат точек множества N. Чтобы получить условие невключения N в M, после необходимых унификации переменных описателей "класс" и объединения антецедентов решается задача на описание, условия которой суть A_2 и отрицание D_2. Неизвестные - связанные переменные описателя "класс", причем все они несущественные. Условием включения становится отрицание R ответа данной задачи. Консеквентом новой теоремы является эквивалентность "$N\subseteq M\leftrightarrow R$". Результат упрощается. (Прием координаты - 14).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdefghijklmstK}(\neg(f=g)\ \&\ \neg(s=t)\ \&\ \neg(h\in$прямая$(fg))\ \&$
коорд(прямая$(st),K)=\mathrm{set}_{pqr}(p-$число $\&\ q-$число $\&\ r-$число $\&$
пропорцнаборы$((i,k,m),(p-e,q-j,r-l)))\ \&$ коорд(плоскость$(fgh),K)=$
$\mathrm{set}_{xyz}(d+ax+by+cz=0\ \&\ x-$число $\&\ y-$число $\&\ z-$число$)\ \&\ a-$число $\&$
$b-$число $\&\ c-$число $\&\ d-$число $\&\ e-$число $\&\ i-$число $\&\ j-$число $\&$
$k-$число $\&\ l-$число $\&\ m-$число $\&\ f-$точка $\&\ g-$точка $\&\ h-$точка $\&$
$s-$точка $\&\ t-$точка $\&$ Трехмерн$(K)\rightarrow$ прямая$(st)\subseteq$ плоскость$(fgh)\leftrightarrow$
$d+ae+bj+cl=0\ \&\ ai+bk+cm=0)$

из теоремы

$\forall_{fghABCDK}(\neg(f=g)\ \&\ \neg(h\in$прямая$(fg))\ \&\ K=(A,B,C,D)\ \&\ f-$точка $\&$
$g-$точка $\&\ h-$точка $\&$ систкоорд$(K)\rightarrow\exists_{abcd}(\neg(a^2+b^2+c^2=0)\ \&$
коорд(плоскость$(fgh),K)=\mathrm{set}_{xyz}(d+ax+by+cz=0\ \&\ x-$число $\&$
$y-$число $\&\ z-$число$)\ \&\ a-$число $\&\ b-$число $\&\ c-$число $\&\ d-$число$))$

и дополнительных теорем

$\forall_{ABCDE}(A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&\ E-$точка $\&$
$\neg(C=D)\ \&\ \neg(E\in$прямая$(CD))\ \&\ \neg(A=B)\rightarrow$

прямая$(AB) \subseteq$ плоскость$(CDE) \leftrightarrow A \in$ плоскость(CDE) &
$B \in$ плоскость$(CDE))$

$\forall_{BCK}(\neg(B = C)$ & $B -$ точка & $C -$ точка & Трехмерн$(K) \rightarrow$
$\exists_{abcdef}(\neg(b^2 + d^2 + f^2 = 0)$ & коорд(прямая$(BC), K) = \text{set}_{xyz}(\exists_t(x = a + bt$ &
$y = c + dt$ & $z = e + ft$ & $t -$ число)) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число &
$d -$ число & $e -$ число & $f -$ число))

3. Определение условия непересечения двух множеств объектов через их координаты. Аналогично предыдущему, но условиями задачи на описание являются A_2, D_2. Это дает условие пересечения множеств, а его отрицание R - условие непересечения. (Прием координаты - 16).

$\forall_{abcdefghijklmstK}(\neg(f = g)$ & $\neg(s = t)$ & $\neg(h \in$ прямая$(fg))$ &
коорд(прямая$(st), K) = \text{set}_{pqr}(p -$ число & $q -$ число & $r -$ число &
пропорцнаборы$((i, k, m), (p - e, q - j, r - l)))$ & коорд(плоскость$(fgh), K) =$
$\text{set}_{xyz}(d + ax + by + cz = 0$ & $x -$ число & $y -$ число & $z -$ число) & $a -$ число &
$b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $i -$ число & $j -$ число &
$k -$ число & $l -$ число & $m -$ число & $f -$ точка & $g -$ точка & $h -$ точка &
$s-$точка & $t-$точка & Трехмерн$(K) \rightarrow$ непересек(прямая(st), плоскость$(fgh) \leftrightarrow$
$\neg(d + ae + bj + cl = 0)$ & $ai + bk + cm = 0)$

из теоремы

$\forall_{fghABCDK}(\neg(f = g)$ & $\neg(h \in$ прямая$(fg))$ & $K = (A, B, C, D)$ & $f -$ точка &
$g -$ точка & $h -$ точка & систкоорд$(K) \rightarrow \exists_{abcd}(\neg(a^2 + b^2 + c^2 = 0)$ &
коорд(плоскость$(fgh), K) = \text{set}_{xyz}(d + ax + by + cz = 0$ & $x -$ число &
$y -$ число & $z -$ число) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число))

и дополнительных теорем

$\forall_{ABCDE}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка &
$\neg(C = D)$ & $\neg(E \in$ прямая$(CD))$ & $\neg(A = B) \rightarrow$
прямая$(AB) \subseteq$ плоскость$(CDE) \leftrightarrow A \in$ плоскость(CDE) &
$B \in$ плоскость$(CDE))$

$\forall_{BCK}(\neg(B = C)$ & $B -$ точка & $C -$ точка & Трехмерн$(K) \rightarrow$
$\exists_{abcdef}(\neg(b^2 + d^2 + f^2 = 0)$ & коорд(прямая$(BC), K) = \text{set}_{xyz}(\exists_t(x = a + bt$ &
$y = c + dt$ & $z = e + ft$ & $t -$ число)) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число &
$d -$ число & $e -$ число & $f -$ число))

4. Использование дополнительной теоремы, выражающей множество точек через отдельные точки. Теорема - эквивалентность вида $P(X) \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(A_1$ &
коорд$(X, K) = \text{set}_{y_1 \ldots y_m}(A_2))$ определяющая общий вид уравнения для координат точек множества X типа P. По символу P находится тождество вида $x = t$, где переменная x не входит в t, причем имеется единственный существенный антецедент вида $P(x)$. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Для всех переменных $z_1, \ldots, z_n$ выражения t в антецедентах имеются утверждения вида $z_1 \in x, \ldots, z_n \in x$. Выбираются новые переменные $u_{1,1}, \ldots, u_{1,m}, \ldots, u_{n,1}, \ldots, u_{n,m}$. После необходимой унификации к антецедентам исходной теоремы добавляются равенства "коорд$(z_1, K) = (u_{1,1}, \ldots, u_{1,m})$,

$\ldots$, коорд$(z_n, K) = (u_{n,1}, \ldots, u_{n,m})$". Чтобы определить параметры $x_1, \ldots, x_k$ уравнения A_2, составляется система уравнений, получаемых из A_2 подстановкой вместо $y_1, \ldots, y_m$ "известных" значений $u_{j,1}, \ldots, u_{j,m}$. После подстановки в A_2 найденных значений получается уравнение A_3 для координат множества t. Консеквентом новой теоремы становится равенство "коорд$(t, K) = \text{set}_{y_1 \ldots y_m}(A_3)$". Результат упрощается. (Прием уравнкрив - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{deghijK}(\neg(d = e)$ & коорд$(d, K) = (g, h)$ & коорд$(e, K) = (i, j)$ & $d -$ точка & $e -$ точка & систкоорд$(K) \rightarrow$ коорд(прямая$(de), K) = \text{set}_{xy}(hi + x(j - h) + y(g - i) - gj = 0$ & $x -$ число & $y -$ число))

из теоремы

$\forall_{ABCKP}($систкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $P \subseteq$ плоскость$(ABC) \rightarrow$ Прямая$(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $\neg(a^2 + b^2 = 0)$ & коорд$(P, K) = \text{set}_{xy}(x -$ число & $y -$ число & $ax + by + c = 0)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABP}($Прямая(P) & $A -$ точка & $B -$ точка & $A \in P$ & $B \in P$ & $\neg(A = B) \rightarrow P =$ прямая$(AB))$

5. Использование дополнительной импликации для варьирования параметров уравнения и вывода условия на новые параметры. Теорема - тождество вида "коорд$(M, K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_n}(A_1$ & $\ldots$ & $A_m)$". Некоторое A_i - единственный максимально сложный подтерм правой части. Оно имеет вид $P(t_1, t_2)$, причем t_1 не содержит переменных $x_1, \ldots, x_n$, а t_2 - содержит. Находится теорема вида $P(r_1, r_2)$ & $P(r_3, r_2) \rightarrow B$, у которой параметры терма r_2 и термов r_1, r_3 не пересекаются. В консеквенте параметры терма r_2 не встречаются, а термов r_1, r_3 - встречаются. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. После унификации t_1 с r_1, а t_2 с r_2 к антецедентам исходной теоремы добавляется результат замены в ее консеквенте подтерма $P(t_1, t_2)$ на $P(r_3, r_2)$. Консеквентом становится B. Результат упрощается. (Прием уравнмножество - 20).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcghijkpqrK}(\neg(a = g)$ & коорд$(g, K) = (h, i, j)$ & коорд(прямая$(ag), K) =$ $\text{set}_{xyz}(x -$ число & $y -$ число & $z -$ число & пропорцнаборы$((p, q, r),$ $(x - h, y - i, z - j)))$ & коорд(вектор$(ga), K) = (b, c, k)$ & $p -$ число & $q -$ число & $r -$ число & $a -$ точка & $g -$ точка & Трехмерн$(K) \rightarrow$ пропорцнаборы$((b, c, k),$ $(p, q, r)))$

из теоремы

$\forall_{adefghijK}(\neg(a = g)$ & коорд$(g, K) = (h, i, j)$ & коорд(вектор$(ga), K) = (d, e, f)$ & $a -$ точка & $g -$ точка & Трехмерн$(K) \rightarrow$ коорд(прямая$(ag), K) =$ $\text{set}_{xyz}(x -$ число & $y -$ число & $z -$ число & пропорцнаборы$((d, e, f),$ $(x - h, y - i, z - j))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcdefklm}(\neg(d^2+e^2+f^2=0)$ & $a-$число & $b-$число & $c-$число & $d-$число & $e-$число & $f-$число & $k-$число & $l-$число & $m-$число & пропорцнаборы$((a,b,c),(d,e,f))$ & пропорцнаборы$((d,e,f),(k,l,m)) \rightarrow$ пропорцнаборы$((a,b,c),(k,l,m)))$

3.14 Переход от координат объекта к самому объекту

1. Вывод эквивалентности для явного задания объекта через координаты в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". Консеквент теоремы имеет вид "коорд$(A,K)=(a_1,\ldots,a_n)$", где A - переменные. Находятся все антецеденты вида "коорд$(A_i,K)=(b_{i1},\ldots,b_{in})$"; $i=1,\ldots,m$. Находится тождество "коорд$(B,K)=(c_1,\ldots,c_n)$", где B - выражение точки через ее координаты $(c_1,\ldots,c_n)$. С помощью этого тождества в исходной теореме все точки $A,A_1,\ldots,A_m$ выражаются через параметры своих координат. К антецедентам добавляются условия на параметры, обеспечивающие реализуемость прочих условий на данные точки. Результат упрощается и снабжается единственной характеристикой, указывающей, что он создан для приема задачи на преобразование, имеющей цель "класс". Этот прием позволяет явно задать объект через его координаты. (Прием систкоорд - 24).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdepCK}(\neg(e+p=0)$ & $a-$число & $b-$число & $c-$число & $d-$число & $e-$число & $p-$число & систкоорд(K) & Двумерн$(K) \rightarrow e\cdot l(C$ тчкоорд$(K,(a,b)))$ $= p\cdot l(C$ тчкоорд$(K,(c,d)))$ & $C\in$ отрезок(тчкоорд$(K,(a,b))$ тчкоорд$(K,(c,d)))$ $\leftrightarrow C=$ тчкоорд$(K,((ae+cp)/(e+p),(be+dp)/(e+p))))$

   из теоремы

   $\forall_{abcdepABCK}($коорд$(A,K)=(a,b)$ & коорд$(B,K)=(c,d)$ & $C\in$ отрезок(AB) & $p-$число & $A-$точка & $B-$точка & $C-$точка &систкоорд(K) & $el(AC)=pl(BC)$ & $e-$число & $\neg(e+p=0) \rightarrow$ коорд$(C,K)=((ae+cp)/(e+p),$ $(be+dp)/(e+p)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abK}($систкоорд(K) & Двумерн(K) & $a-$число & $b-$число $\rightarrow$ коорд(тчкоорд$(K,(a,b)),K)=(a,b))$

3.15 Преобразование эквивалентности в условие существования

1. Попытка вывести общий вид уравнения для множества точек, удовлетворяющего заданному условию. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, выражающая утверждение A_1 через параметры координат. Выбирается антецедент вида "коорд$(t,K)=\mathrm{set}_{x_1\ldots x_n}(D_1$ & $\ldots$ & $D_m)$". Выражение t имеет своим заголовком логический символ f. Находится теорема с консеквентом вида

$\exists_{y_1 \ldots y_k}$(координ$(r, K) = \text{set}_{u_1 \ldots u_n}(E_1$ & ... & $E_m)$ & $F)$, где заголовком r служит f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка C, переводящая указанный антецедент исходной теоремы в "координ$(r, K) = \text{set}_{u_1 \ldots u_n}(E_1$ & ... & $E_m)$". Определяется список S результатов применения C к остальным антецедентам исходной теоремы. Проверяется, что он включает все антецеденты дополнительной теоремы. К списку S добавляется утверждение $C(A_1)$. Новая теорема имеет своими антецедентами утверждения S, а консеквентом - $\exists_{y_1 \ldots y_k}$(координ$(r, K) = \text{set}_{u_1 \ldots u_n}(E_1$ & ... & $E_m)$ & F & $C(A_2))$. Результат упрощается. (Прием числопред - 14).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdfghFGH}(\neg(f = g)$ & $\neg(F = G)$ & $\neg(h \in$ прямая$(fg))$ &
координ(плокость$(fgh), H) = \text{set}_{xyz}(d + ax + by + cz = 0$ & $x -$ число &
$y -$ число & $z -$ число) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число &
$f -$ точка & $g -$ точка & $h -$ точка & $F -$ точка & $G -$ точка &
прямая$(FG) \parallel$ плоскость(fgh) & Трехмерн$(H) \rightarrow$
$\exists_{luvwAB}(av + bw + cA = 0$ & координ(прямая$(FG), H) = \text{set}_{CDE}(C -$ число &
$D -$ число & $E -$ число & пропорцнаборы$((v, w, A), (B + C, l + D, u + E)))$ &
$l -$ число & $u -$ число & $v -$ число & $w -$ число & $A -$ число & $B -$ число))

из теоремы

$\forall_{abcdefghijkmnstK}(\neg(f = g)$ & $\neg(s = t)$ & $\neg(h \in$ прямая$(fg))$ &
координ(прямая$(st), K) = \text{set}_{pqr}(p -$ число & $q -$ число &
$q -$ число & пропорцнаборы$((i, k, m), (n + p, e + q, j + r)))$ &
координ(плокость$(fgh), K) = \text{set}_{xyz}(d + ax + by + cz = 0$ & $x -$ число & $y -$ число &
$z -$ число) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число &
$i -$ число & $j -$ число & $k -$ число & $m -$ число & $n -$ число & $f -$ точка &
$g -$ точка & $h -$ точка & $s -$ точка & $t -$ точка & Трехмерн$(K) \rightarrow$
прямая$(st) \parallel$ плоскость$(fgh) \leftrightarrow ai + bk + cm = 0)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{BCK}(\neg(B = C)$ & $B -$ точка & $C -$ точка & Трехмерн$(K) \rightarrow$
$\exists_{abdefg}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0)$ & координ(прямая$(BC), K) = \text{set}_{xyz}(x -$ число &
$y -$ число & $z -$ число & пропорцнаборы$((d, e, f), (g + x, a + y, b + z)))$ &
$a -$ число & $b -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $g -$ число))

2. Попытка получения импликации, дающей общий вид уравнения для множества точек, удовлетворяющего заданному ограничению. Несколько проварьированный предыдущий прием: при определении C используется процедура унификации; вместо непосредственного включения антецедентов дополнительной теоремы в S проверяется, что они суть следствия S. (Прием числопред - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{defjkqrs}(\neg(j = k)$ & $\neg(r = s)$ & координ(прямая$(jk), q) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0$ &
   $u -$ число & $v -$ число) & $r \in$ плоскоорд(q) & $s \in$ плоскоорд(q) & $d -$ число &
   $e -$ число & $f -$ число & $j -$ точка & $k -$ точка & $r -$ точка & $s -$ точка &
   прямая$(jk) \parallel$ прямая(rs) & систкоорд(q) & Двумерн$(q) \rightarrow$

$\exists_b$(координ(прямая$(rs), q) = \text{set}_{np}(b + dn + ep = 0$ & $n -$ число & $p -$ число) & $b -$ число))

из теоремы

$\forall_{abcdefhijkK}(\neg(h = i)$ & $\neg(j = k)$ & координ(прямая$(hi), K) =$
$\text{set}_{xy}(c + ax + by = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) &
координ(прямая$(jk), K) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) &
$a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число &
$h -$ точка & $i -$ точка & $j -$ точка & $k -$ точка & систкоорд$(K) \rightarrow$
прямая$(hi) \parallel$ прямая$(jk) \leftrightarrow ae - bd = 0)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{MNABCK}(\neg(M = N)$ & $K = (A, B, C)$ & $M \in$ плоскость(ABC) &
$N \in$ плоскость(ABC) & $M -$ точка & $N -$ точка & систкоорд$(K) \rightarrow$
$\exists_{abc}(\neg(a^2 + b^2 = 0)$ & координ(прямая$(MN), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0$ &
$x -$ число & $y -$ число) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число))

3.16 Извлечение тождества из импликации

1. Использование нижней оценки для вывода равенства. Консеквент теоремы - неравенство $t_1 \leq t_2$ для двух невырожденных числовых атомов с одним и тем же заголовком f. Находится теорема вида $r_1 \leq r_2$, где r_2 - невырожденный числовой атом с заголовком f, содержащий все переменные теоремы; r_1 - выражение без невырожденных числовых атомов. Находится подстановка C, переводящая r_2 в t_1. Проверяется, что она переводит r_1 в константное выражение p. К антецедентам исходной теоремы добавляются результаты применения C антецедентам второй теоремы, а также равенство $t_2 = p$. Консеквентом становится $t_1 = p$. Результат упрощается. (Прием числоценка - 14).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{adC}$(вероятность$(d, C) = 0$ & $a \subseteq d$ & $a \in$ события(C) & $d \in$ события(C) &
   верпространство$(C) \rightarrow$ вероятность$(a, C) = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{adC}(a \subseteq d$ & $a \in$ события(C) & $d \in$ события(C) & верпространство$(C) \rightarrow$
   вероятность$(a, C) \leq$ вероятность$(d, C))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a -$ set & верпространство(b) & $a \in$ события$(b) \rightarrow 0 \leq$ вероятность$(a, b))$

3.17 Установление эквивалентности консеквента антецеденту

1. Использование дополнительной теоремы для вывода эквивалентности консеквента антецеденту. Консеквент теоремы имее вид $x = t$, где x - переменная,

не входящая в t. Эта переменная встречается в единственном антецеденте A. По заголовку f антецедента A аходится теорема с консеквентом вида $\exists_y(B)$, причем B имеет своим заголовком символ f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка C, переводящая B в A. Она переводит связанную переменную y в переменную x. Из антецедентов исходной теоремы исключается A, после чего к ним присоединяются результаты применения C к антецедентам второй теоремы. Консеквентом становится эквивалентность $A \leftrightarrow x = t$. Результат упрощается. (Прием значениепеременной - 10).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcdA}(A - \text{set}\ \&\ \text{ассоциативно}(c)\ \&\ \text{обратимо}(c)\ \&\ \text{правединица}(b,c)\ \&$
$\text{бинарнооперация}(c,A) \rightarrow \text{левединица}(d,c) \leftrightarrow b = d)$

из теоремы

$\forall_{bcde}(e - \text{set}\ \&\ \text{правединица}(b,c)\ \&\ \text{левединица}(d,c)\ \&\ \text{бинарнооперация}(c,e) \rightarrow d = b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{fA}(\neg(A = \emptyset)\ \&\ A - \text{set}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&\ \text{обратимо}(f)\ \&$
$\text{бинарнооперация}(f,A) \rightarrow \exists_z(\text{левединица}(z,f)))$

3.18 Варьирование функциональной переменной

1. Попытка сгруппировать с внешним операндом функцию от обобщенного аргумента (справочник "включ"). Консеквент теоремы имеет вид $P(\lambda_X(F(g(t_1),t_2),Q),A)$, где g - переменная, значением которой служит функция; F - символ ассоциативной и коммутативной операции. Этот консеквент определяет значение A характеристики P отображения, заданного первым операндом. Заголовки t_1, t_2 одинаковые. Предпринимается попытка замены функции g на такую функцию h, что $h(t_1) = F(g(t_1),t_3)$, где t_3 выражается через t_1. При этом $F(t_3,t_2)$ сворачивается в некоторое бесповторное выражение t_4. Для выражения t_3 через t_1 и свертки в бесповторное выражение привлекаются две дополнительных теоремы. В результате получается теорема, где вместо $F(g(t_1),t_2)$ находится $F(g(t_1),t_4)$. Результат упрощается. (Прием функперех - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acjk}(\neg(j = 0)\ \&\ (0,\infty) \subseteq \text{Dom}(a)\ \&\ a - \text{функция}\ \&\ j - \text{число}\ \&\ k - \text{число}\ \&$
   $\text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^k, l \in \text{Dom}(a)), c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(x^j)x^{j(k+1)-1},$
   $0 < x\ \&\ x - \text{число}), \lambda_d(c(d^j)/j, 0 < d\ \&\ d - \text{число})))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(b = 0)\ \&\ (0,\infty) \subseteq \text{Dom}(a)\ \&\ a - \text{функция}\ \&\ b - \text{число}\ \&$
   $\text{первообразная}(a,c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(x^b)x^{b-1}, 0 < x\ \&\ x - \text{число}),$
   $\lambda_d(c(d^b)/b, 0 < d\ \&\ d - \text{число})))$

и дополнительных теорем

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 < a \to a^b a^c = a^{b+c})$

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 \leq a \to (a^b)^c = a^{bc})$

2. Попытка сгруппировать с внешним операндом функцию от обобщенного аргумента (справочник "варпарам"). Аналогично предыдущему, но заголовки t_1, t_2 различны, и терм t_3, выражаемый через t_1, имеет тот же заголовок, что t_2. (Прием функперех - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aci}(\neg(\text{знаменатель}(i) - \text{even}\ \&\ [-1,1] \subseteq \text{Dom}(a)\ \&\ a - \text{функция}\ \&\ i - \text{rational}\ \&$
   $\text{первообразная}(\lambda_j(a(j)(-j^2+1), j \in \text{Dom}(a)), c) \to$
   $\text{первообразная}(\lambda_x(a(\sin x)(\cos x)^{2i+1}, x - \text{число}), \lambda_d(c(\sin d), d - \text{число})))$

   из теоремы

   $\forall ac([-1,1] \subseteq \text{Dom}(a)\ \&\ a - \text{функция}\ \&\ \text{первообразная}(a,c) \to$
   $\text{первообразная}(\lambda_x(a(\sin x)\cos x, x - \text{число}), \lambda_d(c(\sin d), d - \text{число})))$

   и дополнительных теорем

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ b - \text{rational}\ \&\ c - \text{rational}\ \&$
   $\neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even})\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \to a^b a^c = a^{b+c})$

   $\forall_{an}(a - \text{число}\ \&\ n - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(n) - \text{even}) \to$
   $(\cos a)^{2n} = (1 - (\sin a)^2)^n)$

3.19 Тождество с описателем "класс" порождает эквивалентность

1. Попытка развертки условий включения либо непересечения классов и применения к подутверждению результата эквивалентности общей стандартизации. Теорема - определение $A_1 = \text{set}_x(A_2)$ некоторого множества A_1. Рассматривается двойник $A_3 = \text{set}_y(A_4)$ этой теоремы, полученный переобозначением переменных на новые переменные. Решается задача на описание с условием "$\text{set}_x(A_2) \subseteq \text{set}_y(A_4)$" либо "$\text{непересек}(\text{set}_x(A_2), \text{set}_y(A_4))$". В ответе R_1 выделяется равенство $t_1 = t_2$ двух выражений с одинаковым заголовком f. Находится эквивалентность общей стандартизации вида "$f(\ldots) = f(\ldots) \leftrightarrow B$". Она применяется для преобразования $t_1 = t_2$, после чего R_1 упрощается и превращаеся в некоторое элементарное утверждение R_2. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность "$A_1 \subseteq A_3) \leftrightarrow R_2$ либо "$\text{непересек}(A_1, A_3) \leftrightarrow R_2$". Результат упрощается. (Прием определение - 109).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abi}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(i)\ \&\ b \subseteq \text{Dom}(i)\ \&\ i - \text{функция}\ \&$
   $\text{взаимнооднозначно}(i) \to \text{образ}(i,a) \subseteq \text{образ}(i,b) \leftrightarrow a \subseteq b)$

   из теоремы

$\forall_{af}(a - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{set}_x(\exists_y(y \in a\ \&\ x = f(y))) = \text{образ}(f, a))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abf}(f - \text{функция}\ \&\ a \in \text{Dom}(f)\ \&\ b \in \text{Dom}(f)\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow f(a) = f(b) \leftrightarrow a = b)$

3.20 Опровержение квантора существования

1. Использование дополнительной импликации для опровержения консеквента. Консеквент теоремы имеет вид $\exists_x(A_1\ \&\ A_2)$, где A_1 - один из наиболее сложных конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Он имеет не менее 2 параметров. После отбрасывания корневого отрицания A_1 (если оно есть) получается утверждение с заголовком f. В разделе символа f находится теорема T, заголовок консеквента B которой после отбрасывания корневого отрицания (если оно есть) равен f. Консеквент содержит все переменные теоремы T. Определяется подстановка S, переводящая отрицание B в A_1. Список результатов применения S к антецедентам теоремы T разбивается на подсписок Q_1 утверждений, содержащих x, и подсписок Q_2 остальных утверждений. Проверяется, что все утверждения списка Q_1 - следствия антецедентов исходной теоремы и A_2. Консеквентом новой теоремы становится дизъюнкция отрицаний утверждений списка Q_2, не являющихся антецедентами исходной теоремы. Антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием допконтекст - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cd}(\text{орграф}(d)\ \&\ \text{цепь}(c, d)\ \&\ \text{ациклический}(d) \rightarrow \text{простаяцепь}(c, d))$

   из теоремы

   $\forall_{cd}(\neg(\text{простаяцепь}(c, d))\ \&\ \text{орграф}(d)\ \&\ \text{цепь}(c, d) \rightarrow$
   $\exists_e(\text{цикл}(e, d)\ \&\ \text{подмаршрут}(e, c)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{GM}(\text{орграф}(G)\ \&\ \text{ациклический}(G) \rightarrow \neg(\text{цикл}(M, G)))$

Глава 4

Варьирование дополнительной теоремы

4.1 Дополнительная теорема преобразуется эквивалентностью

Эквивалентность позволяет одновременно проварьировать антецеденты и консеквент дополнительной теоремы

1. Переформулировка утверждения о транзитивности по части переменных с уменьшением глубины переменных. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$, где A_1, A_2 - элементарные утверждения, причем глубина переменных в A_2 не превосходит их глубины в A_1, а для некоторых переменных A_2 - строго меньше. Определяется заголовок f максимально сложного подвыражения левой части. Находится теорема вида $P(f(r_1, r_2), r)$ & $P(f(r_2, r_3), r) \rightarrow P(f(r_1, r_3), r)$, где P - заголовок A_1. Создаются две копии исходной теоремы, которые используются для преобразования обоих антецедентов дополнительной теоремы, а сама исходная теорема - для преобразования консеквента дополнительной теоремы. Результат упрощается. (Прием общнорм - 62).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcde}(\neg(d = e)$ & $\neg(a \in$ прямая$(de))$ & $\neg(b \in$ прямая$(de))$ & $\neg(c \in$ прямая$(de))$ & $a -$ точка & $b -$ точка & $c -$ точка & $d -$ точка & $e -$ точка & однасторона$(a, b,$ прямая$(de))$ & однасторона$(b, ,$ прямая$(de)) \rightarrow$ однасторона$(a, c,$ прямая$(de)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(C = D)$ & $\neg(A \in$ прямая$(CD))$ & $\neg(B \in$ прямая$(CD))$ & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $B \in$ плоскость$(ACD) \rightarrow$ однасторона$(A,$ $B,$ прямая$(CD)) \leftrightarrow$ непересек(прямая$(CD),$ отрезок$(AB)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCDE}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка & $\neg(D = E)$ & непересек(отрезок$(AB),$ прямая$(DE))$ & непересек(отрезок$(BC),$ прямая$(DE)) \rightarrow$ непересек(отрезок$(AC),$ прямая$(DE)))$

2. Переформулировка импликации, выражающей характеристику одного объекта через характеристику другого. Теорема - эквивалентность $A_0 \leftrightarrow A_1$ & ... & A_n, декомпозирующая элементарное бесповторное утверждение в конъюнкцию элементарных бесповторных утверждений. Все ее переменные встречаются в A_0. Стартовая теорема текущего цикла вывода - определение некоторого понятия, встречающегося в некотором A_i; $i = 1, \ldots, n$, и не встречающегося в A_0. A_0 имеет единственный максимально сложный подтерм $f(x_1 \ldots x_n)$, где $x_1, \ldots, x_n$ - переменные. В разделе символа f находится теорема, консеквент B которой имеет своим заголовком тот же символ P, что и A_0. Этот консеквент содержит f. Дополнительная теорема имеет также антецедент с заголовком P, содержащий f. В антецедентах ее нет равенства, не содержащего f,а также нет равенства - присвоения значения некоторой переменной. Переменные дополнительной теоремы переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка C, переводящая A_0 в B. Составляется список S результатов применения C к антецедентам исходной теоремы. Проверяется, что существует хотя бы один антецедент дополнительной теоремы, в который A_0 переводится некоторой подстановкой. Для каждого такого антецедента к S добавляются результаты применения такой подстановки к антецедентам исходной теоремы, а сам антецедент исключается из списка антецедентов дополнительной теоремы. Проверяется, что хотя бы один ее антецедент был исключен. Антецедетами новой теоремы становятся антецеденты дополнительной и утверждения S, а консеквентом - произвольное $C(A_i); i = 1, \ldots, n$. Результат упрощается. (Прием и - 70).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ghi}(g - \text{точка}$ & $h - \text{точка}$ & $\text{Трехмерн}(i) \rightarrow \text{крд}(\text{вектор}(hg), i, 1) =$
   $- \text{крд}(\text{вектор}(gh), i, 1))$

   из теоремы

   $\forall_{abcAK}(\text{Трехмерн}(K)$ & $\text{Вектор}(A) \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \leftrightarrow \text{крд}(A, K, 1) =$
   a & $\text{крд}(A, K, 2) = b$ & $\text{крд}(A, K, 3) = c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABKabc}(A - \text{точка}$ & $B - \text{точка}$ & $\text{систкоорд}(K)$ & $\text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) =$
   $(a, b, c) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(BA), K) = (-a, -b, -c))$

3. Попытка применить определение существования для свертки ранее выведенных теорем типа декомпозиции. Теорема - определение $A_0 \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(A_1$ & ... & $A_n)$. Правая часть имеет единственный максимально сложный подтерм с заголовком f, причем он встречается в члене A_i. Все переменные исходной теоремы встречаются в A_i. В разделе символа f находится теорема с консеквентом B, содержащим f и имеющим тот же заголовок P, что A_i. Находится подстановка C, переводящая A_i в B. Проверяется, что для каждого A_j, $j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n$, утверждение $C(A_j)$ - следствие антецедентов дополнительной теоремы. Составляется список S - объединение списка антецедентов дополнительной теоремы и результатов применения C к антецедентам исходной. Рассматривается результат T переобозначения переменных исходной теоремы на новые переменные. До тех пор, пока удается подобрать подстановку, переводящую утверждения

$A_1, \ldots, A_n$ теоремы T в некоторые утверждения списка S, последние заменяются в списке S на соответствующее A_0 теоремы T. Антецедентами новой теоремы становятся утверждения S, а консеквентом - $C(A_0)$. Результат упрощается. (Прием определение - 52).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bd}(b - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{огрсверху}(b) \ \& \ \text{огрсверху}(d) \rightarrow \text{огрсверху}(\text{set}_x(\exists_{yz}(x = y + z \ \& \ y \in b \ \& \ z \in d))))$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{огрсверху}(a) \leftrightarrow \exists_b(\text{верхняягрань}(b, a)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcd}(b - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{верхняягрань}(a, b) \ \& \ \text{верхняягрань}(c, d) \rightarrow \text{верхняягрань}(a + c, \text{set}_x(\exists_{yz}(y \in b \ \& \ z \in d \ \& \ x = y + z))))$

4. Попытка применить определение элементарной конъюнкции для свертки ранее выведенных теорем типа декомпозиции. Аналогично предыдущему, но исходная теорема - определение вида $A_0 \leftrightarrow A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n$. (Прием определение - 53).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ac}(\text{бескмалая}(a) \ \& \ \text{бескмалая}(c) \rightarrow \text{бескмалая}(\lambda_n(a(n) + c(n), n - \text{натуральное})))$

   из теоремы

   $\forall_a(\text{бескмалая}(a) \leftrightarrow \text{последовательность}(a, \mathbb{R}) \ \& \ \lim(a) = 0)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abfg}(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \ \& \ \text{последовательность}(g, \mathbb{R}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \lim(f) = a \ \& \ \lim(g) = b \rightarrow \lim(\lambda_n(f(n) + g(n), n - \text{натуральное})) = a + b)$

5. Попытка использовать тождество для операции над функцией, участвующей в определении свойства функции. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$, где утверждение A_2 элементарно и имеет единственный максимально сложный подтерм - выражение t с заголовком f. Находится теорема вида $f(r) = s$, где r содержит описатель "отображение". Ее антецеденты элементарны. Определяется вспомогательная теорема T, полученная из исходной теоремы перенесением A_2 в антецеденты и сохранением A_1 в консеквенте. Ее подвыражение t антецедента A_2 преобразуется дополнительной теоремой. Результат упрощается с разблокировкой приемов, основанных на уже имеющихся в списке вывода теоремах. (Прием определение - 54).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bgh}(\text{непрерывно}(g, b) \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{типпредела}(h) \ \& \ \text{локопред}(g, b, h) \rightarrow \text{непрерывно}(\lambda_d(-g(d), d \in \text{Dom}(g)), b))$

из теоремы

$\forall_{fai}(f - $функция $\&\ a -$ число $\&\ \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&$ типпредела$(i)\ \&$ локопред$(f, a, i) \rightarrow$ непрерывно$(f, a) \leftrightarrow$ предел$(f, i, a) = f(a))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abghi}(\mathrm{Dom}(h) = g\ \&\ g \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \mathrm{Val}(h) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ h -$ функция $\&$ Число$(a)\ \&$ типпредела$(i)\ \&$ Локопред$(h, a, i)\ \&\ b -$ число $\&$ предел$(h, i, a) = b \rightarrow \lim_{e \rightarrow a \backslash i}(-h(e)) = -b)$

6. Попытка обратного вывода для определяющей кванторной импликации. Теорема - определение вида $D \leftrightarrow \forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n \rightarrow A_0)$. В разделе, к которому относится заголовок P утверждения A_0, находится теорема, заголовок консеквента B которой - символ P. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка C, унифицирующая A_0 и B. Переменные $x_1, \ldots, x_k$ ею не затрагиваются. Эта подстановка применяется к объединению списков антецедентов двух теорем. Те антецеденты Q, которые после этого содержат $x_1, \ldots, x_k$, заменяются на $\forall_{x_1 \ldots x_k}(C(A_1)\ \&\ \ldots C(A_n) \rightarrow Q)$ и преобразуются в элементарные утверждения. Приемы, основанные на стартовой теореме цикла вывода, при этом разблокируются. Консеквентом новой теоремы становится $C(D)$. Результат упрощается. (Прием определение - 58).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{hkA}(\mathrm{Dom}(h) = \mathrm{Dom}(k)\ \&\ A -$ set $\&\ A \subseteq \mathrm{Dom}(k)\ \&\ \mathrm{Dom}(k) \subseteq \mathbb{R}\ \&$
$\mathrm{Val}(h) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \mathrm{Val}(k) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ h -$ функция $\&\ k -$ функция $\&$ непрерывно(h, A)
$\&$ непрерывно$(k, A) \rightarrow$ непрерывно$(\lambda_e(h(e) + k(e), e \in \mathrm{Dom}(k)), A))$

из теоремы

$\forall_{fA}(f - $функция $\&\ A -$ set $\&\ A \subseteq \mathrm{Dom}(f) \rightarrow$ непрерывно$(f, A) \leftrightarrow$
$\forall_x(x \in A \rightarrow$ непрерывно$(f, x)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bhjk}($непрерывно$(k, b)\ \&$ непрерывно$(h, b)\ \&\ \mathrm{Dom}(k) = \mathrm{Dom}(h)\ \&$
$\mathrm{Dom}(h) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \mathrm{Val}(h) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ h -$ функция $\&\ k -$ функция $\&\ b -$ число $\&$
типпредела$(j)\ \&$ локопред$(h, b, j) \rightarrow$
непрерывно$(\lambda_e(h(e) + k(e), e \in \mathrm{Dom}(k)), b))$

7. Вывод импликации для развязки параметра консеквента. Теорема - эквивалентность вида $A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n \leftrightarrow D$, выполняющая сокращенную переформулировку конъюнкции утверждений. Некоторое A_i имеет вид $P(t, x)$, где x - переменная, имеющая единственное вхождение в левую часть. Находится теорема вида $P(u, v)\ \&\ Q(v, w) \rightarrow P(u, w)$, где u, v, w - переменные. Они переобозначены и не входят в исходную теорему. Находятся результаты D_1, D_2 подстановки в D переменных v, w вместо x. Затем выводится теорема $D_1\ \&\ Q(v, w) \rightarrow D_2$. Результат упрощается. (Прием сборка - 17).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cmnx}(x \in \{m, \ldots, n\}$ & $c -$ число & $m -$ целое & $n -$ целое & $n \le c \to$
$x \in \{m, \ldots, c\})$

из теоремы

$\forall_{mnx}(m -$ целое & $n -$ целое $\to x -$ целое & $m \le x$ & $x \le n \leftrightarrow x \in \{m, \ldots, n\})$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $a \le b$ & $b \le c \to a \le c)$

Дополнительная эквивалентность преобразуется в импликацию, после чего екущая эквивалентность реализует группы ее антецедентов

1. Попытка получения параметрического описания условия различия двух объектов заданного типа. Теорема - определение $D \leftrightarrow A_1$ & $\ldots$ & A_n. Все переменные теоремы встречаются в левой части. В правой части выбирается такая переменная x, что некоторое A_i меет вид $P(x)$, где P - название типа объекта. Находится теорема вида $P(u)$ & $P(v) \to (u = v) \leftrightarrow B$. Создается двойник T исходной теоремы, полученный из нее переобозначением переменной x на новую переменную y. Прочие переменные не затрагиваются. Антецеденты исходной теоремы и теоремы T объединяются, к ним добавляются D, двойник D из теоремы T и утверждение $\neg(x = y)$. При помощи задачи на преобразование упрощается отрицание результат подстановки в B переменных x, y вместо u, v. Проверяется, что результат R имеет своим заголовком квантор существования. Утверждение R становится консеквентом новой теоремы. Результат упрощается. (Прием определение - 29).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{afAB}(\neg(a = f)$ & Отображение(a, A, B) & Отображение$(f, A, B) \to$
   $\exists_x(\neg(a(x) = f(x))$ & $x \in A))$

   из теоремы

   $\forall_{fAB}($Отображение$(f, A, B) \leftrightarrow f -$ функция & Dom$(f) = A$ & $B -$ set &
   Val$(f) \subseteq B)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{fg}(f -$ функция & $g -$ функция $\to f = g \leftrightarrow$ Dom$(f) =$ Dom(g) &
   $\forall_x(x \in$ Dom$(f) \to f(x) = g(x)))$

2. Вывод тождества, исключающего вспомогательный параметр в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". Теорема имеет вид $P(A) \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_n}(D$ & коорд$(A, K) = \text{set}_{y_1 \ldots y_m}(E))$. Находится другая теорема вида "$P(u)$ & $z_1 \in u$ & $\ldots$ & $z_m \in u$ & $F \to u = H$". Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Для точек $z_1, \ldots, z_m$ вводятся координатные наборы; условия принадлежности в антецедентах второй теоремы заменяются на равенства для этих наборов, а также на результаты подстановки в E вместо $y_1, \ldots, y_m$ разрядов данных наборов. Антецедент $P(u)$ отбрасывается. Консеквент заменяется

на равенство "$\text{set}_w(\exists_{y_1 \ldots y_m}(E \;\&\; \text{коорд}(w, K) = (y_1, \ldots, y_m))) = H$". Результат упрощается. (Прием уравнкрив - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdeghijK}(\neg(d = e) \;\&\; \neg(a^2 + b^2 = 0) \;\&\; c + ag + bh = 0 \;\&$
$c + ai + bj = 0 \;\&\; \text{коорд}(d, K) = (g, h) \;\&\; \text{коорд}(e, K) = (i, j) \;\&\; a - \text{число} \;\&$
$b - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; d - \text{точка} \;\&\; e - \text{точка} \;\&\; \text{систкоорд}(K) \rightarrow$
$\text{set}_f(\exists_{xy}(c + ax + by = 0 \;\&\; \text{коорд}(f, K) = (x, y) \;\&\; x - \text{число} \;\&\; y - \text{число}) \;\&$
$f - \text{точка}) = \text{прямая}(de))$

из теоремы

$\forall_{ABCKP}(\text{систкоорд}(K) \;\&\; K = (A, B, C) \;\&\; P \subseteq \text{плоскость}(ABC) \rightarrow$
$\text{Прямая}(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; c - \text{число} \;\&\; \neg(a^2 + b^2 = 0) \;\&$
$\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \;\&\; y - \text{число} \;\&\; ax + by + c = 0)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABP}(\text{Прямая}(P) \;\&\; A - \text{точка} \;\&\; B - \text{точка} \;\&\; A \in P \;\&\; B \in P \;\&\; \neg(A = B) \rightarrow$
$P = \text{прямая}(AB))$

Одна из частей эквивалентности переносится в антецеденты, а другая позволяет преобразовать консеквент дополнительной теоремы

1. Попытка использовать определение, фиксирующее значения числовых атомов, для упрощения тождества. Теорема - определение $D \leftrightarrow A_1 = c_1 \;\&\; \ldots \;\&$ $A_n = c_n \;\&\; E$, где $A_1, \ldots, A_n$ - невырожденные числовые атомы; $c_1, \ldots, c_n$ - константные выражения. По заголовкам атомов $A_1, \ldots, A_n$ находится другая теорема - равенство $B_1 = B_2$, где B_2 имеет невырожденные числовые атомы $G_1, \ldots, G_n$ с теми же заголовками, что у $A_1, \ldots, A_n$. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка C, переводящая $A_1, \ldots, A_n$ в $G_1, \ldots, G_n$. К антецедентам дополнительной теоремы добавляются антецеденты исходной, обработанные подстановкой C, а также $C(D)$. Атомы $G_1, \ldots, G_n$ в ее консеквенте заменяются на $c_1, \ldots, c_n$. После этого консеквент дополнительной теоремы упрощается относительно ее антецедентов и утверждения $C(E)$. Результат упрощается. (Прием определение - 149).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcd}(b - \text{точка} \;\&\; c - \text{точка} \;\&\; \text{прямкоорд}(d) \;\&\; \text{вправо}(\text{вектор}(bc), d) \;\&$
   $\text{Трехмерн}(d) \rightarrow -\text{крд}(b, d, 1) + \text{крд}(c, d, 1) = l(bc))$

   из теоремы

   $\forall_{aK}(\text{Вектор}(a) \;\&\; \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вправо}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 2) = 0 \;\&$
   $\text{крд}(a, K, 3) = 0 \;\&\; 0 \leq \text{крд}(a, K, 1))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABK}(A - \text{точка} \;\&\; B - \text{точка} \;\&\; \text{прямкоорд}(K) \;\&\; \text{Трехмерн}(K) \rightarrow$
   $l(AB) = (\text{крд}(\text{вектор}(AB), K, 1)^2 + \text{крд}(\text{вектор}(AB), K, 2)^2 +$
   $\text{крд}(\text{вектор}(AB), K, 3)^2)^{1/2})$

2. Попытка использовать определение, определяющая часть которого - конъюнкция равенств для отдельных координат, для преобразования другой эквивалентности, одна из частей которой содержит соотношения для таких координат. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow \text{крд}(D_1, K, i_1) = t_1$ & ... & $\text{крд}(D_n, K, i_n) = t_n$, причем параметры любого D_i содержатся в параметрах D_1. Находится теорема вида $B_1 \leftrightarrow B_2$, переформулирующая утверждение B_1 терминах "крд". Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Внутри B_2 выбирается некоторое подвыражение вида "$\text{крд}(E, Q, j)$", и определяется подстановка C, переводящая в него "$\text{крд}(D_1, K, i_1)$". Все вхождения в B_2 подтермов $C(\text{крд}(D_k, K, t_k))$ заменяются на $C(t_k)$. К антецедентам дополнительной теоремы добавляются результаты применения C к антецедентам исходной теоремы. Преобразованный консеквент дополнительной теоремы упрощается, причем предпринимается попытка свернуть его подутверждение с помощью исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием определение - 169).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ghiv}(g - \text{число}$ & $\text{Вектор}(h)$ & $\text{Вектор}(v)$ & $\text{вертикнапр}(h, i)$ & $\text{Трехмерн}(i) \rightarrow v = gh \leftrightarrow g \cdot \text{крд}(h, i, 3) = \text{крд}(v, i, 3)$ & $\text{вертикнапр}(v, i))$

   из теоремы

   $\forall_{aK}(\text{Трехмерн}(K)$ & $\text{Вектор}(a) \rightarrow \text{вертикнапр}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 1) = 0$ & $\text{крд}(a, K, 2) = 0)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ghiv}(g - \text{число}$ & $\text{Вектор}(h)$ & $\text{Трехмерн}(i) \rightarrow v = gh \leftrightarrow \text{Вектор}(v)$ & $g \cdot \text{крд}(h, i, 1) = \text{крд}(v, i, 1)$ & $g \cdot \text{крд}(h, i, 2) = \text{крд}(v, i, 2)$ & $g \cdot \text{крд}(h, i, 3) = \text{крд}(v, i, 3))$

Замена переменных для множеств в дополнительной теореме на описатели "класс" и использование текущей эквивалентности для преобразования этих описателей

1. Попытка варьирования приема, декомпозирующего характеристику разности множеств. Теорема - эквивалентность вида A_1 & $A_2 \leftrightarrow A_3$, у которой глубина вхождений некоторой переменной x в каждое A_i равна 1, причем A_3 имеет единственное вхождение x. Находится другая теорема $B_1 = B_2$, декомпозирующая сложный числовой атом B_1 относительно переменных y, z, входящих в подвыражение "$y \setminus z$". Выбираются новые переменные E, v. В утверждении A_1 каждая отличная от x переменная X заменяется на $X(v)$. Результатом служит новое утверждение A_4. Аналогичным образом A_2 преобразуется в A_5, A_3 - в A_6. Создаются вспомогательные выражения D_1, D_2, D_3: "$\text{set}_x(v(A_4$ & $E(x, v))$", "$\text{set}_x(v(A_6$ & $E(x, v))$", "$\text{set}_x(v(A_4$ & $E(x, v))$". В новой теореме подвыражение "$y \setminus z$" выражения B_1 заменяется на D_3; в B_2 и в антецеденты вместо y, z подставляются D_1, D_2. Результат упрощается. Теорема сопровождается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема, преобразующего характеристику класса в характеристики более простых классов. (Прием сокращнеизв - 6).

   Пример: вывод теоремы приема

$\forall_{def}$(конечное($\text{set}_{bg}(e(g) \subseteq b \ \&\ d(b,g))) \to \text{card}(\text{set}_{bg}(\neg(f(g) \subseteq b)\ \&$
$e(g) \subseteq b \ \&\ d(b,g))) = -\text{card}(\text{set}_{bg}(e(g) \cup f(g) \subseteq b \ \&\ d(b,g))) +$
$\text{card}(\text{set}_{bg}(e(g) \subseteq b \ \&\ d(b,g))))$

из теоремы

$\forall_{bef}(b - \text{set} \ \&\ e - \text{set} \ \&\ f - \text{set} \to e \cup f \subseteq b \leftrightarrow e \subseteq b \ \&\ f \subseteq b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \&\ b - \text{set} \ \&$ конечное$(b) \ \&\ a \subseteq b \to \text{card}(b \setminus a) = \text{card}(b) - \text{card}(a))$

Эквивалентность с операциями над семействами позволяет получить индуктивное обобщение дополнительной теоремы

1. Попытка индуктивного обобщения дополнительной теоремы с помощью обобщенной дистрибутивности для операции над семействами. Теорема - эквивалентность $A_0 \leftrightarrow \forall_X(X \subseteq \text{Dom}(D)$ & конечное(X) & множество$(X) \to A_1 = A_2)$, где A_1 - характеристика P конечной операции F над семейством - сужением семейства D на множество X. F является распространением на наборы произвольной длины коммутативной и ассоциативной операции f. A_2 - другая конечная операция G над тем же семейством, полученная из двуместной операции g. Находится тождество вида $P(f(x,t)) = g(P(x), P(t))$. Исходная теорема применяется к семейству, полученному из D добавлением некоторого элемента Q. За счет перегруппировки в A_2 операции G получается переформулировать A_0 для двухэлементного семейства, образованного $F(D)$ и Q. Такое A_0 унифицируется с некоторым антецедентом R дополнительной теоремы, содержащим ровно две переменные - x и некоторую переменную y, входящую в t. При этом x идентифицируется с $F(D)$, y - с Q. Выражение t при такой унификации превращается в некоторое T. При подстановке в дополнительную теорему вместо $P(F(D))$ выражения, определяемого согласно A_2, правая часть дополнительной теоремы преобразуется в такую версию A_2, где вместо элемента семейства Q участвует T. Это позволяет вывести версию A_0 для семейства D, пополненного элементом T. Таким образом реализуется шаг индукции. Результат индуктивного обобщения дополнительного тождества выглядит так, если бы вместо общего члена семейства $D(i)$ в равенстве $A_1 = A_2$ исходной теоремы рассматривалось условное выражение "($T(i)$ при $i \in M$, иначе $D(i)$)", а A_0 оказалось бы перенесено в антецеденты. (Прием развертка - 79).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdxA}(\neg(x = \emptyset)\ \&\ d - \text{set} \ \&\ x - \text{set} \ \&\ d \subseteq x \ \&\ x \subseteq \text{Dom}(A)\ \&$
   $\text{Val}(A) \subseteq$ события(c) & $A -$ функция & конечное(x) & верпространство(c) &
   независобытия$(A,c) \to$ вероятность$(\bigcap_{y,y\in x}($элемсобытия$(c) \setminus A(y)$ при $y \in d$,
   иначе $A(y)), c) = \prod_{y,\neg(y\in d),y\in x}$ вероятность$(A(y), c) \times$
   $\prod_{y,y\in d}(1 -$ вероятность$(A(y), c)))$

   из теоремы

   $\forall_{AC}(A -$ функция & $\text{Val}(A) \subseteq$ события(C) & верпространство$(C) \to$
   независобытия$(A, C) \leftrightarrow \forall_x(x \subseteq \text{Dom}(A)$ & $x - \text{set}$ & конечное(x) &
   $\neg(x = \emptyset) \to$ вероятность$(\bigcap_{y,y\in x} A(y), C) = \prod_{y,y\in x}$ вероятность$(A(y), C)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a-\text{set}\ \&\ a \in \text{события}(c)\ \&\ \text{незавсобытия}((b,a),c)\ \&\ b-\text{set}\ \&\ b \in \text{события}(c)\ \&\ \text{верпространство}(c) \to \text{вероятность}(a \cap (\text{элемсобытия}(c) \setminus b), c) = \text{вероятность}(\text{элемсобытия}(c) \setminus b, c)\text{вероятность}(a, c))$

2. Использование индуктивного обобщения дополнительной теоремы для варьирования определяемого понятия. Аналогично предыдущему, но результатом служит индуктивное обобщение не консеквента дополнительной теоремы, а ее антецедента, унифицируемого с A_0. (Прием развертка - 80).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdA}(d-\text{set}\ \&\ d \subseteq \text{Dom}(A)\ \&\ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(c)\ \&\ A-\text{функция}\ \&\ \text{верпространство}(c)\ \&\ \text{незавсобытия}(A,c) \to \text{незавсобытия}(\lambda_y((\text{элемсобытия}(c) \setminus A(y)\ \text{при}\ y \in d,\ \text{иначе}\ A(y)), y \in \text{Dom}(A)), c))$

   из теоремы

   $\forall_{AC}(A-\text{функция}\ \&\ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C)\ \&\ \text{верпространство}(C) \to \text{незавсобытия}(A,C) \leftrightarrow \forall_x(x \subseteq \text{Dom}(A)\ \&\ x-\text{set}\ \&\ \text{конечное}(x)\ \&\ \neg(x=\emptyset) \to \text{вероятность}(\bigcap_{y,y\in x} A(y), C) = \prod_{y,y\in x} \text{вероятность}(A(y), C)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a-\text{set}\ \&\ a \in \text{события}(c)\ \&\ \text{незавсобытия}((b,a),c)\ \&\ b-\text{set}\ \&\ b \in \text{события}(c)\ \&\ \text{верпространство}(c) \to \text{вероятность}(a \cap (\text{элемсобытия}(c) \setminus b), c) = \text{вероятность}(\text{элемсобытия}(c) \setminus b, c)\text{вероятность}(a, c))$

Эквивалентность преобразует заменяемую часть дополнительной эквивалентности

1. Использование дополнительной эквивалентности кванторной свертки после навешивания квантора общности на обе части консеквента. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, используемая для сокращенной переформулировки утверждения. По заголовку P элементарной заменяемой части находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow \forall_{x_1 \ldots x_k}(B_2 \to B_3)$, у которой заголовком консеквента B_3 правой части служит символ P. Исходная теорема используется для преобразования этого консеквента. Те антецеденты D исходной теоремы, которые после унификации оказываются содержащими переменные связывающей приставки квантора общности в консеквенте, преобразуются к виду $\forall_{x_1 \ldots x_k}(B_2 \to D)$ и сворачиваются в элементарные утверждения. Результат упрощается. (Прием сборка - 14).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(a-\text{set}\ \&\ b-\text{set}\ \&\ c-\text{set}\ \&\ c \subseteq a \times b \to \forall_f(f \in c \to d = f(1)) \leftrightarrow c \subseteq \{d\} \times b)$

   из теоремы

   $\forall_{abdf}(a-\text{set}\ \&\ b-\text{set}\ \&\ f \in a \times b \to d = f(1) \leftrightarrow f \in \{d\} \times b)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a-\text{set}\ \&\ b-\text{set} \to a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \to c \in b))$

2. Усмотрение однозначной определимости значения выражения при переходе к отрицанию. Теорема - эквивалентность общей стандартизации вида $(t_1 = t_2) \leftrightarrow A$. По заголовку f выражения t_1 находится эквивалентность вида $(r = x) \leftrightarrow B$, где r имеет заголовок f, x - переменная, не входящая в антецеденты. Определяется подстановка C, переводящая r в t_1. Решается задача на описание, условия которой - все конъюнктвиные члены $C(B)$ и $\neg(x = t_2)$. Посылки - антецеденты исходной теоремы. Неизвестная - x. Если ответ содержит равенство $x = a$, то выводится теорема с консеквентом "$t_1 = a \leftrightarrow \neg(A)$". Антецеденты те же, что у исходной теоремы. (Прием общнорм - 85).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{целое} \rightarrow a(\text{mod } 2) = 1 \leftrightarrow \neg(a - \text{even}))$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{целое} \rightarrow a(\text{mod } 2) = 0 \leftrightarrow a - \text{even})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{mnk}(m - \text{целое } \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow m(\text{mod } n) = k \leftrightarrow k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \& \ \exists_p(p - \text{целое } \& \ m = k + np))$

Взаимно однозначное параметрическое описание преобразует тождество для описателя "класс" с сохранением мощности класса

1. Вывод тождества для определения мощности класса при помощи взаимно-однозначного параметрического описания. Теорема - эквивалентность вида "$A \leftrightarrow \exists_x(P(x) \ \& \ y = t)$", где P - название типа объектов. Решается задача на описание с условиями $P(x), y = t$. Посылками служат антецеденты, неизвестная - x. Ответ преобразуется к виду д.н.ф. Выбираетя дизъюнктивный член этой д.н.ф., имеющий вид $x = r \ \& \ D_1 \ \& \ D_2$, где D_1 составлено из утверждений, не содержащих x, y. Проверяется, что остальные дизъюнктивные члены ответа несовместимы с D_1. По символу P находится тождество вида "$\text{set}_z(P(z) \ \& \ B_1) = B_2$", где B_2 не имеет связанных переменных. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Выражение "$\text{card}(B_2)$" упрощается и превращается в выражение B_3, не содержащее символа "мощность". Решается задача на описание, условиями которой служат содержащие y антецеденты исходной теоремы, утверждение A и результаты подстановки в конъюнктивные члены B_1 выражения r вместо переменной z. Посылки - антецеденты дополнительной теоремы, D_1 и не содержащие y антецеденты исходной теоремы. Задача имеет цель "попыткаспуска" и единственную неизвестную y. Фактически, она лишь упрощает результат подстановки r. Ответ снова преобразуется к виду д.н.ф. Выбирается дизъюнктивный член E, несовместимый с другими членами согласно его конъюнктивным членам F, не содержащим y. Прочие конъюнктивные члены его образуют список G. Новая теорема имеет консеквент "$\text{card}(\text{set}_y(G)) = B_3$". Антецеденты - те же, что посылки последней задачи на описание, а также F. Результат упрощается. (Прием параметризация - 21).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{abm}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ m - \text{натуральное} \to \text{card}(\text{set}_n(m|n \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ n \le bm \ \& \ am \le n)) = \max(1 + [b] + [-a], 0))$

из теоремы

$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \to m|n \leftrightarrow \exists_k(k - \text{целое} \ \& \ n = mk))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to \text{set}_x(x - \text{целое} \ \& \ a \le x \ \& \ x \le b) = \{-[-a], \ldots, [b]\})$

4.1.1 Использование дизъюнкции для преобразования дополнительной теоремы

1. Использование альтернативы для уточнения дизъюнктивного определения. Консеквент теоремы - дизъюнкция $A_1 \ \vee \ldots \ \vee A_n$ попарно несовместных элементарных утверждений. Выбирается некоторое A_i, содержащее все переменные теоремы. Рассматривается его заголовок P. Если A_i - равенство, то в качестве P берется тип значений операндов этого равенства. Если P - тип значения, то рассматривается некоторый его надтип Q; иначе $Q = P$. Находится определение $B \leftrightarrow D_1 \ \vee \ \ldots \ \vee D_m$, где $m < n$, причем некоторое D_j либо имеет заголовок Q, либо является равенством, обе части которого имеют тип значения Q. Переменные переобозначены и не входят в исходную теоремы. Все переменные теоремы входят в D_j. Находится подстановка C, унифицирующая A_i с D_j. Составляются список S_1 результатов применения C к антецедентам обеих теорем, список S_2 результатов применения C к $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_n$ и список S_3 результатов применения C к $D_1, \ldots, D_{j-1}, D_{j+1}, \ldots, D_m$. Определяется подсписок S_4 списка S_2, образованный теми утверждениями, отрицание которых не удалось усмотреть из дизъюнкции E утверждений S_3. Проверяется, что S_4 короче списка S_2. Проверяется, что E - следствие списка S_1, пополненного утверждениями S_4. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $C(D_j) \ \vee \ E \leftrightarrow C(B)$ антецедентами - S_1. Результат упрощается. (Прием альтернатива - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \to a = b \ \vee \ a \le b - 1 \leftrightarrow a \le b)$

   из теоремы

   $\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \to m = n \ \vee \ m \le n - 1 \ \vee \ n + 1 \le m)$

   при помощи дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to a < b \ \vee \ a = b \leftrightarrow a \le b)$

2. Дизъюнктивное определение подсказывает следствие из альтернативы. Действия те же, что в предыдущему приеме - до момента формирования новой теоремы. Вместо этого проверяется, что отрицание $C(D_j)$ - следствие S_1 и E. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность дизъюнкции утверждений S_4 утверждению E. Антецеденты - S_1. Результат упрощается. (Прием альтернатива - 5).

Пример: вывод утверждения

$\forall_{ab}(a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \rightarrow a + 1 \leq b \leftrightarrow a < b)$

из тех же теорем, что и в предыдущем пункте.

4.2 Использование тождества для преобразования дополнительной теоремы

4.2.1 Использование тождества для варьированя дополнительной эквивалентности

Тождество преобразует заменяемую часть дополнительной эквивалентности

1. Использование перегруппировочного тождества.

   (a) Попытка использовать перегруппировочное тождество для варьирования декомпозирующей эквивалентности. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ перегруппировочного типа. По заголовку f одной из его частей находится эквивалентность вида $B_1 \leftrightarrow B_2$, декомпозирующая элементарное бесповторное утверждение B_1 в дизъюнкцию либо конъюнкцию элементарных бесповторных переменных. Внутри B_1 выделяется вхождение операции $f(x, y)$, причем переменные x, y попадают в различные элементарные утверждения заменяющей части. Исходная теорема используется для преобразования $f(x, y)$. Результат упрощается. (Прием группировки - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcd}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{слово} \ \& \ d - \text{слово} \rightarrow \text{непересек}(b, \{;c;d\}) \leftrightarrow$
   $\text{непересек}(b, \{;c\}) \ \&$
   $\text{непересек}(b, \{;d\}))$

   из теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{слово} \ \& \ d - \text{слово} \rightarrow \{;c\} \cup \{;d\} = \{;d;c\});$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bef}(b - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(b, e \cup f) \leftrightarrow \text{непересек}(b, e) \ \&$
   $\text{непересек}(b, f))$

2. Использование тождества свертки.

   (a) Попытка использовать декомпозирующее тождество для варьирования декомпозирующей эквивалентности. Теорема - тождество вида $g(x, h(y, z)) = f(g(x, y), g(x, z))$. По символу f находится эквивалентность вида $B_1 \leftrightarrow B_2$, декомпозирующая элементарное бесповторное утверждение B_1 в дизъюнкцию либо конъюнкцию элементарных бесповторных утверждений. Внутри

B_1 выделяется вхождение операции $f(x,y)$, причем переменные x, y попадают в различные элементарные утверждения заменяющей части. Исходная теорема применяется для преобразования $f(x,y)$. Результат упрощается. (Прием дистрибразвертка - 9).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcd}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \to \text{непересек}(b, a \times (c \cup d)) \leftrightarrow \text{непересек}(b, a \times c) \ \& \ \text{непересек}(b, a \times d))$

из теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \to a \times (b \cup c) = (a \times b) \cup (a \times c))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bef}(b - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \to \text{непересек}(b, (e \cup f)) \leftrightarrow \text{непересек}(b, e) \ \& \ \text{непересек}(b, f))$

(b) Попытка использовать тождество свертки для варьирования разделяющей эквивалентности. Теорема - тождество сокращенной перезаписи $A_1 = A_2$. По заголовку f выражения A_1 находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$, декомпозирующая элементарное бесповторное утверждение B_1 в дизъюнкцию либо конъюнкцию элементарных бесповторных утверждений. Общее число вхождений переменных в B_2 не больше 4. В B_1 выделяется операция $f(x,y)$, переменные которой внутри B_2 относятся к различным подутверждениям. Эта операция преобразуется с помощью исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием свертка - 57).

Пример: вывод теоремы

$\forall_c(c - \text{число} \to \sin(2c) = 0 \leftrightarrow \sin c = 0 \ \vee \ \cos c = 0)$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to \sin(2a)/2 = \sin a \cos a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0)$

3. Использование тождества общей стандартизации.

(a) Попытка использоать тождество общей стандартизации для варьирования эквивалентности, разделяющей переменные одного выражения в разных операндах отношения. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. По заголовку f левой части находится кванторная эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$, имеющая внутри B_1 операцию $f(x,y)$, причем внутри B_2 переменные x, y разнесены по различным операндам некоторого отношения. Эта операция преобразуется при помощи исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием нормализация - 42).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdef}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \to \text{непересек}(c, e \cap (d \cup f)) \leftrightarrow \text{непересек}(c, d \cap e) \ \& \ \text{непересек}(e, c \cap f))$

из теоремы

$\forall_{adf}(a - \text{set } \& \ d - \text{set } \& \ f - \text{set} \to a \cap (f \cup (a \cap d)) = a \cap (d \cup f))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{be}(b - \text{set } \& \ e - \text{set} \to b \cap e = \emptyset \leftrightarrow \text{непересек}(b, e))$

4. Использование тождества, преобразующего к заданному заголовку.

   (a) Попытка получить эквивалентность свертки двух утверждений в бесповторное утверждение. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, используемое в нормализаторе приведения к заголовку f. Обе части имеют одинаковые сложности, причем A_1 бесповторно, а A_2 - нет. По символу f находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$, декомпозирующая элементарное бесповторное утверждение B_1 в дизъюнкцию либо конъюнкцию элементарных бесповторных утверждений. В B_1 выделяется операция $f(x, y)$, переменные которой внутри B_2 относятся к различным подутверждениям. Если B_2 - дизъюнкция, то предварительно дополнительная теорема преобразуется к виду эквивалентности для отрицаний, так что заголовком B_2 оказывается конъюнкция. Подтерм $f(x, y)$ преобразуется с помощью исходной теоремы, применяемой в обратном направлении. Результат упрощается. (Прием нормзаголовок - 19).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_c(c - \text{число} \to \neg(\sin c = 0) \leftrightarrow \neg(-\cos c + 1 = 0) \ \& \ \neg(\cos c + 1))$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to (\sin a)^2 = (-\cos a + 1)(1 + \cos a))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \to ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0)$

   (b) Попытка получить эквивалентность, разбивающую утверждение с несколькими подтермами маскимальной сложности в дизъюнктивно-конъюнктивную конструкцию нескольких утверждений той же сложности, каждое из которых имеет лишь один подтерм максимальной сложности. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, используемое в нормализаторе приведения к заголовку f. Обе части имеют одинаковые сложности, причем A_1 бесповторно, а A_2 - нет. Каждая из частей имеет ровно два подтерма максимальной сложности. Все они бесповторны. По символу f находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$, декомпозирующая элементарное бесповторное утверждение B_1 в дизъюнкцию либо конъюнкцию элементарных бесповторных утверждений. В B_1 выделяется операция $f(x, y)$, переменные которой внутри B_2 относятся к различным подутверждениям. Исходная теорема применяется для преобразования $f(x, y)$. Результат упрощается. Проверяется, что получается эквивалентность, у которой заменяемая часть имеет ровно два подтерма максимальной сложности, а каждое элементарное подутверждение заменяющей части - ровно один такой подтерм. (Прием нормзаголовок - 20).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cd}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \sin c + \sin d = 0 \leftrightarrow \sin((c+d)/2) = 0 \ \vee \cos((d-c)/2) = 0)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin a + \sin b = 2\sin((a+b)/2)\cos((a-b)/2))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0)$

5. Использование определяющего тождества.

(a) Попытка использовать определяющее тождество для варьирования эквивалентности общей стандартизации равенства. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, определяющее некоторую операцию. Заголовок определяющей части - символ f. Находится эквивалентность общей стандартизации $B_1 \leftrightarrow B_2$, у которой заменяемая часть - равенство, имеющее наиболее сложную операцию f. Исходная теорема используется для преобразования этой операции. Направление ее применения - обратное. Результат упрощается. (Прием определение - 64).

Пример: вывод теоремы

$\forall_c(\neg(\cos c = 0) \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \sin c = 0 \leftrightarrow \operatorname{tg} c = 0)$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \ \& \ \neg(\cos a = 0) \rightarrow \operatorname{tg} a = \sin a / \cos a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a = 0 \leftrightarrow a/b = 0)$

(b) Попытка использовать эквивалентность для равенства константе числового атома в заменяющей части тождества. Теорема - определение $A_1 = A_2$ с невырожденным числовым атомом A_2 в заменяющей части. По заголовку f этого атома находится эквивалентность общей стандартизации вида $(t_1 = t_2) \leftrightarrow B$, где заголовком выражения t_1 служит символ f, а выражение t_2 константное, причем сложность правой части эквивалентности меньше сложности левой. Исходная теорема применяется для преобразования t_1. Результат упрощается. (Прием определение - 79).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(ab)) = 0 \leftrightarrow a = b)$

из теоремы

$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(AB)) = l(AB))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow l(AB) = 0 \leftrightarrow A = B)$

(c) Попытка получить явное равенство для выражения, определяемого неявно. Теорема - определение $A_1 = A_2$, у которого определяемое выражение r - собственный подтерм левой части A_1. В разделе символа f, являющегося заголовком выражения A_1, находится эквивалентность общей стандартизации вида $(t_1 = t_2) \leftrightarrow B$, где левая часть содержит символ f, а правая не содержит. Создается вспомогательная эквивалентность, полученная из исходной теоремы заменой консеквента на $A_1 = A_2 \leftrightarrow$ истина. Эта эквивалентность используется для преобразования равенства $t_1 = t_2$. Результат упрощается. (Прием определение - 130).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(\neg(a - 1 = 0)\ \&\ 0 < a\ \&\ a - \text{число} \rightarrow \log_a a = 1)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ 0 < a\ \&\ \neg(a - 1 = 0)\ \&\ 0 < b \rightarrow a^{\log_a b} = b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{cd}(\neg(d - 1 = 0)\ \&\ 0 < d\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число} \rightarrow d^c = d \leftrightarrow c = 1)$

(d) Попытка свертки по определению подвыражения заменяемой части дополнительной упрощающей эквивалентности. Теорема - определение $A_1 = A_2$. Заголовком выражения A_2 служит символ f. Находится эквивалентность общей стандартизации $B_1 \leftrightarrow B_2$ у которой заменяемая часть - равенство, имеющее наиболее сложную операцию f, а заменяющее утверждение элементарно. Исходная теорема используется (в обратном направлении) для преобразования B_1. Результат упрощается. Проверяется, что оценка сложности заменяющей части новой эквивалентности меньше, чем оценка сложности A_2 (Прием определение - 144).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdf}(f - \text{натуральное}\ \&\ \text{числнабор}(c, f)\ \&\ \text{числнабор}(d, f) \rightarrow$
$\text{евклрасст}(c, d) = 0 \leftrightarrow c = d)$

из теоремы

$\forall_{abn}(n - \text{натуральное}\ \&\ \text{числнабор}(a, n)\ \&\ \text{числнабор}(b, n) \rightarrow$
$\text{евклрасст}(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a(i) - b(i))^2})$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ 0 \leq a\ \&\ 0 < b \rightarrow a^b = 0 \leftrightarrow a = 0)$

(e) Использование определения равенства характеристик данного типа для обобщения константного равенства. Теорема - бескванторное определение $A_1 = A_2$ некоторого символа A_1. По заголовку f выражения A_2 находится кванторная импликация с консеквентом вида $(t_1 = t_2) \leftrightarrow B$, где заголовки t_1, t_2 равны f. Эта импликация - определение равенства выражений с заголовком f. Исходная теорема используется (справа налево) для преобразования одного из выражений t_1, t_2. Результат упрощается. (Прием определение - 196).

Пример: вывод теоремы

$\forall_b(b - \text{set} \to \text{card}(b) = \text{счетное} \leftrightarrow \exists_f(\text{Dom}(f) = \mathbb{N}\ \&\ \text{Val}(f) = b\ \&$
$f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f)))$

из теоремы

$\text{card}(\mathbb{N}) = \text{счетное}$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set} \to \text{card}(a) = \text{card}(b) \leftrightarrow \exists_f(f - \text{функция}\ \&$
$\text{Dom}(f) = a\ \&\ \text{Val}(f) = b\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f)))$

6. Использование тождества, исключающего сложное понятие.

   (a) Попытка вывести из дополнительной эквивалентности импликацию без числовых атомов в консеквенте. Теорема - равенство $A_1 = A_2$, выражающее невырожденный сложный числовой атом A_1 через более простые (или вообще исключающее такие атомы). По заголовку f атома A_1 находится эквивалентность вида $(t_1 = t_2) \leftrightarrow B$ где равенство слева декомпозирует числовой атом t_1 с заголовком f (либо вообще исключает невырожденные числовые атомы),а B - элементарное утверждение. Исходная теорема применяется для преобразования t_1. Результат упрощается. Проверяется, что результат не является тождеством либо эквивалентностью. (Прием числатом - 43).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcde}(\neg(a = e)\ \&\ \neg(b = d)\ \&\ \neg(c = e)\ \&\ a \in \text{окружность}(bd)\ \&\ b \in$ отрезок$(ac)\ \&$
   $c \in \text{окружность}(bd)\ \&\ e \in \text{окружность}(bd)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&$
   $c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка} \to \text{прямая}(ae) \perp \text{прямая}(ce))$

   из теоремы

   $\forall_{abcBE}(c - \text{точка}\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ \neg(b = B)\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&$
   $\neg(a = E)\ \&\ \neg(c = E)\ \&\ a \in \text{окружность}(bB)\ \&\ b \in \text{отрезок}(ac)\ \&$
   $c \in \text{окружность}(bB)\ \&\ E \in \text{окружность}(bB)\ \&\ E - \text{точка} \to \angle(aEc) = \pi/2)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = B) \to$
   $\angle(ABC) = \pi/2 \leftrightarrow \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC))$

   (b) Использование тождества для преобразования теорем, содержащих заголовок упрощаемого числового атома. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложный невырожденный числовой атом A_1 через более простые. Выражение A_2 бесповторно и содержит невырожденные числовые атомы. В разделе символа f - заголовка атома A_1 - находится теорема, консеквент которой имеет одно либо два вхождения символа f. Проверяется отсутствие у нее слошком громоздких существенных антецедентов, а также антецедентов типа присвоения. В консеквенте выбирается вхождение подтерма с заголовком f. Оно преобразуется при помощи исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием числатом - 18).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcABCDEF}(\neg(a=0)\ \&\ E \in \text{прямая}(BC)\ \&\ F \in \text{прямая}(BC)\ \&$
$\text{параллелограмм}(ABCD)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&$
$D-\text{точка}\ \&$
$E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AD) \perp \text{прямая}(EF) \rightarrow$
$c = b + al(CD)l(EF) \leftrightarrow S(\text{фигура}(ABCD)) = (c-b)/a)$

из теоремы

$\forall_{ABCDEF}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}$
$\&\ F-\text{точка}\ \&\ \text{параллелограмм}(ABCD)\ \&\ \text{прямая}(EF) \perp \text{прямая}(AD)$
$\&\ F \in \text{прямая}(AD) \rightarrow S(\text{фигура}(ABCD)) = l(AD)l(EF))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcd}(\neg(a=0) \rightarrow aS(d)+b=c \leftrightarrow S(d)=(c-b)/a)$

(c) Рассмотрение случая, когда равенство числового атома константе допускает простую переформулировку. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложный невырожденный числовой атом A_1 через более простые. По заголовку f выражения A_1 находится эквивалентность общей стандартизации вида $(t_1 = t_2) \leftrightarrow B$, где t_1 - числовой атом с заголовком f, t_2 - константное выражение. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Исходная теорема применяется для преобразования ыражения t_1, после чего левая часть полученной эквивалентности переносится в антецеденты. Результат упрощается. (Прием числатом - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a-\text{set}\ \&\ b-\text{set}\ \&\ a \subseteq b\ \&\ 0 \leq -\text{card}(b)+\text{card}(a)\ \&\ \text{конечное}(b) \rightarrow a=b)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a-\text{set}\ \&\ b-\text{set}\ \&\ \text{конечное}(b)\ \&\ a \subseteq b \rightarrow \text{card}(b \setminus a) = \text{card}(b) - \text{card}(a))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a-\text{set} \rightarrow \text{card}(a)=0 \leftrightarrow a=\emptyset)$

(d) Попытка использовать параметрическое определение равенства числовых атомов с заданным заголовком. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее терм с невырожденными числовыми атомами через численные параметры. По заголовку f выражения A_1 находится кванторная импликация с консеквентом вида $(t_1 = t_2) \leftrightarrow B$, где заголовки t_1, t_2 равны f. Эта импликация - определение равенства выражений с заголовком f, причем B - параметрическое описание. Исходная теорема используется (справа налево) для преобразования одного из выражений t_1, t_2. Результат упрощается. (Прием числатомы - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bn}(b-\text{set}\ \&\ n-\text{целое}\ \&\ 0 \leq n \rightarrow n = \text{card}(b) \leftrightarrow \exists_f(l(f)=n\ \&\ \text{Val}(f)=b\ \&$
$\text{взаимнооднозначно}(f)\ \&\ f-\text{слово}))$

из теоремы

$\forall_n(n-\text{целое}\ \&\ 0 \leq n \rightarrow \text{card}(\{1,\ldots,n\}) = n)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a-\text{set}\ \&\ b-\text{set} \to \text{card}(a) = \text{card}(b) \leftrightarrow \exists_f(f-\text{функция}\ \&\ \text{Dom}(f) = a\ \&\ \text{Val}(f) = b\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f)))$

(e) Попытка упрощения дополнительной эквивалентности общей стандартизации. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель "отображение" и вводящее описатель "класс". По заголовку f выражения A_1 находится эквивалентность общей стандартизации $B_1 \leftrightarrow B_2$, у которой заменяемая часть - отношение, причем единственный его корневой операнд максимальной сложности имеет заголовок f. Этот операнд преобразуется при помощи исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием смописатель - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_b(\text{Val}(b) \subseteq \mathbb{Z}\ \&\ b-\text{функция}\ \&\ \text{конечное}(\text{Dom}(b)) \to$
$\text{card}(\text{set}_m(\neg(b(m)-\text{even})\ \&\ m \in \text{Dom}(b)))-\text{even} \leftrightarrow \sum_{m,m\in\text{Dom}(b)} b(m)-\text{even})$

из теоремы

$\forall_b(\text{Val}(b) \subseteq \mathbb{Z}\ \&\ b-\text{функция}\ \&\ \text{конечное}(\text{Dom}(b)) \to$
$(\sum_{m,m\in\text{Dom}(b)} b(m))(\text{mod}\ 2) =$
$(\text{card}(\text{set}_m(\neg(b(m)-\text{even})\ \&\ m \in \text{Dom}(b))))(\text{mod}\ 2))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a-\text{целое} \to a(\text{mod}\ 2) = 0 \leftrightarrow a-\text{even})$

7. Использование тождества, варьирующего сложное понятие.

(a) Преобразование дополнительной эквивалентности, переформулирующей равенство числового атома константе через более простые условия. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, где A_1 - невырожденный числовой атом, не входящий в A_2, причем A_2 имеет не менее двух невырожденных числовых атомов. По заголовку f выражения A_1 находится эквивалентность общей стандартизации вида $t_1 = t_2 \leftrightarrow B$, где t_1 - числовой атом с заголовком f, t_2 - константное выражение. Исходная теорема используется для преобразования t_1. Результат упрощается. (Прием числзнач - 26).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(c \in \text{отрезок}(ab)\ \&\ a-\text{точка}\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ c-\text{точка} \to l(ab) = l(bc) \leftrightarrow a = c)$

из теоремы

$\forall_{ABC}(C \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка} \to$
$l(AC) = l(AB) - l(BC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{AB}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка} \to l(AB) = 0 \leftrightarrow A = B)$

(b) Попытка получения эквивалентности общей стандартизации для случая обращения числового атома заменяемой части в константу. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее численную характеристику A_1 операции над нечисловыми объектами через численные характеристики других операций над этими объектами. Внутри A_2 выбирается невырожденный числовой атом t, содержащий все переменные выражения A_1. По его заголовку f находится эквивалентность вида $r_1 = r_2 \leftrightarrow B$, где r_1 - числовой атом с заголовком f, r_2 - константное выражение, причем оценка сложности правой части эквивалентности меньше оценки левой. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Находится подстановка C, унифицирующая r_1 и t. При помощи задачи на описание проверяется, что равенство $A_1 = A_2$ однозначно определяет значение t. Определяется результат R замены в равенстве $C(A_1) = C(A_2)$ подвыражения $C(t)$ на $C(r_1)$. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $R \leftrightarrow C(B)$. К антецедентам исходных теорем применяется подстановка C, и они становятся антецедентами новой теоремы. Результат упрощается. (Прием Числвыраз - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(a)\ \&\ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a) + \text{card}(b) = \text{card}(a \cup b) \leftrightarrow \text{непересек}(a, b))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(a)\ \&\ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a \cup b) = -\text{card}(a \cap b) + \text{card}(a) + \text{card}(b))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{set} \rightarrow \text{card}(a) = 0 \leftrightarrow a = \emptyset)$

Текущая теорема позволяет вывести из одной части дополнительной эквивалентности равенство, на которое можно заменить некоторый конъюнктивный член противоположной части этой эквивалентности

1. Попытка усмотреть альтернативное определение многоместного предиката - вывод эквивалентности. Теорема - простая импликация с бесповторными антецедентами и консеквентом, у которого каждая переменная антецедентов встречается в консеквенте. Рассматривается антецедент A исходной теоремы, имеющий более двух корневых операндов. Его заголовок - некоторый символ многоместного отношения f. Находится стартовая теорема текущего списка вывода - эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$, являющаяся определением отношения f. Все ее переменные встречаются в определяемой части A_1. Находится подстановка C, переводящая B_1 в A. Утверждение $C(B_2)$ представляется как конъюнкция B_3 & B_4, где число корневых операндов B_3 равно числу корневых операндов A; B_4 - конъюнктция остальных членов. Проверяется, что все конъюнктивные члены B_4 имеют не более 2 корневых операндов. Составляется список S отличных от A антецедентов исходной теоремы и результатов применени C к антецедентам дополнительной теоремы. Проверяется, что консеквент Q исходной теоремы имеет не более 2 корневых операндов. Не усматривается, что Q

- следствие S и B_3, но усматривается, что B_4 - следствие S, B_3, Q. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $A \leftrightarrow B_3$ & Q, антецедентами - утверждения S. (Прием попыткаспуска - 15).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка $\rightarrow$ прямоугольник$(ABCD)$ $\leftrightarrow l(AC) = l(BD)$ & параллелограмм$(ABCD))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & прямоугольник$(ABCD)$ $\rightarrow l(BD) = l(AC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка $\rightarrow$ прямоугольник$(ABCD)$ $\leftrightarrow$ параллелограмм$(ABCD)$ & $\angle(ABC) = \pi/2)$

2. Попытка усмотреть альтернативное определение многоместного предиката - вывод импликации. Отличие от предыдущего приема лишь в том, что вместо эквивалентности выводится импликация с антецедентами S, B_3, Q и консеквентом A. (Прием попыткаспуска - 16).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(l(AC) = l(BD)$ & параллелограмм$(ABCD)$ & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка $\rightarrow$ прямоугольник$(ABCD))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & прямоугольник$(ABCD)$ $\rightarrow l(BD) = l(AC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка $\rightarrow$ прямоугольник$(ABCD)$ $\leftrightarrow$ параллелограмм$(ABCD)$ & $\angle(ABC) = \pi/2)$

Тождество варьирует заменяющую часть дополнительной эквивалентности, после чего она сворачивается обратно

1. Дополнительная эквивалентность разворачивает утверждение в систему соотношений для отдельных координат, использует текущее тождество для переходоа к координатам другого объекта, и сворачивает обратно. Теорема - тождество вида "крд$(A_1, K, i) =$ крд(A_2, K, i)". Находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$, переформулирующая некоторое утверждение B_1 через отдельные координаты "крд". Если исходная теорема имеет антецедент вида "$i \in \{n_1, \ldots, n_k\}$" для конкретных чисел $n_1, \ldots, n_k$, то она разворачивается в группу теорем - для каждого значения i. Предпринимается попытка найти подстановку, переводящую подвыражения "крд" внутри B_2 в выражения "крд$(A_1, K, n_1), \ldots,$ крд(A_1, K, n_k)", и после применения ее к B_1 получить версию B_3 этого выражения, соответствующую объекту A_1. Аналогичным образом, для A_2 получается версия B_4.

Консеквентом теоремы становится эквивалентность $B_3 \leftrightarrow B_4$. Результат упрощается. (Прием крд - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bdefhj}(j = [d, b]$ & $e \in j$ & $b-$число & $d-$число & поверхнземли(h) & мточка(f) & бросок(f, j) & Числотр$(j) \rightarrow$ вертикнапр(Скорость$(f, h, e), h) \leftrightarrow$ вертикнапр(Скорость$(f, h, d), h))$

из теоремы

$\forall_{bdefghj}(j = [d, b]$ & $e \in j$ & $g \in \{1, 2\}$ & $b-$число & $d-$число & поверхнземли(h) & мточка(f) & бросок(f, j) & Числотр$(j) \rightarrow$ крд(Скорость$(f, h, e), h, g) =$ крд(Скорость$(f, h, d), h, g))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{aK}($Трехмерн(K) & Вектор$(a) \rightarrow$ вертикнапр$(a, K) \leftrightarrow$ крд$(a, K, 1) = 0$ & крд$(a, K, 2) = 0)$

4.2.2 Использование тождества для варьирования дополнительного тождества

Тождество преобразует заменяемую часть дополнительного тождества

1. Использование тождества общей стандартизации.

   (a) Попытка дистрибутивной развертки для сокращения. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Выражение A_1 имеет вид $f(x, t)$, где x - переменная, входящая в t. Выражение A_2 бесповторно. Находится тождество общей стандартизации $B_1 = B_2$, у которого заменяющая часть B_2 получена из некоторого подтерма B_3 заменяемой части отбрасыванием некоторых операндов. Заголовком B_3 служит символ f. Исходная теорема применяется для преобразования B_3. Результат упрощается. (Прием нормализация - 68).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cde}(\neg($знаменатель$(c) -$ even) & $d -$ число & $e -$ число & $c -$ rational $\rightarrow$ $- d(d + e)^c + (d + e)^{c+1} = e(d + e)^c)$

   из теоремы

   $\forall_{ac}(\neg($знамеатель$(c) -$ even) & $a -$ число & $c -$ rational $\rightarrow aa^c = a^{c+1})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ade}(a -$ число & $d -$ число & $e -$ число $\rightarrow a(d + e) - ad = ae)$

   (b) Попытка навесить внешнюю операцию для устранения повторного вхождения переменной. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Выражение A_2 бесповторно, выражение A_1 - нет. A_1 имеет не менее двух подтермов максимальной сложности. Выбирается заголовок f одного из них. Находится тождество вида $P(t_1, t_2) = B$, у которого t_1 небесповторно

и имеет символ f заголовком одного из своих максимально сложных подтермов. Выражение B бесповторно. Исходная теорема используется для преобразования t_1. Проверяется, что параметры A_1 не унифицированы при этом с выражениями, содержащими максимально сложные символы терма A_1. Результат упрощается. (Прием нормализация - 119).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{df}(\neg(\cos f = 0)\ \&\ d - \text{число}\ \&\ f - \text{число} \to d + d(\operatorname{tg} f)^2 = d/(\cos f)^2)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to b(\sin a)^2 + b(\cos a)^2 = b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abnx}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ x - \text{число}\ \&\ n - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(n) - \text{even})\ \&\ \neg(\cos x = 0) \to (a(\sin x)^n + b(\cos x)^n)/(\cos x)^n = a(\operatorname{tg} x)^n + b)$

(c) Попытка использовать тождество общей стандартизации, исключающее переменную, для упрощения заменяемой части тождества приведения к заданным заголовкам. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$, у которого список переменных выражения A_2 - собственное подмножество списка переменных выражения A_1. Заголовком выражения A_1 служит ассоциативный и коммутативный символ f. Состовляется список S заголовков надтермов максимально сложных подтермов выражения A_1. Если среди них встречается операция типа "степени", созданная для ассоциативного и коммутативного символа, то этот символ добавляется к S. Проверяется, что S имеет не более 3 символов. Выбирается символ g списка S и находится тождество $B_1 = B_2$ преобразования к заданным заголовкам, у которого заменяемая часть имеет заголовок f. Выбирается новая переменная x; исходная теорема преобразуется к виду $f(A_1, x) = f(A_2, x)$, и она применяется для преобразования B_1. Результат упрощается и снабжается единственной характеристикой, указывающей на тождество приведения к заданным заголовкам. (Прием нормализация - 78).

Пример: вывод теоремы

$\forall_c(c - \text{число} \to (\sin c + \cos c)^2 = 2 \sin c \cos c + 1)$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to (\sin a)^2 + (\cos a)^2 = 1)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$

(d) Попытка использовать тождество общей стандартизации, исключающее переменную, для вывода тождества понижения степени сложного выражения. Теорема - тождество общей стандартизации $f(g(t_1, r_1), g(t_2, r_2)) = A$, где f - ассоциативная и коммутативная операция, g - операция типа степени, причем основания степеней t_1, t_2 - самые сложные подтермы левой части. Оценка сложности правой части тождества меньше оценки сложности левой. Находится тождество свертки $B_1 = B_2$, у которого бесповторная

правая часть имеет вхождение подтерма вида $f(x,y)$, где x,y - переменные. Заголовок левой части - символ f. В этой части выделяются два операнда, группируемые в терм T вида $f(g(x,n),g(y,m))$. Исходная теорема используется для преобразования подтерма $f(x,y)$ в B_2. Новый консеквент дополнительной теоремы разрешается относительно терма T_1, в который после преобразования переходит терм T. В результате получается теорема с консеквентом вида $f(g(g(t_1,r_1),n)),g(g(t_2,r_2),m))=D$. Она упрощается. (Прием нормализация - 79).

Пример: вывод теоремы

$\forall_d(d-\text{число}\rightarrow(\sin d)^6+(\cos d)^6=-3(\sin d)^2(\cos d)^2+1)$

из теоремы

$\forall_a(a-\text{число}\rightarrow(\sin a)^2+(\cos a)^2=1)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\rightarrow(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$

(e) Варьирование первой операции в тождестве для взаимного уничтожения двух сложных операций. Теорема - тождество общей стандартизации, имеющее вид $f(t_1)=t_2$, где t_1 - самое сложное выражение левой части, f - следующий по убыванию сложности символ этой части. Правая часть имеет оценку сложности, меньшую оценки f. Находится тождество общей стандартизации либо свертки $B_1=B_2$, у которого левая часть имеет подтерм вида $f(x)$, причем других переменных эта часть не имеет, а x входит в нее только под операцией f. Заменяющая часть B_2 бесповторна и не имеет вид $f(x)$. Ее оценка сложности больше, чем у t_2. Исходная теорема применяется для преобразования $f(x)$. Результат упрощается. (Прием нормализация - 88).

Пример: вывод теоремы

$\forall_b(b-\text{число}\ \&\ 0\le b+1\ \&\ 0\le -b+1\rightarrow\cos\arcsin b=\sqrt{-b^2+1})$

из теоремы

$\forall_a(a-\text{число}\ \&\ 0\le a+1\ \&\ 0\le -a+1\rightarrow\sin\arcsin a=a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a-\text{число}\ \&\ 0\le 2a+\pi\ \&\ 0\le\pi-2a\rightarrow\cos a=\sqrt{1-(\sin a)^2})$

(f) Попытка использовать тождество общей стандартизации, уменьшающее сложность, для упрощения заменяемой части перегруппировочного тождества общей стандартизации. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1=A_2$, у которого оценка сложности правой части меньше оценки левой. По заголовку f левой части находится тождество общей стандартизации $B_1=B_2$, которое в нормализаторах приведения к заданным заголовкам разрешается применять и в обратном порядке. В его заменяемой части выбирается неоднобуквенный подтерм с заголовком f. Он преобразуется исходной теоремой. Результат упрощается. (Прием нормализация - 101).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abdefh}(\neg(d=0)\ \&\ \neg(a-b=0)\ \&\ 0<h\ \&\ 0<ab\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&$
$d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ h-\text{число}\rightarrow$
$(b/a)^e/h^{f/d}=(b/a)^{e+(f\log_{a/b}h)/d})$

из теоремы

$\forall_{abcde}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(d-1=0)\ \&\ 0<d\ \&\ 0<e\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&$ $c-$ число $\&\ d-$ число $\&\ e-$ число $\rightarrow d^{b+(c\log_d e)/a}=d^b e^{c/a})$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\&\ 0<ab\rightarrow 1/(a/b)^c=(b/a)^c)$

(g) Попытка использовать тождество свертки из того же цикла вывода для добавления обобщающего параметра в определяемой многоместной операции. Теорема - тождество общей стандартизации $f(t_1\ldots t_n)=A$, где $n\geq 3$. Стартовая теорема цикла вывода - определение символа f. В текущем списке вывода находится тождество свертки вида $B=f(r_1\ldots r_n)$, у которого в левой части находится подвыражение R с заголовком f, причем правая часть получается из R заменой вхождения некоторой переменной x на выражение вида $g(x,y)$. Обе переменные x,y имеют лишь одно вхождение в правую часть. Переменные исходной теоремы переобозначаются и не входят в дополнительную теорему. Затем она применяется для преобразования R. Результат упрощается. (Прием нормализация - 146).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aceghi}(a=$ операция$(e)\ \&$ алгстепень$(h,a,i)=$ единица$(a)\ \&\ h\in$ носитель(e) $\&\ c-$ целое $\&\ g-$ целое $\&\ i-$ целое $\&\ 0\leq g\ \&\ 0\leq i\ \&$ группа$(e)\rightarrow$ алгстепень$(h,a,c+gi)=$ алгстепень$(h,a,c))$

из теоремы

$\forall_{abcde}(a=$ операция$(b)\ \&$ алгстепень$(d,a,e)=$ единица$(a)\ \&\ d\in$ носитель(b) $\&\ c-$целое $\&\ e-$целое $\&\ 0\leq c\ \&\ 0\leq e\ \&$ группа$(b)\rightarrow$ алгстепень$(d,a,ce)=$ единица$(a))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcfj}(j-\text{set}\ \&\ b\in j\ \&\ a-$ целое $\&\ c-$ целое $\&$ ассоциативно$(f)\ \&$ $0\leq a\ \&$ обратимо$(f)\ \&$ бинарнооперация$(f,j)\rightarrow$ $f($алгстепень$(b,f,c),$ алгстепень$(b,f,a))=$ алгстепень$(b,f,a+c))$

(h) Попытка использовать тождество общей стандартизации, уменьшающее сложность, для упрощения заменяемой части тождества, уменьшающего число вхождений сложной операции. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1=A_2$, у которого оценка сложности правой части меньше оценки сложности левой. Заголовок f левой части - наиболее сложный ее символ. По этому символу находится тождество $B_1=B_2$, выражающее корневую сложную операцию f через эту же операцию от более простого терма. Внутри B_1 выбирается подтерм с заголовком f, который преобразуется исходной теоремой. Результат упрощается. (Прием нормализация - 147).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acdgh}(a=$ операция$(h)\ \&\ c\in$ носитель$(h)\ \&\ g\in d\ \&$ группа$(h)\ \&$ подгруппа$(d,h)\rightarrow a[d,\{c\}]=a[d,\{a(g,c)\}])$

из теоремы

$\forall_{abyA}(b = \text{операция}(A)\ \&\ A - \text{set}\ \&\ y \in a\ \&\ \text{группа}(A)\ \&$
$\text{подгруппа}(a, A) \to b[a, \{y\}] = a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{fAabc}(A - \text{set}\ \&\ a - \text{set}\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, A)\ \&\ a \subseteq A\ \&\ b \in A\ \&$
$c \in A\ \&\ \text{ассоциативно}(f) \to f[f[a, \{b\}], \{c\}] = f[a, \{f(b, c)\}])$

Посредством $F[B_1, \ldots, B_n]$ здесь обозначается множество результатов применения операции F к наборам $b_1, \ldots, b_n$ элементов множеств $B_1, \ldots, B_n$.

2. Использование варьирующего тождества.

   (a) Обобщение варьирующего тождества путем навешивания двуместной операции на обе части равенства. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ для варьирования сложной операции с сохранением оценки. По заголовку f одной из частей этого тождества находится тождество общей стандартизации перегруппировочного типа вида $g(t_1, x) = B$, у которого операнд t_1 меет заголовок f, а переменная x входит в левую часть однократно. По этой переменной операция g имеет единицу. Исходная теорема используется для преобразования t_1. Результат упрощается. (Прием варьир - 5).
   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cd}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&\ d - \text{число}\ \&\ c - \text{rational} \to$
   $(\sin d)^{2c} = (1 - (\cos d)^2)^c)$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to (\sin a)^2 = 1 - (\cos a)^2)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{rational}\ \&\ \ - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even})\ \&$
   $\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \to (a^b)^c = a^{bc})$

   (b) Попытка проварьировать тождество общей стандартизации. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ перегруппировочного типа. По заголовку f одной из его частей находится тождество $B = f(x, g(y, z))$ свертки либо общей стандартизации, где x, y, z - переменные, внутри B встречается $f(x, z)$, причем g меет единицу по y. Исходная теорема применяется для преобразования $f(x, z)$. Результат упрощается. (Прием перестановка - 2).
   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdefg}(\neg(f - 1 = 0)\ \&\ 0 < d\ \&\ 0 < f\ \&\ 0 < g\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&$
   $e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{число} \to d^{e \log_f g} g^c = g^{c + e \log_f d})$

   из теоремы

   $\forall_{acde}(\neg(d - 1 = 0)\ \&\ 0 < a\ \&\ 0 < d\ \&\ 0 < e\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&$
   $d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \to e^{c \log_d a} = a^{c \log_d e})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 < a \to a^b a^c = a^{b+c})$

(c) Использование теоремы для преобразования дополнительного сокращающего тождества. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ у которого A_1 - невырожденный числовой атом, не встречающийся в части A_2, не являющейся числовым атомом, но содержащей невырожденные числовые атомы. Все переменные антецедентов встречаются в консеквенте. Либо оценка сложности выражения A_1 меньше оценки сложности A_2, либо эти оценки равны, но число подтермов максимальной сложности у A_1 меньше, чем у A_2. По заголовку f выражения A_2 находится тождество $g(t_1, t_2) = B$ без существенных антецедентов, у которого t_1, t_2, B бесповторны, t_1 имеет заголовок f, выражения t_1 и t_2 меют единственную общую переменную, и она не входит в B. Исходная теорема используется для преобразования t_1. Результат упрощается. (Прием числзнач - 24).

Пример: вывод теоремы

$\forall_z(z - \text{комплексное} \rightarrow |z|^2 = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2)$

из теоремы

$\forall_z(z - \text{комплексное} \rightarrow \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2} = |z|)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; 0 \leq a \;\&\; \neg(b = 0) \rightarrow (a^{1/b})^b = a)$

3. Использование определения.

(a) Попытка преобразовать теорему, выражающую операцию над функцией через более простые понятия. Теорема - определение $A_1 = f(t)$, где заголовок выражения t - описатель "отображение". В разделе символа f находится тождество $B_1 = B_2$, либо уменьшающее оценку сложности, либо выражающее сложную операцию над термом, содержащим функции, через сложные операции над термами, содержащими значения этой функции, либо используемое для перехода к более простым описателям. Внутри B_1 находится подтерм с заголовком f. Исходная теорема применяется для преобразования этого подтерма. Результат упрощается. (Прием определение - 218).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abce}(e = [a, b] \;\&\; a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; \text{мточка}(c) \;\&\; \text{Числотр}(e) \rightarrow \text{началопути}(\text{Путь}(c, e)) = \text{Место}(c, a))$

из теоремы

$\forall_{aT}(\text{мточка}(a) \;\&\; \text{Числотр}(T) \rightarrow \text{Путь}(a, T) = \text{ориенткрив}(\lambda_t(\text{Место}(a, t), t \in T)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{fab}(f - \text{функция} \;\&\; a - \text{число} \;\&\; b - \text{число} \;\&\; \text{Val}(f) \subseteq \text{Точки} \;\&\; \text{Dom}(f) = [a, b] \rightarrow \text{началопути}(\text{ориенткрив}(f)) = f(a))$

4. Использование тождества, упрощающего либо исключающего описатель.

(a) Попытка применения операции над функциями к обеим частям равенства для операции над конечным семейством. Теорема - тождество вида $f(\lambda_{x_1\ldots x_k}(A_2, A_1)) = A_3$ исключающее описатель "отображение". Операция f - обобщение некоторой ассоциативной и коммутативной операции на наборы произвольной длины. Находится тождество вида $B_1 = f(\lambda_{y_1\ldots y_k}(B_2, B_1))$. Внутри B_1 встречается подтерм t вида "$\lambda_z(f(\lambda_{y_1\ldots y_k}(B_4, B_3)), B_5)$". Выбирается параметр u выражения A_2, отличный от $x_1, \ldots, x_k$ и не входящий в A_1. Исходная теорема преобразуется в равенство вида "$\lambda_u(f(\lambda_{x_1\ldots x_k}(A_2, A_1)), A_4) = \lambda_u(A_3, A_4)$", после чего она применяется для преобразования подтерма t. Результат упрощается. (Прием описатель - 80).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcn}(b - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow \sum_{k=0}^{n}(kb^{n-k}c^kC_n^k) = cn(b+c)^{n-1})$

из теоремы

$\forall_{abn}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow \sum_{k=0}^{n}(a^kb^{n-k}C_n^k) = (a+b)^n)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{aef}(\forall_b(b \in \text{Val}(e) \rightarrow \text{Dom}(b) = f) \ \& \ \forall_b(b \in \text{Val}(e) \rightarrow \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R}) \ \&$
$\forall_b(b \in \text{Val}(e) \rightarrow \text{дифференцируема}(b, a)) \ \& \ f - \text{set} \ \& \ f \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \in f \ \&$
$\text{конечное}(\text{Dom}(e)) \ \& \ \text{семействофункций}(e) \rightarrow$
$\text{производная}(\lambda_c(\sum_{b,b\in\text{Dom}(e)} e(b)(c), c \in f), a) =$
$\sum_{b,b\in\text{Dom}(e)} \text{производная}(e(b), a))$

(b) Варьирование тождества с невырожденными числовыми атомами. Теорема - тождество вида "$f(\lambda_{x_1\ldots x_k}(A_2, A_1)) = A_3$", где правая часть не содержит описателей. Находится тождество $B_1 = B_2$, где B_1 - невырожденный числовой атом, внутри которого расположено выражение t с заголовком f. Исходная теорема используется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием описатель - 65).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bce}(\text{мточка}(b) \ \& \ \text{промежутки}(c, e) \ \& \ \text{Числотр}(c) \rightarrow \text{длина}(\text{Путь}(b, c)) =$
$\sum_{i=1}^{l(e)} \text{длина}(\text{Путь}(b, e(i))))$

из теоремы

$\forall_{acP}(\text{мточка}(b) \ \& \ \text{промежутки}(c, e) \ \& \ \text{Числотр}(c) \rightarrow \text{Путь}(a, c) =$
$\text{путь}(\lambda_i(\text{Путь}(a, P(i)), i \in \{1, \ldots, l(P)\})))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{an}(\text{пути}(a) \ \& \ l(a) = n \rightarrow \text{длина}(\text{путь}(a)) = \sum_{i=1}^{n} \text{длина}(a(i)))$

Здесь "$\text{Путь}(A, B)$" - ориентированная кривая, по которой материальная точка A перемещается в течение промежутка времени B; "$\text{путь}(A)$" - ориентированная кривая, возникающая при последовательном прохождении ориентированных кривых набора A; "$\text{промежутки}(A, B)$" означает, что B есть набор невырожденных отрезков, объединение которых равно A, причем каждый следующий отрезок набора B имеет своим началом конец

следующего; "пути(A)" означает, что A есть конечная последовательность ориентированных кривых, у которых начало каждой следующей кривой является концом предыдущей. Условие "Числотр(A)" означает, что A есть не сводящийся к точке числовой отрезок.

(c) Реализация функциональной переменной дополнительной теоремы. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель. Заголовок левой части - f. По символу f находится тождество $B_1 = B_2$, содержащее невырожденные числовые атомы, у которого внутри B_1 расположено выражение t с заголовком f. Это выражение находится внутри описателя "$\lambda_x(D_2, D_1)$", причем внутри t имеется вхождение подтерма $g(x)$, где g - переменная. Исходная теорема используется для преобразования t, причем в процессе этого преобразования сначала $g(x)$ заменяется в t на обычную переменную g и идентифицируется с некоторым выражением r, а затем переменная g идентифицируется с вспомогательной функцией, значения которой определяются этим выражением. Результат упрощается. (Прием описатель - 94).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bfP}(b - \text{число}\ \&\ \text{верпространство}(P)\ \&\ \text{случвеличина}(f, P) \rightarrow$
$\text{непрслева}(\text{функраспред}(f, P), b))$

из теоремы

$\forall_{abfP}(\text{верпространство}(P)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{случвеличина}(f, P)\ \&$
$a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ 0 \leq b - a \rightarrow \text{вероятность}(\text{set}_y(y \in \text{элемсобытия}(P)\ \&$
$f(y) \in [a, b)), P) = \text{функраспред}(f, P)(b) - \text{функраспред}(f, P)(a))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(\text{верпространство}(a)\ \&\ \text{последовательность}(b, \text{события}(a))\ \&$
$\text{убывмножества}(b)\ \&\ \bigcap_{i=1}^{\infty} b(i) = \emptyset \rightarrow$
$\lim(\lambda_i(\text{вероятность}(b(i), a), i - \text{натуральное})) = 0)$

(d) Использование тождества с операцией над конечным семейством для варьирования другой теоремы с такой операцией. Теорема - нечисловое тождество вида $f(\lambda_{x_1 \ldots x_k}(A_2, A_1)) = A_3$. В разделе символа f находится тождество $B_1 = B_2$, где B_1 - невырожденный числовой атом, внутри которого усматривается подвыражение t с заголовком f. B_2 не является невырожденным числовым атомом, но содержит такие атомы. Исходная теорема применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием описатель - 97).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abch}(h - \text{число}\ \&\ c - \text{слово}\ \&\ \text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Силы}(b, \{; c\}, h)\ \&\ \text{мточка}(b) \rightarrow$
$\text{скалумнож}(a, \text{Сила}(b, h)) = \sum_{f=1}^{l(c)} \text{скалумнож}(a, \text{сила}(b, c(f), h)))$

из теоремы

$\forall_{abnt}(\text{мточка}(a)\ \&\ t - \text{число}\ \&\ b - \text{слово}\ \&\ l(b) = n\ \&\ \text{Силы}(a, \{; b\}, t) \rightarrow$
$\text{Сила}(a, t) = \sum_{i=1}^{n} \text{сила}(a, b(i), t))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ad}(\mathrm{Val}(d) \subseteq \text{Векторы } \& \ d - \text{функция } \& \ \text{конечное}(\mathrm{Dom}(d)) \ \& \ \text{Вектор}(a) \rightarrow \text{скалумнож}(a, \sum_{f, f \in \mathrm{Dom}(d)} d(f)) = \sum_{f, f \in \mathrm{Dom}(d)} \text{скалумнож}(a, d(f)))$

5. Использование тождества, упрощающего либо исключающего сложную операцию.

   (a) Попытка получения тождества, выполняющего расшифровку с сокращением. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций большей или равной сложности. Выражение A_1 бесповторно. Заголовком A_2 служит символ f ассоциативной и коммутативной операции. Находится тождество вида $f(B_1, B_2) = B_3$, где B_1, B_2 - выражения с единственной бесповторной переменной x, а выражение B_3 константное. Выбирается новая переменная x, и это тождество преобразуется к виду $f(B_1, B_2, x) = f(B_3, x)$. Исходная теорема применяется (в направлении справа налево) для преобразования левой части преобразованного дополнительного тождества. Результат упрощается. Проверяется, что получается тождество с неконстантными частями. (Прием сокращ - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{число } \& \ c - \text{число} \rightarrow -\sin b \cos c + \sin(b + c) = \sin c \cos b)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a - a = 0)$

   (b) Попытка получения импликации, выводящей следствие из двух утверждений, в котором применяется тождество свертки после группировки неизвестных подвыражений. Теорема - тождество вида $A_1 = f(A_2, A_3)$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций больше либо равной сложности. Символ f ассоциативный и коммутативный. Каждое из выражений A_2, A_3 имеет не менее двух параметров. Находится кванторная импликация, выводящая следствие из двух утверждений, позволяющее группировать их подвыражения, обозначенные переменными x, y. В консеквенте эти переменные встречаются в виде $f(x, y)$. Исходное тождество применяется (в обратном порядке) для преобразования $f(x, y)$. Полученная теорема снабжается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема, комбинирующего два уравнения. (Прием сокращ - 13).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefghijp}(a = ip \ \& \ d = jp \ \& \ b + a \sin g \cos h = c \ \& \ e + d \sin h \cos g = f \rightarrow bj + ei + ijp \sin(g + h) = cj + fi)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$

   и дополнительной теоремы

$\forall_{abcdefpij}(a = pi \ \& \ d = pj \ \& \ ax + b = c \ \& \ dy + e = f \rightarrow pij(x + y) + bj + ei = cj + fi)$

(c) Попытка исключить корневую не самую сложную операцию заменяемого терма. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ одновременно уменьшающее число выражений максимальной сложности и приводящее к более простым таким выражениям. Число корневых операндов выражения A_1 не менее 2, причем некоторый операнд не пересекается по своим параметрам с остальными. Само A_1 не является ни одним из своих максимально сложных подтермов. По заголовку f выражения A_1 находится тождество без существенных антецедентов вида $g(B_1, B_2) = B_3$, где выражения b_1, B_2, B_3 бесповторны, причем B_1 и B_2 имеют единственную общую переменную, и эта переменная не входит в B_3. Некоторый операнд B_i левой части имеет заголовок f. Исходная теорема используется для преобразования B_1. Результат упрощается. (Прием уменьшсложн - 1).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{de}(d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e \rightarrow \sqrt{2\sqrt{e} + 2\sqrt{e + d^2}} = \sqrt{d + \sqrt{e + d^2}} + \sqrt{-d + \sqrt{e + d^2}})$

из теоремы

$\forall_{de}(d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e \rightarrow (\sqrt{d + \sqrt{e + d^2}} + \sqrt{-d + \sqrt{e + d^2}})^2 = 2\sqrt{e} + 2\sqrt{e + d^2})$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow (a^b)^{1/b} = a)$

(d) Попытка упрощения заменяемой части тождества для невырожденного числового атома. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, обеспечивающее переход к термам с меньшей оценкой сложности. A_1 является одним из своих максимально сложных подтермов. По его заголовку f находится тождество $B_1 = B_2$, где B_1 - невырожденный числовой атом, внутри которого расположено подвыражение t с заголовком f. Исходное тождество применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием упрощение - 20).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcdef}(f = [b, c] \ \& \ d \in (b, c) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(e) \ \& \ \text{Числотр}(f) \rightarrow \text{длина}(\text{Путь}(e, f)) = \text{длина}(\text{Путь}(e, [b, d])) + \text{длина}(\text{Путь}(e, [d, c])))$

из теоремы

$\forall_{abcdg}(g = [a, b] \ \& \ c \in (a, b) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(d) \ \& \ \text{Числотр}(g) \rightarrow \text{Путь}(d, g) = \text{путь}(\text{Путь}(d, [a, c]), \text{Путь}(d, [c, b])))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{an}(\text{пути}(a) \ \& \ l(a) = n \rightarrow \text{длина}(\text{путь}(a)) = \sum_{i=1}^{n} \text{длина}(a(i)))$

(e) Использование тождества для упрощения заменяемой части сокращающего тождества. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций большей либо

равной сложности. Выражение A_2 имеет не менее двух корневых операндов. По его заголовку f находится тождество без существенных антецедентов вида $g(B_1, B_2) = B_3$, где выражения B_1, B_2, B_3 бесповторны, причем B_1 и B_2 имеют единственную общую переменную, и эта переменная не входит в B_3. Некоторый операнд B_i левой части имеет заголовок f. Исходная теорема используется для преобразования B_i. Результат упрощается. (Прием сокращ - 16).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcd}(\neg(b=0)\ \&\ \neg(c=0)\ \&\ \neg(d-1=0)\ \&\ 0<d\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&$ числитель$(c)-\text{even}\ \&\ c-\text{rational} \to \log_d(b^c)/c = \log_d|b|)$

из теоремы

$\forall_{abc}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(c-1=0)\ \&\ 0<c\ \&\ a-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&$
числитель$(b)-\text{even}\ \&\ b-\text{rational} \to b\log_c|a| = \log_c(a^b))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ae}(\neg(e=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ e-\text{число} \to ae/e = a)$

(f) Попытка навесить внешнюю операцию для устранения повторного вхождения переменной. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ обеспечивающее переход к термам с меньшей оценкой сложности. Выражение A_1 небесповторно. Количество символов в A_1, оценка сложности которых не менее 7, не менее двух. Выбирается один из таких символов - символ f. Находится тождество вида $g(t_1, t_2) = t_3$, у которого t_1 небесповторно, а t_2, t_3 бесповторны, причем f - заголовок первого из максимально сложных подтерм терма t_1. Исходная теорема используется для преобразования t_1. Результат упрощается. (Прием упрощение - 18).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{def}(\neg(\cos e)\ \&\ \neg(\cos f)\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число} \to d+d\operatorname{tg} e \operatorname{tg} f = d\cos(e-f)/(\cos e\cos f))$

из теоремы

$\forall_{acf}(\neg(\cos f=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ f-\text{число} \to a\sin c\operatorname{tg} f + a\cos c = a\cos(c-f)/\cos f)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abx}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ x-\text{число}\ \&\ \neg(\cos x=0) \to$
$(a\sin x + b\cos x)/\cos x = a\operatorname{tg} x + b)$

(g) Использование равенства числового атома константе для упрощения теорем, относящихся к надклассу определяемого класса объектов. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, где A_1 - невырожденный числовой атом, A_2 - константное выражение. Стартовая теорема цикла вывода - определение символа F - заголовка некоторого антецедента текущей теоремы. Антецеденты текущей теоремы переводятся подстановкой C_1 в часть списка антецедентов определения и его определяющей части. Выбирается не использованный при этом антецедент определения, и в разделе его заголовка f находится дополнительная теорема, содержащая как f, так и заголовок атома A_1.

Антецеденты определения реализуются некоторой подстановкой C_2 среди антецедентов дополнительной теоремы. Находится атом $C_2(C_1(A_1))$. Он встречается в консеквенте дополнительной теоремы, и все его вхождения заменяются на A_2. Антецеденты дополнительной теоремы корректируются необходимым для обеспечения данной замены образом. Результат упрощается. (Прием числатом - 40).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, D)$ & $E \in$ прямая(AD) & точкалуча(A, D, E) & прямкоорд$(K) \rightarrow$ коорд$(E, K) = (0, 0, l(AE)))$

из теоремы

$\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D)$ & прямкоорд$(K) \rightarrow l(AD) = 1)$

и дополнительных теорем

$\forall_{ABCDEK}($систкоорд(K) & $K = (A, B, C, D) \rightarrow$ прямкоорд$(K) \leftrightarrow$ прямая$(AB) \perp$ прямая(AC) & прямая$(AB) \perp$ прямая(AD) & прямая$(AC) \perp$ прямая(AD) & $l(AB) = 1$ & $l(AC) = 1$ & $l(AD) = 1)$

$\forall_{ABCDEK}($систкоорд(K) & $K = (A, B, C, D)$ & $E \in$ прямая(AD) & точкалуча$(A, D, E) \rightarrow$ коорд$(E, K) = (0, 0, l(AE)/l(AD)))$

(h) Попытка использовать тождество, декомпозирующее числовой атом, для получения другого тождества, декомпозирующего числовой атом. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее невырожденный числовой атом A_1 через некоторые другие невырожденные числовые атомы $D_1, \ldots, D_n,\ n \geq 2$, причем относительно переменных эти атомы декомпозируют A_1. Некоторый корневой операнд t атома A_1 имеет не менее двух параметров, причем ни один из атомов D_i не содержит всех этих параметров. В разделе символа f - заголовка атома A_1 - находится другое тождество $B_1 = B_2$, где B_1 - невырожденный числовой атом, причем среди невырожденных атомов выражения B_2 существует атом E, декомпозирующий по своим переменным остальные невырожденные атомы выражения B_2 и имеющщий корневой операнд с тем же заголовком, что t. Исходная теорема применяется для преобразования E. Результат упрощается. (Прием числатом - 45).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(a-$set & $b-$set & $a \in$ события(c) & $b \in$ события(c) & верпространство(c) & незавсобытия$((b, a), c) \rightarrow$ вероятность$(a \setminus b, c) =$ $(-$вероятность$(b, c) + 1)$вероятность$(a, c))$

из теоремы

$\forall_{abc}(a-$set & $b-$set & $a \in$ события(c) & $b \in$ события(c) & верпространство(c) & незавсобытия$((b, a), c) \rightarrow$ вероятность$(a \cap b, c) =$ вероятность(a, c)вероятность$(b, c))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A -$ set & $B -$ set & $A \in$ события(C) & $B \in$ события(C) & верпространство$(C) \rightarrow$ вероятность$(A \setminus B, C) =$ вероятность$(A, C) -$ вероятность$(A \cap B, C))$

(i) Использование тождества, уменьшающего оценку сложности, для упрощения заменяемой части тождества, уменьшающего количество невырожденных числовых атомов. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложный невырожденный числовой атом A_1 с заголовком f через более простые. Выражение A_2 бесповторно. В разделе символа f находится другое тождество $B_1 = B_2$, одновременно уменьшающее число выражений максимальной сложности и приводящее к более простым таким выражениям. В заменяемой части его находится подвыражение t с заголовком f. Оно преобразуется при помощи исходного тождества. Результат упрощается. (Прием числатом - 46).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcB}(\neg(\text{вероятность}(a \cap b, c) = 0)\ \&\ a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&$
$a \in \text{события}(c)\ \&\ b \in \text{события}(c)\ \&\ B \in \text{события}(c)\ \&\ \text{верпространство}(c)\ \&$
$\text{независобытия}((a, b), c) \rightarrow \text{вероятность}(a, c)\text{услвероятн}(B, a \cap b, c) =$
$\text{услвероятн}(a \cap B, b, c))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(\text{вероятность}(B, C) = 0)\ \&\ A - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&\ A \in \text{события}(C)\ \&$
$B \in \text{события}(C)\ \&\ \text{верпространство}(C)\ \&\ \text{независобытия}((A, B), C) \rightarrow$
$\text{услвероятн}(A, B, C) = \text{вероятность}(A, C))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{deBC}(\neg(\text{вероятность}(d \cap e, C) = 0)\ \&\ d - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&$
$d \in \text{события}(C)\ \&\ e \in \text{события}(c)\ \&\ B \in \text{события}(c)\ \&\ \text{верпространство}(C)$
$\rightarrow \text{услвероятн}(e, d, C)\text{услвероятн}(B, d \cap e, c) = \text{услвероятн}(e \cap B, d, c))$

6. Использование тождества свертки либо склейки.

(a) Применение тождества свертки для упрощения бесповторного фрагмента заменяемой части дополнительного тождества свертки. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ сокращенной перезаписи. Заменяемое выражение A_1 небесповторно. По его заголовку f находится другое тождество свертки $B_1 = B_2$, у которого B_1 небесповторно, B_2 бесповторно, причем некоторый корневой операнд выражения B_1 содержит все его переменные и при отбрасывании корневых одноместных операций, если они есть, превращается в бесповторное выражение t с заголовком f. Исходная теорема применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием свертка - 74).

Пример: вывод теоремы

$\forall_c(c - \text{число} \rightarrow (\sin c + \cos c)^2 = 1 + \sin(2c))$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \sin(2a) = 2 \sin a \cos a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$

(b) Использование тождества "склейлин" для получения тождества "склейкаоперандов". Теорема - тождество $A_1 = A_2$ сокращенной перезаписи. Его заменяемая часть с заголовком f небесповторна, а заменяющая бесповторна. Оценка сложности заменяющей части больше, чем у заменяемой. Заменяемая часть имеет ровно два подтерма максимальной сложности, каждый - с единственным вхождением. Находится тождество $B_1 = B_2$, подготавливающее получение тождества с характеристикой "склейкаоперандов" (т.е. тождества, позволяющего исключить повторные вхождения переменной в заменяемой части другого тождества путем применения к обеим его частям внешней операции). Заменяемая часть B_1 - двуместная операция, один из операндов которой бесповторный, а другой - переменная x, встречающаяся в B_2 в виде $f(a, x)$. Исходное тождество применяется для преобразования $f(a, x)$. Результат упрощается. (Прием свертка - 77).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abdf}(\neg(b = 0)\ \&\ \neg(\cos d = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&$
$f - \text{число} \to (ab\cos d + f\sin d)/(b\cos d) = a + (f\operatorname{tg} d)/b)$

из теоремы

$\forall_{abc}(\neg(a = 0)\ \&\ \neg(\cos b = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to$
$(c\operatorname{tg} b)/a = c\sin b/(a\cos b))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ace}(\neg(c = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \to (e + ac)/c = a + e/c)$

(c) Попытка навесить внешнюю операцию для устранения повторного вхождения переменной. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ сокращенной перезаписи. Его заменяемая часть с заголовком f небесповторна, а заменяющая бесповторна. Заменяемая часть имеет не менее двух подвыражений максимальной сложности. По заголовку f одного из них находится тождество вида $g(t_1, t_2) = B$, у которого выражения t_2, B бесповторны, а t_1 - небесповторно. Исходная теорема применяется для преобразования t_1. Результат упрощается. (Прием свертка - 78).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bc}(\neg(\cos c = 0)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to \sin b\operatorname{tg} c + \cos b = \cos(b - c)/\cos c)$

из теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to \cos(b - c) = \sin b\sin c + \cos b\cos c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abx}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ x - \text{число}\ \&\ \neg(\cos x = 0) \to$
$(a\sin x + b\cos x)\cos x = a\operatorname{tg} x + b)$

(d) Попытка преобразовать дополнительное упрощающее тождество для бинарной ассоциативной операции путем домножения обеих его частей и свертки одной из них. Теорема - тождество сокращенной перезаписи вида $f(t_1, t_2) = A$, где переменная f обозначает бинарную ассоциативную операцию. В разделе "группоиды" находится тождество общей стандартизации вида $f(r_1, r_2) = B$, где заголовки выражений r_1, r_2 совпадают между

собой. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Находится подстановка C, переводящая r_1 в t_2. Новая теорема имеет консеквент $f(t_1, B) = f(A, C(r_2))$. Ее антецеденты - объединение антецедентов исходной теоремы и результатов применения C к антецедентам дополнительной. Результат упрощается. (Прием свертка - 93).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcdfA}(A - \text{set}\ \&\ b \in A\ \&\ c - \text{натуральное}\ \&\ d - \text{натуральное}\ \&$
$\text{ассоциативно}(f)\ \&\ \text{обратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, A) \rightarrow$
$f(\text{алгстепень}(b, f, c + d), \text{алгстепень}(b, f, -d)) = \text{алгстепень}(b, f, c))$

из теоремы

$\forall_{bcdfA}(A - \text{set}\ \&\ b \in A\ \&\ c - \text{натуральное}\ \&\ d - \text{натуральное}\ \&$
$\text{ассоциативно}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, A) \rightarrow$
$\text{алгстепень}(b, f, c + d) = f(\text{алгстепень}(b, f, c), \text{алгстепень}(b, f, d)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abfA}(A - \text{set}\ \&\ a \in A\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&\ \text{обратимо}(f)\ \&$
$\text{бинарнооперация}(f, A)\ \&\ b - \text{натуральное} \rightarrow$
$f(\text{алгстепень}(a, f, b), \text{алгстепень}(a, f, -b)) = \text{единица}(f))$

(e) Вывод из тождества свертки $f(a, b) = c$ тождества вида $f(g(a), g(b)) = g(c)$ и последующее обобщение типа "возведения в степень". Теорема - тождество сокращенной перезаписи вида $f(a, b) = c$. Находится другое тождество вида $f(g(x), g(y)) = g(f(x, y))$, а также тождество вида $h(f(u, v), w) = f(h(u, w), h(v, w))$. Новая теорема имеет консеквент $h(g(c), z) = f(h(g(a), z), h(g(b), z))$. Антецеденты объединяются. Результат упрощается. (Прием свертка - 49).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cde}(c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow |d + e|^c |d - e|^c = |d^2 - e^2|^c)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow a^2 - b^2 = (a - b)(a + b))$

и дополнительных теорем

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 \leq a\ \&\ 0 \leq b \rightarrow a^c b^c = (ab)^c)$

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow |a||b| = |ab|)$

(f) Попытка воспользоваться тождеством склейки для преобразования фрагмента сокращающего тождества. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, позволяющее перейти от выражения с несколькими вхождениями переменной к выражению с единственным ее вхождением. По заголовку f левой части находится тождество общей стандартизации вида $g(x, f(x, y)) = a$, где a - логический символ либо переменная. Исходная теорема применяется для преобразования $f(x, y)$. Результат упрощается. (Прием склейка - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cd}(\neg(\cos d = 0)\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&\ d - \text{число}\ \&\ c - \text{rational} \rightarrow$
$(\cos d)^c (\operatorname{tg} d)^c = (\sin d)^c)$

из теоремы

$\forall_{cd}(\neg(\cos d = 0)\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&\ d - \text{число}\ \&\ c - \text{rational} \rightarrow (\operatorname{tg} d)^c = (\sin d)^c/(\cos d)^c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \neg(b = 0) \rightarrow (a/b)b = a)$

7. Использование тождества приведения к заданным заголовкам.

   (a) Попытка модифицировать тождество приведения к заданным заголовкам путем заблаговременного "вынесения за скобки" общих частей операндов. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ для приведения к заголовкам заданного списка S. Заголовок левой части - символ f. Находится тождество $B_1 = B_2$ без существенных антецедентов, выполняющее свертку в бесповторное выражение B_2 небесповторного выражения B_1 с заголовком f. Внутри B_2 выбирается вхождение подтерма t с заголовком f, причем все его надоперации принадлежат списку S. Исходная теорема используется для преобразования t. Результат упрощается. Теорема анализируется на использование для приема приведения к заголовкам списка S либо для приема вычислений с константами. Характеристики создаются только для этих двух видов. (Прием нормзаголовок - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdef}(\neg(d = 0)\ \&\ \neg(e = 0)\ \&\ \neg(f = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число} \rightarrow ab/(df) + ac/(ef) = a(be + cd)/(def))$

   из теоремы

   $\forall_{abce}(\neg(b = 0)\ \&\ \neg(c = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow (ac + be)/(bc) = a/b + e/c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcdef}(\neg(d = 0)\ \&\ \neg(e = 0)\ \&\ \neg(f = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число} \rightarrow ab/(df) + ac/(ef) = a(b/d + c/e)/f)$

   Теорема выводится для приема сложения дробных выражений, который заблаговременно выводит за рамки вычислений общие множители числителей и знаменателей.

   (b) Попытка получения тождества, устраняющего кратные вхождения сложной операции. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ для приведения к заданным заголовкам. Заголовком правой части служит символ f. Находится тождество $B_1 = B_2$ перегруппировочного типа, у которого заголовки обеих частей равны f, причем внутри B_1 имеется собственный подтерм с заголовком f, а внутри B_2 акого нет. Исходное тождество применяется (в обратном направлении) для преобразования t. Результат упрощается. (Прием нормзаголовок - 14).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcf}(\neg(a = 0)\ \&\ \neg(c = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ f - \text{число} \rightarrow (f + bc)/(ac) = (b + f/c)/a)$

из теоремы

$\forall_{ace}(\neg(c=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\rightarrow(e+ac)/c=a+e/c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ade}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\rightarrow d/(ae)=(d/e)/a)$

8. Использование тождества для отдельных координат объектов.

   (a) Попытка использовать значение координаты в другом тождестве для координат. Теорема - тождество вида "крд$(A_1,K,i)=A_2$". Заголовком A_1 служит логический символ f. Выражение A_2 не содержит невырожденных числовых атомов. Находится другая теорема - соотношение для отдельных координат, имеющее единственное вхождение подтерма с заголовком f. Этот подтерм преобразуется исходной теоремой. Результат упрощается. (Прием крд - 4).
   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bdefK}(f=[d,e]\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ \text{поверхностьземли}(K)\ \&\ \text{мточка}(b)\ \&\ \text{бросок}(b,f)\ \&\ \text{Числотр}(f)\rightarrow\ \text{крд}(\text{Скорость}(b,K,e),K,3)=-(e-d)g+\text{крд}(\text{Скорость}(b,K,d),K,3))$

   из теоремы

   $\forall_{aKT}(\text{поверхнземли}(K)\ \&\ \text{мточка}(a)\ \&\ \text{бросок}(a,T)\ \&\ \text{Числотр}(T)\rightarrow\ \text{крд}(\text{Ускорение}(a,K,T),K,3)=-g)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{acdefiK}(f=[d,e]\ \&\ f\subseteq i\ \&\ c\in\{1,2,3\}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{неподв}(K,i)\ \&\ \text{Равноускоренное}(a,K,i)\ \&\ \text{мточка}(a)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\ \&\ \text{Числотр}(f)\ \&\ \text{Числотр}(i)\ \&\ \text{мтело}(K)\rightarrow\ \text{крд}(\text{Скорость}(a,K,e),K,c)=(e-d)\text{крд}(\text{Ускорение}(a,K,i),K,c)+\ \text{крд}(\text{Скорость}(a,K,d),K,c))$

9. Использование тождества для невырожденных числовых атомов.

   (a) Использование соотношения, связывающего два невырожденных числовых атомв, для варьирования другого соотношения с числовыми атомами. Теорема - тождество $A_1=A_2$, связывающее ровно два невырожденных числовых атома D_1,D_2. Оно преобразуется задачей на описание к виду $D_1=T$, где T содержит единственный атом D_2. Конъюнкция антецедентов теоремы имеет единственный подтерм максимальной сложности; заголовок его - символ f. Находится другое тождество $B_1=B_2$, у которого B_1 - невырожденный числовой атом, причем имеется антецедент с заголовком f, а в консеквенте встречается заголовок D_1. Все переменные дополнительной теоремы встречаются в ее антецедентах. Находится подстановка C, переводящая антейеденты дополнительной теоремы в некоторые антецеденты исходной. После применения ее к консеквенту дополнительной теоремы получается соотношение, содержащее атом D_1. Предпринимается

замена в нем этого атома на T. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 42).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDE}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(C=E)\ \&\ \neg(D=E)\ \&$
$C \in$ окружность$(AB)\ \&\ D \in$ окружность$(AB)\ \&\ E \in$ окружность$(AB)\ \&$
$A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&\ E-$точка $\&$
однасторона$(A, E,$ прямая$(CD)) \to l(CD) = 2\sin(\angle(CED))l(AB))$

из теоремы

$\forall_{ABCDE}(A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&\ E-$точка $\&$
$\neg(D=E)\ \&\ \neg(C=E)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ C \in$ окружность$(AB)\ \&$
$D \in$ окружность$(AB)\ \&\ E \in$ окружность$(AB)\ \&$
однасторона$(A, E,$ прямая$(CD)) \to 2\angle(CED) = \angle(CAD))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&\ \neg(A=B)\ \&$
$C \in$ окружность$(AB)\ \&\ D \in$ окружность$(AB) \to$
$l(CD) = 2l(AB)\sin(\angle(CAD)/2))$

10. Использование нечислового тождества.

    (a) Попытка получить соотношение для характеристики атомарных выражений. Теорема - нечисловое тождество $A_1 = A_2$. Заголовок A_1 - логический символ f, A_2 - бесповторное атомарное нечисловое выражение, имеющее более одного корневого операнда. Находится тождество вида $g(t) = B$, декомпозирующее сложный числовой атом в левой части. Заголовком t служит символ f. Исходная теорема применяется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием Равно - 4).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{cde}(d-$число $\&$ мточка$(c)\ \&$ Неподв$(e, d)\ \&$ мтело$(e) \to$ длина(Сила$(c, d)) =$
    длина(Ускорение$(c, e, d))$масса$(c))$

    из теоремы

    $\forall_{atK}($Неподв$(K, t)\ \&\ t-$число $\&$ мтело$(K)\ \&$ мточка$(a) \to$
    масса(a)Ускорение$(a, K, t) =$ Сила$(a, t))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{ab}(a-$число $\&$ Вектор$(b) \to$ длина$(ab) = |a|$длина$(b))$

Тождество преобразует заменяющую часть дополнительного тождества

1. Попытка обобщения путем подстановки в другое тождество. Теорема - тождество $f(\lambda_{x_1 \ldots x_k}(A_2, A_1), y) = A_3$, где выражение A_3 элементарно и не содержит переменной y. Находится другое тождество вида $f(\lambda_{z_1 \ldots z_k}(B_2, B_1), u) = f(B_3)$, где B_3 е содержит описателя "отображение". Исходное тождество используется для преобразования $f(B_3)$. Результат упрощается и рассматривается как обобщение исходной теоремы. (Прием констэкв - 1).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bdehi}(\neg(d=0)\ \&\ i-\text{set}\ \&\ i\subseteq\mathbb{R}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&$
$\text{Квазивнутр}(h,i)\to\text{производная}(\lambda_c(b+ce/d,c\in i),h)=e/d)$

из теоремы

$\forall_{abde}(\neg(a=0)\ \&\ e-\text{set}\ \&\ e\subseteq\mathbb{R}\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ \text{Квазивнутр}(d,e)\to$
$\text{производная}(\lambda_c(bc/a,c\in e),d)=b/a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abg}(\text{Dom}(g)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(g)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ g-\text{функция}\ \&\ b-\text{число}\ \&$
$\text{дифференцируема}(g,a)\to\text{производная}(\lambda_c(b+g(c),c\in\text{Dom}(g)),a)=$
$\text{производная}(g,a))$

2. Попытка выражения характеристики атомарного выражения через его координаты. Теорема - тождество $A_1=A_2$, выражающее невырожденный числовой атом A_1 через параметры координат. По заголовку f атома A_1 находится определение $B_1=B_2$, где f - заголовок определяющей части B_2. При этом внутри B_1 содержится некоторое атомарное нечисловое выражение t, содержащее все параметры B_1. Исходная теорема применяется для преобразования B_2. При этом t превращается в некоторое выражение r, и с помощью задач на описание удается сначала выразить координаты r через параметры выражения A_2, а затем само A_2 переформулировать через координаты r, обозначенные новыми переменными. В итоге получается теорема, антецеденты которой содержат равенство для координат объекта r, а правая часть консеквента выражена через параметры этого равенства. (Прием значпарам - 9).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdfgK}(\text{коорд}(\text{вектор}(cd),K)=(f,g)\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ d-\text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\to$
$\text{длина}(\text{вектор}(cd))=\sqrt{f^2+g^2})$

из теоремы

$\forall_{ABabpqK}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(A,K)=(a,b)\ \&$
$\text{коорд}(B,K)=(p,q)\to l(AB)=\sqrt{(a-p)^2+(b-q)^2})$

и дополнительной теоремы

$\forall_{AB}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\to\text{длина}(\text{вектор}(AB))=l(AB))$

3. Попытка исключить в дополнительной теореме заголовок определяющего выражения текущей теоремы. Теорема - определение $A_1=f(\lambda_{x_1\ldots x_k}(A_3,A_2))$. По символу f находится тождество общей стандартизации $B_1=B_2$, у которого f - заголовок заменяющей части B_2. Эта часть преобразуется исходной теоремой, применяемой в обратном направлении. Результат упрощается. (Прием определение - 219).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acP}$(мточка(a) & промежутки(c, P) & Числотр(c) $\rightarrow$ Путь(a, c) = путь(λ_i(Путь($a, P(i)$), $i \in \{1, \ldots, l(P)\}$)))

из теоремы

$\forall_{aT}$(мточка(a) & Числотр(T) $\rightarrow$ Путь(a, T) = ориенткрив(λ_t(Место(a, t), $t \in T$)))

и дополнительной теоремы

$\forall_{TPfn}$(f – функция & Val(f) $\subseteq$ Точки & Dom(f) = T & промежутки(T, P) & $l(P) = n \rightarrow$ ориенткрив(f) = путь(λ_i(ориенткрив($\lambda_x(f(x), x \in P(i))$), $i \in \{1, \ldots, n\}$)))

Тождество применяется к обеим частям дополнительного тождества

1. Попытка использовать тождество типа сокращения для соединения двух тождеств типа "числатом". Теорема - тождество $A_1 = A_2$ выражающее сложный числовой атом A_1 через более простые. Заголовок правой части - логический символ f. Находится тождество без существенных посылок вида $g(t_1, t_2) = t_3$, у которого каждый из термов t_1, t_2, t_3 бесповторен, причем t_1, t_2 имеют единственную общую переменную, и эта переменная не входит в t_3. Заголовок t_1 - символ f. В текущем списке вывода находится тождество $D_1 = D_2$, выражающее сложный числовой атом D_1 через более простые (возможно, совпадающее с исходным тождеством), у которого заменяющая часть имеет тот же заголовок, что t_2. Исходное тождество применяется для преобразования t_1, второе дополнительное тождество - для преобразования t_2. Оба эти тождества применяются в обратном направлении. Результат упрощается. (Прием числатом - 16).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcfC}$(¬(вероятность(b, C) = 0) & b – set & c – set & f – set & $b \subseteq f$ & $c \subseteq b$ & $b \in$ события(C) & $c \in$ события(C) & $f \in$ события(C) & верпространство(C) $\rightarrow$ услвероятн(b, f, C)услвероятн(c, b, C) = услвероятн(c, f, C))

   из теоремы

   $\forall_{bcC}$(¬(вероятность(b, C) = 0) & b – set & c – set & $c \subseteq b$ & $b \in$ события(C) & $c \in$ события(C) & верпространство(C) $\rightarrow$ услвероятн(c, b, C) = вероятность(c, C)/вероятность(b, C))

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}$(a – число & b – число & c – число & ¬($c = 0$) & ¬($b = 0$) $\rightarrow a/b \cdot b/c = a/c$)

2. Использование выражения числового атома через координаты для получения выражения более сложного числового атома через координаты из дополнительной теоремы. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее невырожденный числовой атом A_1 с заголовком f ерез параметры координат. Находится другое тождество - соотношение для невырожденных числовых атомов, содержащее

атомы $B_1, \ldots, B_n$ с заголовком f, а также единственный атом D другим заголовком, сложность которого больше сложности атомов $B_1, \ldots, B_n$. Дополнительная теорема не имеет существенных антецедентов. Исходная теорема используется для выражения атомов $B_1, \ldots, B_n$ через параметры координат. Система координат при этом выбирается общая. (Прием значпарам - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{efghABCK}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (f, g)\ \&$
$\text{коорд}(\text{вектор}(AC), K) = (e, h)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
$\text{прямкоорд}(K) \to ef + gh = \sqrt{e^2 + h^2}\sqrt{f^2 + g^2}\cos(\angle(BAC)))$

из теоремы

$\forall_{cdfgK}(\text{коорд}(\text{вектор}(cd), K) = (f, g)\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \to$
$l(cd) = \sqrt{f^2 + g^2})$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B) \to$
$2l(AB)l(AC)\cos(\angle(BAC)) = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)$

3. Развязка переменных в единственном числовом атоме определяющей части равенства. Теорема - определение $A_1 = A_2$, причем определяющая часть A_2 содержит единственный невырожденный числовой атом t, и он включает все переменные теоремы. По заголовку f атома t находится тождество $B_1 = B_2$, у которого B_1, B_2 - числовые атомы с заголовком f. Определяется двойник исходной теоремы $D_1 = D_2$, полученный из нее переобозначением переменных на новые переменные. Внутри D_2 выделяется двойник r атома t. У первой дополнительной теоремы атом B_1 унифицируется с t, а атом B_2 - с r. Консеквентом новой теоремы становится равенство выражений, в которые при данной унификации переходят A_1, D_1. Антецеденты, с соответствующей коррекцией, объединяются. Результат упрощается. (Прием определение - 123).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcde}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = c)\ \&\ \neg(a = d)\ \&\ \neg(a = e)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&$
$c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ \text{точкалуча}(a, b, c)\ \&\ \text{точкалуча}(a, d, e) \to$
$\text{уголмежду}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(ad)) = \text{уголмежду}(\text{вектор}(ac), \text{вектор}(ae)))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B) \to$
$\text{уголмежду}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(AC)) = \angle(BAC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$\neg(A = E)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ \text{точкалуча}(A, B, C)\ \&$
$\text{точкалуча}(A, D, E) \to \angle(BAD) = \angle(CAE))$

4. Использование тождества, выражающего числовой атом через более простые, для вывода равенства числовых атомов нового типа. Консеквент теоремы - равенство $A_1 = A_2$ двух невырожденных числовых атомов с одинаковым заголовком f. Теорема - соотношение $B_1 = B_2$ для невырожденных числовых атомов. Внутри B_2 имеется вхождение атома D с заголовком f, включающего все переменные теоремы. Внутри B_1 имеется единственный невырожденный числовой атом E, причем оценка его сложности больше оценки D. Находится подстановка C_1, переводящая D в A_1, а также подстановка C_2, переводящая D в A_2. Проверяется, что $C_1(B_2) = C_2(B_2)$ - следствие антецедентов исходной теоремы и ее консеквента. Проверяется, что $C_1(E) = C_2(E)$ - следствие антецедентов исходной теоремы и равенства $C_1(B_1) = C_2(B_1)$. Затем выводится теорема с консеквентом $C_1(B_1) = C_2(B_1)$ и антецедентами исходной теоремы. (Прием равны - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(\neg(A = B)\ \&\ l(CD) = l(EF)\ \&\ C \in \text{окружность}(AB)\ \&$
   $D \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ F \in \text{окружность}(AB)\ \&$
   $A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
   $F - \text{точка} \to S(\text{фигура}(ADC)) = S(\text{фигура}(AEF)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(\neg(A = B)\ \&\ l(CD) = l(EF)\ \&\ C \in \text{окружность}(AB)\ \&$
   $D \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ F \in \text{окружность}(AB)\ \&$
   $A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
   $F - \text{точка} \to \angle(CAD) = \angle(EAF))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B) \to$
   $2S(\text{фигура}(ABC)) = l(AB)l(AC)\sin(\angle(BAC)))$

Тождество преобразует операнд перегруппировочного тождества

1. Попытка использовать перегруппировочное тождество и альтернативную свертку. Теорема - определение $A_1 = A_2$, у которого определяющее выражение A_2 небесповторно. По его заголовку f находится тождество $B_1 = B_2$ перестановочного типа, у которого заголовком B_1 служит символ f. Внутри B_2 имеется собственный подтерм t, содержащий все переменные теоремы. Исходная теорема используется для преобразования B_1. При этом t переходит в некоторое выражение r, которое сворачивается нормализаторами сокращенной перезаписи в бесповторное выражение. Результат упрощается. (Прием определение - 71).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_c(\neg(\sin c = 0)\ \&\ \neg(\cos c = 0)\ \&\ c - \text{число} \to 1 = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} c)$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число}\ \&\ \neg(\sin a = 0) \to \operatorname{ctg} a = \cos a / \sin a)$

   и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \neg(b = 0)\ \&\ \neg(a = 0) \to 1/(a/b) = b/a)$

Координатные выражения исходного и дополнительного тождества выражаются через одни и те же числовые атомы, что позволяет связать между собой эти координаты без использования числовых атомов

1. Использование координат объекта для определения координат другого объекта, упоминаемого в антецедентах. Теорема - тождество вида "коорд$(A, K) = (a_1, \ldots, a_n)$". В текущем списке вывода находится другое тождество вида "коорд$(B, Q) = (b_1, \ldots, b_n)$". Усматривается подстановка C, переводящая все антецеденты дополнительной теоремы в некоторые антецеденты исходной. Хотя бы одно из выражений $C(b_i)$ неконстантное. Проверяется, что $C(B)$ отлично от A. Выбираются новые переменные $d_1, \ldots, d_n, x_1, \ldots, x_n$. Решается задача на описание, посылки которой - антецеденты исходной теоремы и равенства $a_1 = d_1, \ldots, a_n = d_n$; условия - $x_1 = b_1, \ldots, x_n = b_n$. Неизвестные суть $x_1, \ldots, x_n$, известные параметры - $d_1, \ldots, d_n$. В результате получаются выражения $t_1, \ldots, t_n$ для неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ через переменные $d_1, \ldots, d_n$. Антецедентами новой теоремы становятся антецеденты исходной и утверждение "коорд$(A, K) = (d_1, \ldots, d_n)$"; консеквентом - равенство "коорд$(C(B), K) = (t_1, \ldots, t_n)$". (Прием систкоорд - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abABCDEFK}(D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&$
   $\neg(D = F)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ E \in \text{прямая}(AC)\ \&\ A \in \text{отрезок}(CE)$
   $\&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ F \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{точкалуча}(A, B, F)\ \&$
   $\text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \to \text{коорд}(E, K) = (0, b))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDEFK}(D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&$
   $\neg(D = F)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ E \in \text{прямая}(AC)\ \&\ A \in \text{отрезок}(CE)$
   $\&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ F \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{точкалуча}(A, B, F)\ \&$
   $\text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AC) \to \text{коорд}(D, K) = (l(AF)/l(AB), -l(AE)/l(AC)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCDK}(\text{систкоорд}(K)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&$
   $A \in \text{отрезок}(CD) \to \text{коорд}(D, K) = (0, -l(AD)/l(AC)))$

Тождество разрешается относительно подвыражения, и результат подставляется в дополнительное тождество

1. Подстановка значения числового атома, определяемого теоремой, в уравнение для координат множества объектов, упоминаемого в антецедентах. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат. В ее консеквенте встречается единственный невырожденный числовой атом t. В антецедентах имеется единственное невырожденное подвыражение r, определяющее множество, причем отсутствует равенство для координат этого множества. Составляется список S_1, содержащий выражения t, r, выражения "коорд(D, K)" из равенств "коорд$(D, K) = (\ldots)$" в антецедентах,

а также невырожденные числовые атомы E, для которых в антецедентах имеется равенство $E = x$, а переменная x встречается в консеквенте. Находится теорема вида "коорд$(B, Q) = \text{set}_{y_1 \ldots y_n}(H)$", где заголовок B равен заголовку r. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Все переменные корневой связывающей приставки дополнительной теоремы суть параметры ее консеквента. Составляется список S_2, содержащий выражение B, выражения "коорд(D, Q)" из равенств "коорд$(D, Q) = (\ldots)$" в антецедентах, а также невырожденные числовые атомы E, для которых в антецедентах имеется равенство "$E = x$", а переменная x встречается в консеквенте. Находится подстановка C, переводящая список S_2 в подмножество списка S_1. Внутри $C(H)$ встречается t. При помощи задачина описание из уравнения $A_1 = A_2$ находится выражение для t через параметры координат. Это выражение подставляется вместо t в результат применения C к консеквенту дополнительной теоремы. Антецеденты теорем (после необходимой коррекции) объединяются. Результат упрощается. (Прием числкоэфф - 7).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdefghiK}(\neg(f = g)\ \&\ \neg(h = i)\ \&\ \text{коорд}(h, K) = (d, e)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(fg), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ f - \text{точка}\ \&\ g - \text{точка}\ \&\ h - \text{точка}\ \&\ i - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(fg) - \text{касательная к окружности}(hi)\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{окружность}(hi), K) = \text{set}_{lm}(-2dl - 2me - (c + ad + be)^2/(a^2 + b^2) + d^2 + e^2 + l^2 + m^2 = 0\ \&\ l - \text{число}\ \&\ m - \text{число}))$

из теоремы

$\forall_{abcdefghiK}(\neg(f = g)\ \&\ \neg(h = i)\ \&\ \text{коорд}(h, K) = (d, e)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(fg), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ f - \text{точка}\ \&\ g - \text{точка}\ \&\ h - \text{точка}\ \&\ i - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(fg) - \text{касательная к окружности}(hi)\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow (c{+}ad{+}be)^2 = (a^2{+}b^2)l(hi)^2)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abABK}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \rightarrow \text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) = \text{set}_{xy}((x - a)^2 + (y - b)^2 = l(AB)^2\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}))$

На обе части дополнительного тождества с условным выражением навешивается операция, позволяющая преобразовать исходным тождеством одно из альтернативных подвыражений условного выражения

1. Варьирование тождества, упрощающего выражение под корневой сложной операцией, с помощью тождества свертки условного выражения. Теорема - тождество $f(A_1 \ldots A_n) = D$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией f не вводящее новых операций большей либо равной сложности. По заголовку s некоторого операнда A_i находится кванторное тождество свертки вида (t_1 при B_1, иначе t_2) $= B_2$, у которого B_2 не содержит символа "вариант", а некоторое t_j имеет заголовок s. После преобразования обеих теорем с помощью подстановки, унифицирующей A_i с t_j, предпринимается упрощение выражения

"($f(A_1 \dots A_{i-1} t_1 A_{i+1} \dots A_n)$ при B_1, иначе $f(A_1 \dots A_{i-1} t_2 A_{i+1} \dots A_n)$)". Результат r не содержит символа "вариант". Консеквент новой теоремы имеет вид $f(A_1 \dots A_{i-1} B_2 A_{i+1} \dots A_n) = r$. Результат упрощается. (Прием сокращ - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{xy}(\neg(y = 0)\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число} \to |x\text{sg}(y)| = |x|)$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to |-a| = |a|)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{xy}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ \neg(y = 0) \to (x \text{ при } 0 < y, \text{ иначе } -x) = x\text{sg}(y))$

4.2.3 Использование тождества для варьирования консеквента дополнительной импликации

Преобразование операнда консеквента

1. Использование тождества для преобразования условия монотонности. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. По заголовку f выражения A_1 находится теорема вида $P(x, y) \to P(t_1, t_2)$ выражающая свойство монотонности для отношения P операции f. Здесь t_1, t_2 - выражения с заголовком f, причем t_2 получается из t_1 заменой переменной x на y. Исходное тождество используется для преобразования некоторого t_i. Результат упрощается. (Прием нормализация - 48).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ac}(c - \text{set}\ \&\ c \subseteq \text{Dom}(a)\ \&\ a - \text{функция} \to \text{образ}(a, c) \subseteq \text{Val}(a))$

   из теоремы

   $\forall_f(f - \text{функция} \to \text{образ}(f, \text{Dom}(f)) = \text{Val}(f))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{cdf}(c - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ c \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ c \subseteq d\ \&\ d \subseteq \text{Dom}(f) \to \text{образ}(f, c) \subseteq \text{образ}(f, d))$

2. Попытка преобразовать пример. Теорема - определение $A_1 = A_2$. По заголовку f определяющей части A_2 находится кванторная импликация без существенных посылок, консеквент которой имеет вид $P(x_1 \dots x_{i-1} f(y_1 \dots y_m) x_{i+1} \dots x_n)$, где $x_1, \dots, x_n$ - различные переменные и $y_1, \dots, y_m$ - различные переменные. Исходная теорема применяется (в обратном направлении) для преобразования $f(y_1 \dots y_m)$ Результат упрощается. (Прием определение - 148).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ad}(a - \text{set}\ \&\ d - \text{set} \to a \setminus d \subseteq a \triangle d)$

   из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \to a \triangle b = a \setminus b \cup b \setminus a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \to b \subseteq b \cup c)$

Индуктивное обобщение дополнительной теоремы с помощью тождества для операции над семейством

1. Усмотрение свойства сокращенной записи серийной операции. Теорема - определение $A_1 = A_2$, где A_2 имеет вид $F(\lambda_i(t(i), 1 \leq i \ \& \ i \leq n \ \& \ \text{целое}(i)))$, причем F - обобщение ассоциативной и коммутативной операции f на наборы произвольной длины. Переменная n имеет в A_2 единственное вхождение. Находится теорема с консеквентом вида $P(\ldots f(x, y) \ldots)$, где x, y - переменные, не имеющие других вхождений в консеквент, а в антецедентах выделяются две непересекающиеся группы - группа S_1 антецедентов, содержащих x, и группа S_2 содержащих y. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Проверяется, что S_2 получается из S_1 заменой x на y, причем утверждения, получаемые из S_1 заменой x на $f(x, y)$, суть следствия антецедентов дополнительной теоремы. Составляется список S_4 - объединение антецедентов исходной теоремы и антецедентов дополнительной, не содержащих ни x, ни y. Проверяется, что результаты подстановки в S_1 выражения $t(i)$ вместо x - следствия S_4 и $1 \leq i, i \leq n, \text{целое}(i)$. Новая теорема имеет антецеденты S_4 и консеквент, получаемый из консеквента дополнительной теоремы заменой $f(x, y)$ на A_1. Результат упрощается. (Прием определение - 84).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_n(n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \to 0 < n!)$

   из теоремы

   $\forall_n(n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \to n! = \prod_{i=1}^{n} i)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to 0 < ab)$

Определение класса используется для расшифровки условия принадлежности

1. Использование определения множества для вывода равенства из условия принадлежности этому множеству. Теорема - определение $A_1 = \text{set}_x(t_1 = t_2 \ \& \ A_2)$. Оценка сложности равенства $t_1 = t_2$ больше 4, причем хотя бы одно из выражений t_1, t_2 - не максимально сложное. Находится теорема с консеквентом вида "$r \in y$", где y - пернеменная, не входящая в r. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Антецедентами новой теоремы служат антецеденты исходной и результаты подстановки в антецеденты дополнительной выражения A_1 вместо y. Консеквент - результат подстановки в $t_1 = t_2$ выражения r вместо x. Результат упрощается. (Прием определение - 204).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{abckA}(b \in \{1,\ldots,c\}$ & $c -$ натуральное & кортеж$(a,c,$сочетания$(A,k)) \rightarrow$ card$(a(b)) = k)$

из теоремы

$\forall_{Ak}(A -$ set $\rightarrow$ сочетания$(A,k) =$ set$_x(x \subseteq A$ & card$(x) = k$ & $x -$ set$))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{aniA}(A -$ set & $n -$ натуральное & кортеж(a,n,A) & $i \in \{1,\ldots,n\} \rightarrow$ $a(i) \in A)$

Тождество разрешается относительно подвыражения, и результат подставляется в консеквент дополнительной теоремы

1. Использование неравенства для числового атома, упоминаемого в тождестве для суммы. Теорема - тождество для числовых атомов, имеющее вид $A_1 + A_2 = A_3$. Здесь A_1 - невырожденный атом, остаточная сумма A_2 имеет не менее двух различных атомов. Вхождение атома A_1 в консеквент единственное. Существенных антецедентов теорема не имеет. По заголовку f атома A_1 находится теорема с консеквентом вида $t_1 < t_2$ либо $t_1 \leq t_2$, где некоторое t_i имеет заголовок f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Находится подстановка C, унифицирующая t_i с A_1. После применения ее к обеим теоремам и объединения антецедентов предпринимается замена t_i на $A_3 - A_2$. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 21).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(a = b)$ & $\neg(c \in$ прямая$(ab))$ & $a -$ точка & $b -$ точка & $c -$ точка $\rightarrow$ $0 < -\angle(acb) - \angle(bac) + \pi)$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $\neg(A = C)$ & $\neg(B = C)$ & $\neg(A = B) \rightarrow \angle(ABC) + \angle(BCA) + \angle(BAC) = \pi)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B)$ & $C \in$ прямая(AB) & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка $\rightarrow 0 < \angle(ABC))$

Тождество позволяет фиксировать значение переменной, связанной в дополнительной теореме квантором существования

1. Преобразование параметрического описания для уравнения множества точек в явное задание этого уравнения. Консеквент теоремы - тождество T без невырожденных числовых атомов, содержащее параметры уравнения для координат множества точек. Имеются два антецедента вида "коорд$(A_1,K) =$ set$_{x_1\ldots x_n}A_2$" и "коорд$(A_3K) =$ set$_{x_1\ldots x_n}A_4$". Они содержат все переменные теоремы. Находится теорема с консеквентом вида "$\exists_p($коорд$(B_1,Q) =$ set$_{y_1\ldots y_n}B_2$ & коорд$(B_3,Q) = (r_1,\ldots,r_n)$ & $B_4)$". В антецедентах этой теоремы встречается равенство

"коорд$(B_5, Q) = \text{set}_{y_1 \ldots y_n} B_6$". Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Усматривается подстановка C, переводящая указанные выше два антецедента исходной теоремы в утверждения "коорд$(B_1, Q) = \text{set}_{y_1 \ldots y_n} B_2$" и "коорд$(B_5, Q) = \text{set}_{y_1 \ldots y_n} B_6$". Составляется список S антецедентов дополнительной теоремы и результатов применения C к антецедентам исходной. Антецеденты "коорд$(A_1, K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_n} A_2$" и "коорд$(B_5, Q) = \text{set}_{y_1 \ldots y_n} B_6$" отбрасываются. Решается задача на описание с посылками S и условием $C(T)$. Единственная неизвестная - p. Антецедентами новой теоремы становятся S и ответ задачи на описание, консеквентом - коорд$(B_3, Q) = (r_1, \ldots, r_n)$ & B_4. Результат упрощается. (Прием числсвязь - 6).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdefghijpqrswx}(\neg(a = p)$ & $\neg(q = r)$ & $w = h(b + c) + i(d + f) + j(e + q)$ & $x = h^2 + i^2 + j^2$ & коорд$(p, s) = (b, d, e)$ & коорд(прямая$(qr), s) =$ $\text{set}_{tuv}(t -$ число & $u -$ число & $v -$ число & пропорцнаборы$((h, i, j), (c + t, f + u,$ $g + v)))$ & $a \in$ прямая(qr) & $c -$ число & $f -$ число & $g -$ число & $h -$ число & $i -$ число & $j -$ число & $a -$ точка & $p -$ точка & $q -$ точка & $r -$ точка & прямая$(ap) \perp$ прямая(qr) & прямкоорд$(s) \rightarrow$ коорд(прямая$(ap), s) =$ $\text{set}_{lmn}(l -$ число & $m -$ число & $n -$ число & пропорцнаборы$((l - b, m - d,$ $n - e), (hw - x(b + c), iw - x(d + f), jw - x(e + g)))))$

из теоремы

$\forall_{abcdefghkpqrABCDK}(\neg(A = B)$ & $\neg(C = D)$ & коорд(прямая$(AB), K) =$ $\text{set}_{xyz}(x -$ число & $y -$ число & $z -$ число & пропорцнаборы$((d, e, f), (a + x,$ $b + y, c + z)))$ & коорд(прямая$(CD), K) = \text{set}_{uvw}(u -$ число & $v -$ число & $w -$ число & пропорцнаборы$((p, q, r), (g + u, h + v, k + w)))$ & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $g -$ число & $h -$ число & $k -$ число & $p -$ число & $q -$ число & $r -$ число & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & прямкоорд$(K) \rightarrow dp + eq + fr = 0)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcdehijklsBCK}(\neg(a = s)$ & $\neg(B = C)$ & коорд$(s, K) = (b, d, e)$ & коорд(прямая$(BC), K) = \text{set}_{xyz}(x -$ число & $y -$ число & $z -$ число & пропорцнаборы$((j, k, l), (c + x, h + y, i + z)))$ & $a \in$ прямая(BC) & $c -$ число & $h -$ число & $i -$ число & $j -$ число & $k -$ число & $l -$ число & $a -$ точка & $s -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & Трехмерн$(K) \rightarrow \exists_m(\text{коорд}(a, K) =$ $(jm - c, km - h, lm - i)$ & коорд(прямая$(as), K) = \text{set}_{pqr}(p -$ число & $q -$ число & $r -$ число & пропорцнаборы$((p - b, q - d, r - e), (jm - b - c, km - d - h,$ $lm - e - i)))$ & $m -$ число$))$

2. Преобразование параметрического описания для уравнения множества точек в явное задание этого уравнения и определение координат точки. Отличие от предыдущего приема только в том, что консеквентом становится коорд$(B_3, Q) =$ $(r_1, \ldots, r_n)$. (Прием числсвязь - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefghijlmnptu}(\neg(a = l)$ & $\neg(m = n)$ & $t = h(b + c) + i(d + f) + j(e + q)$ & $u = h^2 + i^2 + j^2$ & коорд$(l, p) = (b, d, e)$ & коорд(прямая$(mn), p) =$

$\text{set}_{qrs}(q - \text{число}\ \&\ r - \text{число}\ \&\ s - \text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((h,i,j),(c+q,f+r,g+s)))\ \&\ a \in \text{прямая}(mn)\ \&\ c - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{число}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ i - \text{число}\ \&\ j - \text{число}\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ l - \text{точка}\ \&\ m - \text{точка}\ \&\ n - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(al) \perp \text{прямая}(mn)\ \&\ \text{прямкоорд}(p) \to \text{коорд}(a,p) = (-c + ht/u, -f + it/u, -g + jt/u))$

из теоремы

$\forall_{abcdefghkpqrABCDK}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(AB),K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((d,e,f),(a+x,b+y,c+z)))\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD),K) = \text{set}_{uvw}(u - \text{число}\ \&\ v - \text{число}\ \&\ w - \text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((p,q,r),(g+u,h+v,k+w)))\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{число}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ k - \text{число}\ \&\ p - \text{число}\ \&\ q - \text{число}\ \&\ r - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{прямкоорд}(K) \to dp + eq + fr = 0)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcdehijklsBCK}(\neg(a = s)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \text{коорд}(s,K) = (b,d,e)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(BC),K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((j,k,l),(c+x,h+y,i+z)))\ \&\ a \in \text{прямая}(BC)\ \&\ c - \text{число}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ i - \text{число}\ \&\ j - \text{число}\ \&\ k - \text{число}\ \&\ l - \text{число}\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ s - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \to \exists_m(\text{коорд}(a,K) = (jm - c, km - h, lm - i)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(as),K) = \text{set}_{pqr}(p - \text{число}\ \&\ q - \text{число}\ \&\ r - \text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((p-b,q-d,r-e),(jm - b - c, km - d - h, lm - e - i)))\ \&\ m - \text{число}))$

3. Уменьшение числа параметров уравнения множества точек при помощи одного соотношения. Консеквент теоремы - конъюнкция соотношений (равенств) для параметров уравнения "$\text{коорд}(X,K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A_2)$", содержащегося в антецедентах. Имеется также антецедент вида $P(x)$. Находится другая теорема вида $P(Y) \to \exists_{y_1 \ldots y_m}(\text{коорд}(Y,Q) = \text{set}_{z_1 \ldots z_k}(B_1)\ \&\ B_2)$. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка C, переводящая уравнение из антецедентов исходной теоремы в уравнение под квантором существования дополнительной теоремы. Результаты применения C к антецедентам исходной теоремы разбиваются на подсписок S_1 утверждений, содержащих переменные $y_1, \ldots, y_m$, и подсписок S_2 остальных утверждений. Проверяется, что S_1 - подмножество конъюнктивных членов B_2. Антецедентами новой теоремы становятся антецеденты дополнительной и утверждения S_2. Консеквентом - результат занесения под квантор существования дополнительной теоремы результатов применения C к конъюнктивным членам консеквента исходной теоремы. Результат упрощается. Проверяется, что добавленные соотношения уменьшили число связанных переменных квантора существования. (Прием числсвязь - 10).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ghijtuB}(t \subseteq \text{плоскость}(gBh)\ \&\ u = (g,B,h)\ \&\ g - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ h - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(u)\ \&\ \text{линвторпорядка}(t)\ \&\ \text{невырожд}(t)\ \&\ i - \text{точка}\ \&\ j - \text{точка}\ \&\ \neg(i = j)\ \&\ g \in \text{прямая}(ij)\ \&\ h \in \text{прямая}(ij)\ \&$

осьсимметрии(прямая$(ij), t) \to \exists_{kmpq}$(коорд$(t, u) = \text{set}_{rs}(q + kr^2 + ms^2 + ps =$ 0 & $r -$ число & $s -$ число) & $k -$ число & $m -$ число & $p -$ число & $q -$ число))

из теоремы

$\forall_{abcdefghijBEK}(K = (g, B, h)$ & коорд$(E, K) = \text{set}_{xy}(f + ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey =$ 0 & $x -$ число & $y -$ число) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $g -$ точка & $B -$ точка & $h -$ точка & прямкоорд(K) & линвторпорядка(E) & невырожд(E) & $i -$ точка & $j -$ точка & $\neg(i = j)$ & $g \in$ прямая(ij) & $h \in$ прямая(ij) & осьсимметрии(прямая$(ij), E) \to b = 0$ & $d = 0)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{EK}(E \subseteq$ плоскоорд(K) & Двумерн(K) & прямкоорд(K) & линвторпорядка$(E) \to$ $\exists_{abcdef}(\neg($Нуль$(\{a, b, c\}))$ & коорд$(E, K) = \text{set}_{xy}(f + ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey =$ 0 & $x -$ число & $y -$ число) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число))

4. Уменьшение числа параметров уравнения множества точек при помощи двух соотношений. Начало приема совпадает с предыдущим приемом. Однако, после уменьшения длины связывающей приставки квантора существования в консеквенте процедура повторяется: в качестве исходной теоремы теперь выбирается какая-либо теорема из текущего списка вывода, тоже имеющая характеристику "числсвязь". (Прием числсвязь - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ghijtuBHI}(t \subseteq$ плоскость(gBh) & $g -$ точка & $B -$ точка & $h -$ точка & $i -$ точка & $j -$ точка & $\neg(i = j)$ & $g \in$ прямая(ij) & $h \in$ прямая(ij) & осьсимметрии(прямая$(ij), t)$ & $u = (g, B, h)$ & прямкоорд(u) & линвторпорядка(t) & невырожд(t) & $H -$ точка & $I -$ точка & $\neg(H = I)$ & $g \in$ прямая(HI) & $B \in$ прямая(HI) & осьсимметрии(прямая$(HI), t) \to$ $\exists_{kmq}$(коорд$(t, u) = \text{set}_{rs}(q + kr^2 + ms^2 = 0$ & $r -$ число & $s -$ число) & $k -$ число & $m -$ число & $q -$ число))

из теоремы

$\forall_{abcdefghijBEK}(K = (g, B, h)$ & коорд$(E, K) = \text{set}_{xy}(f + ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey =$ 0 & $x -$ число & $y -$ число) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $g -$ точка & $B -$ точка & $h -$ точка & прямкоорд(K) & линвторпорядка(E) & невырожд(E) & $i -$ точка & $j -$ точка & $\neg(i = j)$ & $g \in$ прямая(ij) & $h \in$ прямая(ij) & осьсимметрии(прямая$(ij), E) \to b = 0$ & $d = 0)$

и дополнительных теорем

$\forall_{EK}(E \subseteq$ плоскоорд(K) & Двумерн(K) & прямкоорд(K) & линвторпорядка$(E) \to$ $\exists_{abcdef}(\neg($Нуль$(\{a, b, c\}))$ & коорд$(E, K) = \text{set}_{xy}(f + ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey =$ 0 & $x -$ число & $y -$ число) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число))

$\forall_{abcdefghijCEK}(K = (g, h, C)$ & коорд$(E, K) = \text{set}_{xy}(f + ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $g -$ точка & $h -$ точка & $C -$ точка & прямкоорд(K) & линвторпорядка(E) & невырожд(E) & $i -$ точка & $j -$ точка & $\neg(i = j)$ & $g \in$ прямая(ij) & $h \in$ прямая(ij) & осьсимметрии(прямая$(ij), E) \to b = 0$ & $e = 0)$

4.2.4 Использование тождества для варьирования произвольной дополнительной теоремы

1. Использование дополнительной теоремы, связанной с самым сложным понятием заменяющей части. Теорема - определение функции f, имеющее вид "$\lambda_{x_1 \ldots x_n}(f(x_1 \ldots x_n), A_1) = A_2$". Выражение A_2 имеет единственное подвыражение максимальной сложности; заголовок его равен g. По заголовку h выражения A_2 в разделе символа g находится дополнительная теорема, в которой имеется подвыражение t с заголовком h, содержащее символ g. Исходная теорема применяется (в направлении справа налево) для преобразования t. Результат упрощается. (Прием опр - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_x(x -$ число & $0 \le 2x + \pi$ & $0 \le -2x + \pi \to \arcsin \sin x = x)$

   из теоремы

   обрфункция$(\lambda_x(\sin x, x \in [-\pi/2, \pi/2])) = \lambda_x(\arcsin x, x \in [-1, 1])$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_f(f -$ функция & взаимнооднозначно$(f) \to$ обрфункция$(f) -$ функция & Dom(обрфункция$(f))$ = Val(f) & $\forall_x(x \in \text{Dom}(f)) \to$ обрфункция$(f)(f(x)) = x)$

4.3 Использование импликации для варьирования дополнительной теоремы

Импликация позволяет расширить список условий под квантором существования в дополнительной теореме

1. Варьирование системы координат для получения утверждения существования канонической системы. Теорема имеет антецедент вида "коорд$(X, K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A)$", содержащий все параметры антецедентов. Находится теорема с консеквентом вида $\exists_{y_1 \ldots y_n}($коорд$(Y, Q) = \text{set}_{z_1 \ldots z_k}(B_1)$ & $B_2)$, определяющим новую систему координат Q, в которой уравнение для множества Y приобретает канонический вид. Исходный вид данного уравнения в произвольной системе координат задан в антецедентах. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Находится подстановка C, переводящая уравнение из исходной теоремы в уравнение из консеквента дополнительной. Результаты применения C к отличным от уравнения для координат антецедентам исходной теоремы разбиваются на список S_1 утверждений, содержащих переменные $y_1, \ldots, y_n$, и подсписок S_2

прочих утверждений. Утверждения S_2 обавляются к антецедентам дополнительной теоремы, утверждения S_1 заносятся под квантор существования в ее консеквенте. (Прием уравндробь - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdefghqr}(af < 0\ \&\ 0 < bf\ \&\ b - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{число}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ \text{прямкоорд}(r)\ \&\ \text{коорд}(q,r) = \text{set}_{kl}(h + bk^2 + dk + fl^2 + gl = 0\ \&\ k - \text{число}\ \&\ l - \text{число})\ \&\ b(f-b) \le 0\ \&\ a = 4bfh - bg^2 - fd^2\ \&\ c = -d/(2b)\ \&\ e = -g/(2f) \to \exists_{mnps}((m,n,p) = s\ \&\ \text{коорд}(m,r) = (c,e)\ \&\ \text{коорд}(n,r) = (c,e+1)\ \&\ \text{коорд}(p,r) = (c+1,e)\ \&\ \text{коорд}(q,s) = \text{set}_{ji}(a + 4bf^2j^2 + 4fb^2i^2 = 0\ \&\ i - \text{число}\ \&\ j - \text{число})\ \&\ m - \text{точка}\ \&\ n - \text{точка}\ \&\ p - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(s)\ \&\ \text{каноничкоорд}(s,q)))$

из теоремы

$\forall_{EKace}(a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + cy^2 + e = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ 0 < ac\ \&\ 0 \le e(a-c)\ \&\ ce < 0 \to \text{каноничкоорд}(K,E))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{EKabcde}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \neg(c=0)\ \&\ \neg(a=0)\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + cy^2 + bx + dy + e = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}) \to \exists_{ABCQ}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ (A,B,C) = Q\ \&\ \text{коорд}(A,K) = (-b/(2a), -d/(2c))\ \&\ \text{коорд}(C,K) = (-b/(2a)+1, -d/(2c))\ \&\ \text{коорд}(B,K) = (-b/(2a), -d/(2c)+1)\ \&\ \text{коорд}(E,Q) = \text{set}_{vu}(4a^2cu^2 + 4ac^2v^2 - b^2c - d^2a + 4ace\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число})))$

Простая импликация реализует фрагмент консеквента дополнительной теоремы

1. Попытка использования простой импликации без существенных посылок для реализации конъюнктивного члена заменяемой части эквивалентности типа "соединение". Теорема - кванторная импликация без существенных антецедентов и с элементарным консеквентом, отличным от равенства. По заголовку f ее консеквента находится теорема вида $B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_n \leftrightarrow D$, где все B_i, D бесповторны и имеют одни и те же параметры. Некоторое B_j имеет заголовок f. Исходная теорема используется для реализации B_j. Результат упрощается. (Прием элементарно - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \to |a| \le a \leftrightarrow 0 \le a)$

   из теоремы

   $\forall_c(c - \text{число} \to c \le |c|)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to a \le b\ \&\ b \le a \leftrightarrow a = b)$

2. Попытка усиления простой импликации без существенных посылок с помощью эквивалентности типа "соединение". Теорема - кванторная импликация без существенных антецедентов и с элементарным консеквентом, отличным от равенства. По заголовку f ее консеквента находится теорема вида B_1 & $B_2 \leftrightarrow D$, где все B_i, D бесповторны и имеют одни и те же параметры. B_1 имеет заголовок f. Находится подстановка C, унифицирующая B_1 и консеквент исходной теоремы. Составляется список S результатов применения C к антецедентам обеих теорем. Проверяется, что $C(B_2)$ - следствие S. Новая теорема имеет консеквент $C(D)$ и антецеденты S. Результат упрощается. (Прием элементарно - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_x(x - \text{число} \to |\sin x| \leq 1)$

   из теоремы

   $\forall_x(x - \text{число} \to \sin x \leq 1)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to a \leq b\ \&\ -a \leq b \leftrightarrow |a| \leq b)$

3. Реализация заменяющей части дополнительной эквивалентности и преобразование ее в импликацию. Теорема - кванторная импликация для создания приема проверочного оператора. Ее консеквент A имеет заголовок f. Находится теорема вида $B \leftrightarrow D_1$ & ... & D_n, где некоторое D_i имеет заголовок f. Создается вспомогательная теорема, полученная из дополнительной теоремы перенесением утверждений $D_1, \ldots, D_n$ в антецеденты и выбором B в качестве консеквента. Исходная теорема применяется для реализации антецедента D_i. Результат упрощается. (Прием спуск - 30).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(b - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(b) \to$
   $\text{биекция}(\text{обрфункция}(b), \text{Val}(b), \text{Dom}(b)))$

   из теоремы

   $\forall_f(f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \to$
   $\text{взаимнооднозначно}(\lambda_a(\text{обрфункция}(f)(a), a \in \text{Val}(f))))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{fAB}(f - \text{функция}\ \&\ A - \text{set}\ \&\ B - \text{set} \to \text{биекция}(f, A, B) \leftrightarrow$
   $\text{Dom}(f) = A\ \&\ \text{Val}(f) = B\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f))$

Фиксация значений параметров дополнительной теоремы при помощи равенств из консеквента исходной теоремы

1. реобразование соотношений для координат в соотношения для их разрядов. Теорема имеет один из антецедентов вида "коорд$(A, K) = (a_1, \ldots, a_n)$" и консеквент вида "крд$(A, K, 1) = a_1$ & ... & крд$(A, K, n) = a_n$", причем $a_1, \ldots, a_n$

- различные переменные. Находится другая теорема, имеющая несколько антецедентов вида "коорд$(B,K)=(b_1,\ldots,b_n)$", причем все $b_1,\ldots,b_n$, объединенные по этим антецедентам, суть различные переменные. В ней предпринимается переход от переменных b_j к выражениям "крд(B,K,j)". Кроме того, равенства вида "коорд$(D,K)=(d_1,\ldots,d_n)$" в консеквенте заменяются на конъюнкции "крд$(D,K,1)=d_1$ & ... & крд$(D,K,n)=d_n$". Результат упрощается. Если консеквентом оказывается конъюнкция, то теорема заменяется на конъюнкцию импликаций. Каждая из них по отдельности упрощается и регистрируется. (Прием нормкрд - 6).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABK}$(Вектор(A) & Вектор(B) & Трехмерн$(K)\rightarrow$ крд$(A,K,1)+$крд$(B,K,1)=$ крд$(A+B,K,1))$

из теоремы

$\forall_{AKabc}$(Трехмерн(K) & Вектор(A) & коорд$(A,K)=(a,b,c)\rightarrow$ крд$(A,K,1)=a$ & крд$(A,K,2)=b$ & крд$(A,K,3)=c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcdefABK}$(систкоорд(K) & Вектор(A) & Вектор(B) & коорд$(A,K)=(a,b,c)$ & коорд$(B,K)=(d,e,f)\rightarrow$ коорд$(A+B,K)=(a+d,b+e,c+f))$

Использование параметрического описания для варьирования дополнительной теоремы

1. Попытка вывести следствие, не зависящее от переменных связывающей приставки. Консеквент теоремы имеет вид "$\exists_{x_1\ldots x_k}(A_1$ & ... & $A_n)$". Некоторое A_i имеет вид $x=t$, где переменная x отлична от $x_1,\ldots,x_k$ и не входит в t. Выражение t содержит переменные $x_1,\ldots,x_k$. Самый сложный подтерм выражения t - само t, причем его оценка сложности больше 5. По заголовку f выражения t находится дополнительная теорема с элементарными антецедентами и консеквентом, причем консеквент ее содержит f, а некоторый антецедент имеет подвыражение r с заголовком f, переводимое некоторой подстановкой C в t. Предварительно переменные дополнительной теоремы переобозначены так, чтобы не входить в исходную теорему. После применения C к антецедентам и консеквента дополнительной теоремы предпринимается повсеместная замена в ней выражения t на x. Проверяется, что консеквент не содержит переменных $x_1,\ldots,x_k$, а содержащие переменные $x_1,\ldots,x_k$ антецеденты дополнительной теоремы суть следствия прочих ее антецедентов, антецедентов исходной теоремыи утверждений $A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_n$. Затем отбрасываются антецеденты дополнительной теоремы, содержащие $x_1,\ldots,x_k$; к ним добавляются все антецеденты исходной теоремы, и результат упрощается. (Прием допконтекст - 23).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{fxG}(f\in x$ & $x\in$ компоненты(G) & граф$(G)\rightarrow$ компсвязн$(G,f)=x)$

из теоремы

$\forall_{xG}(x \in \text{компоненты}(G)\ \&\ \text{граф}(G) \to \exists_y(y \in \text{вершины}(G)\ \&$
$x = \text{компсвязн}(G, y)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{adf}(a \in \text{вершины}(d)\ \&\ f \in \text{компсвязн}(d, a)\ \&\ \text{граф}(d) \to \text{компсвязн}(d, f) = \text{компсвязн}(d, a))$

Глава 5

Обобщение теоремы

5.1 Отбрасывание избыточного антецедента

Отбрасывание избыточного отрицания равенства

1. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства в антецедентах. Теорема - тождество, имеющее более одного нечислового атомарного выражения заданного типа. Некоторый антецедент, не входящий в о.д.з. консеквента и других антецедентов, имеет вид $\neg(t_1 = t_2)$. При помощи задачи на доказательство усматривается, что консеквент - следствие списка антецедентов, в котором $\neg(t_1 = t_2)$ заменено на $t_1 = t_2$. Затем антецедент $\neg(t_1 = t_2)$ отбрасывается. При решении задачи разрешается ввод дополнительных посылок. Если таковые появились, они добавляются к антецедентам. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием Атомарное - 3).

   Пример: вывод утверждения

   $\forall_{ABac}(a - \text{число}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ 0 \leq a \rightarrow a(\text{вектор}(cB) + \text{вектор}(Ac)) = a\text{вектор}(cB) + a\text{вектор}(Ac))$

   из утверждения

   $\forall_{ABac}(\neg(A = B)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ 0 \leq a \rightarrow a(\text{вектор}(cB) + \text{вектор}(Ac)) = a\text{вектор}(cB) + a\text{вектор}(Ac))$

2. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной в антецедентах. Аналогично предыдущему, но исходная теорема - импликация для приема вывода в посылках. Дополнительные посылки не вводятся, но в конце к списку антецедентов добавляются условия на о.д.з. оставшихся в этом списке утверждений. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием вывод - 42).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcde}(\neg(d = e)\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ c - \text{точка}\ \&$
   $b - \text{точка}\ \&\ \neg(\text{прямая}(bc) = \text{прямое}(de))\ \&\ \text{однасторона}(b, c, \text{прямая}(de))\ \&$
   $a \in \text{прямая}(de)\ \&\ a \in \text{прямая}(bc) \rightarrow \neg(a \in \text{интервал}(bc)))$

   из теоремы

$\forall_{abcde}(\neg(d = e)$ & $e -$ точка & $d -$ точка & $\neg(b = c)$ & $c -$ точка & $b -$ точка & $\neg(a = b)$ & $\neg($прямая$(bc) =$ прямое$(de))$ & однасторона$(b, c,$ прямая$(de))$ & $a \in$ прямая(de) & $a \in$ прямая$(bc) \rightarrow \neg(a \in$ интервал$(bc)))$

3. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства в антецедентах с помощью задачи на доказательство. Консеквент теоремы имеет вид дизъюнкции. Некоторый антецедент имеет вид $\neg(t_1 = t_2)$, причем либо t_2 константное, либо t_1 - переменная, не входящая в t_2. Этот антецедент не используется для сопровождения по о.д.з. Предпринимается попытка доказать истинность консеквента при замене указанного антецедента на $t_1 = t_2$. Снимается блокировка с приемов, основанных на стартовых теоремах списка вывода. В случае успеха антецедент отбрасывается. Результат регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием дизъюнкция - 14).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = C)$ & $B -$ точка & $A -$ точка & $C -$ точка & точкалуча$(C, A, B) \rightarrow$ $B \in$ отрезок$(AC) \ \vee \ A \in$ отрезок$(BC))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(-$ точка & $\neg(A = C)$ & $\neg(B = C)$ & $A -$ точка & $B -$ точка & точкалуча$(C, A, B) \rightarrow B \in$ отрезок$(AC) \ \vee \ A \in$ отрезок$(BC))$

4. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной либо константному выражению в антецедентах. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. (Прием числовойатом - 25).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcde}(d -$ точка & $c -$ точка & $e -$ точка & $b -$ точка & $a -$ точка & $l(ab) = l(ae)$ & $l(ac) = l(ad)$ & $a \in$ отрезок(be) & $a \in$ отрезок$(cd) \rightarrow l(bc) = l(de))$

   из теоремы

   $\forall_{abcde}(d -$ точка & $c -$ точка & $e -$ точка & $b -$ точка & $a -$ точка & $\neg(a = e)$ & $l(ab) = l(ae)$ & $l(ac) = l(ad)$ & $a \in$ отрезок(be) & $a \in$ отрезок$(cd) \rightarrow l(bc) = l(de))$

5. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства в антецедентах после преобразования другого антецедента. Консеквент теоремы имеет вид дизъюнкции. Некоторый антецедент имеет вид "$\neg(x = t)$", где переменная x не входит в t. Этот антецедент не используется для сопровождения по о.д.з. консеквента, но используется для сопровождения по о.д.з. единственного антецедента A. Решается задача на преобразование A относительно остальных отличных от "$\neg(x = t)$" антецедентов к такому виду, чтобы его о.д.з. была следствием посылок. Специальная цель "нормодз" означает, что преобразования будут эквивалентными в предположении добавления к посылкам о.д.з. исходной версии условия. Результат замещает A в списке антецедентов. Далее, как и в предыдущих приемха, усматривается, что консеквент - следствие антецедентов, в которых "$\neg(x = t)$" заменено на $x = t$. Наконец, "$\neg(x = t)$" удаляется. Результат регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием дизъюнкция - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&$
$\neg(B = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ C \in \text{прямая}(AB) \rightarrow B \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ \angle(ABD) =$
$\pi - \angle(CBD)\ \vee\ \text{точкалуча}(B, A, C)\ \&\ \angle(ABD) = \angle(CBD))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&$
$\neg(B = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ B \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \neg(A = C) \rightarrow B \in \text{отрезок}(AC)\ \&$
$\angle(ABD) = \pi - \angle(CBD)\ \vee\ \text{точкалуча}(B, A, C)\ \&\ \angle(ABD) = \angle(CBD))$

6. Удаление избыточного отрицания в антецедентах. Теорема - тождество для координат объектов. Некоторый антецедент имеет вид $\neg(t_1 = t_2)$ и не используется для сопровождения по о.д.з. Если заменить его на $t_1 = t_2$ то истинность консеквента усматривается при помощи задачи на доказательство. Разрешается использовать теоремы, уже имеющиеся в списке вывода. Тогда этот антецедент отбрасывается. Результат регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием коорд - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{efghAK}(\text{коорд}(\text{вектор}(Ag), K) = (f, h)\ \&\ e - \text{число}\ \&\ g - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
   $0 \leq e\ \&\ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(e \cdot \text{вектор}(Ag), K) = (ef, eh))$

   из теоремы

   $\forall_{efghAK}(\neg(g = A)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(Ag), K) = (f, h)\ \&\ e - \text{число}\ \&\ g - \text{точка}\ \&$
   $A - \text{точка}\ \&\ 0 \leq e\ \&\ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(e \cdot \text{вектор}(Ag), K) = (ef, eh))$

7. Повторная попытка удаления избыточного отрицания в антецедентах. Дубликат предыдущего приема, срабатывающий на более высоком уровне (т.е. с расширенным списком теорем, которыми можно пользоваться). (Прием коорд - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefgABCDEK}(\neg(g = E)\ \&\ K = (A, B, C, D)\ \&\ \text{коорд}(g, K) = (d, e, f)\ \&$
   $\text{коорд}(E, K) = (a, b, c)\ \&\ g - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(gE) \parallel \text{плоскость}(ABC)$
   $\&\ \text{систкоорд}(K) \rightarrow c = f)$

   из теоремы

   $\forall_{abcdefgABCDEK}(\neg(g = E)\ \&\ \neg(E \in \text{плоскость}(ABC))\ \&\ K = (A, B, C, D)\ \&$
   $\text{коорд}(g, K) = (d, e, f)\ \&\ \text{коорд}(E, K) = (a, b, c)\ \&\ g - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
   $\text{прямая}(gE) \parallel \text{плоскость}(ABC)\ \&\ \text{систкоорд}(K) \rightarrow c = f)$

8. Попытка отбрасывания избыточного отрицания равенства переменной в антецедентах. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество общей стандартизации. Проверяется не только то, что антецедент $\neg(x = t)$ не используется для сопровождения по о.д.з., но и не является следствием утверждений, используемых для такого сопровождения. (Прием нормализация - 93).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка} \to 0 \cdot \text{вектор}(bc) = \text{вектор}0)$

из теоремы

$\forall_{bc}(\neg(b = c)\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка} \to 0 \cdot \text{вектор}(bc) = \text{вектор}0)$

9. Попытка отбрасывания избыточного отрицания равенства в антецедентах. Теорема - тождество, позволяющее определить числовой атом при помощи равенства в посылках, фиксирующего значение более сложного атома. Некоторый антецедент имеет вид $\neg(x = t)$, где x - переменная, не входящая в t. Он не используется для сопровождения по о.д.з. Если заменить его на $x = t$, то истинность консеквента усматривается при помощи задачи на доказательство. Тогда этот антецедент отбрасывается. Результат регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием опратом - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdef}(\neg(b = e)\ \&\ f - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ \text{точкалуча}(b, c, d)\ \&\ \text{точкалуча}(b, e, f)\ \&\ \text{скалумнож}(\text{вектор}(bd), \text{вектор}(bf)) = a \to a = \cos(\angle(cbe))l(db)l(bf))$

   из теоремы

   $\forall_{abcdef}(\neg(b = e)\ \&\ f - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ \neg(b = d)\ \&\ \text{точкалуча}(b, c, d)\ \&\ \text{точкалуча}(b, e, f)\ \&\ \text{скалумнож}(\text{вектор}(bd), \text{вектор}(bf)) = a \to a = \cos(\angle(cbe))l(db)l(bf))$

10. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной в антецедентах. Аналогично предыдущему, но теорема выводит ограничения на прочие неизвестные из уравнения, разрешаемого относительно заданной неизвестной. (Прием огрзавис - 2).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abde}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ ae + be^2 = d \to 0 \leq 4bd + a^2)$

    из теоремы

    $\forall_{abde}(\neg(b = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ ae + be^2 = d \to 0 \leq 4bd + a^2)$

11. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной в антецедентах. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, выражающее сложный числовой атом через более простые. (Прием числатом - 13).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{aAB}(a - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ 0 \leq a \to \text{длина}(a \cdot \text{вектор}(AB)) = a \cdot \text{длина}(\text{вектор}(AB)))$

    из теоремы

    $\forall_{aAB}(a - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ 0 \leq a \to \text{длина}(a \cdot \text{вектор}(AB)) = a \cdot \text{длина}(\text{вектор}(AB)))$

12. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной в антецедентах. Аналогично предыдущему, но теорема - соотношение пропорциональности для числовых атомов. (Прием пропорция - 8).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abdefg}(\neg(d=g)\ \&\ \neg(e=g)\ \&\ \neg(f=g)\ \&\ al(de)=bl(ef)\ \&$
    $e \in \text{отрезок}(df)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{точка}\ \&\ e-\text{точка}\ \&$
    $f-\text{точка}\ \&\ g-\text{точка} \to b\sin(\angle(egf))l(fg)=a\sin(\angle(dge))l(dg))$

    из теоремы

    $\forall_{abdefg}(\neg(d=g)\ \&\ \neg(e=f)\ \&\ \neg(e=g)\ \&\ \neg(f=g)\ \&\ al(de)=bl(ef)\ \&$
    $e \in \text{отрезок}(df)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{точка}\ \&\ e-\text{точка}\ \&$
    $f-\text{точка}\ \&\ g-\text{точка} \to b\sin(\angle(egf))l(fg)=a\sin(\angle(dge))l(dg))$

13. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной в антецедентах. Аналогично предыдущему, но теорема - кванторная импликация, выводящая отличный от равенства нечисловой двуместный предикат. Все его подвыражения уже встречаются в антецедентах. (Прием отношение - 18).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abBCD}(\neg(a=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(\text{прямая}(bB)=\text{прямая}(CD))\ \&$
    $a \in \text{отрезок}(bB)\ \&\ B \in \text{прямая}(CD)\ \&\ a-\text{точка}\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&$
    $C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка} \to \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(ab)))$

    из теоремы

    $\forall_{abBCD}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(a=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(\text{прямая}(bB)=\text{прямая}(CD))\ \&$
    $a \in \text{отрезок}(bB)\ \&\ B \in \text{прямая}(CD)\ \&\ a-\text{точка}\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&$
    $C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка} \to \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(ab)))$

14. Попытка отбросить избыточное отрицание в антецедентах. Аналогично предыдущему, но антецедент - отрицание равенства любого типа. Уровень срабатывания больше, чем в предыдущем приеме. (Прием отношение - 21).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abBCDE}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(a=D)\ \&\ \neg(b=B)\ \&\ \neg(B=D)\ \&\ \neg(C=E)\ \&$
    $l(aD)l(BC)=l(bB)l(DE)\ \&\ C \in \text{прямая}(bB)\ \&\ E \in \text{прямая}(aD)\ \&\ a-\text{точка}\ \&$
    $b-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&$
    $\text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(BD)\ \&\ \text{однасторона}(B, D, \text{прямая}(CE))\ \&$
    $\text{однасторона}(C, E, \text{прямая}(BD)) \to \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(CE))$

    из теоремы

    $\forall_{abBCDE}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(a=D)\ \&\ \neg(b=B)\ \&\ \neg(B=D)\ \&\ \neg(C=E)\ \&$
    $\neg(\text{прямая}(ab)=\text{прямая}(aD))\ \&\ l(aD)l(BC)=l(bB)l(DE)\ \&\ C \in \text{прямая}(bB)\ \&$
    $E \in \text{прямая}(aD)\ \&\ a-\text{точка}\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&$
    $D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(BD)\ \&\ \text{однасторона}(B, D,$
    $\text{прямая}(CE))\ \&\ \text{однасторона}(C, E, \text{прямая}(BD)) \to \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(CE))$

15. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной в антецедентах. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций большей или равной сложности. При решении задачи на доказательство разрешается применять теоремы, уже имеющиеся в списке вывода. (Прием сокращ - 29).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{bAB}(b - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ b \leq 0 \to (-b) \cdot \text{вектор}(AB) = -(b \cdot \text{вектор}(AB)))$

    из теоремы

    $\forall_{bAB}(\neg(A = B)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ b \leq 0 \to (-b) \cdot \text{вектор}(AB) = -(b \cdot \text{вектор}(AB)))$

16. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной в антецедентах. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество без невырожденных числовых атомов, содержащее параметры уравнения для координат множества точек. (Прием числсвязь - 8).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{defgjklpqrstB}(\text{коорд}(B,t) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число})\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ \text{Прямая}(B)\ \&\ B \parallel \text{прямая}(pq)\ \&\ p - \text{точка}\ \&\ q - \text{точка}\ \&\ r - \text{точка}\ \&\ s - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(t)\ \&\ \neg(p = q)\ \&\ r \in \text{прямая}(pq)\ \&\ s \in \text{прямая}(pq)\ \&\ \text{коорд}(r,t) = (g,j)\ \&\ \text{коорд}(s,t) = (k,l) \to (l - j)e - (g - k)d = 0)$

    из теоремы

    $\forall_{defgjklpqrstB}(\text{коорд}(B,t) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число})\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ \text{Прямая}(B)\ \&\ B \parallel \text{прямая}(pq)\ \&\ p - \text{точка}\ \&\ q - \text{точка}\ \&\ r - \text{точка}\ \&\ s - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(t)\ \&\ \neg(p = q)\ \&\ r \in \text{прямая}(pq)\ \&\ s \in \text{прямая}(pq)\ \&\ \text{коорд}(r,t) = (g,j)\ \&\ \text{коорд}(s,t) = (k,l)\ \&\ \neg(r = s) \to (l - j)e - (g - k)d = 0)$

17. Отбрасывание избыточного отрицания равенства переменной в антецедентах. Аналогично предыдущему, но теорема - эквивалентность, используемая для сокращенной переформулировки утверждений. (Прием сборка - 21).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{bcd}(\neg(b = 0)\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ c - \text{целое}\ \&\ d - \text{целое} \to b \mid d\ \&\ c \mid d \leftrightarrow \text{нок}(b,c) \mid d)$

    из теоремы

    $\forall_{bcd}(\neg(b = 0)\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ c - \text{целое}\ \&\ \neg(d = 0)\ \&\ d - \text{целое} \to b \mid d\ \&\ c \mid d \leftrightarrow \text{нок}(b,c) \mid d)$

18. Попытка отбросить избыточное отрицание в антецедентах. Теорема - простая импликация с бесповторными антецедентами и консеквентом, у которой каждая переменная антецедентов встречается в консеквенте. Некоторый антецедент имеет вид $\neg(t_1 = t_2)$. Он не используется для сопровождения по о.д.з. прочих антецедентов и консеквента, причем любое используемое для этой цели утверждение - следствие остальных антецедентов. Проверяется, что при замене данного антецедента на $t_1 = t_2$ консеквент остается следствием антецедентов. Тогда этот антецедент отбрасывается. Результат регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием попыткаспуска - 20).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abcdefhij}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ i - \text{число}\ \&\ j - \text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((a,b,c),(d,e,f))\ \&\ \text{пропорцнаборы}((d,e,f),(h,i,j)) \to \text{пропорцнаборы}((d,e,f),(a+h,b+i,c+j)))$

    из теоремы

    $\forall_{abcdefhij}(\neg(d^2+e^2+f^2=0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ i - \text{число}\ \&\ j - \text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((a,b,c),(d,e,f))\ \&\ \text{пропорцнаборы}((d,e,f),(h,i,j)) \to \text{пропорцнаборы}((d,e,f),(a+h,b+i,c+j)))$

19. Отбрасывание избыточного отрицания равенства переменной в антецедентах. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема проверочного оператора. Некоторый антецедент имеет вид $\neg(A)$, где A - либо равенство переменной не содержащему ее выражению, либо равенство нулю суммы квадратов. Он не используется для сопровождения по о.д.з. прочих антецедентов и консеквента. Проверяется, что при замене данного антецедента на A консеквент остается следствием антецедентов. При решении задачи на доказательство разрешается применять теоремы, уже имеющиеся в списке вывода, а также вводить дополнительные посылки. В случае успеха антецедент отбрасывается, а дополнительные посылки, если они были, добавляются к антецедентам. Результат регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием спуск - 36).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ABC}(0 < -l(AB) + l(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \to \neg(C \in \text{отрезок}(AB)))$

    из теоремы

    $\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ 0 < -l(AB) + l(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \to \neg(C \in \text{отрезок}(AB)))$

20. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства в антецедентах. Теорема - тождество, преобразующее выражение к виду стандартного представления объектов данного типа. Некоторый антецедент имеет вид $\neg(x = a)$, где x - переменная, a - константное выражение. Он не используется для сопровождения по о.д.з. Если заменить его на "$x = a$", то истинность консеквента усматривается при помощи задачи на доказательство. Тогда этот антецедент отбрасывается. Результат регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием Стандкомпл - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{nz}(z - \text{комплексное } \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow z^n = (|z|)^n \cos(n \cdot \arg(z)) + (|z|)^n \sin(n \cdot \arg(z))i)$

из теоремы

$\forall_{nz}(\neg(z = 0) \ \& \ z - \text{комплексное } \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow z^n = (|z|)^n \cos(n \cdot \arg(z)) + (|z|)^n \sin(n \cdot \arg(z))i)$

21. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства нечисловых объектов в антецедентах. Теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. Имеется антецедент вида $\neg(t_1 = t_2)$, причем выражение t_1 принимает нечисловые значения. Этот антецедент не используется для сопровождения по о.д.з. Если заменить его на $t_1 = t_2$, то истинность консеквента усматривается при помощи задачи на доказательство. Снимается блокировка приемов, основанных на стартовых теоремах цикла вывода. Далее указанный антецедент отбрасывается. Результат регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием числовой-атом - 78).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdeAB}(e - \text{точка } \& \ \neg(A = B) \ \& \ B - \text{точка } \& \ A - \text{точка } \& \ d - \text{точка } \& \ c - \text{точка } \& \ \neg(c = e) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(b = e) \ \& \ a \in \text{отрезок}(cd) \ \& \ a \in \text{окружность}(AB) \ \& \ b \in \text{отрезок}(ce) \ \& \ b \in \text{окружность}(AB) \ \& \ d \in \text{окружность}(AB) \ \& \ e \in \text{окружность}(AB) \ \& \ a - \text{точка } \& \ b - \text{точка} \rightarrow l(ac)l(bd) = l(ae)l(bc))$

из теоремы

$\forall_{abcdeAB}(e - \text{точка } \& \ \neg(A = B) \ \& \ B - \text{точка } \& \ A - \text{точка } \& \ d - \text{точка } \& \ c - \text{точка } \& \ \neg(c = e) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(b = e) \ \& \ \neg(\text{прямая}(cd) = \text{прямая}(ce)) \ \& \ a \in \text{отрезок}(cd) \ \& \ a \in \text{окружность}(AB) \ \& \ b \in \text{отрезок}(ce) \ \& \ b \in \text{окружность}(AB) \ \& \ d \in \text{окружность}(AB) \ \& \ e \in \text{окружность}(AB) \ \& \ a - \text{точка } \& \ b - \text{точка} \rightarrow l(ac)l(bd) = l(ae)l(bc))$

22. Отбрасывание избыточного отрицания равенства в антецедентах. Теорема - тождество для декомпозиции выражения со сложным заголовком. Имеется антецедент вида $\neg(t_1 = t_2)$. Этот антецедент не используется для сопровождения по о.д.з. Если заменить его на $t_1 = t_2$, то истинность консеквента усматривается при помощи задачи на доказательство. Блокировка любых приемов снимается. Далее указанный антецедент отбрасывается. Результат регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием декомпозиция - 6).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABaj}(a - \text{число } \& \ j - \text{число } \& \ A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \& \ a \leq 0 \ \& \ j \leq 0 \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$

из теоремы

$\forall_{ABaj}(\neg(A = B) \ \& \ a - \text{число } \& \ j - \text{число } \& \ A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \& \ a \leq 0 \ \& \ j \leq 0 \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$

23. Обобщение эквивалентности типа "связка" путем устранения антецедента, имеющего вид отрицания равенства. Теорема - эквивалентность $\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n) \leftrightarrow D$, которую можно использовать для исключения несущественных неизвестных. Имеется антецедент $\neg(t_1 = t_2)$, содержащий единственный параметр и не используемый для сопровождения по о.д.з. Решается задача на описание с условиями $A_1, \ldots, A_n, t_1 = t_2$. Посылками служат остальные антецеденты, неизвестными - $x_1, \ldots, x_k$, причем все эти неизвестные несущественные. Ответ R не содержит $x_1, \ldots, x_k$. Новая теорема получается из исходной удалением антецедента $\neg(t_1 = t_2)$ и заменой в консеквенте утверждения D на "$(\neg(t_1 = t_2) \ \& \ D) \ \vee \ R$". Предварительно это утверждение упрощается. (Прием связка - 6).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \exists_e(ae + be^2 = d \ \& \ e - \text{число}) \leftrightarrow$
$\neg(b = 0) \ \& \ 0 \leq 4bd + a^2 \ \vee \ (\neg(a = 0) \ \vee \ a = 0 \ \& \ d = 0))$

из теоремы

$\forall_{abd}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \exists_e(ae + be^2 = d \ \& \ e - \text{число}) \leftrightarrow$
$0 \leq 4bd + a^2)$

24. Обобщение эквивалентности, позволяющей выразить одну неизвестную через другие: исключение отрицания равенства в антецедентах. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, позволяющая выразить неизвестную x через некоторые неизвестные $y_1, \ldots, y_n$. Имеется антецедент $\neg(y_i = t)$, не используемый для сопровождения по о.д.з. Составляется список S остальных антецедентов, и результат A_3 подстановки в A_1 выражения t вместо переменной y_i разрешается относительно x с посылками S. Создается конъюнкция K найденного ответа, утверждения $y_i = t$ и отрицания конъюнкции не зависящих от x конъюнктивных членов A_2. Для получения новой теоремы антецедент $\neg(y_i = t)$ удаляется, а правая часть консеквента заменяется на $A_2 \ \vee \ K$. (Прием неизвестные - 9)э

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcef}(\neg(b = 0) \ \& \ \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow$
$acf + bc^2 + ef^2 = 0 \leftrightarrow \neg(b = 0) \ \& \ (c = -f(a + \sqrt{-4be + a^2})/(2b) \ \vee$
$c = f(-a + \sqrt{-4be + a^2})/(2b)) \ \& \ 0 \leq -4be + a^2 \ \vee \ \ = 0 \ \& \ f = 0 \ \& \ -4be + a^2 < 0)$

из теоремы

$\forall_{abcef}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \&$
$\neg(f = 0) \ \& \ e - \text{число} \rightarrow acf + bc^2 + ef^2 = 0 \leftrightarrow (c = -f(a + \sqrt{-4be + a^2})/(2b) \ \vee$
$c = f(-a + \sqrt{-4be + a^2})/(2b)) \ \& \ 0 \leq -4be + a^2)$

25. Отбрасывание избыточного отрицания равенства в антецедентах. Теорема имеет своими антецедентами элементарные формулы и простые кванторные импликации. Консеквентом служит элементарное утверждение. Имеется антецедент $\neg(t_1 = t_2)$, не используемый для сопровождения по о.д.з. При замене его на $t_1 = t_2$ удается усмотреть, что консеквент остается истинным. При решении задачи на доказательство разрешается использовать приемы, основанные на

уже полученных в списке вывода теоремах. Далее указанный антецедент отбрасывается. Результат регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием выводится - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bn}(\forall_a(a \in \mathrm{Val}(b) \to \text{открытое}(a))\ \&\ b - \text{функция}\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&$
$\text{семействомножеств}(b)\ \&\ \text{конечное}(\mathrm{Dom}(b))\ \&\ \text{подмнож}(b, \mathbb{R}^n) \to \text{открытое}(\bigcup(b)))$

из теоремы

$\forall_{bn}(\neg(\mathrm{Dom}(b) = \emptyset)\ \&\ \forall_a(a \in \mathrm{Val}(b) \to \text{открытое}(a))\ \&\ b - \text{функция}\ \&$
$n - \text{натуральное}\ \&\ \text{семействомножеств}(b)\ \&\ \text{конечное}(\mathrm{Dom}(b))\ \&\ \text{подмнож}(b, \mathbb{R}^n) \to$
$\text{открытое}(\bigcup(b)))$

26. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной либо константному выражению в антецедентах. Консеквент теоремы имеет вид $\exists_{y_1 \ldots y_k}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n)$ Некоторый антецедент имеет вид $\neg(x = t)$, где переменная x не входит в t. При помощи задачи на описание устанавливается возможность подобрать пример значений неизвестных $y_1, \ldots, y_k$, при которых все $A_1, \ldots, A_n$ истинны. Посылками служат антецеденты теоремы, в которых вместо $\neg(x = t)$ берется $x = t$. Далее указанный антецедент отбрасывается. Результат регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием допконтекст - 26).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cn}(\text{перестановка}(c, \{1, \ldots, n\})\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ 2 \leq n \to$
$\exists_d(\neg(d = \text{пустоеслово})\ \&\ c = \text{функпроизв}(d)\ \&\ \mathrm{Val}(d) \subseteq \text{транспозиции}(n)\ \&$
$d - \text{слово}))$

из теоремы

$\forall_{cn}(\neg(c = \text{тождфунк}(\{1, \ldots, n\}))\ \&\ \text{перестановка}(c, \{1, \ldots, n\})\ \&$
$n - \text{натуральное}\ \&\ 2 \leq n \to \exists_d(\neg(d = \text{пустоеслово})\ \&\ c = \text{функпроизв}(d)\ \&$
$\mathrm{Val}(d) \subseteq \text{транспозиции}(n)\ \&\ d - \text{слово}))$

Отбрасывание избыточного отрицания

1. Попытка отбросить избыточное отрицание принадлежности в антецедентах. Теорема - кванторная импликация, по которой создается прием вывода в посылках задачи. Некоторый антецедент имеет вид $\neg(x \in t)$, где переменная x не входит в t. Этот антецедент не используется для сопровождения по о.д.з. При замене его на $x \in t$ удается, при помощи задачи на доказательство, установить истинность консеквента. Разрешается использовать приемы, основанные на стартовых теоремах ячейки вывода. Далее указанный антецедент отбрасывается, и новая теорема регистрируется как обобщение исходной. (Прием вывод - 61).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abn}(n - \text{натуральное}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R}^n\ \&\ \text{предельныточка}(a, b) \to$
$\text{точкаприкосн}(a, b))$

из теоремы

$\forall_{abn}(\neg(a \in b)\ \&\ b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R}^n\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ \text{предельныточка}(a,b) \rightarrow \text{точкаприкосн}(a,b))$

2. Попытка отбросить избыточное отрицание принадлежности в антецедентах. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. (Прием числовойатом - 58).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(d - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ \neg(a = c)\ \&\ \neg(c = d)\ \&\ \neg(a = d)\ \&\ \neg(b = d)\ \&\ \neg(a = b)\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ l(ab) = l(ad)\ \&\ \angle(abd) = \angle(adc)\ \&\ \text{биссектриса}(bacd) \rightarrow l(ac) = l(ad))$

   из теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(b = d)\ \&\ \neg(c \in \text{прямая}(ad))\ \&\ l(ab) = l(ad)\ \&\ \angle(abd) = \angle(adc)\ \&\ \text{биссектриса}(bacd)\ \&\ a{-}\text{точка}\ \&\ b{-}\text{точка}\ \&\ c{-}\text{точка}\ \&\ d{-}\text{точка} \rightarrow l(ac) = l(ad))$

3. Удаление избыточного отрицания в антецедентах. Теорема - тождество для определения координат объекта. Некоторый антецедент имеет вид $\neg(A)$ и не используется для сопровождения по о.д.з. При замене его на A удается, при помощи задачи на доказательство, установить истинность консеквента. Разрешается использовать приемы, основанные на уже имеющихся в списке вывода теоремах. Далее указанный антецедент отбрасывается, и новая теорема регистрируется как обобщение исходной. (Прием систкоорд - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abABCDEK}(D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ K = (A,B,C)\ \&\ E \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(DE)\ \&\ \text{коорд}(D,K) = (a,b) \rightarrow \text{коорд}(E,K) = (0,b))$

   из теоремы

   $\forall_{abABCDEK}(\neg(D \in \text{прямая}(AB))\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ K = (A,B,C)\ \&\ E \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(DE)\ \&\ \text{коорд}(D,K) = (a,b) \rightarrow \text{коорд}(E,K) = (0,b))$

4. Попытка отбросить несущественный антецедент. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат. (Прием числкоэфф - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abABCDEK}(\neg(D = E)\ \&\ K = (A,B,C)\ \&\ \text{коорд}(D,K) = (a,b)\ \&\ E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AC) \parallel \text{прямая}(DE)\ \&\ 0 \leq b\ \&\ \text{систкоорд}(K) \rightarrow bl(AC) = l(DE))$

   из теоремы

   $\forall_{abABCDEK}(\neg(D = E)\ \&\ \neg(D \in \text{прямая}(AC))\ \&\ K = (A,B,C)\ \&\ \text{коорд}(D,K) = (a,b)\ \&\ E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AC) \parallel \text{прямая}(DE)\ \&\ 0 \leq b\ \&\ \text{систкоорд}(K) \rightarrow bl(AC) = l(DE))$

Отбрасывание реализуемой группы антецедентов с переменной, не входящей в консеквент

1. Попытка отбросить антецеденты с однозначно определяемой переменной, не входящей в консеквент. Теорема - кванторная импликация, у которой значение некоторой переменной x однозначно определяется частью ее антецедентов $A_1, \ldots, A_n$, причем эта переменная не входит в консеквент. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что "$\exists_x(A_1$ & $\ldots$ & $A_n)$" - следствие остальных антецедентов. Антецеденты $A_1, \ldots, A_n$ отбрасываются, и новая теорема регистрируется как обобщение исходной. (Прием опрзнач - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B)$ & $B -$ точка & $C -$ точка & $A -$ точка & $\neg(B = C)$ & $l(AC) = l(BC) \to l(AB) = 2\cos(\angle(ABC))l(BC))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(A = B)$ & $D -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $A -$ точка & $\neg(B = C)$ & $l(AC) = l(BC)$ & $l(AD) = l(BD)$ & $D \in$ прямая$(AB) \to l(AB) = 2\cos(\angle(ABC))l(BC))$

   Характеристика - "опрзнач(D)".

2. Попытка исключения переменной, не используемой для описания координат. Теорема - тождество для координат объектов. Рассматривается переменная x, входящая в антецеденты $A_1, \ldots, A_n$ не входящая в консеквент. Решается задача на описание с условиями $A_1, \ldots, A_n$, посылками которой служат оставшиеся антецеденты. Единственная неизвестная - x, причем она несущественная. Ответ R не содержит x. Антецеденты $A_1, \ldots, A_n$ заменяются на R, и новая теорема регистрируется как обобщение исходной. (Прием коорд - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcABCDEK}(\neg(E \in$ прямая$(AC))$ & $K = (A, B, C, D)$ & коорд$(E, K) = (a, b, c)$ & $E \in$ плоскость(ACD) & систкоорд$(K) \to a = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{abcABCDEGK}(G -$ точка & систкоорд(K) & $E \in$ плоскость(ACD) & $\neg(E = G)$ & прямая$(EG) \parallel$ прямая(AD) & $G \in$ прямая(AC) & коорд$(E, K) = (a, b, c) \to a = 0)$

3. Исключение избыточного параметра антецедентов. Теорема - тождество для определения координат объекта. Имеется антецедент вида "коорд$(B, K) = t$". Составляется список S параметров консеквента и данного антецедента. К нему присоединяются параметры равенства $K = (\ldots)$. Выбирается параметр антецедентов x, не входящий в S. Решается задача на исследование, посылками которой служат отличные от "коорд$(B, K) = t$" антецеденты, причем имеются цель "антецеденты" и цель на исключение параметра x. По окончании решения составляется список Q посылок, не имеющих заголовка "актив", к которому добавляется равенство "коорд$(B, K) = t$". Проверяется, что в нем переменная x

отсутствует. Затем список антецедентов исходной теоремы заменяется на Q. Новая теорема регистрируется как обобщение исходной. (Прием систкоорд - 9).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abABCDEK}(\neg(d \in \text{прямая}(AB))\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&$
$\neg(D = E)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ E \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(DE)\ \&$
$\text{коорд}(D, K) = (a, b) \to \text{коорд}(E, K) = (0, b))$

из теоремы

$\forall_{abABCDEFK}(D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&$
$\neg(D = F)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ E \in \text{прямая}(AC)\ \&\ F \in \text{прямая}(AB)$
$\&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AC)\ \&$
$\text{коорд}(D, K) = (a, b) \to \text{коорд}(E, K) = (0, b))$

4. Исключение избыточного параметра антецедентов. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат. (Прием числкоэфф - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abABCDEK}(\neg(D \in \text{прямая}(AC))\ \&\ \neg(A \in \text{интервал}(BE))\ \&\ D - \text{точка}\ \&$
   $E - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ (A, B, C) = K\ \&\ E \in \text{прямая}(AB)\ \&$
   $\text{точкалуча}(A, B, E)\ \&\ \text{прямая}(AC) \parallel \text{прямая}(DE)\ \&\ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \to$
   $l(AE) = al(AB))$

   из теоремы

   $\forall_{abABCDEFK}(D - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&$
   $\neg(D = E)\ \&\ \neg(D = F)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ F \in \text{прямая}(AC)\ \&$
   $\text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{точкалуча}(A, B, E)\ \&$
   $\text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \to l(AE) = al(AB))$

Отбрасывание антецедента, являющегося следствием каждой из частей эквивалентности

1. Отбрасывание избыточного указателя на тип объекта в антецедентах. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$ декомпозиции элементарного утверждения A_1 в конъюнкцию элементарных утверждений. Она имеет антецедент $P(x)$, где x - переменная, не входящая в другие антецеденты. Этот антецедент не используется для сопровождения по о.д.з. какой-либо из частей эквивалентности. Проверяется, что он является следствием как A_1, так и A_2, пополненных остальными антецедентами. Тогда он исключается. Новая теорема регистрируется как обобщение исходной. (Прием и - 60).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bef}(e - \text{set}\ \&\ f - \text{set}\ \&\ e \subseteq \mathbb{R}\ \&\ f \subseteq \mathbb{R} \to \text{нижняягрань}(b, e \cup f) \leftrightarrow$
   $\text{нижняягрань}(b, e)\ \&\ \text{нижняягрань}(b, f))$

   из теоремы

   $\forall_{bef}(e - \text{set}\ \&\ f - \text{set}\ \&\ e \subseteq \mathbb{R}\ \&\ f \subseteq \mathbb{R}\ \&\ b - \text{число} \to \text{нижняягрань}(b, e \cup f) \leftrightarrow$
   $\text{нижняягрань}(b, e)\ \&\ \text{нижняягрань}(b, f))$.

Отбрасывание антецедента - следствия остальных антецедентов

1. Отбрасывание избыточного условия на параметры уравнения, представленного в антецедентах. Теорема имеет антецедент вида "коорд$(A,K) = \mathrm{set}_{x_1 \ldots x_k}(D)$". Выбирается элементарный антецедент B, параметры которого включаются в список параметров указанного описателя "класс", не используемый для сопровождения по о.д.з. этого описателя. Предпринимается попытка усмотреть, что если заменить B на его отрицание, уравнение D приобретает такой вид, который невозможен для объекта A. После этого антецедент B переносится в конъюнктивные члены консеквента. Новая теорема регистрируется как обобщение исходной. (Прием уравндробь - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acdABK}(\neg(A = B)$ & коорд(окружность$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(d + ay + cx + x^2 + y^2 = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & $a -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $A -$ точка & $B -$ точка & прямкоорд$(K) \to$ коорд$(A, K) = (-c/2, -a/2))$

   из теоремы

   $\forall_{acdABK}(\neg(A = B)$ & коорд(окружность$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(d + ay + cx + x^2 + y^2 = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & $0 < -d + (a^2 + c^2)/4$ & $a -$ число & $c -$ число & $d-$число & $A-$точка & $B-$точка & прямкоорд$(K) \to$ коорд$(A, K) = (-c/2, -a/2))$

Попытка доказать избыточность антецедента

1. Попытка перейти от операции над конечным семейством к операции над произвольным семейством. Имеется антецедент вида "конечное(Dom(f))", причем переменная f встречается в консеквенте внутри терма вида $G(T)$, где G - обобщение двуместной ассоциативной и коммутативной операции на произвольные конечные наборы. Независимо от этого, существует определение операции G для произвольных семейств. Предпринимается попытка доказать истинность консеквента без использования антецедента "конечное(Dom(f))". В случае успеха антецедент отбрасывается. Новая теорема регистрируется как обобщение исходной. (Прием конечные - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bn}(\forall_a(a \in \mathrm{Val}(b) \to$ открытое$(a))$ & $b -$ функция & $n -$ натуральное & семействомножеств(b) & подмнож$(b, \mathbb{R}^n) \to$ открытое$(\bigcup(b)))$

   из теоремы

   $\forall_{bn}(\forall_a(a \in \mathrm{Val}(b) \to$ открытое$(a))$ & $b -$ функция & $n -$ натуральное & семействомножеств(b) & конечное(Dom$(b))$ & подмнож$(b, \mathbb{R}^n) \to$ открытое$(\bigcup(b)))$

2. Попытка отбросить неравенство для целочисленного выражения (левая часть 0). Теорема - простая импликация для создания приема проверочного оператора. Она имеет антецедент "$0 \le t$", причем выражение t принимает целочисленные значения. Этот антецедент не используется для сопровождения по о.д.з. Из остальных антецедентов усматривается неравенство $-1 \le t$. При заменее антецедента $0 \le t$ на $t = -1$ удается доказать истинность консеквента. Тогда

данный антецедент отбрасывается. Новая теорема регистрируется как обобщение исходной. (Прием попыткаспуска - 27).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aGM}$(конец(M) = начало(a) & орграф(G) & вершмаршрут(a, G) & вершмаршрут(M, G) → вершмаршрут(послед(M, a), G))

из теоремы

$\forall_{aGM}$(конец(M) = начало(a) & $0 \le l(a) - 2$ & орграф(G) & вершмаршрут(a, G) & вершмаршрут(M, G) → вершмаршрут(послед(M, a), G))

3. Попытка отбросить неравенство для целочисленного выражения (левая часть 2). Аналогично предыдущему, но антецедент имеет вид "$2 \le t$", и из прочих антецедентов усматривается "$1 \le t$". (Прием попыткаспуска - 28).

$\forall_{aGM}$(конец(M) = начало(a) & орграф(G) & вершмаршрут(a, G) & вершмаршрут(M, G) → вершмаршрут(послед(M, a), G))

из теоремы

$\forall_{aGM}$(конец(M) = начало(a) & $2 \le l(a)$ & орграф(G) & вершмаршрут(a, G) & вершмаршрут(M, G) → вершмаршрут(послед(M, a), G))

4. Попытка отбросить избыточный антецедент - тип значения сложного выражения. Теорема - эквивалентность для кванторной расшифровки. Имеется антецедент вида $P(t)$, где P - название типа объектов, t - неоднобуквенное выражение. Этот антецедент не используется для сопровождения по о.д.з. При замене его на $\neg(P(t)$ удается доказать истинность консеквента. Тогда данный антецедент отбрасывается. Новая теорема регистрируется как обобщение исходной. (Прием развертка - 137).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acgh}(a =$ операция(h) & $c \in$ носитель(h) & $g \in$ носитель(h) & группа(h) → порядокэлемента(c, h) = порядокэлемента(g, h) ↔
$\forall_b(b -$ натуральное → алгстепень(c, a, b) = единица(a) ↔ алгстепень(g, a, b) = единица(a)))

из теоремы

$\forall_{acgh}(a =$ операция(h) & $c \in$ носитель(h) & $g \in$ носитель(h) & порядокэлемента(g, h) $-$ натуральное & группа(h) → порядокэлемента(c, h) = порядокэлемента(g, h) ↔ $\forall_b(b-$натуральное → алгстепень(c, a, b) = единица(a) ↔ алгстепень(g, a, b) = единица(a)))

Попытка усмотреть избыточность антецедента после подстановки, позволяющей сохранить остальные антецеденты и консеквент

1. Попытка исключения антецедента после перехода от функции к ее сужению. Теорема - кванторная импликация, корневое отношение консеквента которой имеет наибольшую сложность среди всех ее подтермов. Имеются антецеденты "функция(f)", "$A \subseteq \mathrm{Dom}(f)$", "$A-$set", "$\mathrm{Val}(f) \subseteq B$", "$\mathrm{Dom}(f) \subseteq D$". Имеется единственный отличный от указанных антецедент Q, не содержащий одновременно переменных f, A. Составляется список S, полученный добавлением к не содержащим f антецедентам указанных выше пяти антецедентов. Проверяется, что в каждом содержащем обе переменных f, A антецеденте либо консеквенте после замены f на "сужение(f, A)" и упрощения относительно S получается снова тот же антецедент либо консеквент. Проверяется, что результат подстановки в Q выражения "сужение(f, A)" вместо f - следствие остальных антецедентов. Тогда антецедент Q удаляется. Новая теорема регистрируется как обобщение исходной. (Прием реализация - 21).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{dfx}(d - \text{set} \ \& \ d \subseteq \mathrm{Dom}(f) \ \& \ \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{возрастает}(f, d) \ \& \ \text{наибольший}(x, d) \to \mathrm{Max}(f, d, \{x\}, f(x)))$

   из теоремы

   $\forall_{dfx}(d-\text{set} \ \& \ d \subseteq \mathrm{Dom}(f) \ \& \ \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ f-\text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \ \& \ \text{возрастает}(f, d) \ \& \ \text{наибольший}(x, d) \to \mathrm{Max}(f, d, \{x\}, f(x)))$

5.2 Ослабление антецедентов

Переход к ослабленному отношению в антецеденте сохраняет истинность теоремы

1. Попытка перехода к ослабленным отношениям в антецедентах. Консевкент теоремы имеет вид дизъюнкции. Просматриваются такие антецеденты $P(t_1 \dots t_n)$, для которых существует ослабление Q отношения P. Если удается доказать, что из $\neg(P(t_1 \dots t_n)), Q(t_1 \dots t_n)$ по-прежнему вытекает истинность консеквента, то $P(t_1 \dots t_n)$ заменяется на $Q(t_1 \dots t_n)$. После ненулевого числа таких замен полученная теорема регистрируется как обобщение исходной. (Прием дизъюнкция - 13).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(C - \text{точка} \ \& \ B \in \text{прямая}(AC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \&$
   $0 \leq l(AC) - l(AB) \ \& \ \neg(A = C) \to B \in \text{отрезок}(AC) \ \vee \ A \in \text{отрезок}(BC))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(C - \text{точка} \ \& \ B \in \text{прямая}(AC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \&$
   $0 < l(AC) - l(AB) \to B \in \text{отрезок}(AC) \ \vee \ A \in \text{отрезок}(BC))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \to a \leq b)$

2. Попытка перейти к ослабленным отношениям в антецедентах. Аналогично предыдущему, но теорема - простая импликация с бесповторными антецедентами и консеквентом, у которой каждая переменная антецедентов встречается в консеквенте. (Прием попыткаспуска - 19).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(|a| = |b| \ \& \ 0 \leq ab \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a = b)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(|a| = |b| \ \& \ 0 < ab \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a = b)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \rightarrow a \leq b)$

3. Попытка ослабить антецедент. Теорема создана для вывода теорем в качестве сокращающего тождества. Некоторый антецедент имеет вид равенства, другой антецедент A содержит единственный параметр x не входящий в указанное равенство. Находится ослабленная версия B антецедента A, после чего решается задача на описание с условиями $\neg(A), B$. Неизвестная - x. Получается ответ вида $x = a$ Предпринимается попытка доказать консеквент при замене A на $x = a$. Затем A заменяется на B. К антецедентам добавляются условия на о.д.з. результата подстановки в консеквент a вместо x (Прием сокращгрупп - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < b \ \& \ b + c = 1 \rightarrow a^b a^c = a)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ b + c = 1 \rightarrow a^b a^c = a)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \rightarrow a \leq b)$

4. Попытка перейти к ослабленным отношениям в антецедентах. Теорема - тождество, в одной из частей которого расположен невырожденный числовой атом, не встречающийся в другой части, не являющейся числовым атомом, но содержащей невырожденные числовые атомы. Находится ослабление B некоторого не используемого для сопровождения по о.д.з. существенного антецедента A, заголовок которого отличен от "не". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что при замене A на $\neg(A), B$ истинность консеквента сохраняется. Тогда антецедент A аменяется на B. Результат упрощается. (Прием числзнач - 35).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdhK}(b \in \{1, 2, 3\} \ \& \ c \in h \ \& \ d \in h \ \& \ 0 \leq d - c \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \ \& \ \text{неподв}(K, h) \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Равндвиж}(a, h) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Числотр}(h) \ \& \ \text{мтело}(K) \rightarrow \text{крд}(\text{Место}(a, d), K, b) = (d - c)\text{крд}(\text{Скорость}(a, K, h), K, b) + \text{крд}(\text{Место}(a, c), K, b))$

из теоремы

$\forall_{abcdhK}(0 < d{-}c \,\&\, b \in \{1,2,3\} \,\&\, c \in h \,\&\, d \in h \,\&\, \text{прямкоорд}(K) \,\&\, \text{неподв}(K,h) \,\&\, \text{мточка}(a) \,\&\, \text{Равндвиж}(a,h) \,\&\, \text{Трехмерн}(K) \,\&\, \text{Числотр}(h) \,\&\, \text{мтело}(K) \rightarrow \text{крд}(\text{Место}(a,d),K,b) = (d{-}c)\text{крд}(\text{Скорость}(a,K,h),K,b){+}\text{крд}(\text{Место}(a,c),K,b))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \,\&\, a < b \rightarrow a \leq b)$

5. Попытка перейти к ослабленным отношениям в антецедентах. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество свертки. (Прием свертка - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cde}(0 \leq e \,\&\, c - \text{число} \,\&\, d - \text{число} \,\&\, e - \text{число} \rightarrow \max(ce,de) = e\max(c,d))$

   из теоремы

   $\forall_{cde}(0 < e \,\&\, c - \text{число} \,\&\, d - \text{число} \,\&\, e - \text{число} \rightarrow \max(ce,de) = e\max(c,d))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \,\&\, a < b \rightarrow a \leq b)$

6. Попытка ослабления антцедентов с помощью синтезатора "ослабл". Теорема - соотношение для числовых атомов. Прием обращается к синтезатору "ослабл", перечисляющему представляющие интерес варианты ослабления подмножеств антецедентов. Для каждого такого варианта при помощи задачи на доказательство проверяется сохранение истинности консеквента при замене ослабляемых антецедентов $A_1,\ldots,A_n$ а ослабляющий B. При проверке по отдельности рассматривается каждый A_i, отрицание которого добавляется к посылкам задачи на доказательство. В случае успеха указанная замена антецедентов $A_1,\ldots,A_n$ на B реализуется. (Прием числовойатом - 49).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ghAC}(\neg(g = h) \,\&\, \neg(g = C) \,\&\, \neg(h = A) \,\&\, \neg(A = C) \,\&$
   $\neg(\text{прямая}(gC) = \text{прямая}(hA)) \,\&\, g - \text{точка} \,\&\, h - \text{точка} \,\&\, A - \text{точка} \,\&$
   $C - \text{точка} \,\&\, \text{разныестороны}(g,C,\text{прямая}(hA)) \,\&$
   $\text{разныестороны}(h,A,\text{прямая}(gC)) \rightarrow$
   $-\angle(gCA) - \angle(hAC) + \angle(ghA) + \angle(hgC) = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{ghAC}(\neg(g = C) \,\&\, \neg(h = A) \,\&\, \neg(h \in \text{прямая}(gC)) \,\&\, \neg(A \in \text{прямая}(gC)) \,\&$
   $g - \text{точка} \,\&\, h - \text{точка} \,\&\, A - \text{точка} \,\&\, C - \text{точка} \,\&$
   $\text{разныестороны}(g,C,\text{прямая}(hA)) \,\&\, \text{разныестороны}(h,A,\text{прямая}(gC)) \rightarrow$
   $-\angle(gCA) - \angle(hAC) + \angle(ghA) + \angle(hgC) = 0)$

7. Ослабление неравенства для целочисленной переменной в антецедентах. Теорема - тождество сокращенной перезаписи. Имеются антецеденты "натуральное(n)", "$a \leq n$", где a - целочисленная константа, либо антецеденты "целое(n)", "$a \leq n$". В случае натуральное n неравенство может отсутствовать, и тогда a полагается равным 1. В консеквент подставляется $a-1$ вместо n, и он упрощается до константы "истина". Тогда неравенство в антецедентах заменяется на $a-1 \leq n$. При необходимости "натуральное" заменяется на "целое". Результат регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием свертка - 87).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{adefA}(A - \text{set}\ \&\ a \in A\ \&\ d - \text{целое}\ \&\ e - \text{целое}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&$
   $0 \leq d\ \&\ 0 \leq e\ \&\ \text{обратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, A) \rightarrow$
   $\text{алгстепень}(a, f, -(d+e)) = f(\text{алгстепень}(a, f, -d), \text{алгстепень}(a, f, -e)))$

   из теоремы

   $\forall_{adefA}(A - \text{set}\ \&\ a \in A\ \&\ e - \text{натуральное}\ \&\ d - \text{целое}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&$
   $0 \leq d\ \&\ \text{обратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, A) \rightarrow \text{алгстепень}(a, f, -(d+e)) =$
   $f(\text{алгстепень}(a, f, -d), \text{алгстепень}(a, f, -e)))$

8. Попытка ослабить антецедент, учитывая конечное число дополнительных точек. Консеквент теоремы - отличный от равенства двуместный нечисловой предикат. Рассматривается существенный антецедент A, не используемый для сопровождения по о.д.з. консеквента и других антецедентов. Синтезатор "конечнослабл" определяет по A утверждение B, предствляющее собой ослабленную версию утверждения A, полученную добавлением конечного числа точек истинности. Он же выдает дизъюнкцию D равенств, определяющих эти дополнительные точки истинности. Проверяется, что консеквент теоремы отличен от B, и при помощи задачи на доказательство устанавливается, что консеквент теоремы - следствие антецедентов, в которых вместо A берется D. Антецедентами новой теоремы становятся антецеденты исходной теоремы, в которых вместо A берется B. Консеквент тот же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием отношение - 37).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bABCD}(\neg(b = A)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = D)\ \&\ B \in \text{отрезок}(bC)\ \&$
   $D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
   $D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(BD)\ \&\ 0 \leq -\angle(bAC) + \pi/2\ \&$
   $0 \leq -\angle(bCA) + \pi/2 \rightarrow D \in \text{отрезок}(AC))$

   из теоремы

   $\forall_{bABCD}(\neg(b = A)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = D)\ \&\ 0 \leq -\angle(bAC) + \pi/2\ \&$
   $0 < -\angle(bCA) + \pi/2\ \&\ B \in \text{отрезок}(bC)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ b - \text{точка}\ \&$
   $A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(BD) \rightarrow$
   $D \in \text{отрезок}(AC))$

Устранение связи антецедента по некоторой переменной с остальной частью теоремы

1. Развязка антецедентов по переменной. Консеквент теоремы - дизъюнкция элементарных утверждений. Внутри этого консеквента выбирается атомарное неоднобуквенное нечисловое подвыражение T с заголовком f. Находится тождество $B_1 = B_2$, обе части которого имеют заголовок f и отличаются друг от друга единственной переменной. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка C, переводящая B_1 в T Переменная x входящая в B_1 и не входящая в B_2, переводится этой подстановкой в некоторую переменную X. Она встречается в имеющем не менее двух параметров антецеденте исходной теоремы не внутри T. Предпринимаетс замена в консеквенте исходной теоремы терма T на $C(B_2)$. Такая же замена предпринимается в антецедентах исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием дизъюнкция - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cABCE}(\text{разныестороны}(A, C, \text{прямая}(cE)) \ \& \ \neg(c = E) \ \& \ \neg(A = B) \ \&$
   $\neg(C \in \text{прямая}(AB)) \ \& \ E \in \text{плоскость}(ABC) \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \&$
   $B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ c \in \text{плоскость}(ABC) \rightarrow$
   $\text{разныестороны}(A, B, \text{прямая}(cE)) \ \vee \ \text{разныестороны}(B, C, \text{прямая}(cE)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \&$
   $\neg(A = B) \ \& \ \neg(C \in \text{прямая}(AB)) \ \& \ E \in \text{плоскость}(ABC) \ \& \ D \in \text{отрезок}(AC) \ \&$
   $\neg(D = E) \rightarrow \text{разныестороны}(B, C, \text{прямая}(DE)) \ \vee$
   $\text{разныестороны}(A, B, \text{прямая}(DE)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \&$
   $A \in \text{прямая}(BC) \rightarrow \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC))$

Отбрасывание антецедента с усложнением консеквента

1. Попытка исключения антецедента, связывающего между собой два параметра под описателем "класс". Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель "класс". Внутри A_1 находится подвыражение $\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(D_1 \ \& \ \ldots \ \& \ D_n)$, где $n \geq 2$. D_n имеет параметр a, отличный от $x_1, \ldots, x_k$ и имеющий единственное вхождение в A_1. Этот параметр встречается в некотором антецеденте E, имеющем не менее двух параметров. Прочие антецеденты, содержащие a, имеют единственный параметр. Выбирается новая переменная b. Определяется результат F замены в D_n переменной a на b. Находится список S_1 всех содержащих a антецедентов теоремы, а также список S_2 результатов замены a на b в антецедентах, отличных от E. Решается задача на описание с условиями $S_1, \forall_{x_1 \ldots x_k}(D_1 \ \& \ \ldots \ \& \ D_{n-1} \rightarrow (D_n \leftrightarrow F))$ и посылками S_2. Неизвестная - переменная a. Ответ не содержит связанных переменных и имеет вид $(a = t \ \& \ Q)$. В консеквенте теоремы предпринимается замена D_n на F и подстановка t вместо a в A_2. Антецедентами новой теоремы становятся утверждения S_2 и Q. Результат упрощается. (Прием описатель - 41).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ad}(a - $ натуральное & $d -$ целое & $0 \le d \to \text{card}(\text{set}_b(b -$ натуральное & $a \mid b$ & $b \le d)) = [d/a])$

из теоремы

$\forall_{ac}(a - $ натуральное & $a \mid c$ & $c -$ целое & $0 \le c \to \text{card}(\text{set}_b(b -$ натуральное & $a \mid b$ & $b \le c)) = c/a)$

Использование дополнительной теоремы для ослабления антецедента

1. Усмотрение дополнительной теоремы, возникающей при уменьшении на единицу минимального значения целочисленного параметра исходной теоремы. Теорема - тождество сокращенной перезаписи. Имеются антецеденты "натуральное(n)", "$a \le n$", где a - целочисленная константа, либо антецедентв "целое(n)", "$a \le n$". В случае натурального n неравенство может отсутствовать, и тогда a полагается равным 1. В консеквент подставляется $a - 1$ вместо n, он упрощается. Если результат - не константа "истина", то в списке вывода находится другая теорема, консеквент которой совпадает с результатом упрощения. Проверяется, что она позволяет понизить в неравенстве исходной теоремы левую часть неравенства для n до $a - 1$. Если это удается, такая коррекция неравенства осуществляется. При необходимости "натуральное" заменяется на "целое". Результат регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием свертка - 86).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{adefA}(A - \text{set}$ & $a \in A$ & $e -$ натуральное & $d -$ целое & ассоциативно(f) & $0 \le d$ & обратимо(f) & бинарнооперация(f, A) $\to$ алгстепень$(a, f, -(d + e)) =$ $f($алгстепень$(a, f, -d),$ алгстепень$(a, f, -e)))$

   из теоремы

   $\forall_{adefA}(A - \text{set}$ & $a \in A$ & $e -$ натуральное & $d -$ целое & ассоциативно(f) & $0 \le d$ & $2 \le e$ & обратимо(f) & бинарнооперация(f, A) $\to$ алгстепень$(a, f, -(d + e)) = f($алгстепень$(a, f, -d),$ алгстепень$(a, f, -e)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{adfA}(A - \text{set}$ & $a \in A$ & $d -$ целое & ассоциативно(f) & $0 \le d$ & обратимо(f) & бинарнооперация(f, A) $\to$ алгстепень$(a, f, -(d + 1)) = f($алгстепень$(a, f, -d),$ обрэлемент$(a, f)))$

5.3 Развязка переменной

Развязка переменных консеквента

1. Попытка развязки переменной атомарного выражения. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ у которого как A_1, так и A_2 имеют одни и те же атомарные нечисловые выражения $D_1, \ldots, D_n; n \ge 2$. Выбирается некоторое D_i, имеющее вид

$f(x,y)$, где x,y - переменные. Переменная x имеет более одного вхождения как в A_1, так и в A_2; переменная y - единственное вхождение в каждом A_1, A_2. Находится теорема, консеквент которой имеет вид $\exists_z(B_1 = B_2 \ \& \ E)$, где B_1, B_2 - бесповторные нечисловые атомарные выражения с заголовком f, причем z не входит в B_2. Выражение B_2 не имеет общих переменных с B_1, E. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка C, переводящая B_1 в D_i. Она переводит отличный от z параметр выражения B_1 в переменную x. Составляется список S_1 всех не содержащих x,y антецедентов исходной теоремы и результатов применения C к антецедентам дополнительной. Составляется список S_2, получаемый добавлением к S_1 результата применения C к E. Проверяется, что каждый не входящий в S_2 и содержащий x либо y антецедент исходной теоремы - следствие S_2. В консеквенте исходной теоремы D_i заменяется на B_2, антецедентами становятся утверждения S_1. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием Атомарное - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{Aabcd}(a-\text{число} \ \& \ b-\text{точка} \ \& \ c-\text{точка} \ \& \ d-\text{точка} \ \& \ A-\text{точка} \rightarrow a(\text{вектор}(bd)+\text{вектор}(Ac)) = a\text{вектор}(bd) + a\text{вектор}(Ac))$

из теоремы

$\forall_{ABac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow a(\text{вектор}(cB) + \text{вектор}(Ac)) = a\text{вектор}(cB) + a\text{вектор}(Ac))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \exists_D(D - \text{точка} \ \& \ \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(CD)))$

2. Попытка развязки переменной атомарного выражения. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ для координат. Левая часть имеет невырожденные числовые атомы, правая - не имеет. Выбирается некоторый атом D левой части, имеющий вид $f(x,y)$, где x,y - переменные. Переменная x имеет более одного вхождения в A_1, переменная y - единственное вхождение в A_1. Находится теорема, консеквент которой имеет вид $\exists_z(B_1 = B_2 \ \& \ E)$, где B_1, B_2 - бесповторные нечисловые атомарные выражения с заголовком f, причем z не входит в B_2. Выражение B_2 не имеет общих переменных с B_1, E. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка C, переводящая B_1 в D. Она переводит отличный от z параметр выражения B_1 в переменную x. Составляется список S всех антецедентов исходной теоремы и результатов применения C к антецедентам дополнительной. В консеквенте исходной теоремы D заменяется на B_2, антецедентами становятся результаты такой же замены в S. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием коорд - 6).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abefglmAK}(\text{коорд}(\text{вектор}(ab), K) = (l,m) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(Af), K) = (e,g) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(ab) + \text{вектор}(Af), K) = (e+l, g+m))$

из теоремы

$\forall_{abefglmABK}$(коорд(вектор(fB), K) = (l, m) & коорд(вектор(Af), K) = (e, g) & f − точка & A − точка & B − точка & систкоорд(K) → коорд(вектор(fB) + вектор(Af), K) = $(e + l, g + m)$)

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}$(A − точка & B − точка & C − точка → $\exists_D$(D − точка & вектор(AB) = вектор(CD)))

3. Переход к подмножеству операндов в операции над конечным семейством. Теорема - тождество вида $F(\lambda_i(T, i - \text{целое } \& \ m \le i \ \& \ i \le n)) = A$. F - обобщение двуместной ассоциативной и коммутативной операции f на наборы произвольной длины. Допустима перегруппировка членов из одной части равенства с операцией f в другую, сопровождаемая изменением знака. Выбираются новые параметры m_1, n_1, и части конечной операции F для диапазонов от m до $m_1 - 1$ и от $n_1 + 1$ до n переносятся в правую часть. В левой части остается выражение $F(\lambda_i(T, i - \text{целое } \& \ m_1 \le i \ \& \ i \le n_1))$. Добавляются необходимые для характеризации m_1, n_1 антецеденты. Указанное преобразование позволяет пользоваться формулой "вычисления" конечной операции F для диапазона (m_1, n_1) более общего вида, нежели (m, n). Приемы, созданные по новой теореме, проверяют, что $m_1 - m$ и $n - n_1$ идентифицируются с константами, после чего разворачивают конечные операции правой части в обычные операции. (Прием описатель - 37).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdfn}$(a − число & b − число & $\neg(a = 0)$ & $\neg(b = 0)$ & n − натуральное & c − целое & d − целое & $0 \le d - c$ & $0 \le c$ & $0 \le f$ & $f = n - d \to$ $\sum_{k=c}^{d}(a^k b^{n-k} C_n^k) = (a + b)^n - \sum_{g=0}^{c-1}(a^g b^{n-g} C_n^g) - \sum_{g=0}^{f-1}(a^{n-g} b^g C_n^g)$)

из теоремы

$\forall_{abn}$(a − число & b − число & $\neg(a = 0)$ & $\neg(b = 0)$ & n − натуральное → $\sum_{k=0}^{n}(a^k b^{n-k} C_n^k)$)

Теорема создается специально для приема, который будет "сворачивать" конечную сумму даже в том случае, когда пределы суммирования отличаются от "стандартных" на небольшое фиксированное число слагаемых. Эти слагаемые вычитаются в конечных суммах правой части, причем каждая из таких конечных сумм разворачивается приемом в обычную сумму.

4. Развязка переменных определяемого числового атома. Консеквент теоремы - уравнение $A_1 = A_2$, позволяющее определить числовой атом t при помощи антецедента $T = a$, фиксирующего через равенство в посылках задачи значение a более сложного числового атома T. По заголовку f тома t находится тождество $r_1 = r_2$ для двух числовых атомов r_1, r_2 с заголовком f, у которого все параметры антецедентов входят в консеквент. Выражение r_2 получается из r_1 некоторым переобозначением переменных, причем это переобозначение переводит все антецеденты, имеющие параметра атома r_1, не входящий в r_2, в утверждения, являющиеся следствиями прочих антецедентов. Дополнительная теорема

используется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием опратом - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdef}(\neg(b=f)\ \&\ d-\text{точка}\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ f-\text{точка}\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ e-\text{точка}\ \&\ \neg(b=d)\ \&\ \neg(b=c)\ \&\ \neg(b=e)\ \&\ \text{точкалуча}(b,c,d)\ \&\ \text{точкалуча}(b,e,f)\ \&\ \text{скалумнож}(\text{вектор}(bd),\text{вектор}(bf))=a\to a=\cos(\angle(cbe))l(db)l(bf))$

из теоремы

$\forall_{BCDa}(\neg(B=C)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \text{скалумнож}(\text{вектор}(CB),\text{вектор}(CD))=a\to a=\cos(\angle(BCD))l(BC)l(CD))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDE}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ \neg(A=E)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ \neg(A=DE)\ \&\ \text{точкалуча}(A,B,C)\ \&\ \text{точкалуча}(A,D,E)\to\angle(BAD)=\angle(CAE))$

5. Обобщение по транзитивности простой импликации, используемой в проверочном операторе (развязка операндов). Теорема - кванторная импликация без существенных антецедентов, имеющая элементарный консеквент $P(t_1,t_2)$, где P - транзитивное отношение. Определяется тип Q значений операндов этого отношения. Выбирается новая переменная x. Рассматриваются два случая. В первом из них к антецедентам добавляются утверждения $Q(x),P(x,t_1)$, а консеквентом становится $P(x,t_2)$. Во втором случае - к антецедентам добавляются $Q(x),P(t_2,x)$, а консеквентом становится $P(t_1,x)$. оздаются также теоремы, полученные из указанных двух теорем контрапозициями. (Прием элементарно - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(b-\text{set}\ \&\ c-\text{set}\ \&\ a-\text{set}\ \&\ b\subseteq a\to b\cap c\subseteq a)$

   из теоремы

   $\forall_{bc}(b-\text{set}\ \&\ c-\text{set}\to b\cap c\subseteq b)$

Развязка переменных антецедентов

1. Попытка развязки параметров уравнения для координат множества объектов, не входящих в консеквент. Имеется антецедент вида "коорд$(A,K)=\text{set}_{x_1\ldots x_k}(D)$". Этот антецедент имеет параметры, не входящие в консеквент, но встречающиеся в прочих существенных антецедентах. Выбирается наиболее сложное подвыражение в D, и по его заголовку f находится кванторное тождество, имеющее консеквент вида "коорд$(B,Q)=\text{set}_{y_1\ldots y_k}E_1$" и антецедент "коорд$(B,Q)=\text{set}_{z_1\ldots z_k}E_2$", причем E_1 содержит f. Часть параметров консеквента дополнительной теоремы встречается в существенных антецедентах, но в ее уравнении из антецедентов таких параметров уже нет. Дополнительная теорема используется для реализации антецедента "коорд$(A,K)=\text{set}_{x_1\ldots x_k}(D)$" исходной теоремы. (Прием уравндробь - 8).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcdefklmnBCD}(\neg(B=C)$ & коорд(прямая$(BC),D)=\text{set}_{vwA}(v-$число & $w-$число & $A-$число & пропорцнаборы$((d,e,f),(l+v,m+w,n+A)))$ & коорд(вектор$(BC),D)=(b,c,k)$ & $d-$число & $e-$число & $f-$число & $l-$число & $m-$число & $n-$число & $B-$точка & $C-$точка & Трехмерн$(D)\rightarrow$ пропорцнаборы$((b,c,k),(d,e,f)))$

из теоремы

$\forall_{abcghijkpqrK}(\neg(a=g)$ & коорд$(g,K)=(h,i,j)$ & коорд(прямая$(ag),K)=$ $\text{set}_{xyz}(x-$число & $y-$число & $z-$число & пропорцнаборы$((p,q,r),(x-h,y-i,$ $z-j)))$ & коорд(вектор$(ga),K)=(b,c,k)$ & $p-$число & $q-$число & $r-$число & $a-$точка & $g-$точка & Трехмерн$(K)\rightarrow$ пропорцнаборы$((b,c,k),(p,q,r)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABKabcdefpqr}(A-$точка & $B-$точка & $\neg(A=B)$ & Трехмерн(K) & $a-$число & $b-$число & $c-$число & $d-$число & $e-$число & $f-$число & коорд$(A,K)=$ (p,q,r) & коорд(прямая$(AB),K)=\text{set}_{xyz}(x-$число & $y-$число & $z-$число & пропорцнаборы$((a,b,c),(x+d,y+e,z+f)))\rightarrow mbox($прямая$(AB),K)=\text{set}_{xyz}(x-$ число & $y-$число & $z-$число & пропорцнаборы$((a,b,c),(x-p,y-q,z-r))))$

2. Развязка антецедентов по переменной для текущего объекта. Теорема - тождество вида "коорд$(A,K)=(x_1,\ldots,x_k)$". Некоторый антецедент содержит переменную A как корневой операнд своего подвыражения t, имеющего заголовок f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка C, переводящая B_1 в t. При этом некоторая переменная y выражения B_1, не входящая в B_2, переводится в A. Антецеденты новой теоремы получаются заменой в антецедентах старой выражения t на $C(B_2)$ и добавлением результатов применения C к антецедентам дополнительной теоремы. Консеквент тот же, что у исходной теоремы. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием систкоорд - 20).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdefghijABCDK}(\neg(c=f)$ & $\neg(c=D)$ & $\neg(g=h)$ & $\neg(h=D)$ & $K=(A,B,C)$ & коорд$(c,K)=(d,e)$ & коорд$(h,K)=(i,j)$ & $D\in$ прямая(cf) & $D\in$ прямая(gh) & $c-$точка & $f-$точка & $g-$точка & $h-$точка & $D-$точка & прямая$(cf)\parallel$ прямая(AB) & прямая$(gh)\parallel$ прямая(AC) & систкоорд$(K)\rightarrow$ коорд$(D,K)=$ $(i,e))$

из теоремы

$\forall_{cdefhijABCDK}(\neg(c=f)$ & $\neg(c=D)$ & $\neg(h=D)$ & $K=(A,B,C)$ & коорд$(c,K)=$ (d,e) & коорд$(h,K)=(i,j)$ & $D\in$ прямая(cf) & $c-$точка & $f-$точка & $h-$точка & $D-$точка & прямая$(cf)\parallel$ прямая(AB) & прямая$(hD)\parallel$ прямая(AC) & систкоорд$(K)\rightarrow$ коорд$(D,K)=(i,e))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $\neg(A=B)$ & $\neg(B=C)$ & $A\in$ прямая$(BC)\rightarrow$ прямая$(AB)=$ прямая$(BC))$

3. Развязка параметров антецедента. Теорема - соотношение (равенство) для невырожденных числовых атомов. Выбирается существенный антецедент A с заголовком f, и находится теорема, консеквент и некоторый антецедент которой имеют заголовок f, причем эта теорема обеспечивает развязку консеквента по параметрам списка X. Определяется подстановка C, переводящая консеквент дополнительной теоремы в A. Она переводит переменные X в некоторые переменные Y. Проверяется существование отличного от A антецедента D исходной теоремы, содержащего параметр списка Y, заголовок которого не встречается среди заголовков антецедентов дополнительной теоремы, содержащих параметр списка X. Тогда дополнительная теорема используется для реализации антецедента A исходной теоремы. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием числовойатом - 48).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcfghij}(\neg(b=f)\ \&\ \neg(c=f)\ \&\ \neg(c=h)\ \&\ \neg(f=h)\ \&\ \neg(f=i)\ \&$
   $\neg(f=j)\ \&\ \neg(h=j)\ \&\ c \in \text{прямая}(bf)\ \&\ j \in \text{прямая}(fi)\ \&\ \text{биссектриса}(ifbg)\ \&$
   $b-\text{точка}\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ f-\text{точка}\ \&\ g-\text{точка}\ \&\ h-\text{точка}\ \&\ i-\text{точка}\ \&$
   $j-\text{точка}\ \&\ \text{прямая}(bf) \perp \text{прямая}(ch)\ \&\ \text{прямая}(fi) \perp \text{прямая}(hj)\ \&$
   $\text{точкалуча}(f,g,h) \to l(hj)=l(ch))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \neg(C=D)\ \&$
   $\neg(A=B)\ \&\ \neg(B=D)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(A=D)\ \&\ \text{биссектриса}(BACD)\ \&$
   $\text{прямая}(BD) \perp \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{прямая}(CD) \perp \text{прямая}(AC) \to l(BD)=l(CD))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bcfghij}(\neg(b=f)\ \&\ \neg(c=f)\ \&\ \neg(f=g)\ \&\ \neg(f=h)\ \&\ \neg(f=i)\ \&$
   $\neg(f=j)\ \&\ \text{биссектриса}(ifbg)\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ f-\text{точка}\ \&\ g-\text{точка}\ \&$
   $h-\text{точка}\ \&\ i-\text{точка}\ \&\ j-\text{точка}\ \&\ \text{точкалуча}(f,b,c)\ \&\ \text{точкалуча}(f,g,h)\ \&$
   $\text{точкалуча}(f,i,j) \to \text{биссектриса}(jfch))$

Развязка связи консеквента с антецедентами

1. Развязка параметров, определяющих множество объектов, с помощью дополнительного тождества. Теорема имеет вид "$\text{коорд}(A,K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(D)$", где A - неоднобуквенное выражение с заголовком f. Существует антецедент вида "$\text{коорд}(E,K) = (a_1,\ldots,a_k)$", у которого левая частьимеет общий параметр с A. Находится теорема вида $B_1 = B_2$, где обе части - невырожденные числовые атомы с заголовком f. Все переменные этой теоремы содержатся в ее консеквенте. Каждая переменная выражения B_2 встречается в существенных антецедентах дополнительной теоремы только внутри подтерма, равного B_2. Дополнительная теорема используется для преобразования A. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием уравнмножество - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ghijABCDK}(\neg(A=B)\ \&\ \text{коорд}(A,K)=(g,h)\ \&\ \text{коорд}(B,K)=(i,j)\ \&$
   $A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&$

$\neg(C = D)$ & $A \in$ прямая(CD) & $B \in$ прямая$(CD) \to$ коорд(прямая$(CD), K) =$ $\mathrm{set}_{xy}(hi + x(j - h) + y(g - i) - gj = 0$ & $x -$ число & $y -$ число))

из теоремы

$\forall_{deghijK}(\neg(d = e)$ & коорд$(d, K) = (g, h)$ & коорд$(e, K) = (i, j)$ & $d -$ точка & $e -$ точка & систкоорд$(K) \to$ коорд(прямая$(de), K) = \mathrm{set}_{xy}(hi + x(j - h) +$ $y(g - i) - gj = 0$ & $x -$ число & $y -$ число))

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $\neg(C = D)$ & $A \in$ прямая(CD) & $B \in$ прямая(CD) & $\neg(A = B) \to$ прямая$(AB) =$ прямая$(CD))$

2. Развязка параметров, определяющих множество объектов, с помощью дополнительного тождества. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, выражающая утверждение через параметры координат. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное нечислове атомарное выражение t с заголовком f. Среди антецедентов теоремы имеется равенство, содержащее параметр выражения t. При этом никакой антецедент не содержит самого t. Находится теорема вида $B_1 = B_2$, где обе части - невырожденные числовые атомы с заголовком f. Все переменные этой теоремы содержатся в ее консеквенте. Каждая переменная выражения B_2 встречается в существенных антецедентах дополнительной теоремы только внутри подтерма, равного B_2. Дополнительная теорема используется для преобразования t. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием числопред - 16).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdefghijBEK}(K = (g, B, h)$ & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(f + ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey =$ 0 & $x -$ число & $y -$ число) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $g -$ точка & $B -$ точка & $h -$ точка & прямкоорд(K) & линвторпорядка(E) & невырожд(E) & $i -$ точка & $j -$ точка & $\neg(i = j)$ & $g \in$ прямая(ij) & $h \in$ прямая$(ij) \to$ осьсимметрии(прямая$(ij), E) \leftrightarrow b = 0$ & $d = 0)$

из теоремы

$\forall_{abcdefABCEK}(K = (A, B, C)$ & коорд$(E, K) = \mathrm{set}_{xy}(f + ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey =$ 0 & $x -$ число & $y -$ число) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & прямкоорд(K) & линвторпорядка(E) & невырожд$(E) \to$ осьсимметрии(прямая$(AC), E) \leftrightarrow$ $b = 0$ & $d = 0)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $\neg(C = D)$ & $A \in$ прямая(CD) & $B \in$ прямая(CD) & $\neg(A = B) \to$ прямая$(AB) =$ прямая$(CD))$

5.4 Переход к новому параметру, обозначающему сложное выражение

Обозначение новым параметром не содержащего неизвестных подтерма

1. Обобщение эквивалентности для решения уравнения: выделение невырожденного известного подвыражения с уникальныи параметром и замена его на новый параметр. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$ для разрешения утверждения A_1 относительно неизвестной x. Выбирается отличный от x параметр a утверждения A_1, имеющий единственное вхождение в A_1. Рассматривается максимальное не содержащее x надвыражение t вхождения переменной a в A_1. При необходимости перегруппируется ассоциативно-коммутативная операция: выделяются лишь ее операнды без x. Выбирается новая переменная b и уравнение $t = b$ решается относительно a. После получения равенства $a = r$ предпринимается замена в A_1 подвыражения t на b, а в A_2 - переменной a на r. Сопровождающие условия на b добавляются к антецедентам. Результат упрощается. (Прием глуб - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ade}(d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow 2de + d^2 = a \leftrightarrow (d = -e + \sqrt{a + e^2} \ \vee \ d = -(e + \sqrt{a + e^2})) \ \& \ 0 \leq a + e^2)$

   из теоремы

   $\forall_{cde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow 2de + d^2 = c - e^2 \leftrightarrow (d = -e + \sqrt{c} \ \vee \ d = -(e + \sqrt{c})) \ \& \ 0 \leq c)$

2. Обобщение эквивалентности, подготавливающей возможность разрешения относительно неизвестного подвыражения: выделение невырожденного известного подвыражения с уникальным параметром и замена его на новый параметр. Аналогично предыдущему, но теорема - эквивалентность, подготавливающая возможность разрешения относительно заданного подвыражения с неизвестной x при помощи нормализатора уравнений. (Прием неизвтермы - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow a \sin b - c(\cos b)^2 = d \leftrightarrow a \sin b + c(\sin b)^2 = c + d)$

   из теоремы

   $\forall_{abce}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow a \sin b - c(\cos b)^2 = e - c \leftrightarrow e = a \sin b + c(\sin b)^2)$

3. Обобщение импликации для подбора корня уравнения: выделение невырожденного неконстантного известного подвыражения и замена его на новый параметр. Теорема представляет собой кванторную импликацию, которая может быть использована для подбора значений неизвестной x, удовлетворяющей консеквенту. В консеквенте выбирается некоторое неоднобуквенное подвыражение t, не содержащее x. При необходимости перегруппируется ассоциативно-коммутативная операция: выделяются лишь ее операнды без x. Берется максимальное такое t, в том смысле, что нет его надвыражения, не содержащего

x. Выбирается некоторый параметр a ыражения t; предпочтение отдается тем параметрам, которые имеют в t единственное вхождение. Выбирается новая переменная b, и уравнение $t = b$ решается относительно a. После получения равенства $a = r$ предпринимается замена в консеквенте подвыражения t на b, прочие вхождения в консеквент параметра a заменяются на r, к антецедентам добавляются равенство $a = r$ и сопровождающие условия на b. Результат упрощается. (Прием неизвестная - 2).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(b-\text{число} \,\&\, \neg(b=0) \,\&\, d-\text{число} \,\&\, c = -d/(3b)+b \rightarrow cd+c^3 = -d^3/(27b^3)+b^3)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \,\&\, c = a + b \rightarrow -3abc + c^3 = a^3 + b^3)$$

Заметим, что указанный переход является одним из звеньев цепочки, приводящей к формуле Кардано. В этой цепочке он применяется восемь раз.

4. Обобщение эквивалентности путем выделения невырожденного известного подвыражения с уникальным параметром и замены его на новый параметр. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, позволяющая переходить к более простым выражениям с неизвестными. Ее характеристики явно указывают на переменные, считающиеся известными или неизвестными. Выбирается известный параметр a утверждения A_1, имеющий единственное вхождение в A_1. Рассматривается максимальное не содержащее неизвестных надвыражение t вхождения переменной a в A_1. При необходимости перегруппируется ассоциативно-коммутативная операция: выделяются лишь ее операнды без неизвестных. Кроме того, внешний знак по возможности тоже относится к t. Выбирается новая переменная b и уравнение $t = b$ решается относительно a. После получения равенства $a = r$ предпринимается замена в A_1 подвыражения t на b, а в A_2 - переменной a на r. Сопровождающие условия на b добавляются к антецедентам. Результат упрощается. (Прием неизвоценка - 3).

   Пример: вывод теоремы

$$\forall_{abcdf}(\neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \,\&\, \neg(\text{числитель}(f) - \text{even}) \,\&\, a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \,\&\, c - \text{число} \,\&\, d - \text{число} \,\&\, f - \text{rational} \rightarrow ad^f = cb^f \leftrightarrow bc^{1/f} = da^{1/f})$$

   из теоремы

$$\forall_{abdef}(\neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \,\&\, \neg(\text{числитель}(f) - \text{even}) \,\&\, a - \text{число} \,\&\, b - \text{число} \,\&\, d - \text{число} \,\&\, e - \text{число} \,\&\, f - \text{rational} \rightarrow b^f e^f = ad^f \leftrightarrow da^{1/f} = be)$$

   В этой теореме неизвестными полагаются b, d.

Обозначение новым параметром подтерма консеквента

1. Обозначение новым уникальным параметром операции с уникальным параметром. Консеквент теоремы имеет вид "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(\text{коорд}(A, K) = \text{set}_{y_1 \ldots y_m}(D) \,\&\, E)$" и определяет общий вид уравнений для координат точек множества A. Некоторая переменная x_i не встречается в E и имеет единственное вхождение в D.

Она является операндом выражения t_i, все параметры которого содержатся в списке $x_1, \ldots, x_k$. Выбирается новая переменная a, и уравнение $t = a$ разрешается относительно x_i. Получается ответ $x_i = r$ & B. Все вхождения x_i под квантором существования заменяются на r; B и указатель типа значения переменной a добавляются к конъюнктивным членам подкванторного утверждения, а в связывающей приставке x_i заменяется на a. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием координаты - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABK}(\neg(A = B)$ & $A -$ точка & $B -$ точка & систкоорд$(K) \rightarrow$
$\exists_{abce}($коорд$($прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(\exists_t(x = a + et$ & $y = b + ct$ & $t -$ число)) &
$a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $e -$ число))

из теоремы

$\forall_{ABK}(\neg(A = B)$ & $A -$ точка & $B -$ точка & систкоорд$(K) \rightarrow$
$\exists_{abde}($коорд$($прямая$(AB), K) = \mathrm{set}_{xy}(\exists_t(x = a + et$ & $y = b + t(d - b)$ &
$t -$ число)) & $a -$ число & $b -$ число & $d -$ число & $e -$ число))

2. Усмотрение в заменяемом терме операции с уникальным параметром, переменные которой не встречаются в антецеденте - равенстве, и замена этой операции на новую переменную. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, позволяющее заменить подтермы с неизвестными на подтермы без неизвестных с помощью равенства $t_1 = t_2$ в антецедентах, идентифицируемого с посылкой задачи. Внутри A_1 выбирается неоднобуквенное подвыражение t с корневым операндом - переменной a, имеющей единственное вхождение в A_1. Параметры выражения t не встречаются в t_1, t_2. Выбирается новая переменная b и уравнение $t = b$ решается относительно a. Получается результат $a = r$, после чего в теореме везде a заменяется на r. Сопровождающие условия на b добавляются к антецедентам. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием исключнеизв - 10).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abdef}(\neg($знаменатель$(a) -$ even$)$ & $\neg($знаменатель$(f) -$ even$)$ & $be = d$ &
$b -$ число & $e -$ число & $a -$ rational & $f -$ rational $\rightarrow b^f e^a = d^f e^{a-f})$

из теоремы

$\forall_{bdefg}(\neg($знаменатель$(f) -$ even$)$ & $\neg($знаменатель$(g) -$ even$)$ & $be = d$ &
$b -$ число & $e -$ число & $f -$ rational & $g -$ rational $\rightarrow b^f e^{f+g} = d^f e^g)$

3. Попытка ввести вспомогательную переменную для неодносимвольного аргумента сложной операции заменяемого терма. Теорема - тождество $f(t) = A$ преобразования к заданным заголовкам. Выражение t неоднобуквенное и имеет единственную переменную a. Выбирается новая переменная b, и уравнение $t = b$ решается относительно a. Получается результат $a = r$, после чего левая часть исходного тождества заменяется на $f(b)$, а в остальной части теоремы переменная a заменяется на r Добавляется условие на тип значения b. Результат упрощается. (Прием нормзаголовок - 16).

Пример: вывод теоремы

$\forall_b(b - \text{число} \to \sin b = 2\sin(b/2)\cos(b/2))$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to \sin(2a) = 2\sin a \cos a)$

4. Попытка обобщения путем ввода вспомогательного параметра для подвыражения с бесповторной переменной. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ для исключения описателя. Наиболее сложный подтерм заменяемой части A_1 - сама эта часть. Выбирается параметр a выражения A_1, имеющий в нем единственное вхождение. Это вхождение погружается в наибольший подтерм t, не содержащий связанных переменных терма A_1. Проверяется, что выражение t неоднобуквенное. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих a, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выбирается новая переменная b, и уравнение $t = b$ разрешается относительно a, причем неизвестная a - несущественная. Посылками задачи служат утверждения S_2; утверждения S_1 и указатель типа значения b добавляются к условиям. Ответ R не содержит a. Выбирается новая переменная d, и решается задача на описание с условием $d = A_2$, в которой требуется выразить d через b и отличные от a переменные исходной теоремы. Посылками служат антецеденты теоремы, R и равенство $t = b$. Ответ имеет вид $d = r$. Консеквентом новой теоремы служит равенство результата замены в A_1 подтерма t а b выражению r. Антцеденты - S_2 и R. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием описатель - 25).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ce}(c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \to \text{set}_a(0 < a + c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ a + e \leq 0) = (-c, -e])$

из теоремы

$\forall_{be}(b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \to (b, -e] = \text{set}_a(0 < a - b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ a + e \leq 0))$

5. Попытка обобщения путем ввода вспомогательного параметра для сложного подвыражения с небесповторной переменной. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ для исключения описателя. Внутри A_1 находится подтерм "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(D)$", причем утверждение D не имеет связанных переменных. Выбирается параметр a описателя "класс", имеющий в нем более одного вхождения. Накакое содержащее a максимальное подвыражение описателя не содержит переменных $x_1, \ldots, x_k$. Максимально сложное из этих подвыражений единственное - некоторое выражение t. Оно неоднобуквенное. Выбирается новая переменная b, и уравнение $t = b$ решается относительно a. Результат добавляется к списку антецедентов. Полученная теорема упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием описатель - 52).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abd}(b \in \{0, \ldots, a-1\} \ \& \ a - \text{натуральное} \ \& \ a \mid (d - b) \ \& \ d - \text{целое} \to$
$\text{card}(\text{set}_c(c(\text{mod } a) = b \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ d \leq c)) = \text{счетное})$

из теоремы

$\forall_{abn}(b \in \{0,\ldots,a-1\}$ & $a-$ натуральное & $n-$ целое $\rightarrow$
$\mathrm{card}(\mathrm{set}_c(c(\mathrm{mod}\ a) = b$ & $c-$ целое & $a+b+an \leq c)) =$ счетное)

6. Усиление теоремы путем ввода вспомогательной переменной для подтерма, не содержащего аргумента отображения. Теорема - кванторная импликация с элементарными антецедентами и бесквантором консеквентом, внутри которого выделяется описатель "$\lambda_{x_1\ldots x_k}(D_2, D_1)$". Внутри D_2 выбирается вхождение некоторой связанной переменной x_i, после чего предпринимается попытка преобразовать некоторый надтерм этого вхождения с выделением в нем неоднобуквенного подтерма t, не содержащего переменных $x_1,\ldots,x_k$. Этот подтерм имеет единственную переменную a, входящую в консеквент не только под описателем, но и вне него. Выбирается новая переменная b, и уравнение $t = b$ решается относительно a. После получения ответа $a = r$ предпринимаются замена в теореме переменной a на r и добавление к антецедентам сопровождающих условий на b. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием отображение - 35).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cin}(\neg(c = 0)$ & $\neg(n = 0)$ & $c-$ число & $i-$ число & $c-$ целое $\rightarrow$
   периодична$(\lambda_b(\sin(i + bc), b-$ число$), 2\pi n/c))$

   из теоремы

   $\forall_{ain}(\neg(a = 0)$ & $a-$ число & $i-$ число & $n-$ целое $\rightarrow$
   периодична$(\lambda_b(\sin(i + 2\pi bn/a), b-$ число$), a))$

7. Обобщение тождества "склейкаоперандов": выделение невырожденной группы операндов ассоциативно-коммутативной операции в небесповторной части и замена ее на новый параметр. Теорема - тождество вида $f(A_1, A_2) = A_3$, позволяющее исключить повторные вхождения переменной x в выражение A_1 путем применения внешней операции f к обеим частям равенства для A_1, встречающегося в задаче. Выражения A_2, A_3 бесповторны. Внутри A_1 выделяется ассоциативная и коммутативная операция $g(B_1 \ldots b_m)$, имеющая одним из операндов-бесповторную переменную a терма A_1 и хотя бы один другой операнд, имеющий только бесповторные переменные. Путем группировки операндов этой операции выделяется терм t вида $g(\ldots)$ не содержащий небесповторных переменных. Выбирается новая переменная b, и уравнение $t = b$ решается относительно a. Проверяется наличие в ответе равенства для a, после чего этот ответ добавляется к антецедентам, и новая теорема упрощается. Она регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием склейкаоперандов - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcdf}(\neg(b = 0)$ & $\neg(\cos d = 0)$ & $b-$ число & $c-$ число & $d-$ число & $f-$ число $\rightarrow$
   $(c\cos d + f\sin d)/(b\cos d) = c/b + f\,\mathrm{tg}\,d/b)$

   из теоремы

   $\forall_{abdf}(\neg(b = 0)$ & $\neg(\cos d = 0)$ & $a-$ число & $b-$ число & $d-$ число & $f-$ число $\rightarrow$
   $(ab\cos d + f\sin d)/(b\cos d) = a + f\,\mathrm{tg}\,d/b)$

8. Выделение невырожденного подвыражения с уникальным параметром и замена его на новый параметр. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, обеспечивающее переход к термам с меньшей оценкой сложности. Выбирается параметр a выражения A_1, имеющий в A_1 единственное вхождение, и составляется список X всех переменных, являющихся отличными от a параметрами антецедентов, содержащих a. Находится максимальное надвыражение t вхождения a в A_1, не содержащее переменных X. При необходимости предпринимается группировка операндов ассоциативных и коммутативных операций. Выражение t неоднобуквенное, и его сложность меньше сложности A_1. Выбирается новая переменная b, и уравнение $t = b$ решается относительно a. После получения ответа $a = r$ предпринимаются замена в теореме переменной a на r и добавление к антецедентам сопровождающих условий на b. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием упрощение - 17).

   Пример: вывод теоремы

   $$\forall_{bc}(b - \text{целое } \& \ c - \text{целое } \& \ 0 \leq c - b + 1 \rightarrow \text{card}(\{b, \ldots, c\}) = c - b + 1)$$

   из теоремы

   $$\forall_{ac}(a - \text{целое } \& \ c - \text{целое } \& \ 0 \leq c - a \rightarrow \text{card}(\{a + 1, \ldots, c\}) = c - a)$$

9. Обобщение характеризации функции путем ввода нового параметра вместо неоднобуквенного выражения с единственным бесповторным старым параметром. Консеквент теоремы имеет вид $f(\lambda_x(A_2, A_1), A_3)$ и определяет характеристику A_3 некоторой функции. Внутри описателя "отображение" выбирается неоднобуквенное подвыражение t, единственной переменной которого служит некоторый параметр a данного описателя. Надвыражение t уже имеет переменную, отличную от a. Выбирается новая переменная b, и уравнение $t = b$ решается относительно a. После получения ответа $a = r$ предпринимаются замена в теореме переменной a на r и добавление к антецедентам сопровождающих условий на b. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием функперех - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $$\forall_b(\neg(b + 1 = 0) \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_f(f^b, 0 < f \ \& \ f - \text{число}), \lambda_c(c^{b+1}/(b + 1), 0 < c \ \& \ c - \text{число})))$$

   из теоремы

   $$\forall_a(\neg(a = 0) \ \& \ a - \text{число} \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_f(f^{a-1}, 0 < f \ \& \ f - \text{число}), \lambda_c(c^a/a, 0 < c \ \& \ c - \text{число})))$$

10. Обобщение характеризации функции: выделение невырожденного подвыражения без варьируемой переменной и замена его на новый параметр. Консеквент теоремы имеет вид $f(\lambda_x(A_2, A_1), A_3)$ и определяет характеристику A_3 некоторой функции. Внутри описателя "отображение" выбирается неоднобуквенное подвыражение t, не содержащее переменной x. Его надтерм уже содержит x. При необходимости предпринимается группировка операндов ассоциативных и коммутативных операций. Выбирается переменная a выражения t, имеющая единственное вхождение в t. Выбирается новая переменная b, и уравнение $t = b$

решается относительно a. После получения ответа $a = r$ предпринимаются замена в теореме переменной a на r и добавление к антецедентам сопровождающих условий на b. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием функперех - 23).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(c < 0\ \&\ 0 < a^2 - 4bc\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \rightarrow$
$\text{первообразная}(\lambda_x(\sqrt{1/(b + ax + cx^2)}, x - \text{число}),$
$\lambda_d(-\arcsin((a + 2cd)/\sqrt{a^2 - 4bc})/\sqrt{-c}, d - \text{число})))$

из теоремы

$\forall_{acg}(\neg(g = 0)\ \&\ c < 0\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ g - \text{число} \rightarrow$
$\text{первообразная}(\lambda_x(\sqrt{1/(ax + cx^2 + a^2/(4c) + g^2)}, x - \text{число}),$
$\lambda_d(g \cdot \arcsin(-a/(2g\sqrt{-c}) + d\sqrt{-c}/g)/(|g|\sqrt{-c}), d - \text{число})))$

11. Обозначение новым уникальным параметром операции с уникальным параметром. Теорема - кванторная импликация, определяющая вид объекта A о имеющемуся в антецедентах уравнению "$\text{коорд}(A, K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(D)$" для координат его точек. Выбирается параметр a описателя "класс", не входящий в консеквент теоремы, причем такой, что он встречается внутри данного описателя только как корневой операнд одного и того же выражения t. Все переменные этого выражения суть параметры описателя. Выбирается новая переменная b, и уравнение $t = b$ решается относительно a. После получения ответа $a = r$ предпринимаются замена в теореме переменной a на r и добавление к антецедентам сопровождающих условий на b. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием видобъекта - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{Kabcef}(b - \text{число}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ (\neg(c = 0)\ \vee$
$\neg(f = 0))\ \&\ \text{коорд}(e, K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + ft\ \&\ y = b + ct\ \&\ t - \text{число}))\ \&$
$c - \text{число} \rightarrow \text{Прямая}(e))$

из теоремы

$\forall_{Kabdef}(d - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ (\neg(f = 0)\ \vee$
$\neg(b - d = 0))\ \&\ \text{коорд}(e, K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + ft\ \&\ y = b + t(d - b)\ \&$
$t - \text{число}))\ \&\ f - \text{число} \rightarrow \text{Прямая}(e))$

12. Ввод нового параметра для исключения повторного вхождения переменной в заменяемой части. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, уменьшающая оценку сложности терма. Выбирается переменная a - параметр левой части, имеющая в этой части более одного вхождения. Она является корневым операндом некоторого выражения t, содержащего только параметр a и встречающегося в антецедентах. Выбирается новая переменная b, и решается задача на исследование, посылками которой служат антецеденты теоремы и равенство $t = b$. Задача решается с целью исключения переменной a везде, где это возможно. После решения составляется список S содержащих только b посылок, к которому добавляются результаты замены в антецедентах подвыражения t на b. Проверяется, что равенство $t = b$ - следствие утверждений S и любой из частей

A_1, A_2 консеквента исходной теоремы. Антецедентами новой теоремы становятся утверждения S, консеквентом - результат замены в исходном консеквенте всех вхождений t на b. Результат упрощается. (Прием уменьшение - 20).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abfA}$(перестановка(f, A) & $b -$ set & $A -$ set & $a -$ целое & $a \leq \mathrm{card}(A)$ & $0 \leq a$ & конечное$(A) \to$ перестановка(сужение$(f, \{1, \ldots, a\}), b) \leftrightarrow$ $b =$ образ$(f, \{1, \ldots, a\}))$

из теоремы

$\forall_{bfA}$(перестановка(f, A) & $b-$set & $A-$set & $\mathrm{card}(a) \leq \mathrm{card}(A)$ & конечное$(A) \to$ перестановка(сужение$(f, \{1, \ldots, \mathrm{card}(b)\}), b) \leftrightarrow$ образ$(f, \{1, \ldots, \mathrm{card}(b)\}) = b)$

Обозначение новым параметром подтерма антецедента

1. Исключение описателя "отображение" в антецедентах путем ввода новой переменной. Теорема имеет антецедент, содержащий подтерм "$\lambda_x(A_2, A_1)$". Внутри A_2 выделяется собственное подвыражение "значение(f, x)". Прочие содержащие переменную f антецеденты лишь указывают, что f - функция, а также определяют условия на ее область определения, множество значений и т.п. Выбирается новая переменная g, и уравнение $A_2 = g(x)$ разрешается относительно $f(x)$. Ответ $f(x) = R$ используется для замены в теореме функции f на "$\lambda_x(R, A_1)$", причем сам исходный описатель "$\lambda_x(A_2, A_1)$" заменяется на g. Результат упрощается. (Прием отображ - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aei}$(предел$(e, i, a) =$ неопред & $\mathrm{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(e) \subseteq \mathbb{R}$ & $e -$ функция & Число(a) & типпредела(i) & Локопред$(e, a, i) \to \lim_{b \to a \setminus i}(-e(b)) =$ неопред)

   из теоремы

   $\forall_{adi}(\lim_{b \to a \setminus i}(-d(b)) =$ неопред & $\mathrm{Dom}(d) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(d) \subseteq \mathbb{R}$ & $d -$ функция & Число(a) & типпредела(i) & Локопред$(d, a, i) \to$ предел$(d, i, a) =$ неопред)

2. Обобщение антецедента, задающего уравнение множества объектов: выделение невырожденного не зависящего от варьируемых переменных подвыражения с уникальным параметром и замена его на новый параметр. Среди антецедентов теоремы имеется равенство "коорд$(A, K) = \mathrm{set}_{x_1 \ldots x_k}(D)$". Выбирается параметр a описателя "класс", имеющий в нем единственное вхождение. Находится максимальный надтерм t вхождения a в этот описатель, не связанный в нем никакими кванторами и описателями. Выбирается новая переменная b, и уравнение $t = b$ решается относительно a. После получения ответа $a = r$ предпринимаются замена в теореме переменной a на r и добавление к антецедентам сопровождающих условий на b. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием уравндробь - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcefABK}(\neg(A = B)$ & коорд$(e, K) = \mathrm{set}_{xy}(\exists_t(x = a + ft$ & $y = b + ct$ & $t -$ число)) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (a + f, b + c)$ & $c -$ число & $f -$ число & $A -$ точка & $B -$ точка & систкоорд$(K) \to e =$ прямая$(AB))$

из теоремы

$\forall_{abdefABK}(\neg(A=B)$ & коорд$(e,K)=\text{set}_{xy}(\exists_t(x=a+ft$ & $y=b+t(d-b)$ & $t-$число)) & коорд$(A,K)=(a,b)$ & коорд$(B,K)=(a+f,d)$ & $f-$число & $A-$точка & $B-$точка & систкоорд$(K)\to e=$прямая$(AB))$

3. Обобщение антецедента, задающего уравнение множества объектов: выделение одноместной операции типа отрицания над уникальным параметром и замена его на новый параметр. Аналогично предыдущему. При определении t выбирается такой надтерм с одноместной корневой операцией f типа "отрицание", что этй операцию можно перенести вглубь вплоть до переменной a. Затем в качестве t берется $f(a)$. (Прием уравндробь - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acdABK}(\neg(A=B)$ & коорд(окружность$(AB),K)=\text{set}_{xy}(d+ay+cx+x^2+y^2=0$ & $x-$число & $y-$число) & $0<-d+(a^2+c^2)/4$ & $a-$число & $c-$число & $d-$число & $A-$точка & $B-$точка & прямкоорд$(K)\to$ коорд$(A,K)=(-c/2,-a/2))$

   из теоремы

   $\forall_{acdABK}(\neg(A=B)$ & коорд(окружность$(AB),K)=\text{set}_{xy}(d+ay-cx+x^2+y^2=0$ & $x-$число & $y-$число) & $0<-d+(a^2+c^2)/4$ & $a-$число & $c-$число & $d-$число & $A-$точка & $B-$точка & прямкоорд$(K)\to$ коорд$(A,K)=(c/2,-a/2))$

Исключение операции типа "отрицание"

1. Исключение операции типа "отрицание", если она встречается над всеми вхождениями заданной переменной. Теорема - эквивалентность $A_1\leftrightarrow A_2$, декомпозирующая элементарное бесповторное утверждение A_1 в конъюнкцию A_2 элементарных бесповторных утверждений. Внутри A_1 выбирается подтерм вида $f(x)$, где f - одноместная операция типа "отрицание" (т.е. $f(f(x))=x$), причем переменная x стречается в A_1 и в антецедентах только в виде $f(x)$. Исключение могут составлять лишь антецеденты с единственной переменной x, имеющей в них единственное вхождение. Везде в теореме вместо переменной x подставляется $f(x)$. Добавляются необходимые для сопровождения по о.д.з. антецеденты. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием и - 76).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a-$число & $b-$число & $c-$число $\to 0\le a+c$ & $0\le b+c\leftrightarrow 0\le c+\min(a,b))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a-$число & $b-$число & $c-$число $\to 0\le a-c$ & $0\le b-c\leftrightarrow 0\le -c+\min(a,b))$.

2. Исключение операции типа "отрицание", если она встречается над всеми вхождениями заданной переменной. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество общей стандартизации. (Прием нормализация - 115).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{ce}(e - \text{set} \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ c - \text{число} \to \text{card}(e) = \text{card}(\text{set}_a(a + c \in e \ \& \ a - \text{число})))$

из теоремы

$\forall_{ce}(e - \text{set} \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ c - \text{число} \to \text{card}(e) = \text{card}(\text{set}_a(a - c \in e \ \& \ a - \text{число})))$

3. Исключение операции типа "отрицание", если она встречается над всеми вхождениями заданной переменной. Аналогично предыдущему, но теорема - эквивалентность общей стандартизации. (Прием общнорм 70).

4. Исключение операции типа "отрицание", если она встречается над всеми вхождениями заданной переменной. Аналогично предыдущему, но теорема - эквивалентность, исключающая символы с наибольшей оценкой сложности. (Прием уменьшение - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcd}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \le d \to 0 \le b + d|c| \leftrightarrow 0 \le b + cd \ \vee 0 \le b - cd)$

   из теоремы

   $\forall_{bcd}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \le d \to 0 \le d|c| - b \leftrightarrow b + cd \le 0 \ \vee 0 \le cd - b)$

5. Исключение операции типа "отрицание", если она встречается над всеми вхождениями заданной переменной. Аналогично предыдущему, но теорема - кванторная импликация без существенных антецедентов и с элементарным консеквентом. (Прием элементарно - 13).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{am}(a - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ a + 1 \le 0 \to \text{непересек}(\mathbb{N}, \{m, \ldots, a\}))$

   из теоремы

   $\forall_{am}(a - \text{натуральное} \ \& \ m - \text{целое} \to \text{непересек}(\mathbb{N}, \{m, \ldots, -a\}))$

6. Исключение операции типа "отрицание", если она встречается над всеми вхождениями заданной переменной. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, преобразующее обычное описание класса в параметрическое. При этом в антецедентах переменная x может встречаться произвольным образом. (Прием смуравн - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdef}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \to \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (a + x, b + y, c + z))) = \text{set}_{xyz}(\exists_g(x = dg - a \ \& \ y = eg - b \ \& \ z = fg - c \ \& \ g - \text{число})))$

   из теоремы

$\forall_{abcdef}(\neg(d^2+e^2+f^2=0)\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\&\ d-$ число $\&$ $e-$ число $\&\ f-$ число $\to \mathrm{set}_{xyz}(x-$ число $\&\ y-$ число $\&\ z-$ число $\&$ пропорцнаборы$((d,e,f),(a+x,b+y,z-c))) = \mathrm{set}_{xyz}(\exists_g(x=dg-a\ \&$ $y=eg-b\ \&\ z=c+fg\ \&\ g-$ число$)))$

7. Усиление эквивалентности разделения: исключение отрицаний в заменяемой части. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, позволяющая переносить в разные части двуместного отношения две переменные, ранее расположенные в одной части. Выбирается параметр x утверждения A_1, имеющий в A_1 единственное вхождение, причем вида $f(x)$, где f - операция типа "отрицания". Везде в теореме x заменяется на $f(x)$. Добавляются антецеденты, необходимые для сопровождения по о.д.з. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием разделение - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a-$ число $\&\ b-$ число $\to 0<a+b \leftrightarrow -b<a)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a-$ число $\&\ b-$ число $\to b<a \leftrightarrow 0<a-b)$

8. Обобщение эквивалентности типа "связка" путем устранения отрицания над уникальной переменной. Теорема - эквивалентность вида $\exists_{x_1\ldots x_k}(A_1) \leftrightarrow A_2$, которую предполагается использовать для исключения несущественных неизвестных. Выбирается параметр x левой части, имеющий в A_1 единственное вхождение, причем вида $f(x)$, где f - операция типа "отрицание". Везде в теореме x заменяется на $f(x)$. Добавляются антецеденты, необходимые для сопровождения по о.д.з. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием связка - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abd}(\neg(b=0)\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ d-$ число $\to \exists_e(d+ae+be^2=0\ \&$ $e-$ число$) \leftrightarrow 0\le -4bd+a^2)$

   из теоремы

   $\forall_{abd}(\neg(b=0)\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ d-$ число $\to \exists_e(ae+be^2-d=0\ \&$ $e-$ число$) \leftrightarrow 0\le 4bd+a^2)$

9. Попытка исключения операции типа "отрицание" над переменной, имеющей в заменяемой части единственное вхождение. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, обеспечивающее переход к более короткой записи. Выбирается параметр x выражения A_1, имеющий в A_1 единственное вхождение, причем вида $f(x)$, где f - операция типа "отрицание". Проверяется, что кажде вхождение в A_2 переменной x расположено внутри подтерма с заголовком f. Везде в теореме x заменяется на $f(x)$. Добавляются антецеденты, необходимые для сопровождения по о.д.з. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием свертка - 92).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{adefA}(A - \text{set}\ \&\ a \in A\ \&\ d - \text{целое}\ \&\ e - \text{целое}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&$
$d \le 0\ \&\ e \le 0\ \&\ \text{обратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, A) \to \text{алгстепень}(a, f, d{+}e) =$
$f(\text{алгстепень}(a, f, d), \text{алгстепень}(a, f, e)))$

из теоремы

$\forall_{adefA}(A - \text{set}\ \&\ a \in A\ \&\ d - \text{целое}\ \&\ e - \text{целое}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&$
$d \le 0\ \&\ 0 \le e\ \&\ \text{обратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, A) \to \text{алгстепень}(a, f, d{-}e) =$
$f(\text{алгстепень}(a, f, d), \text{алгстепень}(a, f, -e)))$

10. Обобщение тождества "исключнеизв" путем исключения знака перед двуместной операцией в антецеденте, идентифицируемом с посылкой. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, позволяющее заменить неизвестные подтермы на известные с помощью равенства из посылок задачи. Выбирается антецедент теоремы - равенство T, которое будет идентифицироваться с посылкой задачи. Проверяется, что оно имеет не менее двух параметров. Внутри T выбирается подвыражение вида $f(g(x, t))$, где f - операция типа "отрицание", x - переменная, не входящая в A_1 и имеющая единственное вхождение в T. Эта переменная не встречается в прочих антецедентах, имеющих более одного параметра. Проверяется, что "знак" f можно внести под операцию g и считать далее знаком при x. Затем везде в теореме x заменяется на $f(x)$. Добавляются необходимые для сопровождения по о.д.з. антецеденты, результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием исключнеизв - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abdf}(\neg(d = 0)\ \&\ \neg(f = 0)\ \&\ af + bd = 0\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&$
$f - \text{число} \to a/d = -b/f)$

из теоремы

$\forall_{abdf}(\neg(d = 0)\ \&\ \neg(f = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&$
$af - bd = 0 \to a/d = b/f)$

11. Изменение знака варьируемой переменной для исключения знака перед двуместной операцией под квантором существования. Теорема - эквивалентность "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_1\ \&\ A_2) \leftrightarrow A_3$", где утверждение A_3 не имеет связанных переменных, A_1 - конъюнктивный член подкванторного утверждения, содержащий некоторую переменную x_i внутри подтерма вида $f(t)$ где f - одноместная операция. Усматривается возможность перенесения внешнего "знака" f внутрь терма t так, чтобы он оказался знаком перед x_i. Среди конъюнктивных членов утверждения A_2, содержащих x_i, нет ни одного, имеющего более одного параметра. Выбирается новая переменная a, и уравнения $a = f(x_i)$, A_2 решаются относительно x_i. Если получается результат $x_i = r\ \&\ P$, то в связывающей приставке квантора существования переменная x_i заменяется на a в A_1 вместо x_i подставляется r, а A_2 заменяется на P. Результат упрощается. (Прием кванторная-свертка - 18).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{mn}(m - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое} \to \exists_a(n + am = 0\ \&\ a - \text{целое}) \leftrightarrow m|n)$

из теоремы

$\forall_{mn}(m - \text{целое } \& \ n - \text{целое} \to m|n \leftrightarrow \exists_k(n - km = 0 \ \& \ k - \text{целое}))$

12. Обобщение эквивалентности, позволяющей выразить одну неизвестную через другие: исключение операции типа "минус". Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, позволяющая выразить неизвестную x_1 через некоторые другие неизвестные $x_2, \ldots, x_n$. Выбирается параметр a утверждения A_1, отличный от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и имеющий в A_1 единственное вхождение. Это вхождение имеет вид $f(g(a,t))$, причем "знак" f может быть внесен под операцию g так, что окажется знаком перед a. Выбирается новая переменная b, и уравнение $f(a) = b$ решается относительно a. Получается ответ $a = r$. Далее в теореме переменная a заменяется на r, добавляются необходимые для сопровождения по о.д.з. антецеденты, и результат упрощается. Он регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием неизвестные - 8).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcef}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \&$
$\neg(f = 0) \ \& \ e - \text{число} \to acf + bc^2 + ef^2 = 0 \leftrightarrow (c = -f(a + \sqrt{-4be + a^2})/(2b) \ \vee$
$c = f(-a + \sqrt{-4be + a^2})/(2b)) \ \& \ 0 \le -4be + a^2)$

из теоремы

$\forall_{abcdf}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \&$
$\neg(f = 0) \ \& \ e - \text{число} \to acf + bc^2 - df^2 = 0 \leftrightarrow (c = -f(a + \sqrt{4bd + a^2})/(2b) \ \vee$
$c = f(-a + \sqrt{4bd + a^2})/(2b)) \ \& \ 0 \le 4bd + a^2)$

13. Обобщение эквивалентности, подготавливающей возможность разрешения относительно неизвестного подвыражения: исключение отрицания. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, подготавливающая возможность разрешения некоторого условия задачи относительно заданного подвыражения t с неизвестной x при помощи нормализатора уравнений. Выбирается параметр a утверждения A_1, отличный от x и имеющий в A_1 единственное вхождение. Это вхождение имеет вид $f(g(a,t))$, причем "знак" f может быть внесен под операцию g так, что окажется знаком перед a. Выбирается новая переменная b, и уравнение $f(a) = b$ решается относительно a. Получается ответ $a = r$. Далее в теореме переменная a заменяется на r, добавляются необходимые для сопровождения по о.д.з. антецеденты, и результат упрощается. Он регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием неизвтермы - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abde}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \to a\sin b + e(\cos b)^2 = d \leftrightarrow$
$a\sin b - e(\sin b)^2 = d - e)$

из теоремы

$\forall_{abcd}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \to a\sin b - c(\cos b)^2 = d \leftrightarrow$
$a\sin b + c(\sin b)^2 = c + d)$

14. Варьирование параметра для устранения операции типа "минус". Теорема - тождество $A_1 = A_2$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций большей либо равной сложности. Выбирается параметр a выражения A_1, имеющий в A_1 единственное вхождение. Это вхождение имеет вид $f(g(a,t))$, причем "знак" f может быть внесен под операцию g так, что окажется знаком перед a. Выбирается новая переменная b, и уравнение $f(a) = b$ решается относительно a. Получается ответ $a = r$. Далее в теореме переменная a заменяется на r, добавляются необходимые для сопровождения по о.д.з. антецеденты, и результат упрощается. Он регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием сокращ - 31).

    Пример: вывод теоремы

    $$\forall_{ade}(d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \le 0 \ \& \ a - \text{число} \to \max(de, ad) = -d\max(-a, -e))$$

    из теоремы

    $$\forall_{cde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \le 0 \to \max(de, -cd) = -d\max(c, -e))$$

15. Попытка обобщить эквивалентность общей стандартизации путем исключения знака перед двуместной операцией. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$. Внутри A_1 выбирается вхождение подвыражения вида $f(g(x,t))$, где f - операция типа "отрицание", причем "знак" f может быть внесен под операцию g и передан ее операнду - переменной x. Эта переменная имеет в A_1 единственное вхождение. Переменная x заменяется в теореме на выражение $f(x)$. Добавляются антецеденты, необходимые для сопровождения по о.д.з. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием общнорм - 34).

    Пример: вывод теоремы

    $$\forall_{abd}(0 < d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \to 0 < ad + bd \leftrightarrow 0 < a + b)$$

    из теоремы

    $$\forall_{abd}(0 < d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \to 0 < ad - bd \leftrightarrow 0 < a - b)$$

Ввод функциональной переменной, обозначающей старое выражение с функциональными переменными

1. Усмотрение возможности выразить внешние операции над варьируемой переменной через аргумент функциональной переменной. Консеквент теоремы имеет вид "$P(\lambda_x(B(x), A(x)), D)$". Он определяет значение D характеристики P функции "$\lambda_x(B(x), A(x))$". Внутри $B(x)$ выделяется вхождение выражения "значение(f,t)", где f - параметр консеквента, t - неоднобуквенное выражение, содержащее x. Терм "значение(f,t)" расположен внутри некоторого операнда надвыражения $g(E_1, \ldots, E_m)$; $m > 1$. Это надвыражение не имеет других вхождений символа "значение", причем внутри него существует вхождение переменной x, не заключенное в подтерме, равном t При помощи нормализатора "извлечение" указанное надвыражение преобразуется к виду T в котором все вхождения x заключены в подтермах, равных t. Выбираются новые переменные a, y, h. Определяется результат T_1 замены подтерма "значение(f,t)" в T

на a одновременной замены всех прочих вхождений t на y. Уравнение $T_1 = h$ решается относительно неизвестной a. Посылки - антецеденты теоремы и указатель типа Q значения y. Получается ответ вида $a = T_2$. В консеквенте теоремы подтерм $g(E_1, \ldots, E_m)$ заменяется на "значение(h, t)". В антецедентах вместо переменной f подставляется терм "$\lambda_y(T_3, Q(y))$", где T_3 - результат замены в T_2 переменной h на выражение $h(y)$. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием функперех - 19).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ach}($первообразная$(\lambda_e(a(e)/((1+e^2)h(e)), e-$число$), c) \rightarrow$
первообразная$(\lambda_x(a(\operatorname{ctg} x)/h(\operatorname{ctg} x), x-$число$), \lambda_d(-c(\operatorname{ctg} d), d-$число$)))$

из теоремы

$\forall_{abc}($первообразная$(\lambda_e(a(e)/b(e), e-$число$), c) \rightarrow$
первообразная$(\lambda_x(a(\operatorname{ctg} x)/(b(\operatorname{ctg} x)(\sin x)^2), x-$число$), \lambda_d(-c(\operatorname{ctg} d), d-$число$)))$

2. Обобщение путем поглощения внешней операции функциональной переменной. Упрощенная версия предыдущего приема, срабатывающая на существенно меньшем уровне. Терм "значение(f, t)" является некоторым операндом E_i, причем $m = 2$, другой операнд содержит t в явном виде и все вхождения x в него расположены только внутри t. (Прием функперех - 27).

   Пример: вывод теоремы

   "$\forall_{abce}(\neg(b-1=0)\ \&0<b\ \&\ (0,\infty)\subseteq \mathrm{Dom}(\lambda_x(e(x)/x, x\in\mathrm{Dom}(a)))\ \&$
   $\lambda_x(e(x)/x, x\in\mathrm{Dom}(a))-$функция $\&\ b-$число $\&$
   первообразная$(\lambda_x(e(x)/x, x\in\mathrm{Dom}(a)), c) \rightarrow$ первообразная$(\lambda_x(e(b^x), x-$число$),$
   $\lambda_d(c(b^d)/\ln b, d-$число$)))$"

   из теоремы

   "$\forall_{abc}(\neg(b-1=0)\ \&0<b\ \&\ (0,\infty)\subseteq \mathrm{Dom}(a)\ \&\ a-$функция $\&\ b-$число $\&$
   первообразная$(a, c) \rightarrow$ первообразная$(\lambda_x(a(b^x)b^x, x-$число$),$
   $\lambda_d(c(b^d)/\ln b, d-$число$)))$".

5.5 Домножение обеих частей двуместного отношения

5.5.1 Домножение частей равенства в консеквенте на выражение с новым параметром

Домножение обеих частей тождества на новый параметр и перемещение его вглубь заменяемой части

1. Обобщение тождества путем домножения всех членов корневой ассоциативно-коммутативной операции на дополнительный параметр. Теорема - тождество вида $f(t_1 \ldots t_n) = r$, используемое для исключения координат в задаче на бескоординатное описание множества. Усматривается, что f - корневая операция некоторой стандартной формы, у которой внутренняя операция - g (обычно f

- сложение, g - умножение). Операция g имеет единицу. Проверяется, что g-члены выражений $t_1, \ldots, t_n$ не имеют общего элемента - некоторой переменной, более в левой части не встречающейся. Тогда выбирается новая переменная a, каждое t_i заменяется на $g(a, t_i)$, а r заменяется на $g(a, r)$. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием вспомпараметр - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABKabcpq}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (p, q) \ \& \ c - \text{число} \rightarrow cl(AB)^2 = c(a-p)^2 + c(b-q)^2)$

из теоремы

$\forall_{ABKabpq}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (p, q) \rightarrow l(AB)^2 = (a-p)^2 + (b-q)^2)$

Заметим, что характеристика "вспомпараметр" в обоих случаях указывает на замену справа налево.

2. Обобщение тождества путем домножения всех членов корневой ассоциативно-коммутативной операции на дополнительный параметр. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, полученное в цикле вывода упрощающих тождеств для стандартной формы. (Прием станд - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \ \& \ c - \text{boolean} \rightarrow a \cdot c \vee b \cdot c \cdot \neg a = a \cdot c \vee b \cdot c)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \vee \neg a \cdot b = a \vee b)$

3. Обобщение упрощающего тождества путем домножения всех членов корневой ассоциативно-коммутативной операции на дополнительный параметр. Аналогично предыдущему, но торема - тождество общей стандартизации. (Прием нормализация - 22).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow b(\sin a)^2 + b(\cos a)^2 = b)$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow (\sin a)^2 + (\cos a)^2 = 1)$

4. Обобщение упрощающего тождества путем домножения всех членов корневой ассоциативно-коммутативной операции на дополнительный параметр. Аналогично предыдущему, но торема - тождество, одновременно уменьшающее число выражений максимальной сложности и приводящее к более простым таким выражениям. (Прием уменьшсложн - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ade}(d - \text{число } \& \ e - \text{число } \& \ 0 \leq e \ \& \ a - \text{число} \rightarrow a\sqrt{2\sqrt{e} + 2\sqrt{e + d^2}} = a\sqrt{d + \sqrt{e + d^2}} + a\sqrt{-d + \sqrt{e + d^2}})$

из теоремы

$\forall_{de}(d - \text{число } \& \ e - \text{число } \& \ 0 \leq e \rightarrow \sqrt{2\sqrt{e} + 2\sqrt{e + d^2}} = \sqrt{d + \sqrt{e + d^2}} + \sqrt{-d + \sqrt{e + d^2}})$

5. Попытка обобщения путем домножения обеих частей равенства на новую переменную и дистрибутивной развертки. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество $f(t_1 \ldots t_n) = r$, обеспечивающее выделение константных подтермов, допускающих упрощение с помощью вычислений ГЕНОЛОГа. Вместо того, чтобы искать стандартную форму с корневой операцией f, ищется соотношение дистрибутивности g относительно f. Проверяется, что g ассоциативно и коммутативно. Соотношение находится при помощи справочника поиска теорем "раздпарам". (Прием вычпрог - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefg}(0 < d \ \& \ c - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ e - \text{число } \& \ f - \text{число } \& \ g - \text{число } \& \ a = f - e \ \& \ b - \text{число} \rightarrow bcd^e + bgd^f = b(c + gd^a)d^e)$

   из теоремы

   $\forall_{acdefg}(0 < d \ \& \ c - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ e - \text{число } \& \ f - \text{число } \& \ g - \text{число } \& \ a = f - e \rightarrow cd^e + gd^f = (c + gd^a)d^e)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$

6. Варьирование тождества "исключнеизв" с помощью навешивания внешней операции и перемещения ее вглубь заменяемого терма "по дистрибутивности". Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, позволяющее заменить неизвестные подтермы на известные с помощью равенства из посылок задачи. (Прием исключнеизв - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdf}(a - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 < d \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ b - \text{число } \& \ f - \text{число } \& \ af = bd \rightarrow a^c/d^c = (b/f)^c)$

   из теоремы

   $\forall_{abdf}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ f - \text{число } \& \ af = bd \rightarrow a/d = b/f)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 < b \rightarrow (a/b)^c = a^c/b^c)$

7. Попытка обобщения путем домножения обеих частей равенства на новую переменную и дистрибутивной развертки - для выведенной теоремы. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, обеспечивающее переход к более короткой записи. Прием применяется к теореме, полученной в цикле вывода. (Прием свертка - 61).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \to a\sin b + a\cos b = a\sqrt{2}\sin(b + \pi/4))$

   из теоремы

   $\forall_b(b - \text{число} \to \sqrt{2}\sin(b + \pi/4) = \sin b + \cos b)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число} \to ab + ac = a(b + c))$

8. Попытка обобщения путем домножение обеих частей равенства на новую переменную и дистрибутивной развертки - для исходной теоремы. Аналогично предыдущему, но прием применяется к исходной теореме цикла вывода и срабатывает на большом уровне. (Прием свертка - 62).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ a - \text{число } \& \ b - \text{число } \&$
   $c - \text{число } \& \ d - \text{число} \to d\log_a b + d\log_a c = d\log_a(bc))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \&$
   $0 < c \to \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число} \to ab + ac = a(b + c))$

9. Обобщение тождества путем применения к обеим его частям операции типа "возведение в степень" - справочник "свертки". Аналогично предыдущему, но вместо справочника "раздпарам" соотношение обобщенной дистрибутивности находится при помощи справочника "свертки". При этом g не обязательно коммутативно. (Прием вычпрог - 13).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdefgh}(c - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ e - \text{число } \& \ f - \text{число } \& \ 0 \le e \ \& \ 0 \le d + g\sqrt{e} \ \&$
   $0 \le f + h\sqrt{e} \to (d + g\sqrt{e})^c(f + h\sqrt{e})^c = (df + egh + (dh + fg)\sqrt{e})^c)$

   из теоремы

   $\forall_{bceij}(a - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ e - \text{число } \& \ 0 \le c \to (b + i\sqrt{c})(e + j\sqrt{c}) =$
   $be + cij + (bj + ei)\sqrt{c})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ 0 \le a \ \& \ 0 \le b \rightharpoonup a^c b^c = (ab)^c)$

10. Обобщение тождества выделения константного подвыражения для обработки специальным упрощающим оператором путем домножения обеих частей на новую переменную и перемещения ее внутрь заменяемой части. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, позвояющее выделить константный подтерм t, для которого существует специальный упрощающий оператор. Выражение A_1 имеет заголовок f. Находится тождество вида $h(f(x,y),z) = f(x,g(y,z))$, и исходная теорема используется для преобразования подтерма $f(x,y)$ в его левой части. Проверяется, что g имеет единицу по z. Результат упрощается. Проверяется, что он по-прежнему выделяет подтерм, упрощаемый специальным оператором как константный, и снабжается единственной указывающей на это характеристикой. Проверяется, что новый параметр z не дублирует другого уже имевшегося параметра. Новая теорема регистрируется как обобщение исходной теоремы. В данном приеме использование дополнительной теоремы объединяет "домножение" на z и перенесение z вглубь терма. (Прием Выч - 3).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{cdef}(\neg(d=0)\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even})\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&$
    $e - \text{число}\ \&\ f - \text{rational} \to e(c/d)^f = ec^f/d^f)$

    из теоремы

    $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ c - \text{rational}\ \&$
    $\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&\ \neg(b=0) \to (a/b)^c = a^c/b^c)$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \to e \cdot (a/b) = (ae)/b)$

    Заметим, что исходная теорема имела характеристику "Выч(a/b сокращдроби первыйтерм)", результирующая - "Выч(c/d сокращдроби первыйтерм)". В обоих случаях группировка численных констант позволяет предпринять попытку сокращения численной дроби.

11. Обобщение тождества "исключчнеизв" путем домножения обеих частей на новую переменную и перемещения ее внутрть заменяемой части. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, позволяющее заменить неизвестные подтермы на известные с помощью равенства из посылок задачи. (Прием исключчнеизв - 4).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{cdefgh}(\neg(h=0)\ \&\ ch = dg\ \&\ 0 < g\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&$
    $f - \text{число}\ \&\ g - \text{число}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ 0 \le c \to ec^f/g^f = e(d/h)^f)$

    из теоремы

    $\forall_{abcdf}(a - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 \le a\ \&\ 0 < d\ \&\ \neg(f=0)\ \&$
    $b - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ af = bd \to a^c/d^c = (b/f)^c)$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \to e \cdot (a/b) = ae/b)$

12. Обобщение тождества общей стандартизации путем домножения обеих частей на новую переменную и перемещения ее внутрь заменяемой части. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество общей стандартизации. (Прием нормализация - 49).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{cdef}(\neg(f=0)\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c)-\text{even})\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(d)-\text{even})\ \&$
    $e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ c-\text{rational}\ \&\ d-\text{rational}\to ef^d/f^c=ef^{d-c})$

    из теоремы

    $\forall_{abd}(\neg(d=0)\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(a)-\text{even})\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(b)-\text{even})\ \&$
    $d-\text{число}\ \&\ a-\text{rational}\ \&\ b-\text{rational}\to d^b/d^a=d^{b-a})$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\to e\cdot(a/b)=ae/b)$

13. Обобщение тождества свертки путем домножения обеих частей на новую переменную и перемещения ее внутрь заменяемой части. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, обеспечивающее переход к более короткой записи. (Прием свертка - 54).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abcfg}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(g=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&$
    $g-\text{число}\to f|c/g|^b/a=f|c|^b/(a|g|^b))$

    из теоремы

    $\forall_{cdef}(\neg(f=0)\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\to e|d/f|^c=$
    $e|d|^c/|f|^c)$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{ade}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\to d/(ae)=(d/e)/a)$

14. Обобщение тождества склейки путем домножения обеих частей на новую переменную и перемещения ее внутрь заменяемой части. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, позволяющее перейти от выражения с несколькими вхождениями переменной к выражению с одним вхождением этой переменной. (Прием склейка - 9).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abcf}(\neg(a=0)\ \&\ 0<\cos c\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&$
    $0\le\sin c\to f(\operatorname{tg}c)^b/a=f(\sin c)^b/(a(\cos c)^b))$

    из теоремы

    $\forall_{cde}(0<\cos d\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ 0\le\sin d\to e(\operatorname{tg}d)^c=$
    $e(\sin d)^c/(\cos d)^c)$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{ade}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\to d/(ae)=(d/e)/a)$

15. Обобщение импликации для подбора корня уравнения: домножение обеих частей двуместного отношения на новый параметр. Теорема - кванторная импликация с консеквентом $P(h(t_1 \dots t_n), A)$, которую предполагается использовать для создания приема, подбирающего значение неизвестной u, удовлетворяющее условию $P(h(t_1 \dots t_n), A)$. Эта неизвестная входит в $h(t_1 \dots t_n)$ и не входит в A. Операция h ассоциативна и коммутативна. Находятся теорема вида "$P(x,y) \leftrightarrow P(g(x,z), g(y,z))$", а также тождество дистрибутивной развертки "$g(x, h(y,z)) = h(g(x,y), g(x,z))$". Затем выбирается новая переменная w, и консеквент заменяется на "$P(h(g(t_1,w), \dots, g(t_n,w)), g(A,w))$". Результат упрощается. Проверяется, что новый параметр w не дублирует другого уже имевшегося параметра. Новая теорема регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием неизвестная - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdefgh}(0 \le 4d^3 + 27a^2 \ \&\ b - \text{число} \ \&\ e - \text{число} \ \&\ \neg(3e - b^2 = 0) \ \&\ \neg(h = 0) \ \&\ h - \text{число} \ \&\ g - \text{число} \ \&\ f = \sqrt{4d^3 + 27a^2} \ \&\ c\ - b/3 + (\sqrt[3]{3\sqrt{3}a - f} + \sqrt[3]{3\sqrt{3}a + f})/(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}) \ \&\ d = e - b^2/3 \ \&\ a = g + b(9e - 2b^2)/27 \to bhc^2 + ceh + hc^3 = gh)$

из теоремы

$\forall_{abcdefg}(0 \le 4d^3 + 27a^2 \ \&\ b - \text{число} \ \&\ e - \text{число} \ \&\ \neg(3e - b^2 = 0) \ \&\ g - \text{число} \ \&\ f = \sqrt{4d^3 + 27a^2} \ \&\ c\ - b/3 + (\sqrt[3]{3\sqrt{3}a - f} + \sqrt[3]{3\sqrt{3}a + f})/(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}) \ \&\ d = e - b^2/3 \ \&\ a = g + b(9e - 2b^2)/27 \to bc^2 + ce + c^3 = g)$

и дополнительных теорем

$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \&\ a - \text{число} \ \&\ b - \text{число} \ \&\ c - \text{число} \to ab = bc \leftrightarrow a = c)$

$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \&\ b - \text{число} \ \&\ c - \text{число} \to ab + ac = a(b + c))$

16. Обобщение тождества общей стандартизации путем применения к обеим его частям операции типа "возведение в степень" - справочник "раздпарам". Теорема - тождество общей стандартизации $f(t_1, t_2) = A$. При помощи справочника поиска теорем "раздпарам" находится тождество вида "$g(f(x,y), z) = f(g(x,z), g(y,z))$", где операция g имеет единицу по z. Исходная теорема применяется для преобразования $f(x,y)$. Результат упрощается. (Прием нормализация - 83).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cd}(\neg(\sin d = 0) \ \&\ \neg(\cos d = 0) \ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \&\ d - \text{число} \ \&\ c - \text{rational} \to (\operatorname{tg} d)^c (\operatorname{ctg} d)^c = 1)$

из теоремы

$\forall_c(\neg(\sin c = 0) \ \&\ \neg(\cos c = 0) \ \&\ c - \text{число} \to 1 = \operatorname{tg} c \operatorname{ctg} c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \&\ b - \text{число} \ \&\ c - \text{число} \ \&\ c - \text{rational} \ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \to a^c b^c = (ab)^c)$

17. Попытка навешивания внешней операции типа "возведение в степень". Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, обеспечивающее переход к более простым в смысле справочника "оценка" термам. (Прием упрощение - 10).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{cdefg}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{число}\ \&\ c - \text{rational}\ \&\ 0 \le e \to (d + fe^{g/2})^c(fe^{g/2} - d)^c = (e^g f^2 - d^2)^c)$

    из теоремы

    $\forall_{bcdf}(b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ 0 \le c \to c^f d^2 - b^2 = (b + dc^{f/2})(dc^{f/2} - b))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \to a^c b^c = (ab)^c)$

18. Обобщение перестановочного тождества путем применения к обеим его частям операции типа "возведение в степень" - справочник "раздпарам". Аналогично предыдущему, но теорема - тождество перестановочного типа. (Прием перестановка - 4).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{cdefg}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{число}\ \&\ c - \text{rational} \to (f - e)^c(g - d)^c = (d - g)^c(e - f)^c)$

    из теоремы

    $\forall_{acde}(c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ a - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \to (d - c)(e - a) = (c - d)(a - e))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ c - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \to a^c b^c = (ab)^c)$

19. Обобщение тождества свертки путем применения к обеим его частям операции типа "возведение в степень" - справочник "раздпарам". Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, обеспечивающее переход к более короткой записи. (Прием свертка - 65).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{cd}(\neg(\cos(d) = 0)\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&\ d - \text{число}\ \&\ c - \text{rational} \to (\operatorname{tg} d)^c = (\sin d)^c/(\cos d)^c)$

    из теоремы

    $\forall_a(a - \text{число}\ \&\ \neg(\cos a = 0) \to \operatorname{tg} a = \sin a/\cos a)$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ c - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&\ \neg(b = 0) \to (a/b)^c = a^c/b^c)$

20. Домножение обеих частей тождества на новую переменную и дистрибутивная развертка. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество для преобразования к заданным заголовкам, а дополнительная теорема ищется при помощи справочника "дистрибразвертка". (Прием нормзаголовок - 17).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ade}(a - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ e - \text{число } \rightarrow 2a\sin((d-e)/2)\cos((d+e)/2) = a\sin d - a\sin e)$

    из теоремы

    $\forall_{bc}(b - \text{число } \& \ c - \text{число } \rightarrow \sin b - \sin c = 2\sin(b/2 - c/2)\cos(b/2 + c/2))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число } \rightarrow ab + ac = a(b+c))$

21. Обобщение тождества свертки путем применения к обеим его частям операции типа "возведение в степень" - справочник "свертки". Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, обеспечивающее переход к более короткой записи, а дополнительная теорема ищется при помощи справочника "свертки". (Прием свертка - 48).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{cde}(c - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ e - \text{число } \& \ 0 \leq d+e \ \& \ 0 \leq d-e \rightarrow (d+e)^c(d-e)^c = (d^2 - e^2)^c)$

    из теоремы

    $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \rightarrow a^2 - b^2 = (a-b)(a+b))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq b \rightarrow a^c b^c = (ab)^c)$

Домножение обеих частей тождества на выражение с новым параметром

1. Обобщение тождества типа сокращения путем домножения обеих частей на степени самых сложных сомножителей слагаемых заменяемой части. Теорема - тождество общей стандартизации вида $f(t_1 \ldots t_n) = A$, где f - корневая операция некоторой стандартной формы, имеющей внутреннюю ассоциативно-коммутативную операцию g. Для операции g имеется связанная с ней операция h типа "возведение в степень". Находятся самые сложные подвыражения $r_1, \ldots, r_m$ левой части $f(t_1 \ldots t_n)$. Для каждого такого r_i выбирается новая переменная x_i. Выражение $f(g(h(r_i, x_i), t_1) \ldots g(h(r_i, x_i), t_n)$ обрабатывается нормализаторами общей стандартизации относительно списка антецедентов теоремы, пополненного утверждениями "целое(x_i)" и "$0 \leq x_i$". Проверяется, что результат имеет ровно одно вхождение подтерма r_i в каждом своем f-члене. Правая часть A, в процессе рассмотрения выражений r_i, заменялась на $g(h(r_i, x_i), A)$ и тоже обрабатывалась нормализаторами общей стандартизации. После обработки всех r_i и соответствующего пополнения списка антецедентов новая теорема

упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием нормализация - 76).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcd}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ 0 \le c \ \& \ 0 \le d \to b(\sin a)^c(\cos a)^{d+2} + b(\sin a)^{c+2}(\cos a)^d = b(\sin a)^c(\cos a)^d)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \to b(\sin a)^2 + b(\cos a)^2 = b)$

2. Обобщение упрощающего тождества тип произведения степеней с одинаковыми показателями путем разделения показателей. Теорема - тождество общей стандартизации вида $f(g(t_1,k),\ldots,g(t_p,k)) = A$, где f - ассоциативная и коммутативная операция, порождающая операцию g типа "возведение в степень". Сложность правой части меньше сложности левой. Находится теорема вида $f(g(x,m),g(x,n)) = g(x,m+n)$. Выбирается новая переменная a. Для произвольного i предпринимается замена в левой части исходной теоремы выражения $g(t_i,k)$ на $g(t_i,a)$, а правая часть при этом заменяется на $f(g(t_i,k-a),A)$. Добавляются антецеденты, необходимые для возможности применения дополнительной теоремы. Кроме того, добавляются антецеденты "число(a)", "$0 \le k-a$". Результат упрощается. (Прием нормализация - 84).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{acd}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ 0 < \cos d \ \& \ a - \text{число } \& \ d - \text{число } \&$
$c - \text{rational } \& \ 0 \le a - c \to (\cos d)^a(\operatorname{tg} d)^c = (\sin d)^c(\cos d)^{a-c})$

из теоремы

$\forall_{cd}(\neg(\cos d = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ d - \text{число } \& \ c - \text{rational} \to (\cos d)^c(\operatorname{tg} c)^d = (\sin d)^c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ 0 < a \to a^b a^c = a^{b+c})$

3. Обобщение тождества склейки путем ввода извлекаемого параметра. Теорема - тождество вида $h(f(t_1,t_2),t_3) = A$, где h - ассоциативная и коммутативная операция. Это тождество позволяет перейти от выражения с несколькими вхождениями перемнной к выражению с одним вхождением этой переменной. Находится тождество вида $h(f(x,z),t) = f(x,g(y,z))$, не имеющее существенных антецедентов, у которого g имеет единицу по y. Выбирается новая переменная a. Новое тождество имеет вид $h(f(t_1,g(a,t_2)),t_3) = h(t,A)$. Оно упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием склейка - 8).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdefghi}(\neg(e=0) \ \& \ \neg(g=0) \ \& \ \neg(h=0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ a - \text{число } \&$
$b - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ d - \text{число } \& \ e - \text{число } \& \ f - \text{число } \& \ g - \text{число } \&$
$h - \text{число } \& \ i - \text{число} \to a^{i+cd/(eh)}b^{cf/(gh)} = a^i(a^{d/e}b^{f/g})^{c/h})$

из теоремы

$\forall_{abcdefgh}(\neg(e=0)\ \&\ \neg(g=0)\ \&\ \neg(h=0)\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\&\ d-$ число $\&\ e-$ число $\&\ f-$ число $\&\ g-$ число $\&\ h-$ число $\&\ 0\le a\ \&\ 0\le b\to a^{cd/(eh)}b^{cf/(gh)}=(a^{d/e}b^{f/g})^{c/h})$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\&\ 0<a\to a^ba^c=a^{b+c})$

4. Обобщение упрощающего тождества путем ввода извлекаемого параметра. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество общей стандартизации. (Прием нормализация - 53).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcde}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(d-1=0)\ \&\ 0<d\ \&\ 0<e\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\&\ d-$ число $\&\ e-$ число $\to d^{b+c\log_d e/a}=d^b\cdot e^{c/a})$

   из теоремы

   $\forall_{accde}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(d-1=0)\ \&\ 0<d\ \&\ 0<e\ \&\ a-$ число $\&\ c-$ число $\&\ d-$ число $\&\ e-$ число $\to d^{c\log_d e/a}=e^{c/a})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\&\ 0<a\to a^ba^c=a^{b+c})$

5. Обобщение тождества, устраняющего сложное подвыражение с неизвестными при навешивании внешней операции. Теорема - тождество $f(A_1,A_2)=A_3$, упрощающее относительно неизвестных выражение A_2 с помощью навешивания внешней операции f. Находится тождество вида $f(x,h(y,z))=g(f(x,y),f(x,z))$, где g,h ассоциативны и коммутативны, причем h имеет единицу по y. Исходная теорема применяется для преобразования $f(x,z)$. В результате получается тождество вида $f(A_1,h(y,A_2))=g(f(A_1,y),A_3)$, обобщающее исходное путем ввода параметра y. (Прием смнеизв - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(c=0)\ \&\ a-$ число $\&\ d-$ число $\&\ 0\le a\ \&\ b-$ число $\&\ c-$ rational $\&\ \neg($знаменатель$(c)-$ even$)\to(ba^{d/c})^c=b^ca^d)$

   из теоремы

   $\forall_{acd}(\neg(c=0)\ \&\ a-$ число $\&\ c-$ число $\&\ d-$ число $\&\ 0\le a\to(a^{d/c})^c=a^d)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ rational $\&\ \neg($знаменатель$(c)-$ even$)\to a^cb^c=(ab)^c)$

5.5.2 Домножение обеих частей двуместного отношения в антецеденте на выражение с новым параметром

1. Обобщение антецедента, задающего уравнение множества объектов: домножение обеих частей двуместного отношения на новый параметр и дистрибутивная развертка. Некоторый антецедент теоремы имеет вид "коорд$(A,K) = \mathrm{set}_{x_1\ldots x_n}(P(f(t_1\ldots t_m),t)\ \&\ Q)$", где f - ассоциативная и коммутативная операция. Находятся эквивалентность вида $P(x,y) \leftrightarrow P(g(x,z),g(y,z))$, где g ассоциативно и коммутативно, и тождество вида $g(x,f(y,z)) = f(g(x,y),g(x,z))$. Выбирается новая переменная a, и указанный антецедент заменяется на "коорд$(A,K) = \mathrm{set}_{x_1\ldots x_n}(P(f(g(a,t_1),\ldots,g(a,t_m)),g(a,t))\ \&\ Q)$". Результат упрощается. (Прием уравндробь - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdABK}(\neg(b=0)\ \&\ \neg(A=B)\ \&$ коорд(окружность$(AB),K) = \mathrm{set}_{xy}(aby+bcx+bd+bx^2+by^2=0\ \&\ x-$число $\&\ y-$число$)\ \&\ a-$число $\&\ b-$число $\&\ c-$число $\&\ d-$число $\&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&$ прямкоорд$(K) \rightarrow$ коорд$(A,K) = (-c/2,-a/2))$

   из теоремы

   $\forall_{acdABK}(\neg(A=B)\ \&$ коорд(окружность$(AB),K) = \mathrm{set}_{xy}(d+ay+cx+x^2+y^2=0\ \&\ x-$число $\&\ y-$число$)\ \&\ a-$число $\&\ c-$число $\&\ d-$число $\&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&$ прямкоорд$(K) \rightarrow$ коорд$(A,K) = (-c/2,-a/2))$

   и дополнительных теорем

   $\forall_{abc}(\neg(b=0)\ \&\ a-$число $\&\ b-$число $\&\ c-$число $\rightarrow ab=bc \leftrightarrow a=c)$

   $\forall_{abc}(a-$число $\&\ b-$число $\&\ c-$число $\rightarrow ab+ac=a(b+c))$

5.5.3 Домножение на новый параметр обеих частей равенства в заменяемой части эквивалентности

1. Обобщение эквивалентности для разрешения относительно неизвестной: домножение обеих частей двуместного отношения на новый параметр и дистрибутивная развертка. Теорема - эквивалентность вида $P(f(t_1,\ldots,t_m),t) \leftrightarrow A$, разрешающая отношение P относительно некоторой неизвестной. Операция f ассоциативная и коммутативная. Находятся эквивалентность вида $P(x,y) \leftrightarrow P(g(x,z),g(y,z))$, где g ассоциативно и коммутативно, и тождество вида $g(x,f(y,z)) = f(g(x,y),g(x,z))$. Выбирается новая переменная a, и консеквент исходной теоремы заменяется на "$P(f(g(a,t_1),\ldots,g(a,t_m)),g(a,t)) \leftrightarrow A$". Результат упрощается. (Прием глуб - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(c=0)\ \&\ a-$число $\&\ b-$число $\&\ c-$число $\&\ d-$число $\rightarrow bcd+cd^2 = ac \leftrightarrow (d=-(b+\sqrt{4a+b^2})/2\ \vee\ (-b+\sqrt{4a+b^2})/2)\ \&\ 0 \le 4a+b^2)$

   из теоремы

   $\forall_{abd}(d-$число $\&\ a-$число $\&\ b-$число $\rightarrow bd+d^2 = a \leftrightarrow (d=-(b+\sqrt{4a+b^2})/2 \vee (-b+\sqrt{4a+b^2})/2)\ \&\ 0 \le 4a+b^2)$

и дополнительных теорем

$\forall_{abc}(\neg(b=0)\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\rightarrow ab=bc\leftrightarrow a=c)$

$\forall_{abc}(a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\rightarrow ab+ac=a(b+c))$

2. Обобщение эквивалентности для бинарной ассоциативной операции на наборы произвольной длины. Теорема - эквивалентность $A_1\leftrightarrow A_2$, усиливающая элементарное утверждение A_1. В A_1 имеются подвыражения вида "значение$(f,(a,t))$", где f - бинарная ассоциативная операция, а переменная a входит в A_1 однократно. Предпринимается попытка рассматривать a как значение операции f на некотором наборе: подвыражение "значение$(f,(a,t))$" заменяется на "значение$(f,$суффикс$(a,t))$", а прочие вхождения a заменяются на "значение(f,a)". Корректируются условия на a в антецедентах. (Прием усиление - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abxyz}(a=$ операция$(b)\ \&\ x\in$ носитель$(b)\ \&$ группа$(b)\ \&\ y-$ слово $\&$
   $\mathrm{Val}(y)\subseteq$ носитель$(b)\ \&\ z-$ слово $\&\ \mathrm{Val}(z)\subseteq$ носитель$(b)\rightarrow a($суффикс$(y,x))=$
   $a($суффикс$(z,x))\leftrightarrow a(y)=a(z))$

   из теоремы

   $\forall_{abxyz}(a=$ операция$(b)\ \&\ x\in$ носитель$(b)\ \&\ y\in$ носитель$(b)\ \&\ z\in$ носитель$(b)\ \&$
   группа$(b)\rightarrow a(y,x)=a(z,x)\leftrightarrow y=z)$

5.6 Ввод дизъюнктивного члена для вырожденного случая

1. Обобщение эквивалентности для разрешения относительно неизвестной: ввод дизъюнкции для учета вырожденного случая. Теорема - эквивалентность $A_1\leftrightarrow A_2$, разрешающая утверждение A_1 относительно переменной x. В антецедентах встречается утверждение "$\neg(a=t)$", не содержащее x. Переменная a не входит в t. Это утверждение не используется для сопровождения по о.д.з. Результат подстановки t вместо a в A_1 упрощается нормализатором общей стандартизации и превращается в утверждение B, имеющее меньше вхождений переменной x, чем A_1. Утверждение "$\neg(a=t)$" исключается из антецедентов, а утверждение A_2 заменяется на "$A_2\ \vee\ (a=t\ \&\ B)$". Оно преобразуется к виду д.н.ф., и из дизъюнктивных членов исключаются избыточные вхождения подутверждения "$\neg(a=t)$". Новая теорема регистрируется с единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема разрешения относительно x. (Прием глуб - 11).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\rightarrow b=ac\leftrightarrow\neg(c=0)\ \&\ a=b/c\ \vee$
   $b=0\ \&\ c=0)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(c=0)\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\rightarrow b=ac\leftrightarrow a=b/c)$

2. Попытка усилить эквивалентность для решения уравнения, если это уравнение является следствием отрицания некоторого антецедента, не содержащего неизвестной. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, разрешающая утверждение A_1 относительно переменной x. Имеется не используемый для сопровождения по о.д.з. антецедент B с единственной переменной a, отличной от x. Он не является указателем на тип значения переменной a При помощи задачи на доказательство устанавливается, что A_1 - следствие списка антецедентов, в котором B заменено на $\neg(B)$. Тогда B исключается из антецедентов, а A_2 заменяется на $(A_2 \vee \neg(B))$. Результат упрощается. (Прием глуб - 16).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(a=0)\ \&\ b<0\ \&\ a-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ \text{числитель}(b)-\text{even}\ \&$
   $b-\text{rational} \rightarrow c<a^b \leftrightarrow a<c^{1/b}\ \&\ -c^{1/b}<a\ \&\ 0<c \vee c\leq 0)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ b-\text{rational}\ \&\ \text{числитель}(b)-\text{even}\ \&\ b<0\ \&$
   $0<c\ \&\ \neg(a=0) \rightarrow c<a^b \leftrightarrow a<c^{1/b}\ \&\ -c^{1/b}<a)$

3. Попытка усилить эквивалентность для решения уравнений: отрицание некоторого антецедента, имеющего две переменные, приводится к виду дизъюнкции, и для каждой альтернативы усматривается истинность либо ложность утверждения. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, разрешающая уравнение A_1 относительно переменной x. Слово "уравнение" здесь трактуется обобщенно - как произвольное утверждение с неизвестными. Имеется не используемый для сопровождения по о.д.з. антецедент B, содержащий ровно две переменные, одна из которых - x. Его оценка сложности меньше оценки сложности утверждения A_1. Составляется список S антецедентов, отличных от B, и относительно этого списка посылок решается задача на описание с единственным условием $\neg(B)$. Ответ представляет собой дизъюнкцию $D_1\ \ldots\ D_n$. Проверяется, что для каждого $i=1,\ldots,n$ из S, D_i следует либо A_1, либо отрицание A_1. Из списка антецедентов исключается B, а утверждение A_2 заменяется на дизъюнкцию A_2 и всех тех D_i, для которых была усмотрена истинность A_1. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием глуб - 19).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abd}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(b)-\text{even})\ \&\ \neg(\text{числитель}(b)-\text{even})\ \&\ b<0\ \&$
   $a-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ b-\text{rational} \rightarrow a^b<d \leftrightarrow a<0\ \&\ 0\leq d \vee 0<ad\ \&\ d^{1/b}<a)$

   из теоремы

   $\forall_{abd}(\neg(\text{знаменатель}(b)-\text{even})\ \&\ \neg(\text{числитель}(b)-\text{even})\ \&\ b<0\ \&\ 0<ad\ \&$
   $a-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ b-\text{rational} \rightarrow a^b<d \leftrightarrow d^{1/b}<a)$

4. Обобщение эквивалентности: ввод дизъюнкции для учета вырожденного случая. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, позволяющая перейти к более простым выражениям с неизвестными. Среди антецедентов встречается не используемое для сопровождения по о.д.з. утверждение "$\neg(a=t)$", имеющее единственный параметр a, причем t его не содержит. Результат подстановки

t вместо a в A_1 упрощается нормализаторами общей стандартизации. Получается утверждение B, оценка сложности которого меньше, чем у A_1. Утверждение "$\neg(a = t)$" исключается из антецедентов, а A_2 заменяется на "$\neg(a = t)$ & $A_2 \vee a = t$ & B". Результат упрощается и регистрируется с единственной характеристикой "неизвоценка ...", такой же, как у исходной теоремы. (Прием неизвоценка - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cijk}(0 < i \,\&\, 0 < k \,\&\, i-\text{число} \,\&\, j-\text{число} \,\&\, k-\text{число} \to \neg(i-1 = 0) \,\&\, j+\log_i k = \log_i c \,\&\, 0 < c \,\&\, c - \text{число} \vee c = k \,\&\, i - 1 = 0 \leftrightarrow c = ki^j)$

из теоремы

$\forall_{cijk}(\neg(i - 1 = 0) \,\&\, 0 < i \,\&\, 0 < k \,\&\, i - \text{число} \,\&\, j - \text{число} \,\&\, k - \text{число} \to j + \log_i k = \log_i c \,\&\, 0 < c \,\&\, c - \text{число} \leftrightarrow c = ki^j)$

5. Попытка усилить эквивалентность для исключения сложного подвыражения с неизвестными, если заменяемая часть является следствием отрицания некоторого антецедента, не относящегося к ее о.д.з. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, позволяющая перейти к более простым выражениям с неизвестными. Имеется не используемый для сопровождения по о.д.з. антецедент B с единственной переменной a. Он не является указателем на тип значения переменной a. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что A_1 - следствие списка антецедентов, в котором B заменено на $\neg(B)$. Тогда B исключается из антецедентов, а A_2 заменяется на $A_2 \vee \neg(B)$. Результат упрощается. (Прием неизвоценка - 14).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bijx}(0 < b \,\&\, 0 < j \,\&\, b - \text{число} \,\&\, i - \text{число} \,\&\, j - \text{число} \,\&\, x - \text{число} \to x < jb^i \leftrightarrow x \le 0 \vee 0 < x \,\&\, (b = 1 \,\&\, x < j \vee i + \log_b j < \log_b x \,\&\, 0 < -b + 1 \vee 0 < b - 1 \,\&\, \log_b x < i + \log_b j))$

   из теоремы

   $\forall_{bijx}(0 < b \,\&\, 0 < j \,\&\, 0 < x \,\&\, b - \text{число} \,\&\, i - \text{число} \,\&\, j - \text{число} \,\&\, x - \text{число} \to x < jb^i \leftrightarrow b = 1 \,\&\, x < j \vee i + \log_b j < \log_b x \,\&\, 0 < -b + 1 \vee 0 < b - 1 \,\&\, \log_b x < i + \log_b j)$

   В этом примере характеристика имеет вид "неизвоценка(второйтерм и(тип(описать) условие не(известно(i)) или(и(известно(b) не(контекст(сомножитель(f j) не(известно(f)) не(контекст(вид(f степень(g h))известно(g))))) не(контекст(сомножитель(c x)не(известно(c)) не(контекст(вид(c степень(d e)) известно(d)))))) и(не(известно(b)) заголовок(j 1) не(контекст(сомножитель(c x) не(заголовок(c 1)) не(контекст(вид(c степень(b d)) единица(1 d)))))))))".

6. Попытка исключить отрицание равенства переменной в антецедентах путем отдельного рассмотрения вырожденного случая. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, где заменяемая часть A_1 имеет связанные переменные, а заменяющая - не имеет. Сложность заменяющей части не больше сложности заменяемой. Имеется не используемый для сопровождения по о.д.з. антецедент "$\neg(a = t)$",

где a - переменная, не входящая в t, но входящая в A_1. Результат подстановки t вместо a в A_1 упрощается задачей на описание. Полученное утверждение D не имеет связанных переменных. Тогда "$\neg(a = t)$" исключается из антецедентов, а A_2 заменяется на "$(\neg(a = t)\ \&\ A_2\ \vee\ a = t\ \&\ D)$". Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием связпарам - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bc}(\neg(b-1=0)\ \&\ 0<b\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \rightarrow$
сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} b^{ci}, n-\text{натуральное})) \leftrightarrow \neg(c=0)\ \&\ (c<0\ \&\ 0<b-1\ \vee$
$0<c\ \&\ 0<1-b))$

из теоремы

$\forall_{bc}(b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ 0<b\ \&\ \neg(b-1=0)\ \&\ \neg(c=0)\ \rightarrow$
сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} b^{ci}, n-\text{натуральное})) \leftrightarrow c<0\ \&\ 0<b-1\ \vee\ 0<c\ \&\ 0<1-b)$

5.7 Добавление антецедента к заменяющей части эквивалентности

1. Попытка усилить эквивалентность для решения уравнений: если некоторый антецедент является следствием других антецедентов и заменяемого утверждения, то он переносится в конъюнктивные члены заменяющего утверждения. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, разрешающая утверждение A_1 относительно переменной x. Рассматривается не используемый для сопровождения по о.д.з. антецедент B, имеющий единственный параметр, отличный от x. Проверяется, что он является следствием прочих антецедентов и утверждения A_1. Затем B исключается из списка антецедентов, а A_2 заменяется на $(A_2\ \&\ D)$. (Прием глуб - 17).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(b<0\ \&\ 0<a\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число} \rightarrow a^b<c \leftrightarrow 0<c\ \&\ c^{1/b}<a)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(b<0\ \&\ 0<a\ \&\ 0<c\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число} \rightarrow a^b<c \leftrightarrow c^{1/b}<a)$

2. Попытка усилить эквивалентность: если некоторый антецедент является следствием других антецедентов и заменяемого утверждения, то он переносится в конъюнктивные члены заменяющего утверждения. Аналогично предыдущему, но теорема - эквивалентность, позволяющая получить более простые выражения с неизвестными. (Прием неизвоценка - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abefgh}(b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ g-\text{натуральное}\ \&\ h-\text{натуральное}\ \&$
   $g-\text{even}\ \&\ 0\le e \rightarrow e^h f^g-(a-b)^g=0\ \&\ a-\text{число}\ \&\ 0\le f(a-b) \leftrightarrow a=b+fe^{h/g})$

   из теоремы

$\forall_{abefgh}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{натуральное}\ \&\ h - \text{натуральное}\ \&\ g - \text{even}\ \&\ 0 \le e \to e^h f^g - (a-b)^g = 0\ \&\ 0 \le f(a-b) \leftrightarrow a = b + fe^{h/g})$

3. Попытка усиления эквивалентности путем переброски антецедента в конъюнктивные члены заменяющей части. Теорема - эквивалентность вида $(x = t) \leftrightarrow A$, исключающая символы с наибольшей оценкой сложности. Переменная x не входит в t. Список антецедентов, содержащих x, непуст. Конъюнкция K этих антецедентов является следствием прочих антецедентов и равенства $x = t$. Тогда содержащие x антецеденты исключаются, а утверждение A заменяется на $(A\ \&\ K)$. (Прием уменьшение - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \to (a = b\ \vee\ b = -a)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ b \le 0 \leftrightarrow b = -|a|)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ b \le 0 \to a = b\ \vee\ b = -a \leftrightarrow b = -|a|)$

5.8 Подстановка выражения с двумя переменными

Ввод бесповторного внешнего параметра

1. Обобщение тождества уменьшения глубины переменной путем ввода бесповторного внешнего параметра. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, уменьшающее глубину переменной x до единицы. Внутри A_1 выбирается подвыражение $f(t, y)$, где y - некоторая переменная, имеющая в A_1 единственное вхождение. Находится теорема вида $f(X, g(Y, Z)) = h(f(X, Y), Z)$, где g имеет единицу по Z. Выбирается новая переменная z; $f(t, y)$ заменяется на $h(f(t, y), z)$, а прочие вхождения переменной y заменяются на $g(y, z)$. Добавляются необходимые для корректности антецеденты и проверяется, что новая переменная z не дублирует уже имевшуюся. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием глубина - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcde}(\neg(b = 0)\ \&\ \neg(d - 1 = 0)\ \&\ 0 < a\ \&\ 0 < d\ \&\ 0 < e\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \to e^{c \log_d a/b} = a^{c \log_d e/b})$

   из теоремы

   $\forall_{acde}(\neg(d - 1 = 0)\ \&\ 0 < a\ \&\ 0 < d\ \&\ 0 < e\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \to e^{c \log_d a} = a^{c \log_d e})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abe}(\neg(b = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \to e \cdot (a/b) = (ae)/b)$

2. Обобщение упрощающего тождества путем ввода бесповторного внешнего параметра. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество общей стандартизации. (Прием нормализация - 26).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(a=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ 0\le c\to|bc/a|=c|b/a|)$

   из теоремы

   $\forall_{bc}(b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ 0\le c\to|bc|=c|b|)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\to e\cdot(a/b)=(ae)/b)$

3. Обобщение сверточного тождества путем ввода бесповторного внешнего параметра. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество для более короткой переформулировки. (Прием свертка - 33).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcde}(\neg(d=0)\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\to ab/d+ac/e=a(b/d+c/e))$

   из теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(d=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\to ac+ab/d=a(c+b/d))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\to e(a/b)=ae/b)$

4. Обобщение тождества, упрощающего выражение под корневой сложной операцией, путем ввода бесповторного внешнего параметра. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций большей либо равной сложности. (Прием сокращ - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(c=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\to\arcsin(b\,\mathrm{sg}(a)/c)=\arcsin(b/c)\mathrm{sg}(a))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ \neg(a=0)\to\arcsin(\mathrm{sg}(a)b)=\mathrm{sg}(a)\arcsin b)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\to e\cdot(a/b)=ae/b)$

5. Обобщение эквивалентности общей стандартизации путем ввода бесповторного внешнего параметра. Аналогично предыдущему, но теорема - эквивалентность общей стандартизации. (Прием общнорм - 87).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(c=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ c-\text{rational}\rightarrow bc/a-\text{rational}\leftrightarrow b/a-\text{rational})$

   из теоремы

   $\forall_{bc}(b-\text{число}\ \&\ c-\text{rational}\ \&\ \neg(c=0)\rightarrow bc-\text{rational}\leftrightarrow b-\text{rational})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\rightarrow e\cdot(a/b)=ae/b)$

6. Обобщение тождества перехода к более простым числовым атомам путем ввода бесповторного внешнего параметра. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество $A_1=A_2$, выражающее сложный числовой атом A_1 через более простые. (Прием числатом - 38).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abf}(\neg(b=0)\ \&\ b-\text{комплексное}\ \&\ f-\text{комплексное}\ \&\ a-\text{число}\rightarrow\mathrm{Re}(af/b)=a\mathrm{Re}(f/b))$

   из теоремы

   $\forall_{af}(f-\text{комплескное}\ \&\ a-\text{число}\rightarrow\mathrm{Re}(af)=a\mathrm{Re}(f))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a-\text{комплексное}\ \&\ b-\text{комплексное}\ \&\ c-\text{комплексное}\ \&\ \neg(c=0)\rightarrow a(b/c)=(ab)/c)$

7. Обобщение путем ввода бесповторного внешнего параметра. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество для уменьшения числа неконстантных операндов на предварительном этапе редактирования ответа задачи на вычисление (например, в вычислительной планиметрической задаче). (Прием Конст0 - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefgh}(0<d\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ a=f-e\ \&\ \neg(b=0)\ \&\ c-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ \neg(h=0)\ \&\ g-\text{число}\ \&\ h-\text{число}\rightarrow cd^e/b+gd^f/h=(c/b+gd^a/h)d^e)$

   из теоремы

   $\forall_{abcdefg}(0<d\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ g-\text{число}\ \&\ a=f-e\ \&\ \neg(b=0)\ \&\ c-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\rightarrow gd^f+cd^e/b=(gd^a+c/b)d^e)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\rightarrow e\cdot(a/b)=ae/b)$

8. Обобщение эквивалентности путем ввода бесповторного внешнего параметра. Аналогично предыдущему, но теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$ для получения более простых выражений с неизвестными. Рассматриваемая переменная y идентифицируется с термом без неизвестных. (Прием неизвоценка - 16).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdef}(\neg(e=0)\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(f)-\text{even})\ \&\ \neg(\text{числитель}(f)-\text{even})\ \&$
   $a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{rational}\rightarrow$
   $ad^f/e=cb^f\leftrightarrow d(a/e)^{1/f}=bc^{1/f})$

   из теоремы

   $\forall_{abcdf}(\neg(\text{знаменатель}(f)-\text{even})\ \&\ \neg(\text{числитель}(f)-\text{even})\ \&\ a-\text{число}\ \&$
   $b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ f-\text{rational}\rightarrow ad^f=cb^f\leftrightarrow bc^{1/f}=da^{1/f})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\rightarrow e\cdot(a/b)=ae/b)$

9. Обобщение тождества "исключчнеизв" путем ввода бесповторного внешнего параметра. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество $A_1=A_2$, позволяющее заменить неизвестные подтермы на известные с помощью равенства из посылок задачи, идентифицируемого с антецедентом D. Рассматриваемая переменная y не входит в D. (Прием исключчнеизв - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(a-\text{число}\ \&\ \neg(d=0)\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ c=|a|\rightarrow|ab/d|=c|b/d|)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c=|a|\rightarrow|ab|=c|b|)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\rightarrow e(a/b)=ae/b)$

10. Обобщение тождества путем ввода бесповторного внешнего параметра. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество для перехода к более простым описателям либо для исключения описателей. Рассматриваемая переменная y - параметр заменяемой части. (Прием описатель - 61).

    Пример рассмотрим вывод теоремы

    $\forall_{adg}(\neg(d=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ \lim(g)-\text{число}\ \&\ \text{последовательность}(g,\mathbb{R})$
    $\rightarrow\lim(\lambda_n(ag(n)/d,n-\text{натуральное}))=a\lim(g)/d)$

    из теоремы

    $\forall_{abg}(a-\text{число}\ \&\ \text{последовательность}(g,\mathbb{R})\ \&\ b-\text{число}\ \&\ \lim(g)=b\rightarrow$
    $\lim(\lambda_c(ag(c),c-\text{натуральное}))=ab)$

    и дополнительной теоремы

    $\forall abe(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\rightarrow e\cdot(a/b)=ae/b)$

11. Обобщение характеризации функции путем ввода бесповторного внешнего параметра. Аналогично предыдущему, но консеквент теоремы имеет вида $P(\lambda_{x_1\ldots x_k}(A_2, A_1), A_3)$ и определяет характеристику A_3 некоторой функции. Рассматриваемая переменная y - параметр описателя "$\lambda_{x_1\ldots x_k}(A_2, A_1)$", задающего эту функцию. P - символ отличного от равенства двуместного отношения. (Прием функперех - 1).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abde}(\neg(e = 0)\ \&\ \mathrm{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ a -$ функция $\&\ b -$ число $\&\ e -$ число $\&$ первообразная$(a, d) \to$ первообразная$(\lambda_f(ba(f)/e, f \in \mathrm{Dom}(a)),$ $\lambda_c(bd(c)/e, c \in \mathrm{Dom}(d))))$

    из теоремы

    $\forall_{abd}(\mathrm{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ a -$ функция $\&\ b -$ число $\&$ первообразная$(a, d) \to$ первообразная$(\lambda_x(ba(x), x \in \mathrm{Dom}(a)), \lambda_c(bd(c), c \in \mathrm{Dom}(d))))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{abe}(\neg(b = 0)\ \&\ a -$ число $\&\ b -$ число $\&\ e -$ число $\to e \cdot (a/b) = ae/b)$

12. Обобщение тождества свертки константного выражения путем ввода бесповторного внешнего параметра. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, позволяющее с помощью нормализаторов общей стандартизации свернуть константный терм, содержащий единственную сложную операцию, в терм, заголовком которого служит данная операция, а операндами - константы. Внутри A_1 находится максимально сложный подтерм t. По его заголовку f находится тождество вида $f(x, g(y, z)) = h(f(x, y), z)$, где операции f, g имеют общую единицу по переменной z, причем h ассоциативна и коммутативна. Это тождество используется для преобразования t. Результат упрощается. Проверяется неизбыточность новой переменной z. Новая теорема сопровождается единственной характеристикой, аналоничной характеристике исходной теоремы. (Прием предвумножение - 1).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abef}(\neg(a - 1 = 0)\ \&\ 0 < a\ \&\ 0 < b\ \&\ a -$ число $\&\ b -$ число $\&\ e -$ число $\&$ $f -$ число $\to \log_a(a^e b^f) = e + f \log_a b)$

    из теоремы

    $\forall_{cde}(\neg(d - 1 = 0)\ \&\ 0 < c\ \&\ 0 < d\ \&\ c -$ число $\&\ d -$ число $\&\ e -$ число $\to$ $\log_d(cd^e) = e + \log_d c)$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{cde}(\neg(c - 1 = 0)\ \&\ 0 < c\ \&\ 0 < d\ \&\ c -$ число $\&\ d -$ число $\&\ e -$ число $\to$ $e \log_c d = \log_c(d^e))$

    Характеристика исходной теоремы - "предвумножение(первыйтерм, и(дробнаявеличина(d)целое(e)дробнаявеличина(c)), cd^e)".

13. Обобщение сокращающего тождества с помощью дополнительного тождества "обобщслагаемое". Теорема - тождество общей стандартизации, имеющее вид $f(t,u)=A$, где u - переменная, не входящая в A. Находится тождество вида $f(x,g(y,z))=h(f(x,y),z)$, где операции g,h имеют общую единицу по переменной z, причем h ассоциативна и коммутативна. Исходная теорема используется для преобразования подтерма $f(x,y)$ в дополнительной теореме. Результат упрощается и сопровождается характеристикой, указывающей, что новая теорема выведена только для порождения приемов справочников поиска теорем. (Прием нормализация - 109).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abd}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ \neg(b=0)\ \&\ \neg(d=0)\ \&\ d-\text{число}\rightarrow(a/b)\cdot(b/d)=a/d)$

    из теоремы

    $\forall_{ab}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ \neg(b=0)\rightarrow(a/b)b=a)$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\rightarrow e\cdot(a/b)=(ae)/b)$

Ввод функционального бесповторного внешнего параметра

1. Обобщение упрощающего тождества путем ввода функционального бесповторного внешнего параметра. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1=A_2$. Внутри A_1 выбирается подвыражение вида $f(\text{значение}(F,u),t)$, расположенное внутри описателя "$\lambda_u(T,u\in A)$". Переменная F имеет единственное вхождение в A_1 и является параметром этого выражения. Каждое вхождение F в A_2 имеет вид "значение(F,T)". Находится тождество вида $f(g(x,y),z)=h(f(x,z),y)$, где g и h имеют единицу по y. Выбирается новая переменная G; $f(\text{значение}(F,u),t)$ заменяется на $h(f(\text{значение}(F,u),t),\text{значение}(G,u))$, а прочие вхождения термов "значение(F,T)"заменяются на $g(\text{значение}(F,T),\text{значение}(G,T))$. Добавляются необходимые для корректности антецеденты и проверяется, что новая переменная G не дублирует уже имевшуюся. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием нормализация - 90).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abde}(d-\text{функция}\ \&\ \text{конечное}(e)\ \&\ \text{Dom}(d)=e\ \&\ \text{Val}(d)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ b-\text{функция}\ \&\ \text{Dom}(b)=e\ \&\ \neg(0\in\text{Val}(b))\ \&\ \text{Val}(b)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ a-\text{число}\rightarrow\sum_{f,f\in e}ad(f)/b(f)=a\sum_{f,f\in e}d(f)/b(f))$

    из теоремы

    $\forall_{ade}(a-\text{число}\ \&\ d-\text{функция}\ \&\ \text{конечное}(e)\ \&\ \text{Dom}(d)=e\ \&\ \text{Val}(d)\subseteq\mathbb{R}\rightarrow\sum_{f,f\in e}(ad(f))=a\sum_{f,f\in e}d(f))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\rightarrow e\cdot(a/b)=(ae)/b)$

2. Обобщение упрощающей описатель эквивалентности путем ввода функционального бесповторного внешнего параметра. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, у которой A_1 имеет связанные переменные, а A_2 не имеет. Внутри A_1 выбирается подвыражение вида $f(\text{значение}(F,u),t)$, расположенное внутри описателя "$\lambda_u(T,A)$". Переменная F имеет единственное вхождение в A_1 и является параметром этого выражения. Находится тождество вида $f(g(x,y),z) = h(f(x,z),y)$, где g и h имеют единицу по y. Выбирается новая переменная G; $f(\text{значение}(F,u),t)$ заменяется на $h(f(\text{значение}(F,u),t),\text{значение}(G,u))$, а прочие вхождения F заменяются на "$\lambda_u(h(\text{значение}(F,u),\text{значение}(G,u)),A)$. Добавляются необходимые для корректности антецеденты и проверяется, что новая переменная G не дублирует уже имевшуюся. Результат упрощается. (Прием связпарам - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcf}(\neg(b=0)\ \&\ \neg(0\in \text{Val}(c))\ \&\ \text{Dom}(c)=\text{Dom}(f)\ \&\ b-\text{комплексное}\ \&\ \text{Val}(c)\subseteq \mathbb{C}\ \&\ \text{Val}(f)\subseteq\mathbb{C}\ \&\ c-\text{функция}\ \&\ f-\text{функция}\rightarrow$
   $\text{взаимнооднозначно}(\lambda)a(bf(a)/c(a),a\in\text{Dom}(f))\leftrightarrow$
   $\text{взаимнооднозначно}(\lambda)a(f(a)/c(a),a\in\text{Dom}(f)))$

   из теоремы

   $\forall_{bf}(\neg(b=0)\ \&\ b-\text{комплексное}\ \&\ \text{Val}(f)\subseteq\mathbb{C}\ \&\ f-\text{функция}\rightarrow$
   $\text{взаимнооднозначно}(\lambda)a(bf(a),a\in\text{Dom}(f))\leftrightarrow\ \text{взаимнооднозначно}(f))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a-\text{комплексное}\ \&\ b-\text{комплексное}\ \&\ c-\text{комплексное}\ \&\ \neg(c=0)\rightarrow$
   $a\cdot(b/c)=ab/c)$

3. Подразбиение функциональной переменной в консеквенте на две переменных. Теорема - кванторная импликация для приема проверочного оператора. Внутри консеквента выбирается подвыражение вида $f(\text{значение}(F,u),t)$, расположенное внутри описателя "$\lambda_u(T,A)$". Переменная F имеет единственное вхождение в консеквент и является его параметром. Находится тождество вида $f(g(x,y),z) = h(f(x,z),y)$, где g и h имеют единицу по y. Выбирается новая переменная G; $f(\text{значение}(F,u),t)$ заменяется на $h(f(\text{значение}(F,u),t),$ $\text{значение}(G,u))$, а прочие вхождения F заменяются на "$\lambda_u(h(\text{значение}(F,u),$ $\text{значение}(G,u)),A)$. Добавляются необходимые для корректности антецеденты и проверяется, что новая переменная G не дублирует уже имевшуюся. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием спуск - 64).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(\lim(\lambda_i(a(i)/b(i),i-\text{натуральное}))=0\ \&\ \text{убывает}(\lambda_i(a(i)/b(i),i-\text{натуральное}),$
   $\mathbb{N})\ \&\ \text{последовательность}(a,\mathbb{R})\ \&\ \text{последовательность}(b,\mathbb{R}\setminus\{0\})\rightarrow$
   $\text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n}a(i)(-1)^i/b(i),n-\text{натуральное})))$

   из теоремы

   $\forall_g(\lim(g)=0\ \&\ \text{убывает}(g,\mathbb{N})\ \&\ \text{последовательность}(g,\mathbb{R})\rightarrow$
   $\text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n}g(i)(-1)^i,n-\text{натуральное})))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\to e\cdot(a/b)=(ae)/b)$

4. Обобщение функциональной переменной в произведение до дробного вида. Консеквент теоремы имеет вид $P(\lambda_x(A_2,A_1),A_3)$ и определяет характеристику A_3 некоторой функции. Внутри A_2 выбирается вхождение подвыражения вида "значение(F,t)", где F - параметр консеквента, имеющий в описателе "отображение" единственное вхождение. При этом отсутствует антецедент "функция(F)"; терм t содержит x. Если выражение "значение(F,t)" - операнд некоторого произвведения, то в качестве Q выбирается это произведение, иначе - само данное выражение. Проверяется, что Q - не знаменатель дроби и не числитель дроби, имеющей сомножителем знаменателя выражение вида "значение(G,t)", где G - параметр консеквент и имеет в A_2 единственное вхождение. Выбирается новая переменная H, и везде в теореме вместо F подставляется $\lambda_x(F(x)/H(x),x-\text{число})$. Результат упрощается. (Прием функперех - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcej}(\neg(j=0)\ \&\ b-\text{число}\ \&\ j-\text{число}\ \&\ \text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^{b-1}/e(l),$
   $l-\text{число}),c)\to\text{первообразная}(\lambda_x(a(x^j)x^{bj-1}/e(x^j,x-\text{число}),$
   $\lambda_d(c(d^j)/j,d-\text{число})))$

   из теоремы

   $\forall_{abcj}(\neg(j=0)\ \&\ b-\text{число}\ \&\ j-\text{число}\ \&\ \text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^{b-1},l-\text{число}),c)\to$
   $\text{первообразная}(\lambda_x(a(x^j)x^{bj-1},x-\text{число}),\lambda_d(c(d^j)/j,d-\text{число})))$

Ввод бесповторного дополнительного параметра операнда

1. Обобщение тождества уменьшения глубины переменной путем ввода бесповторного дополнительного параметра операнда. Теорема - тождество перегруппировочного типа $A_1=A_2$, уменьшающее глубину некоторой переменной v до единицы. Внутри A_1 выбирается подвыражение $f(u,t)$, где u - переменная, имеющая в A_1 единственное вхождение. Находится тождество вида $f(g(x,y),z)=f(x,h(y,z))$, где g и h имеют единицу по y. Это тождество используется для преобразования $f(u,t)$. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием глубина - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acde}(\neg(c-1=0)\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(a)-\text{even})\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(e)-\text{even})\ \&$
   $0<c\ \&\ 0<d^a\ \&\ d-\text{число}\ \&\ a-\text{rational}\ \&\ e-\text{rational}\to e\log_c(d^a)=\log_c(d^{ae}))$

   из теоремы

   $\forall_{cde}(\neg(c-1=0)\ \&\ 0<c\ \&\ 0<d\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\to$
   $e\log_c d=\log_c(d^e))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ b-\text{rational}\ \&\ c-\text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}($
   $b)-\text{even})\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c)-\text{even})\to(a^b)^c=a^{bc})$

2. Обобщение тождества "исключнеизв" путем ввода бесповторного дополнительного параметра операнда. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, позволяющее заменить неизвестные подтермы на известные с помощью равенства из посылок задачи. (Прием исключнеизв - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(d = 0)\ \&\ d - \text{число}\ \&\ \neg(b = 0)\ \&\ c - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ a = |d| \rightarrow |c/(bd)| = |c/b|/a)$

   из теоремы

   $\forall_{acd}(\neg(d = 0)\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ a = |d| \rightarrow |c/d| = |c|/a)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ade}(\neg(a = 0)\ \&\ \neg(e = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow d/(ae) = (d/e)/a)$

3. Обобщение упрощающего тождества путем ввода бесповторного дополнительного параметра операнда. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество общей стандартизации. (Прием нормализация - 25).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(b = 0)\ \&\ 0 < a\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \rightarrow |c/(ab)| = |c/b|/a)$

   из теоремы

   $\forall_{ac}(0 < a\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \rightarrow |c/a| = |c|/a)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ade}(\neg(a = 0)\ \&\ \neg(e = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow d/(ae) = (d/e)/a)$

4. Обобщение сверточного тождества путем ввода бесповторного дополнительного параметра операнда. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество свертки. (Прием свертка - 32).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abce}(\neg(b = 0)\ \&\ \neg(c = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow a/(bc) + e/c = (e + a/b)/c)$

   из теоремы

   $\forall_{ace}(\neg(c = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow a/c + e/c = (a + e)/c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ade}(\neg(a = 0)\ \&\ \neg(e = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow d/(ae) = (d/e)/a)$

5. Обобщение тождества путем ввода бесповторного дополнительного параметра операнда. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, преобразующее терм с несколькими вхождениями операции максимальной сложности, хотя бы одно из которых содержит все переменные заменяемой части, в выражение с единственным вхождением этой операции. (Прием единствсущ - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdf}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(c=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\to d(f+bc)/(ac)=d(b+f/c)/a)$

   из теоремы

   $\forall_{abcf}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(c=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\to (f+bc)/(ac)=(b+f/c)/a)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bde}(\neg(d=0)\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ b-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\to b/(d/e)=(be)/d)$

   Исходная теорема имеет характеристику "единствсущ(первыйтерм)". Она переводит выражение с двумя дробями в выражение с одной дробью.

6. Обобщение тождества перехода к более простым числовым атомам путем ввода бесповторного дополнительного параметра операнд. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество $A_1=A_2$, выражающее сложный числовой атом A_1 через более простые. (Прием числатом - 37).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(b=0)\ \&\ b-\text{комплексное}\ \&\ c-\text{комплексное}\ \&\ a-\text{число}\to \mathrm{Re}(c/(ab))=\mathrm{Re}(c/b)/a)$

   из теоремы

   $\forall_{ac}(\neg(a=0)\ \&\ c-\text{комплексное}\ \&\ a-\text{число}\to \mathrm{Re}(c/a)=\mathrm{Re}(c)/a)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a-\text{комплексное}\ \&\ b-\text{комплексное}\ \&\ c-\text{комплексное}\ \&\ \neg(b=0)\ \&\ \neg(c=0)\to (a/b)/c=a/(bc))$

7. Обобщение тождества, упрощающего выражение под корневой сложной операцией, путем ввода бесповторного дополнительного параметра операнда. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций большей либо равной сложности. (Прием сокращ - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(a-1=0)\ \&\ 0<a\ \&\ 0<b\ \&\ 0<cd\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\to \log_a(bd/c)=-\log_a(c/d)+\log_a b)$

   из теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 < a\ \&\ \neg(a - 1 = 0)\ \&\ 0 < b\ \&\ 0 < c \to \log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bde}(\neg(d = 0)\ \&\ \neg(e = 0)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \to b/(d/e) = be/d)$

8. Обобщение характеризации функции путем ввода бесповторного дополнительного параметра операнда. Консеквент теоремы имеет вид $P(\lambda_{x_1 \ldots x_k}(A_2, A_1), A_3)$ и определяет характеристику A_3 некоторой функции. Внутри описателя "отображение" выбирается подвыражение $f(u, t)$, где u - отличная от $x_1, \ldots, x_k$ переменная, имеющая в этом описателе единственное вхождение. Находится тождество вида $f(g(x, y), z) = f(x, h(y, z))$, где g и h имеют единицу по y. Это тождество используется для преобразования $f(u, t)$. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием функперех - 28).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcef}(\neg(f = 0)\ \&\ \neg(b - 1 = 0)\ \&\ 0 < b\ \&\ (0, \infty) \subseteq a\ \&\ b - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ \text{первообразная}(\lambda_x(e(x)/x, x \in a), c) \to \text{первообразная}(\lambda_x(e(b^{fx}), x - \text{число}), \lambda_d(c(b^{df})/(f \ln b), d - \text{число})))$

   из теоремы

   $\forall_{abce}(\neg(b - 1 = 0)\ \&\ 0 < b\ \&\ (0, \infty) \subseteq \text{Dom}(\lambda_x(e(x)/x, x \in \text{Dom}(a)))\ \&\ \lambda_x(e(x)/x, x \in \text{Dom}(a)) - \text{функция}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \text{первообразная}(\lambda_x(e(x)/x, x \in a), c) \to \text{первообразная}(\lambda_x(e(b^x), x - \text{число}), \lambda_d(c(b^d)/\ln b, d - \text{число})))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abe}(\neg(b = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \to e \cdot (a/b) = ae/b)$

Ввод функционального бесповторного дополнительного параметра операнда

1. Обобщение упрощающего тождества путем ввода функционального бесповторного дополнительного параметра операнда. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Внутри A_1 выбирается подвыражение $f(\text{значение}(u, x), t)$, где u - параметр A_1, имеющий в A_1 единственное вхождение. Это подвыражение расположено внутри описателя $\lambda_x(D_2, D_1)$. Находится тождество вида $f(g(X, Y), Z) = f(X, h(Y, Z))$, где g и h имеют единицу по Y. Выбирается новая переменная v, вместо $u(x)$ подставляется $g(u(x), v(x))$, и указанное тождество позволяет преобразовать каждое $f(u(y), T)$ в $f(u(y), h(v(y), T))$. Проверяется неизбыточность нового параметра v. Добавляются необходимые антецеденты, результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием нормализация - 91).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(a - \text{функция}\ \&\ \text{конечное}(c)\ \&\ \text{Dom}(a) = c\ \&\ \text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ b - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(b) = c\ \&\ \neg(d = 0)\ \&\ \neg(0 \in \text{Val}(b))\ \&\ d - \text{число}\ \&\ \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R} \to \sum_{f, f \in c} a(f)/(b(f)d) = \sum_{f, f \in c} a(f)/b(f)/d)$

из теоремы

$\forall_{acd}(\neg(d=0)\ \&\ d-$ число $\&\ a-$ функция $\&$ конечное$(c)\ \&\ \mathrm{Dom}(a)=c\ \&$
$\mathrm{Val}(a)\subseteq\mathbb{R}\to\sum_{f,f\in c}a(f)/d=\sum_{f,f\in c}a(f)/d)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ade}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ a-$число $\&\ d-$число $\&\ e-$число $\to d/(ae)=(d/e)/a)$

Ввод повторного дополнительного параметра операнда

1. Обобщение упрощающего тождества путем ввода повторного дополнительного параметра операнда. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1=A_2$. Внутри A_1 выбирается подвыражение вида $f(p(u,t_1),t_2)$, где p - ассоциативная и коммутативная операция, а переменная u имеет в A_1 более одного вхождения, причем все эти вхождения имеют вид $f(p(u,T_1),T_2)$. Находятся тождество вида $p(f(x,y),z)=f(p(x,z),y)$ и тождество вида $f(f(x,y),z)=f(x,h(y,z))$, где f и h имеют единицу по y, причем h ассоциативно и коммутативно. Выбирается новая переменная v, вместо u подставляется $f(u,v)$, и указанные тождества позволяют преобразовать каждое $f(p(f(u,v),T_1),T_2)$ в $f(p(u,T_1),h(v,T_2))$. Проверяется неизбыточность нового параметра v. Добавляются необходимые антецеденты, результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием нормализация - 27).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefg}(\neg(b=0)\ \&\ 0<adfg\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\&\ d-$ число $\&$
   $e-$число $\&\ f-$число $\&\ g-$число $\&\ 0\le befg\to(ae/(bd))^c=(ef/(bg))^c/(df/(ag))^c)$

   из теоремы

   $\forall_{abcdef}(\neg(b=0)\ \&\ 0<adf\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\&\ d-$ число $\&$
   $e-$ число $\&\ f-$ число $\&\ 0\le bef\to(ae/(bd))^c=(ef/b)^c/(df/a)^c)$

   и дополнительных теорем

   $\forall_{ade}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ a-$число $\&\ d-$число $\&\ e-$число $\to d/(ae)=(d/e)/a)$

   $\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ e-$ число $\to e\cdot(a/b)=ae/b)$

2. Обобщение эквивалентности общей стандартизации путем ввода повторного дополнительного параметра операнда. Аналогично предыдущему, но теорема - эквивалентность общей стандартизации. (Прием общнорм - 88).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefghijk}(\neg(g=0)\ \&\ \neg(h=0)\ \&\ \neg(i=0)\ \&\ \neg(j=0)\ \&\ \neg(k=0)\ \&$
   $a-$ число $\&\ b-$ число $\&\ c-$ число $\&\ d-$ число $\&\ e-$ число $\&\ f-$ число $\&$
   $g-$ число $\&\ h-$ число $\&\ i-$ число $\&\ j-$ число $\&\ k-$ число $\to$
   пропорцнаборы$((d,e,f),(a/g,b/i,c/j))\leftrightarrow$ пропорцнаборы$((d,e,f),$
   $(ah/(gk),bh/(ik),ch/(jk))))$

   из теоремы

$\forall_{abcdefghij}(\neg(g=0)\ \&\ \neg(h=0)\ \&\ \neg(i=0)\ \&\ \neg(j=0)\ \&\ a-$число $\&$
$b-$число $\&$ $c-$число $\&$ $d-$число $\&$ $e-$число $\&$ $f-$число $\&$ $g-$число $\&$
$h-$число $\&$ $i-$число $\&$ $j-$число $\rightarrow$ пропорцнаборы$((d,e,f),(a/g,b/i,c/j)) \leftrightarrow$
пропорцнаборы$((d,e,f),(ah/g,bh/i,ch/j)))$

и дополнительных теорем

$\forall_{ade}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ a-$число $\&$ $d-$число $\&$ $e-$число $\rightarrow d/(ae)=(d/e)/a)$

$\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a-$число $\&$ $b-$число $\&$ $e-$число $\rightarrow e\cdot(a/b)=ae/b)$

3. Обобщение сверточного тождества путем ввода повторного дополнительного параметра операнда. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, обеспечивающее переход к более короткой записи. (Прием свертка - 34).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdef}(\neg(d=0)\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ \neg(f=0)\ \&\ a-$число $\&$ $b-$число $\&$ $c-$число $\&$
   $d-$число $\&$ $e-$число $\&$ $f-$число $\rightarrow ab/(df)+ac/(ef)=a(b/d+c/e)/f)$

   из теоремы

   $\forall_{abcde}(\neg(d=0)\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ a-$число $\&$ $b-$число $\&$ $c-$число $\&$ $d-$число $\&$
   $e-$число $\rightarrow ab/d+ac/e=a(b/d+c/e))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ade}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(e=0)\ \&\ a-$число $\&$ $d-$число $\&$ $e-$число $\rightarrow d/(ae)=(d/e)/a)$

4. Обобщение упрощающего тождества путем ввода повторного дополнительного параметра операнда. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1=A_2$. Внутри A_1 выбирается подвыражение вида $f(u,t)$, где переменная u имеет в A_1 более одного вхождения. Находится тождество вида $f(g(x,y),z)=h(f(x,z),y)$, где g и h меют единицу по y. Проверяется, что все вхождения u в A_1 имеют вид $f(u,T)$, причем это выражение не является операндом операции h. Выбирается новая переменная v, вместо u подставляется $g(u,v)$, и указанное тождество позволяет преобразовать каждое $f(u,T)$ в $h(f(u,T),v)$. Проверяется неизбыточность нового параметра v. Добавляются необходимые антецеденты, и результат упрощается. (Прием нормализация - 131).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abdef}(\neg(b=0)\ \&\ a-$число $\&$ $b-$число $\&$ $d-$число $\&$ $e-$число $\&$ $f-$число $\rightarrow$
   $a(d+f)/b+a(e-d)/b=a(e+f)/b)$

   из теоремы

   $\forall_{adef}(a-$число $\&$ $d-$число $\&$ $e-$число $\rightarrow a(d+f)+a(e-d)=a(e+f))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abe}(\neg(b=0)\ \&\ a-$число $\&$ $b-$число $\&$ $e-$число $\rightarrow e\cdot(a/b)=ae/b)$

Ввод внешней двуместной операции над сложной одноместной

1. Обобщение упрощающего тождества путем ввода внешней двуместной операции над сложной одноместной операцией. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Внутри A_1 ыбирается подвыражение $f(y)$, где y - некоторая переменная, имеющая в A_1 единственное вхождение. Находится теорема вида $f(g(X,Y)) = h(f(X),Y)$, где g имеет единицу по Y. Выбирается новая переменная z; $f(y)$ заменяется на $h(f(y),z)$, а прочие вхождения переменной y заменяются на $g(y,z)$. Добавляются необходимые для корректности антецеденты и проверяется, что новая переменная z не дублирует уже имевшуюся. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием нормализация - 38).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(b - \text{число}\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \to |a|^c|b| = |a^c b|)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to |a||b| = |ab|)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \to |a^b| = |a|^b)$

2. Обобщение сверточного тождества путем ввода внешней двуместной операции над сложной одноместной операцией. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество, преобразующее к более короткому выражению. (Прием свертка - 45).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acd}(\neg(c = 0)\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ a - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(a) - \text{even}) \to \arcsin|cd^a| = -\arcsin(-c|d|^a)\text{sg}(c))$

   из теоремы

   $\forall_{cd}(\neg(c = 0)\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число} \to \arcsin|cd| = -\arcsin(-c|d|)\text{sg}(c))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \to |a^b| = |a|^b)$

Ввод коэффициента при повторном вхождении переменной

1. Ввод коэффициента для второго вхождения повторной переменной. Теорема - кванторная импликация для приема проверочного оператора. Консеквент имеет единственную повторную переменную a, причем она встречается в нем ровно два раза. Одно из вхождений переменной a имеет вид $f(a,u)$, где u - переменная. Другое вхождение переменной a не является операндом операции f. Находится тождество вида $f(f(x,y),z) = f(x,f(y,z))$. Оно применяется для преобразования $f(a,u)$. В результате это выражение приобретает вид $f(a,f(v,u))$, где v

- новая переменная. Другое вхождение переменной a приобретает вид $f(a,v)$. Выбирается новая переменная w, отличная от v, при помощи задачи на описание равенство $f(v,u)=w$ разрешается относительно u, и $f(v,u)$ заменяется на w. Предпринимается коррекция антецедентов, использующая ответ задачи на описание. Результат упрощается. (Прием спуск - 37).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cde}(\neg(c=0)\ \&\ c-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ \text{Вектор}(d)\rightarrow \text{коллинеарны}(cd,ed))$

из теоремы

$\forall_{ay}(y-\text{число}\ \&\ \text{Вектор}(a)\rightarrow \text{коллинеарны}(a,ya))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ \text{Вектор}(c)\rightarrow a(bc)=(ab)c)$

Здесь имеется в виду умножение вектора на число - символ "умножвект". Исключение составляет произведение чисел a,b.

2. Ввод обобщающего коэффициента с использованием различия степеней по паре неизвестных. Теорема - эквивалентность вида $f(t_1\dots t_n)=a\leftrightarrow A$, обеспечивающая преобразование уравнения к виду A, допускающему декомпозицию относительно неизвестных $x_1,\dots,x_k$. Каждое t_i либо неизвестная, либо имеет своим заголовком ассоциативынй и коммутативный символ g, с которым связана операция h типа степени, причем все входящие в t_i неизвестные - корневые операнды, либо основания степеней - корневых операндов. Операция g дистрибутивна относительно f. Проверяется, что не все степени неизвестных в выражениях t_i одинаковы (каждый раз берется сумма степеней для отдельного t_i). Находится минимум m степеней неизвестных в выражениях t_i. Выбирается новая переменная b. Каждая неизвестная x_j заменяется на $g(x_j,b)$. Преобразованное выражение $f(t_1\dots t_n)$ сокращается на $h(b,m)$, но переменная a в левой части эквивалентности сохраняется без изменения. В правой части она заменяется на $g(a,h(b,m))$. Добавляются необходимые антецеденты. Результат упрощается. (Прием уравнвариант - 1).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdeh}(\neg(h=0)\ \&\ a-\text{целое}\ \&\ b-\text{целое}\ \&\ c-\text{целое}\ \&\ d-\text{целое}\ \&\ e-\text{целое}\ \&\ h-\text{целое}\rightarrow e=ad+bc+bdh\leftrightarrow(a+bh)(c+dh)=ac+eh)$

из теоремы

$\forall_{abcde}(a-\text{целое}\ \&\ b-\text{целое}\ \&\ c-\text{целое}\ \&\ d-\text{целое}\ \&\ e-\text{целое}\rightarrow e=ad+bc+bd\leftrightarrow(a+b)(c+d)=e+ac)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(\neg(b=0)\ \&\ a-\text{целое}\ \&\ b-\text{целое}\ \&\ c-\text{целое}\rightarrow ab=bc\leftrightarrow a=c)$

Характеристика - "уравнвариант(и(контекст(обл(х6) заголовок(х6 целое натуральное) первыйсимвол(х6 х7) неизвестная(х7) входит(х7 корень)) не(известно(

b)) не(известно(d)) не(заголовок(терм($e+ac$)0)) целое(a) целое(c) целое(e)) второйтерм)".

Фильтры характеристики указывают, что a, c, e - целочисленные константы; выражения b, d содержат неизвестные. Исходная теорема позволяет преобразовать уравнение в ее левой части к виду равенства целочисленной константе произведения двух целочисленных выражений с неизвестными. Дальше можно будет применять разбор случаев по разбиению целого числа в произведение двух целочисленных сомножителей.

Ввод коэффициента при бесповторной переменной

1. Вывод специального случая эквивалентности, не приводящего к появлению новой сложной операции над параметром. Теорема - эквивалентность вида $(a = t) \leftrightarrow A$, разрешающая уравнение относительно некоторой неизвестной x, отличной от переменной a. Переменная a встречается в каждой части эквивалентности лишь однократно. В правой части ее вхождение имеет вид $f(t, a)$, где f - операция, не являющаяся ассоциативной либо коммутативной. Типы значений выражений a, t различны. Выбирается новая переменная b, вместо a подставляется $f(b, a)$, причем выражение $f(t, f(b, a))$ упрощается до вида T, содержащего лишь одно вхождение операции f. Тогда левая часть эквивалентности заменяется на $f(b, a)$, в правой части $f(t, a)$ заменяется на T, добавляются необходимые антецеденты, и результат упрощается. Теорема сопровождается единственной характеристикой, указывающей, что в случае применения справа налево она позволяет получать соотношение типа пропорциональности. (Прием глуб - 31).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(a = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \text{Вектор}(c)\ \&\ \text{Вектор}(d) \rightarrow ac = bd \leftrightarrow c = (b/a)d)$

   из теоремы

   $\forall_{acd}(\neg(a = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ \text{Вектор}(c)\ \&\ \text{Вектор}(d) \rightarrow d = ac \leftrightarrow c = (1/a)d)$

5.9 Обобщение тождества путем перенесения антецедента в условное выражение

1. Попытка переброски в условное выражение антецедента, не используемого для сопровождения по о.д.з. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_n)$" в левой части. Находится антецедент D, не используемый для сопровождения A_1 по о.д.з. и не являющийся указателем на тип значения. Проверяется, что D - следствие остальных антецедентов и утверждений $B_1, \ldots, B_n$. Находится результат A_3 замены в A_1 подтерма "set(...)" на символ $\emptyset$. Затем антецедент D удаляется, а выражение A_2 заменяется на "(A_2 при D, иначе A_3)". Результат упрощается. (Прием описатель - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bf}(b - \text{set}\ \&\ f - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(f \setminus b) \rightarrow \text{card}(\text{set}_a(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq f\ \&\ b \subseteq a)) = (2^{\text{card}(f \setminus b)}\ \text{при}\ b \subseteq f,\ \text{иначе}\ 0))$

из теоремы

$\forall_{bf}(b - \text{set}\ \&\ f - \text{set}\ \&\ b \subseteq f\ \&\ \text{конечное}(f \setminus b) \to \text{card}(\text{set}_a(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq f\ \&\ b \subseteq a)) = 2^{\text{card}(f \setminus b)})$

2. Учет пустой области применения серийной операции. Теорема - тождество $F(\lambda_i(A_1, i - \text{целое}\ \&\ n \leq i\ \&\ i \leq m)) = A_2$, исключающее описатель "отображение". F - обобщение ассоциативной и коммутативной операции f с единицей E на наборы произвольной длины. Имеется антецедент "$0 \leq m - n$". Проверяется, что выражение A_2, после подстановки в него $n - 1$ вместо m и упрощения, превращается в E. Антецедент "$0 \leq m - n$" удаляется, а выражение A_2 заменяется на "$(A_2$ при $0 \leq m - n + 1,$ иначе $E)$". (Прием описатель - 26).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{mn}(n - \text{целое}\ \&\ m - \text{целое} \to \sum_{k=n}^{m} k = ((m - n + 1)(m + n)/2 \text{ при } 0 \leq m - n + 1,\ \text{иначе } 0))$

   из теоремы

   $\forall_{mn}(n - \text{целое}\ \&\ m - \text{целое}\ \&\ 0 \leq m - n \to \sum_{k=n}^{m} k = (m - n + 1)(m + n)/2)$

3. Попытка упростить префиксное выражение при альтернативном антецеденте и вывод тождества с условным выражением. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, позволяющее перейти от сложной операции с подтермом "префикс(a, b)" к такой же операции с подтермом b. Имеется единственный существенный антецедент - некоторое элементарное утверждение B, содержащее переменную a. Результат D упрощения выражения A_1 относительно списка антецедентов, в котором B заменено на $\neg(B)$, не содержит переменной a. Антецедент B удаляется, а выражение A_2 в консеквенте заменяется на "$(A_2$ при $B,$ иначе $D)$". Результат упрощается. (Прием префикснаярекурсия - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{слово} \to \text{card}\{d; c\} = (0 \text{ при } d \in \{; c\},\ \text{иначе } 1) + \text{card}\{; c\})$

   из теоремы

   $\forall_{cd}(\neg(d \in \{; c\})\ \&\ c - \text{слово} \to \text{card}\{d; c\} = 1 + \text{card}\{; c\})$

4. Упрощение числового атома при отрицании единственного существенного антецедента и вывод тождества с условным выражением. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее невырожденный числовой атом A_1 через числовые параметры. Имеется единственный существенный антецедент B. Он не используется для сопровождения по о.д.з. Результат D упрощения выражения A_1 относительно списка антецедентов, в котором B заменено на $\neg(B)$, не содержит невырожденных числовых атомов. Антецедент B удаляется, а выражение A_2 в консеквенте заменяется на "$(A_2$ при $B,$ иначе $D)$". (Прием числатом - 44).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{целое}\ \&\ c - \text{целое} \to \text{card}(\{b, \ldots, c\}) = (c - b + 1 \text{ при } 0 \leq c - b + 1,\ \text{иначе } 0))$

из теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{целое } \& \ c - \text{целое } \& \ 0 \leq c - b + 1 \rightarrow \text{card}(\{b, \ldots, c\}) = c - b + 1)$

5. Попытка переброски в условное выражение антецедента, не используемого для сопровождения по о.д.з. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, используемое для исключения описателя. Внутри A_1 выделяется описатель "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A_3)$". Выбирается не используемый для сопровождения по о.д.з. элементарный антецедент вида $\neg(x = t)$, где переменная x не встречается в t. Проверяется, что этот антецедент не является следствием прочих антецедентов и A_3. Результат подстановки t вместо x в A_1 упрощается относительно антецедентов, не содержащих x. Проверяется, что получается выражение D без связанных переменных. Антецедент $\neg(x = t)$ удаляется, а выражение A_2 в консеквенте заменяется на "(A_2 при $\neg(x = t)$, иначе D)". Результат упрощается. (Прием описатель - 92).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abd}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ d - \text{число} \rightarrow \text{card}(\text{set}_e(ae + be^2 - d = 0 \ \&$
$e - \text{число})) = (((\text{континуум при } d = 0, \text{ иначе } 0) \text{ при } a = 0, \text{ иначе } 1) \text{ при}$
$b = 0, \text{ иначе } ((1 \text{ при } 4bd + a^2 = 0, \text{ иначе } 2) \text{ при } 0 \leq 4bd + a^2, \text{ иначе } 0)))$

из теоремы

$\forall_{abd}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ d - \text{число} \rightarrow \text{card}(\text{set}_e(ae + be^2 - d =$
$0 \ \& \ e - \text{число})) = ((1 \text{ при } 4bd + a^2 = 0, \text{ иначе } 2) \text{ при } 0 \leq 4bd + a^2, \text{ иначе } 0))$

5.10 Подстановка вместо переменной сложного выражения

1. Обобщение импликации для подбора корня уравнения: подстановка вместо неизвестной выражения с новым параметром. Теорема - кванторная импликация для подбора значения неизвестной x. Некоторый антецедент - равенство $x = t$, задающее значение неизвестной, удовлетворяющее консеквенту A. В этом консеквенте выбирается вхождение неоднобуквенного подвыражения r, корневым операндом которого служит переменная x. По заголовку f выражения r находится тождество $B_1 = B_2$, у которого выражение B_2 бесповторно, а B_1 - небесповторно, причем заголовком B_2 служит f. Внутри B_2 выбирается подвыражение $g(y, z)$, где y, z - переменные, а операция g ассоциативна и коммутативна. Выражение B_1 имеет заголовок g, причем некоторый его корневой операнд равен результату замены в B_1 подтерма $g(y, z)$ на y. Дополнительная теорема не имеет переменных, отличных от y, z. Дополнительная теорема применяется (в обратном направлении) для преобразования подвыражения r консеквента исходной теоремы. При этом переменная y унифицируется с x. Проверяется, что в консеквенте появляются новые неоднобуквенные подтермы, имеющие единственную переменную x. Результат упрощается так, чтобы снова появился антецедент, явно выражающий x. (Прием неизвестная - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acdef}(e - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ \neg(d = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ 0 \le 4d^3 + 27a^2\ \&$
$f = \sqrt{4d^3 + 27a^2}\ \&\ c = -e + (\sqrt[3]{3\sqrt{3}a - f} + \sqrt[3]{3\sqrt{3}a + f})/(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}) \to$
$c(d + 3e^2) + 3ec^2 + c^3 = a - de - e^3)$

из теоремы

$\forall_{abcd}(d - \text{число}\ \&\ \neg(d = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ 0 \le 4d^3 + 27a^2\ \&\ c = -d/(3b) + b\ \&$
$b = \sqrt[3]{3\sqrt{3}a - \sqrt{4d^3 + 27a^2}}/(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}) \to cd + c^3 = a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$

2. Использование деления с остатком для выделения целочисленной составляющей числовой дроби. Теорема - тождество A_1, упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций большей либо равной сложности. Имеется антецедент "целое(n)". Внутри A_1 выбирается вхождение подтерма вида "$a + bn/c$". Здесь b, c могут быть вырожденными, равными 1. Выделяются целочисленные множители b_1, c_1 выражений b, c: $b = b_1b_2; c = c_1c_2$. Выбираются новые переменные p, q, s. Указанный выше подтерм заменяется на "$a + pb_2/(qc_2)$". В остальной части теоремы вместо a подставляется выражение "$a + rb_2/(qc)$". Добавляется антецедент "$pc_1 = qb_1n + s$". Результат упрощается. (Прием сокращ - 40).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcdef}(e - \text{целое}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{целое}\ \&\ d - \text{натуральное}\ \&\ f - \text{целое}\ \&$
   $c = de + f\ \&\ \neg(e = 0) \to \sin(b + c\pi/d) = (-1)^e \sin(b + f\pi/d))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{число}\ \&\ a - \text{целое} \to \sin(b + a\pi) = (01)^a \sin b)$

5.11 Разнесение новых параметров по разным частям отношения

1. Варьирование эквивалентности, исключающей сложное подвыражение с неизвестными: вводится дополнительное слагаемое неизвестной части двуместного отношения, включающее все остаточные неизвестные члены, причем специально выделяется подслучай, когда оно нулевое. Теорема - эквивалентность $P(t, a) \leftrightarrow A$, созданная для приема решателя, позволяющего получить более простые выражения с неизвестными. Здесь a - переменная, идентифицируемая с термом задачи, не содержащим неизвестных. Отношение P допускает перегруппировку g - членов одного операнда в другой операнд, с изменением их знака h. Среди g - членов выражения t нет переменной. Выбирается новая переменная b. Левая часть эквивалентности заменяется на $P(g(t, b), a)$. В остальной части теоремы вместо переменной a подставляется $g(a, h(b))$. Корректируются антецеденты, и результат упрощается. При этом выполняется разбор случаев, определяемый фильтрами приема решателя. Формируется новая характеристика для создания приема решателя, исключающего сложное подвыражение с

неизвестными. Полученная теорема регистрируется как обобщение исходной. (Прием неизвоценка - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abefgh}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{натуральное}\ \&\ h - \text{натуральное}\ \&\ g - \text{even}\ \&\ 0 \le e \to e^h f^g - (a-b)^g = 0\ \&\ 0 \le f(a-b) \leftrightarrow a = b + fe^{h/g})$

из теоремы

$\forall_{aefgh}(\neg(g = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ \text{числитель}(g) - \text{even}\ \&\ g - \text{rational}\ \&\ 0 \le e \to e^h f^g = a^g\ \&\ 0 \le af \leftrightarrow a = fe^{h/g})$

В нашем примере характеристика имеет вид "неизвоценка(первыйтерм и(тип(описать) условие известно(g) не(известно(e)) натуральное(h) или(натуральное(g) и(известно(e)известно(a)))))".

2. Обобщение эквивалентности типа "связка" путем ввода дополнительных параметров, учитывающих перегруппировку между частями двуместного отношения. Теорема - эквивалентность вида $\exists_x(A_1) \leftrightarrow A_2$, которую можно использовать для приема решателя, исключающего несущественные неизвестные. Внутри A_1 находятся всевозможные вхождения подутверждений вида $P(x, a)$, где a - переменная, причем возможна перегруппировка f - членов одного операнда отношения P в другой с изменением их знака g. Для каждого такого вхождения выбирается новая переменная b, и само вхождение заменяется на $P(f(x, b), a)$. Прочие вхождения переменной a заменяются на $f(a, g(b))$. Добавляются необходимые антецеденты, результат упрощается. (Прием связка - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abde}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \to \exists_c(a < c + e\ \&\ c + d < b\ \&\ c - \text{число}) \leftrightarrow a + d < b + e)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \to \exists_c(c < b\ \&\ a < c\ \&\ c - \text{число}) \leftrightarrow a < b)$

5.12 Индуктивное обобщение теоремы

Кратное применение упрощающего тождества

1. Ввод целочисленного параметра для обобщения тождества, в котором прибавление к аргументу константного терма не изменяет значения. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Внутри A_1 выделяется подтерм вида $x + t$, где x - переменная, имеющая в A_1 единственное вхождение, t - константный терм. Выражение A_2 получается из A_1 заменой $x+t$ на x. Проверяется, что при подстановке в антецеденты выражения $x + t$ либо $x - t$ вместо x получаются утверждения, являющиеся следствиями исходных антецедентов. Выбирается новая переменная n, вместо $x + t$ в A_1 подставляется $x + nt$, и добавляется антецедент "целое(n)". (Прием нормализация - 55).

Пример: вывод тождества

$\forall_{ab}(\neg(\cos b = 0)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ a - \text{целое} \to \operatorname{tg}(b + a\pi) = \operatorname{tg} b)$

из тождества

$\forall_b(\neg(\cos b = 0)\ \&\ b - \text{число} \to \operatorname{tg}(b + \pi) = \operatorname{tg} b)$

2. Переход от вынесения наружу минуса к вынесению наружу степени минус единицы. Теорема - тождество общей стандартизации без существенных антецедентов, имеющее вид $A_1 = f(A_2)$, где f - операция типа "отрицание", причем A_1 получается из A_2 заменой вхождения некоторой переменной x на $f(x)$. Находится тождество без существенных антецедентов, имеющее вид $f(y) = g(a, y)$, где g - ассоциативная и коммутативная операция, a - константное выражение. Для операции g существует операция h типа возведения в степень. Выбирается новая переменная n. Находится результат A_3 замены в A_1 подтерма $f(x)$ на $g(h(a, n), x)$. Консеквентом новой теоремы становится $A_3 = g(h(a, n), A_2)$. Добавляется антецедент "целое(n)". Проверяется, что результаты подстановки в антецеденты исходной теоремы выражения $g(h(a, n), x)$ вместо x - следствия антецедентов новой теоремы. Результат упрощается. (Прием нормализация - 74).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{целое} \to \sin(a(-1)^b) = (-1)^b \sin a)$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to \sin(-a) = -\sin a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to (-1)a = -a)$

3. Переход от исключения минуса к исключению степени минус единицы. Теорема - тождество общей стандартизации без существенных антецедентов, имеющее вид $A_1 = A_2$, причем A_1 получается из A_2 заменой вхождения некоторой переменной x на $f(x)$, где f - операция типа "отрицание". Находится тождество без существенных антецедентов, имеющее вид $f(y) = g(a, y)$, где g - ассоциативная и коммутативная операция, a - константное выражение. Для операции g существует операция h типа возведения в степень. Выбирается новая переменная n. Находится результат A_3 замены в A_1 подтерма $f(x)$ на $g(h(a, n), x)$. Консеквентом новой теоремы становится $A_3 = A_2$. Добавляется антецедент "целое(n)". Проверяется, что результаты подстановки в антецеденты исходной теоремы выражения $g(h(a, n), x)$ вместо x - следствия антецедентов новой теоремы. Результат упрощается. (Прием нормализация - 81).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{целое} \to \cos(a(-1)^b) = \cos a)$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to \cos(-a) = \cos a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to (-1)a = -a)$

4. Ввод целочисленного параметра для обобщения тождества, в котором прибавление к аргументу константного терма равносильно навешиванию внешней одноместной операции типа "отрицание". Теорема - тождество без существенных антецедентов $A_1 = A_2$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций большей либо равной сложности. Внутри A_1 выделяется подвыражение $x+t$, где переменная x имеет в A_1 единственное вхождение, а выражение t константное. A_2 имеет вид $f(A_3)$, где f - операция типа "отрицание", причем A_3 получается из A_1 заменой $x+t$ на x. Выбирается новая переменная n. Подвыражение $x+t$ заменяется в A_1 на $x+nt$, а A_2 заменяется на "(A_3 при четное(n), иначе A_2)". Добавляется антецедент "целое(n)". Проверяется, что результаты подстановки в антецеденты исходной теоремы выражения $x + nt$ вместо x - следствия антецедентов новой теоремы.(Прием сокращ - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{целое} \to \sin(b + a\pi) = (-1)^a \sin b)$

   из теоремы

   $\forall_b(b - \text{число} \to \sin(b + \pi) = -\sin b)$

5. Усмотрение константного значения заменяющей части. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций большей либо равной сложности. Внутри A_1 выделяется подвыражение $n+1$, причем A_2 получается из A_1 заменой этого подвыражения на n. Переменная n встречается в единственном антецеденте "натуральное(n)" либо только в двух антецедентах "целое(n)", "$a \leq n$". Определяется результат подстановки в A_2 единицы (во втором случае - константы a) вместо n, и этот результат упрощается до некоторого выражения D. Новая теорема получается из исходной заменой консеквента на $A_2 = D$. Результат упрощается. (Прием сокращ - 41).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdei}(i - \text{set} \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ \text{ассоциативно}(e) \ \& \ 0 \leq c \ \& \ \text{Единица}(d, e) \ \&$
   $\text{бинарнооперация}(e, i) \to \text{алгстепень}(d, e, c) = d)$

   из теоремы

   $\forall_{cdei}(i - \text{set} \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ \text{ассоциативно}(e) \ \& \ 0 \leq c \ \& \ \text{Единица}(d, e) \ \&$
   $\text{бинарнооперация}(e, i) \to \text{алгстепень}(d, e, c + 1) = \text{алгстепень}(d, e, c))$

6. Ввод целочисленного параметра для обобщения тождества, в котором прибавление к аргументу константного терма равносильно переходу к другой операции от исходного аргумента. Теорема - не имеющее существенных антецедентов тождество вида $f(x + t) = g(x)$, где операции f, g различны, причем перед

g может соять знак "минус". Выражение t константное. Выражение $g(x+t)$ упрощается, и проверяется, что результат, после отбрасывания знака "минус", если он есть, имеет вид $f(x)$. Выбирается новая переменная n. Консеквент новой теоремы имеет вид "$f(nt) = (A^{[n/2]}f(0)$ при четное(n), иначе $A^{[n/2]}g(0))$". Здесь $A = 1$ либо -1 в зависимости от указанных выше знаков "минус". Единственный антецедент - "целое(n)". Проверяется, что результаты подстановки в антецеденты исходной теоремы выражения nt вместо x - следствия антецедента новой теоремы.Результат упрощается. (Прием сокращ - 39).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a - \text{целое} \to \sin(a\pi/2) = (0 \text{ при } a - \text{even, иначе}(-1)^{[a/2]}))$

из теоремы

$\forall_b(b - \text{число} \to \sin(b + \pi/2) = \cos b)$

Переход от обычной операции к операции над конечным семейством

1. Индуктивное обобщение тождества с двумя переменными для функций. Теорема - тождество вида $F(\lambda_x(g(a(x), b(x)), x \in \text{Dom}(a))) = h(F(a), F(b))$, где каждая из операций g, h ассоциативна и коммутативна. G, H - обобщения операций G, H на наборы произвольной длины. После необходимых обоснований корректности создается теорема с консеквентом вида "$F(\lambda_x(G(\lambda_y(Q(y)(x), y \in \text{Dom}(Q))))) = H(\lambda_x(F(Q(y)), y \in \text{Dom}(Q)))$". Здесь Q - семейство функций, имеющих одну и ту же область определения M. Добавляются необходимые антецеденты. Результат упрощается. (Прием описатель - 79).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aef}(\forall_b(b \in \text{Val}(e) \to \text{Dom}(b) = f)$ & $\forall_b(b \in \text{Val}(e) \to \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R})$ &
   $\forall_b(b \in \text{Val}(e) \to \text{дифференцируема}(b, a))$ & $f - \text{set}$ & $f \subseteq \mathbb{R}$ & $a \in f$ &
   конечное$(\text{Dom}(e))$ & семействофункций$(e) \to$
   производная$(\lambda_c(\sum_{b,b\in\text{Dom}(e)} e(b)(c), c \in f), a) = \sum_{b,b\in\text{Dom}(e)}$ производная$(e(b), a))$

   из теоремы

   $\forall_{aeg}(\text{Dom}(e) = \text{Dom}(g)$ & $\text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R}$ & $\text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R}$ & $\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}$ &
   $a \in \text{Dom}(g)$ & $e -$ функция & $g -$ функция & дифференцируема(e, a) &
   дифференцируема$(g, a) \to$ производная$(\lambda_c(e(c) + g(c), c \in \text{Dom}(g)), a) =$
   производная$(e, a) +$ производная$(g, a))$

2. Индуктивное обобщение тождества с двумя переменными, связанными симметричным отношением в антецедентах - переход к конечному множеству. Теорема - тождество вида $f(g(x, y)) = h(f(x), f(y))$, где операции g, h ассоциативны и коммутативны, причем допускают обобщения G, H на наборы произвольной длины. Переменные x, y входят в антецеденты симметичным образом. После необходимых обоснований корректности создается теорема с консеквентом вида $f(G(\lambda_x(x, x \in M))) = H(\lambda_x(f(x), x \in M))$. Здесь M - переменная для конечного множества. Добавляются необходимые антецеденты. Результат упрощается. (Прием упрощение - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_c$(конечное(c) & конечные(c) & классмножеств(c) & Разделимы(c) $\rightarrow$ $\mathrm{card}(\bigcup_{a,a\in c} a) = \sum_{a,a\in c} \mathrm{card}(a)$)

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \mathrm{set}\ \&\ b - \mathrm{set}\ \&$ непересек$(a,b)\ \&$ конечное$(a)\ \&$ конечное$(b) \rightarrow$ $\mathrm{card}(a \cup b) = \mathrm{card}(a) + \mathrm{card}(b)$)

3. Индуктивное обобщение тождества с двумя переменными, связанными симметричным отношением в антецедентах - переход к конечному семейству. Аналогично предыдущему, но новое тождество имеет вид $f(G(a)) = H(\lambda_x(f(a(x)), x \in \mathrm{Dom}(a)))$. Здесь a - переменная для конечного семейства. (Прием упрощение - 13).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_c(c-$функция & семействомножеств(c) & конечное(Dom(c)) & несовместны(c) & конечные(Val(c)) $\rightarrow \mathrm{card}(\bigcup(c)) = \sum_{a,a\in \mathrm{Dom}(c)} \mathrm{card}c(a)$)

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \mathrm{set}\ \&\ b - \mathrm{set}\ \&$ непересек$(a,b)\ \&$ конечное$(a)\ \&$ конечное$(b) \rightarrow$ $\mathrm{card}(a \cup b) = \mathrm{card}(a) + \mathrm{card}(b)$)

4. Обобщение на конечные семейства транзитивного отношения с двумя ассоциативно-коммутативными двуместными операциями. Теорема - кванторная импликация без существенных антецедентов с элементарным консеквентом вида $P(f(g(x,y), h(f(x), f(y))))$, где P - транзитивное бинарное отношение. Операции g, h ассоциативны и коммутативны, причем допускают обобщения G, H на наборы произвольной длины. Переменные x, y входят в антецеденты симметричным образом. Проверяется, что из $P(a,b)$ вытекает $P(h(a,c), h(b,c))$. Новая теорема имеет консеквент вида $P(f(G(\lambda_x(x, x \in M))), H(\lambda_x(f(x), x \in M)))$. (Прием элементарно - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b$(конечное(b) & конечные(b) & классмножеств(b) $\rightarrow \mathrm{card}(\bigcup_{a,a\in b} a) \leq$ $\sum_{a,a\in b} \mathrm{card}(a)$)

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a-\mathrm{set}\ \&\ b-\mathrm{set}\ \&$ конечное$(a)\ \&$ конечное$(b) \rightarrow \mathrm{card}(a \cup b) \leq \mathrm{card}(a) + \mathrm{card}(b)$)

5. Индуктивное обобщение тождества с двумя переменными, связанными симметричным отношением в антецедентах - переход к конечному множеству. Теорема - тождество вида $g(x, h(y,z)) = f(g(x,y), g(x,z))$, где операции f, h ассоциативны и коммутативны, причем допускают обобщения F, H на наборы произвольной длины. Переменные x, y входят в антецеденты симметичным образом. После необходимых обоснований корректности создается теорема с консеквентом вида $g(x, H(\lambda_y(y, y \in M))) = F(\lambda_y(g(x,y), y \in M))$. Здесь M - переменная

для конечного множества. Добавляются необходимые антецеденты. Результат упрощается. (Прием дистрибразвертка - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aC}(a \subseteq \text{события}(C)$ & конечное(a) & верпространство(C) & классмножеств(a) & Разделимы$(a) \to$ вероятность$(\bigcup_{A,A\in a} A, C) = \sum_{A,A\in a}$ вероятность$(A, C))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{set}$ & $B - \text{set}$ & верпространство(C) & $A \in$ события(C) & $B \in$ события(C) & непересек$(A, B) \to$ вероятность$(A \cup B, C) =$ вероятность$(A, C) +$ вероятность$(B, C))$

6. Индуктивное обобщение тождества с двумя переменными, связанными симметричным отношением в антецедентах - переход к конечному семейству. Аналогично предыдущему, но новое тождество имеет вид $g(x, H(a)) = F(\lambda_y(g(x, a(y)), y \in \text{Dom}(a)))$. Здесь a - переменная для конечного семейства. (Прием дистрибразвертка - 14).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{aC}(\text{Val}(a) \subseteq$ события(C) & $a -$ функция & семействомножеств(a) & конечное$(\text{Dom}(a))$ & несовместны$(a) \to$ вероятность$(\bigcup(a), C) = \sum_{A,A\in\text{Dom}(a)}$ вероятность$(a(A), C))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{set}$ & $B - \text{set}$ & верпространство(C) & $A \in$ события(C) & $B \in$ события(C) & непересек$(A, B) \to$ вероятность$(A \cup B, C) =$ вероятность$(A, C) +$ вероятность$(B, C))$

7. Переход от эквивалентности для префиксной рекурсии к эквивалентности для развертки конечного набора. Теорема - эквивалентность вида $A_1 \leftrightarrow A_2 \ \vee \ A_3$. Внутри A_1 выделяется подвыражение "префикс(a, b)", причем переменные a, b имеют в A_1 единственное вхождение. Утверждение A_1 при замене в нем данного подвыражения на b превращается в A_3; утверждение A_2 не содержит b. Выбираются новые переменные i, n, p. Находится результат B_1 замены в A_1 подтерма "префикс(a, b)" на "$\lambda_i(p(i), i \in \{1, \ldots, n\})$", а также результат B_2 подстановки в A_2 выражения $p(i)$ вместо переменной a. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow \exists_i(i \in \{1, \ldots, n\}$ & $B_2)$. (Прием префиксная рекурсия - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{adf}(d -$ функция & $\text{Dom}(d) = \{1, \ldots, f\}$ & $f -$ натуральное $\to$ $a \in \{;\lambda_e(d(e), e \in \{1, \ldots, f\})\} \leftrightarrow \exists_e(e \in \{1, \ldots, f\}$ & $a = d(e)))$

из теоремы

$\forall_{abc}(c -$ слово $\to a \in \{b; c\} \leftrightarrow a = b \ \vee \ a \in \{; c\})$

8. Переход к тождеству с конечной операцией. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$, у которого в A_2 встречается подвыражение $f(a,b)$, такое, что операция f ассоциативна и коммутативна, переменные a,b не имеют в A_2 повторных вхождений, причем A_1 получается из A_2 подстановкой вместо a неоднобуквенного выражения t, содержащего a. Операция f допускает обобщение F на наборы произвольной длины. Антецеденты теоремы разбиваются на группу S_1 утверждений, содержащих a и не содержащих b, группу S_2 утверждений, содержащих b и не содержащих a, и группу S_3 утверждений, не содержащих ни a, ни b. S_2 получается из S_1 заменой a на b. Из всего списка антецедентов усматриваются утверждения, полученные из S_1 заменой a на $f(a,b)$. Выбираются новые переменные g,i, и определяется результат r подстановки в t выражения $g(i)$ вместо a. Консеквентом новой теоремы становится равенство результата замены вхождения $f(a,b)$ в A_2 на выражение "$F(\lambda_i(g(i), i \in \mathrm{Dom}(g)))$" результату замены этого вхождения на выражение "$F(\lambda_i(r, i \in \mathrm{Dom}(g)))$". Антецеденты корректируются, причем добавляется условие конечности семейства g. Результат упрощается. (Прием нормализация - 134).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bk}(\mathrm{Val}(b) \subseteq \mathbb{Z}$ & $b -$ функция & $k -$ натуральное & конечное$(\mathrm{Dom}(b)) \to \sum_{m,m\in\mathrm{Dom}(b)} b(m)(\mathrm{mod}\ k) = (\sum_{m,m\in\mathrm{Dom}(b)} b(m)(\mathrm{mod}\ k))(\mathrm{mod}\ k))$

из теоремы

$\forall_{mnk}(m -$ целое & $n -$ целое & $k -$ натуральное $\to (m+n)(\mathrm{mod}\ k) = (m(\mathrm{mod}\ k) + n)(\mathrm{mod}\ k))$

9. Индуктивное обобщение с переходом к конечной операции. Теорема - используемая в приеме проверочного оператора кванторная импликация, в консеквенте которой выделяется подвыражение $f(a,b)$, такое, что операция f ассоциативна и коммутативна, переменные a,b не имеют в консеквенте повторных вхождений, причем при замене в консеквенте указанного подвыражения как на a, так и на b получается некоторый антецедент. Операция f допускает обобщение F на наборы произвольной длины. Антецеденты теоремы разбиваются на группу S_1 утверждений, содержащих a и не содержащих b, группу S_2 утверждений, содержащих b и не содержащих a, и группу S_3 утверждений, не содержащих ни a, ни b. S_2 получается из S_1 заменой a на b. Из всего списка антецедентов усматриваются утверждения, полученные из S_1 заменой a на $f(a,b)$. Выбирается новая переменная g, и в консеквенте подвыражение $f(a,b)$ заменяется на $F(g)$. Группы S_1, S_2 исключаются из антецедентов, причем добавляются утверждения вида $\forall_i(i \in \mathrm{Dom}(g) \to R)$, где R - результат замены в антецеденте из S_1 переменной a на $g(i)$. Добавляется также условие конечности семейства g. Результат упрощается. (Прием легковидеть - 24).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bn}(\neg(\mathrm{Dom}(b) = \emptyset)$ & $\forall_a(a \in \mathrm{Val}(b) \to$ открытое$(a))$ & $b -$ функция & $n -$ натуральное & семействомножеств(b) & конечное$(\mathrm{Dom}(b))$ & подмнож$(b, \mathbb{R}^n) \to$ открытое$(\bigcup(b)))$

из теоремы

$\forall_{anA}(a-\text{set}\ \&\ A-\text{set}\ \&\ a\subseteq\mathbb{R}^n\ \&\ A\subseteq\mathbb{R}^n\ \&\ n-\text{натуральное}\ \&\ \text{открытое}(a)\ \&\ \text{открытое}(A)\to\text{открытое}(a\cup A))$

10. Индуктивное обобщение. Аналогично предыдущему, но импликация имеет не характеристику "легковидеть", а характеристику "попыткаспуска". (Прием попыткаспуска - 32).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abm}(\forall_c(c\in\{1,ldots,b\}\to m\mid a(c))\ \&\ b-\text{натуральное}\ \&\ m-\text{целое}\ \&\ \text{кортеж}(a,b,\mathbb{Z})\to m\mid\sum_{c=1}^{b}a(c))$

    из теоремы

    $\forall_{amn}(m\mid a\ \&\ m\mid n\ \&\ a-\text{целое}\ \&\ m-\text{целое}\ \&\ n-\text{целое}\to m\mid(a+n))$

11. Индуктивное обобщение тождества для бинарной ассоциативной операции. Теорема - тождество перехода к более короткому выражению, имеющее вид "$g(A_1,A_2)=A_3$", где переменная g обозначает ассоциативную бинарную операцию. Внутри A_3 выделяется подвыражение $f(a,b)$, такое, что логический символ f обозначает ассоциативную и коммутативную операцию, переменные a,b не имеют в A_3 повторных вхождений, причем A_1 получается из A_3 заменой данного подвыражения на a, а A_2 - на b. Операция f допускает обобщение F на наборы произвольной длины. Антецеденты теоремы разбиваются на группу S_1 утверждений, содержащих a и не содержащих b, группу S_2 утверждений, содержащих b и не содержащих a, и группу S_3 утверждений, не содержащих ни a, ни b. S_2 получается из S_1 заменой a на b. Из всего списка антецедентов усматриваются утверждения, полученные из S_1 заменой a на $f(a,b)$. Выбираются новые переменные h,i,n, определяются результат t замены в A_3 подвыражения $f(a,b)$ на $h(i)$ и результат T замены этого подвыражения на "$F(\lambda_i(h(i),i-\text{целое}\ \&\ 1\le i\ \&\ i\le n))$". Консеквентом новой теоремы становится "$T=g(\lambda_i(t,i\in\{1,\ldots,n\}))$". Антецеденты корректируются, результат упрощается. (Прием свертка - 88).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{bcdfA}(A-\text{set}\ \&\ b\in A\ \&\ \text{кортеж}(c,d,\mathbb{N})\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&\ 2\le d\ \&\ \text{бинарнооперация}(f,A)\to\text{алгстепень}(b,f,\sum_{a=1}^{d}c(a))=f(\lambda_a(\text{алгстепень}(b,f,c(a)),a\in\{1,\ldots,d\})))$

    из теоремы

    $\forall_{bcdfA}(A-\text{set}\ \&\ b\in A\ \&\ c-\text{натуральное}\ \&\ d-\text{натуральное}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f,A)\to\text{алгстепень}(b,f,c+d)=f(\text{алгстепень}(b,f,c),\text{алгстепень}(b,f,d)))$

12. Индуктивное обобщение декомпозиционного тождества. Теорема - равенство $A_1=h(A_2,A_3)$, где A_1 - невырожденный числовой атом, содержащий подвыражение $f(a,b)$, такое, что операция f ассоциативна и коммутативна, переменные a,b не имеют в A_1 повторных вхождений, причем A_2 получается из A_1 заменой данного подвыражения на a, а A_3 - на b. Операция f допускает обобщение F на

наборы произвольной длины. Операция h тоже ассоциативна и коммутативна, причем допускает обобщене H на наборы произвольной длины. Антецеденты теоремы разбиваются на группу S_1 утверждений, содержащих a и не содержащих b, группу S_2 утверждений, содержащих b и не содержащих a, и группу S_3 утверждений, не содержащих ни a, ни b. S_2 получается из S_1 заменой a на b. Из всего списка антецедентов усматриваются утверждения, полученные из S_1 заменой a на $f(a,b)$. Выбираются новые переменные g, i, и определяется результат r подстановки в A_2 выражения $g(i)$ вместо a. Консеквентом новой теоремы становится равенство результата замены вхождения $f(a,b)$ в A_1 на выражение "$F(\lambda_i(g(i), i \in \mathrm{Dom}(g)))$" результату замены этого вхождения на выражение "$H(\lambda_i(r, i \in \mathrm{Dom}(g)))$". Антецеденты корректируются, причем добавляется условие конечности семейства g. Результат упрощается. (Прием числзнач - 45).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abK}(\mathrm{Val}(b) \subseteq \text{Векторы}\ \&\ a \in \{1,2,3\}\ \&\ b - \text{функция}\ \&\ \text{конечное}(\mathrm{Dom}(b))\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \to \text{крд}(\sum_{d,d \in \mathrm{Dom}(b)} b(d), K, a) = \sum_{d,d \in \mathrm{Dom}(b)} \text{крд}(b(d), K, a))$

из теоремы

$\forall_{aABK}(\text{Вектор}(A)\ \&\ \text{Вектор}(B)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\ \&\ a \in \{1,2,3\} \to \text{крд}(A,K,a) + \text{крд}(B,K,a) = \text{крд}(A+B,K,a))$

Переход от операции типа умножения к операции типа степени

1. Переход от тождества для операции типа умножения к операции типа степени. Теорема - тождество вида $A_1 = A_2$, где A_1 - невырожденный числовой атом. Внутри A_1 содержится подвыражение $f(a,b)$, где f - ассоциативная и коммутативная операция, a и b - переменные, входящие в A_1 однократно. Внутри A_2 выделяется подвыражение вида $g(B_1, B_2)$, где g - ассоциативная и коммутативная операция, B_1 и B_2 - числовые атомы, полученные из A_1 заменой $f(a,b)$ на переменные a и b соответственно. Переменные a, b тоже входят в A_2 лишь однократно. С операцией f связана операция F типа возведения в степень, с операцией g - операция G типа возведения в степень. Переменные a, b входят в антецеденты симметричным образом., причем вместе в одном антецеденте не встречаются. Утверждения, получаемые из содержащих a антецедентов подстановкой вместо a выражения $f(a,b)$, являются следствиями исходных антецедентов. Проверяется, что после подстановки в A_2 выражения A_1 вместо B_1 и замены переменной b в B_2 на новую переменную "c" получается выражение, преобразуемое к виду, аналогичному исходному, но с подвыражением $g(B_1, B_2, B_3)$ вместо $g(B_1, B_2)$. Здесь B_3 - результат замены в B_2 переменной b на переменную c. Выбирается новая переменная n, и консеквентом результирующей теоремы становится равенство результата замены в A_1 подвыражения $f(a,b)$ на $F(a,n)$ результату замены в A_2 подвыражения $g(B_1, B_2)$ на $G(B_1, n)$. Антецеденты корректируются, при этом уточняется, что n - натуральное. Если дополнительная проверка позволяет, вместо этого берется "$n -$ целое". Новая теорема упрощается. (Прием числатом - 41).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ac}(\neg(c = 0)\ \&\ c - \text{комплексное}\ \&\ a - \text{целое} \to \arg(c^a) = \text{нормарг}(a \cdot \arg(c)))$

из теоремы

$\forall_{cf}(\neg(c = 0)\ \&\ \neg(f = 0)\ \&\ c -$ комплексное $\&\ f -$ комплексное $\rightarrow \arg(cf) =$ нормарг$(\arg(c) + \arg(f)))$

2. Переход от тождества для операции типа умножения к операции типа степени. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество декомпозиции выражения со сложным заголовком. (Прием декомпозиция - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ac}(c-$комплексное $\&\ a-$натуральное $\rightarrow$ сопряженное$(c^a) =$ (сопряженное$(c))^a)$

   из теоремы

   $\forall_{cf}(c -$ комплексное $\&\ f -$ комплексное $\rightarrow$ сопряженное$(cf) =$ сопряженное$(c) \cdot$ сопряженное$(f))$

3. Индуктивное обобщение тождества типа сокращения для бинарной ассоциативной операции. Теорема - тождество общей стандартизации вида "$f(A_1, A_2) = A_3$", где значением переменной f служит бинарная ассоциативная операция. Проверяется, что "$f(A_1, A_3, A_2)$" упрощается до A_3. Выбирается новая переменная n, и выражения "f(констнабор$(A_1, n))$", "f(констнабор$(A_2, n))$" упрощаются до выражений B_1, B_2, не содержащих символа "значение". К антецедентам добавляется утверждение "натуральное(n)". Консеквентом становится "$f(B_1, B_2) = A_3$". (Прием нормализация - 136).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abfA}(A -$ set $\&\ a \in A\ \&$ ассоциативно$(f)\ \&$ обратимо$(f)\ \&$
   бинарнооперация$(f, A)\ \&\ b -$ натуральное $\rightarrow$
   $f($алгстепень$(a, f, b),$ алгстепень$(a, f, -b)) =$ единица$(f))$

   из теоремы

   $\forall_{afA}(A -$ set $\&\ a \in A\ \&$ ассоциативно$(f)\ \&$ обратимо$(f)\ \&$
   бинарнооперация$(f, A) \rightarrow f(a,$ обрэлемент$(a, f)) =$ единица$(f))$

Обобщение тождества для бинарной ассоциативной операции на наборы произвольной длины

1. Обобщение эквивалентности для бинарной ассоциативной операции на наборы произвольной длины. Теорема - эквивалентность общей стандартизации $A_1 \leftrightarrow A_2$. В заменяющей части A_1 рассматриваются всевозможные подвыражения вида "$f(t_1, t_2)$", где переменная f обозначает бинарную ассоциативную операцию, причем либо t_1, либо t_2 - переменная x, не имеющая других вхождений в A_1. Такие переменные x далее рассматриваются как наборы операндов произвольной длины. Если $x = t_1$, то указанное подвыражение заменяется на "f(суффикс$(x, t_2))$", иначе - на "f(префикс$(t_1, x))$". Вхождения в консеквент переменной x, не являющиеся операндами при f, заменяются на "$f(x)$". Антецеденты корректируются; в частности, добавляется антецедент "слово(x)". (Прием общнорм - 101).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acdfz}(a = \text{операция}(d)\ \&\ c \in \text{носитель}(d)\ \&\ f \in \text{носитель}(d)\ \&\ \text{группа}(d)\ \&\ z - \text{слово}\ \&\ \text{Val}(z) \subseteq \text{носитель}(d) \to f = a(\text{суффикс}(z, \text{обрэлемент}(c, a))) \leftrightarrow a(z) = a(f, c))$

из теоремы

$\forall_{acdfz}(a = \text{операция}(d)\ \&\ c \in \text{носитель}(d)\ \&\ f \in \text{носитель}(d)\ \&\ z \in \text{носитель}(d)\ \&\ \text{группа}(d) \to f = a(z, \text{обрэлемент}(c, a)) \leftrightarrow z = a(f, c))$

2. Обобщение эквивалентности для бинарной ассоциативной операции на наборы произвольной длины. Аналогично предыдущему, но в антецедентах имеется равенство "$f = \text{операция}(B)$", и в результирующей теореме вместо переменной f используется терм "$\text{операция}(B)$". (Прием общнорм - 105).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{axyA}(a - \text{set}\ \&\ x \in a\ \&\ \text{группа}(A)\ \&\ \text{подгруппа}(a, A)\ \&\ y - \text{слово}\ \&\ \text{Val}(y) \subseteq \text{носитель}(A) \to \text{операция}(A)(\text{префикс}(x, y)) \in a \leftrightarrow \text{операция}(A)(y) \in a)$

   из теоремы

   $\forall_{abxyA}(b = \text{операция}(A)\ \&\ a - \text{set}\ \&\ x \in a\ \&\ y \in \text{носитель}(A)\ \&\ \text{группа}(A)\ \&\ \text{подгруппа}(a, A) \to y \in A \leftrightarrow b(x, y) \in a)$

Индуктивное обобщение условия на бинарную ассоциативную операцию

1. Индуктивное обобщение условия на бинарную ассоциативную операцию. Теорема - кванторная импликация, выводящая отличный от равенства нечисловой двуместный предикат $P(t_1, t_2)$. Имеется антецедент $P(r_1, r_2)$, получаемый из консеквента заменой подвыражения "$f(x, y)$" на переменную x. Здесь переменная f бозначает бинарную ассоциативную операцию. Антецеденты, содержащие y получаются из антецедентов, содержащих x, заменой x на y. Утверждения, получаемые при подстановке $f(x, y)$ вместо x в содержащие x антецеденты, суть следствия исходных антецедентов. Выбирается новая переменная n. Выражение "$f(\text{констнабор}(x, n))$" упрощается и превращается в выражение A, не содержащее символа "значение". Консеквентом новой теоремы становится результат замены в исходном консеквенте подвыражения $f(x, y)$ на A. Антецеденты корректируются, в частности, добавляется антецедент "натуральное(n)". (Прием отношение - 52).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abfxA}(\text{группа}(A)\ \&\ f = \text{операция}(A)\ \&\ \text{подгруппа}(a, A)\ \&\ x \in a\ \&\ b - \text{натуральное} \to \text{алгстепень}(x, f, b) \in a)$

   из теоремы

   $\forall_{afxyA}(\text{группа}(A)\ \&\ f = \text{операция}(A)\ \&\ x \in a\ \&\ y \in a\ \&\ \text{подгруппа}(a, A) \to f(x, y) \in a)$

Усмотрение инвариантов относительно шага индукции

1. Усмотрение инвариантов относительно шага индукции. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее характеристику F объекта B_1, полученного из исходного объекта B_2 (переменной теоремы) операцией G, для которой предусмотрен прием справочника "индуктпарам", через такую же характеристику F объекта B_2. По символу операции G (не обязательно одноместной) справочник "индуктпарам" находит целочисленную характеристику H объектов B_1, B_2, которая строго уменьшается при переходе от B_2 к B_1. Внутри A_2 рассматривается не пересекающееся с указанной характеристикой F объекта B_2 неоднобуквенное подвыражение D, имеющее B_2 одним из своих корневых операндов. В разделе, к которому относится заголовок E выражения D, находится теорема с квантором существования в консеканте, у которого подкванторные утверждения содержат равенство вида $E(\ldots) = C$, фиксирующее значение подтерма $E(\ldots)$ константой C. В контексте, объединяющем исходные антецеденты с антецедентами дополнительной теоремы, решается задача на исследование, ориентированная на усмотрение целочисленных выражений, не изменяющихся при переходе от B_2 к B_1. Затем анализируется возможность связать эти инварианты между собой, и соответствующие соотношения становятся консеквентами выводимых теорем. (Прием шаг - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_G(\text{конечное}(\text{вершины}(G))\ \&\ \text{граф}(G)\ \&\ \text{ациклический}(G) \rightarrow$
   $\text{card}(\text{компоненты}(G)) = \text{card}(\text{вершины}(G)) - \text{card}(\text{ребра}(G)))$

   из теоремы

   $\forall_{vG}(v \in \text{вершины}(G)\ \&\ \text{конечное}(\text{ребра}(G))\ \&\ \text{граф}(G) \rightarrow$
   $\text{card}(\text{ребра}(\text{удалениеверш}(G, v))) = \text{card}(\text{ребра}(G)) - \text{степеньвершины}(v, G))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_G(\neg(\text{ребра}(G) = \emptyset)\ \&\ \text{конечное}(\text{ребра}(G))\ \&\ \text{граф}(G)\ \&\ \text{ациклический}(G) \rightarrow$
   $\exists_b(\text{степеньвершины}(b, G) = 1\ \&\ b \in \text{вершины}(G)))$

Переход от утверждения для одноэлементных множеств к утверждению для конечных множеств

1. Обобщение условия на одноэлементные множества с помощью импликации, декомпозирующей условие на объединение множеств. Теорема - кванторная импликация с дизъюнкцией $A_1 \vee A_2$ в консеквенте. Имеется антецедент A_3, в котором выделяется подвыражение "$a \cup b$". Переменные a, b не имеют других вхождений в A_3, причем A_1, A_2 получаются из A_3 заменой указанного подвыражения на переменные a, b соответственно. Отличные от A_3 антецеденты, содержащие a, сохраняют свою истинность при переходе к подмножеству a. В текущем списке вывода находится импликация без существенных антецедентов, выражающая некоторое свойство одноэлементного множества. Отрицание ее консеквента унифицируется с A_1. Это позволяет усмотреть, что для любого конечного множества B истинно отрицание утверждения, получаемого из A_3 заменой "$a \cup b$" на B. (Прием дизъюнкция - 20).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{конечное}(b) \to \neg(\text{предельнточка}(a, b)))$

из теоремы

$\forall_{abA}(b - \text{set}\ \&\ A - \text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R}\ \&\ A \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{предельнточка}(a, b \cup A) \to$
$\text{предельнточка}(a, b)\ \vee\ \text{предельнточка}(a, A))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(b - \text{число} \to \neg(\text{предельнточка}(a, \{b\})))$

5.13 Отбрасывание фрагментов консеквента

1. Попытка отбросить внешнюю одноместную операцию. Теорема - кванторная импликация с консеквентом вида $P(\lambda_x(f(t), A_1), B_1)$, определяющим характеристику B_1 функции, заданной описателем "отображение". Здесь f - одноместная операция, для которой существует обратная операция g, т.е. такая, что $g(f(X)) = X$. В текущем списке вывода находится кванторная импликация аналогичного типа, с консеквентом $P(\lambda_y(g(F(y), A_2)), B_2)$. У нее имеется антецедент вида $P(F, B_3)$. Исходная теорема используется для реализации данного антецедента дополнительной теоремы. Результат упрощается. 9Прием функперех - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\text{первообразная}(\lambda_x(1/(\sin x)^2, \neg(\sin x = 0)\ \&\ x - \text{число}), \lambda_c(-\operatorname{ctg} c, \neg(\sin c = 0)\ \&$
   $c - \text{число}))$

   из теоремы

   $\text{первообразная}(\lambda_x(-1/(\sin x)^2, \neg(\sin x = 0)\ \&\ x - \text{число}), \lambda_y(\operatorname{ctg} y, \neg(\sin y = 0)\ \&$
   $y - \text{число}))$

   и дополнительных теорем

   $\forall_b(b - \text{число} \to - - b = b)$

   $\forall_{ae}(\text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ a - \text{функция}\ \&\ \text{первообразная}(a, e) \to$
   $\text{первообразная}(\lambda_x(-a(x), x \in \text{Dom}(a)), \lambda_c(-e(c), c \in \text{Dom}(e))))$

2. Попытка отбросить константные операнды. Теорема - кванторная импликация с консеквентом вида $P(\lambda_x(f(t, C), A_1), B_1)$, определяющим характеристику B_1 функции, заданной описателем "отображение". Здесь выражение C не содержит переменной x, и в этом смысле константное. Существует тождество сокращения: $g(f(x, y), y) = x$. В текущем списке вывода находится кванторная импликация аналогичного типа, с консеквентом $P(\lambda_y(g(f(H(y), u), v), A_2), B_2)$, где u, v - переменные, отличные от y. Она имеет антецедент вида $P(H, B_3)$. В дополнительной импликации переменные u, v отождествляются, и исходная теорема используется для реализации антецедента $P(H, B_3)$. Результат упрощается. (Прием функперех - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(\neg(a-1=0)\ \&\ 0<a\ \&\ a-\text{число}\rightarrow \text{первообразная}(\lambda_f(a^f, f-\text{число}), \lambda_c(a^c/\ln a, c-\text{число})))$

из теоремы

$\forall_a(\neg(a-1=0)\ \&\ 0<a\ \&\ a-\text{число}\rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a^x\cdot\ln a, x-\text{число}), \lambda_c(a^c, c-\text{число})))$

и дополнительных теорем

$\forall_{ae}(\neg(e=0)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\rightarrow ae/e=a)$

$\forall_{abde}(\neg(e=0)\ \&\ \text{Dom}(a)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ a-\text{функция}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ \text{первообразная}(a,d)\rightarrow \text{первообразная}(\lambda_f(ba(f)/e, f\in\text{Dom}(a)), \lambda_c(bd(c)/e, c\in\text{Dom}(d))))$

5.14 Обобщение вида разрешаемого уравнения

1. Переход от эквивалентности для равенства числового атома к эквивалентности для линейного уравнения с числовым атомом. Теорема - эквивалентность вида $(x=t)\leftrightarrow A$, где x - переменная, t - невырожденный числовой атом, причем оценка сложности правой части эквивалентности меньше оценки t. Не усматривается, что x целочисленное. Выбираются новые переменные a, b, c. Левая часть эквивалентности заменяется на $at+b=c$, а в правую вместо x подставляется "$(c-b)/a$". Антецеденты корректируются, в частности, добавляется утверждение $\neg(a=0)$. Результат упрощается. (Прием уменьшение - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{adef}(\neg(a=\emptyset)\ \&\ \neg(d=0)\ \&\ a-\text{set}\ \&\ a\subseteq\mathbb{R}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ \text{огрснизу}(a)\rightarrow f=e+d\cdot\inf(a)\leftrightarrow \text{наибольший}((f-e)/d, \text{set}_b(\text{нижняягрань}(b,a))))$

   из теоремы

   $\forall_{ac}(a-\text{set}\ \&\ \text{огрснизу}(a)\ \&\ \neg(a=\emptyset)\ \&\ a\subseteq\mathbb{R}\rightarrow c=\inf(a)\leftrightarrow \text{наибольший}(c, \text{set}_b(\text{нижняягрань}(b,a))))$

5.15 Обобщение уравнения путем изменения системы координат

1. Варьирование системы координат для обобщения тождества, выражающего характеристику объекта через параметры уравнения. Теорема имеет антецедент вида "$\text{коорд}(A_1, K)=\text{set}_{x_1\ldots x_n}(A_2)$". Находится кванторная импликация с квантором существования в консеквенте, вводящая новую систему координа, в которой уравнение общего вида для координат множества объектов приобретает стандартный вид, унифицируемый с указанным антецедентом исходной теоремы. Эта кванторная импликация используется для реализации данного антецедента. Результат упрощается. (Прием уравндробь - 6).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{abefghqr}(\text{коорд}(q,r) = \text{set}_{kl}(h+bk^2+ek+fl^2+gl=0\ \&\ k-\text{число}\ \&\ l-\text{число})\ \&$
$b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ g-\text{число}\ \&\ h-\text{число}\ \&\ \text{прямкоорд}(r)\ \&$
$\text{эллипс}(q)\ \&\ a=bg^2+fe^2-4bfh \to \text{большаяось}(q) = \max(\sqrt{a/b}/|f|, \sqrt{a/f}/|b|))$

из теоремы

$\forall_{acdEK}(\text{коорд}(E,K) = \text{set}_{xy}(c+ax^2+dy^2=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&$
$a-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{эллипс}(E) \to$
$\text{большаяось}(E) = 2\max(\sqrt{-c/a}, \sqrt{-c/d}))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{EKabcde}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)$
$\&\ \neg(c=0)\ \&\ \neg(a=0)\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \text{set}_{xy}(ax^2+cy^2+bx+dy+e=0\ \&$
$x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}) \to \exists_{ABCQ}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&$
$(A,B,C)=Q\ \&\ \text{коорд}(A,K) = (-b/(2a), -d/(2c))\ \&\ \text{коорд}(B,K) = (-b/(2a)+$
$1, -d/(2c))\ \&\ \text{коорд}(C,K) = (-b/(2a), -d/(2c)+1)\ \&\ \text{коорд}(E,Q) =$
$\text{set}_{uv}(4a^2cu^2+4ac^2v^2-b^2c-d^2a+4ace\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число})))$

Глава 6

Вывод следствий с помощью задачи на описание

6.1 Простейшие приемы

Рассматривается некоторая характеристика встречающихся в консеквенте атомарных выражений. При помощи задачи на описание предпринимается попытка выразить данную характеристику одного из выражений через характеристики остальных

1. Попытка рассмотрения одноместных характеристик атомарных выражений. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, где A_1 - нечисловое атомарное выражение, не встречающееся в A_2. Рассматриваются все нечисловые атомарные выражения B, встречающиеся в A_2. Для каждого из них находится теорема - определение выражения вида $f(C)$, где f - одноместная операция, C - атомарное выражение с тем же заголовком, что у B. Выбирается новая переменная a, и формируется список S, полученный добавлением к антецедентам равенств $a = f(B)$. Аналогичным образом анализируется A_1, но равенство $a = f(A_1)$ в список S не заносится, а становится единственным условием вспомогательной задачи на описание, имеющей посылки S, неизвестную - переменную a из равенства $a = f(A_1)$, и известные параметры - переменные a из равенств $a = f(B)$. Ответом задачи на описание служит равенство $a = t$. После перехода от вспомогательных переменных к исходным выражениям оно преобразуется к виду D. Если имеются антецеденты, содержащие не входящие в D переменные, то на их конъюнкцию навешивается квантор существования по таким переменным, и он преобразуется в бескванторное утверждение E с помощью еще одной задачи на описание. Оно замещает в новой теореме указанные антецеденты, а консеквентом ее становится D. Антецеденты упрощаются. (Прием Атомарное - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{Aad}(\neg(d = A)\ \&\ a \in \text{прямая}(dA)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&$ $\text{точкалуча}(A, d, a) \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(Aa) + \text{вектор}(Ad)) = \text{длина}(\text{вектор}(Aa)) +$ $\text{длина}(\text{вектор}(Ad)))$

   из теоремы

   $\forall_{Aabd}(\neg(d = A)\ \&\ l(ab) = l(dA)\ \&\ a \in \text{прямая}(dA)\ \&\ a \in \text{отрезок}(bA)\ \&\ a -$ $\text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ \text{точкалуча}(A, d, b) \rightarrow \text{вектор}(Aa) +$

вектор(Ad) = вектор(Ab))

Разрешение тождества относительно некоторого подвыражения

1. Использование известного константного значения сложной операции для усмотрения значения сложного числового атома из соотношения для простых атомов. Теорема - соотношение для невырожденных числовых атомов. Число таких атомов не менее 2. Наиболее сложный из них - некоторый атом A - единственный. Максимально сложное подвыражение консеквента - некоторое выражение B - тоже единственное и содержит A. Все переменные выражения B заключены внутри A. Консеквент теоремы разрешается относительно B: $B = C$, где C содержит более простые, чем B, невырожденные числовые атомы. По заголовку f выражения B находится бесквантворное (т.е. константное) тождество $B_1 = B_2$, упрощающее константный терм B_1 с заголовком f. В предположении, что B равно B_2, при помощи задачи на описание определяется значение D атома A. Затем создается импликация, антецеденты которой получены из антецедентов исходной теоремы добавлением равенства $C = B_2$, а консеквент - равенство $A = D$. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 30).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ 2l(AC) = l(BC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
   $B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \to \angle(ABC) = \pi/6)$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = C)\ \&$
   $\neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \to l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$

   и дополнительной теоремы

   $\sin(\pi/6) = 1/2$

2. Использование известного константного значения сложной операции для усмотрения равенства простых числовых атомов из значения сложного числового атома. Аналогично предыдущему, но к антецедентам добавляется $A = D$, а консеквентом становится $C = B_2$. (Прием числовойатом - 35).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \angle(ABC) = \pi/4\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&$
   $C - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \to l(AC) = l(AB))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
   $\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \to l(AC) = \text{tg}(\angle(ABC))l(AB))$

   и дополнительной теоремы

   $\text{tg}(\pi/4) = 1$

3. Усиление тождества свертки путем исключения константных корневых операндов. Теорема - тождество $f(a_1 \dots a_n) = b$, уменьшающее длину терма. $n \geq 2$, причем некоторые операнды a_i - константные. Для результата R применения f к неконстантным операндам вводится вспомогательное обозначение - переменная x. После перехода в левой части исходного тождества к переменной x полученное уравнение разрешается относительно x. В ответ вместо x подставляется R, и результат становится консеквентом новой теоремы. Эта теорема упрощается. Проверяется, что снова получено тождество, уменьшающее длину терма. (Прием свертка - 64).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(b - \text{число} \to 2\sin(b - \pi/6) = \sqrt{3}\sin b - \cos b)$

   из теоремы

   $\forall_b(b - \text{число} \to \sin(b - \pi/6) = (\sqrt{3}\sin b - \cos b)/2)$

4. Попытка получения тождества перехода к более простым операндам сложного выражения путем явного разрешения относительно самого сложного подвыражения заменяемой части. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Внутри A_1 имеется единственное выражение B максимальной сложности, причем оно отлично от A_1. A_2 содержит единственное выражение той же сложности, причем оно получено из B отбрасыванием части операндов. При помощи задачи на описание уравнение $A_1 = A_2$ разрешается относительно B (на время решения этой задачи для обозначения B вводится вспомогательная переменная). Консеквентом новой теоремы становится равенство $B = T$ - конъюнктивный член ответа задачи. (Прием нормализация - 142).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(c = 0)\ \&\ \neg(a^2 + b^2 = 0)\ \&\ c \mid a\ \&\ c \mid b\ \&\ a - \text{целое}\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ c - \text{целое} \to \text{нод}(a/c, b/c) = \text{нод}(a, b)/|c|)$

   $\forall_{abc}(\neg(c = 0)\ \&\ \neg(a^2 + b^2 = 0)\ \&\ c \mid a\ \&\ c \mid b\ \&\ a - \text{целое}\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ c - \text{целое} \to \text{нод}(a, b) = |c|\text{нод}(a/c, b/c))$

5. Разрешение соотношения с двумя атомарными выражениями относительно одного из них. Теорема - тождество, имеющее ровно два атомарных нечисловых выражения, причем каждое из них встречается в нем лишь однократно. При помощи задачи на описание это тождество разрешается относительно одного из данных выражений, если оно уже не является левой лио правой частью тождества, и консеквентом новой теоремы становится равенство, выражающее указанное выражение через другое. (Прием Атомарное - 22).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cde}(e - \text{число}\ \&\ \text{мточка}(c)\ \&\ \text{мточка}(d) \to \text{Скорость}(c, d, e) = -\text{Скорость}(d, c, e))$

   из теоремы

   $\forall_{cde}(e - \text{число}\ \&\ \text{мточка}(c)\ \&\ \text{мточка}(d) \to \text{Скорость}(c, d, e) + \text{Скорость}(d, c, e) = \text{вектор0})$

6. Попытка выразить один числовой атом через другие. Теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. Их количество не менее 2 и не более 4. Выбирается числовой атом A, не являющийся одной из частей тождества и входящий в него лишь однократно. При помощи задачи на описание тождество разрешается относительно A. Консеквентом новой теоремы становится равенство $A = T$ - конъюнктивный член ответа задачи. (Прием числовойатом - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B) \to \angle(BAC) = \arccos((-l(BC)^2 + l(AB)^2 + l(AC)^2)/(2l(AB)l(AC))))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B) \to 2l(AB)l(AC)\cos(\angle(BAC)) = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)$

7. Попытка выразить единственный числовой атом через комплекснозначные атомы. Теорема - тождество, содержащее единственный невырожденный числовой атом A и непустое множество комплекснозначных невырожденных атомов. При помощи задачи на описание тождество разрешается относительно A. Консеквентом новой теоремы становится равенство $A = T$ - конъюнктивный член ответа задачи. (Прием числовойатом - 66).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \to \mathrm{Re}(z) = (z + \text{сопряженное}(z))/2)$

   из теоремы

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \to z + \text{сопряженное}(z) = 2\mathrm{Re}(z))$

8. Усиление тождества путем явного разрешения относительно сложной надоперации сложного терма. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, сохраняющее сложность самого сложного подвыражения, но уменьшающее сложность его надвыражений. Внутри A_1 имеется единственное подвыражение t максимальной сложности. Находится наиболее сложный надтерм r терма t, отличный от самого t и от A_1. При помощи задачи на описание тождество разрешается относительно r. Консеквентом новой теоремы становится равенство $r = T$ - конъюнктивный член ответа задачи. Результат упрощается. (Прием внешзнак - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(b - \text{число} \to (\sin b)^2 = (1 - \cos(2b))/2)$

   из теоремы

   $\forall_b(b - \text{число} \to \cos(2b) = 1 - 2(\sin b)^2).$

9. Попытка разрешить нормализующее тождество с несколькими сложными численными операциями относительно одной из них. Теорема - тождество общей

стандартизации $A_1 = A_2$, у которого значения A_1, A_2 - вещественные либо комплексные числа. Оно имеет больше одного подвыражения максимальной сложности. Рассматривается произвольное такое подвыражение t, имеющее в тождестве лишь одно вхождение. Выбирается некоторый надтерм r терма t, не содержащий отличных от t подвыражений максимальной сложности (возможно, совпадающий с t). Тип его значения - такой же, как у частей тождества. При помощи задачи на описание тождество разрешается относительно r. Консеквентом новой теоремы становится равенство $r = T$ - конъюнктивный член ответа задачи. (Прием нормализация - 77).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to (\sin a)^2 = 1 - (\cos a)^2)$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to (\sin a)^2 + (\cos a)^2 = 1)$

10. Попытка явного разрешения относительно самого сложного подвыражения равенства. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Заменяемая часть имеет единственное подвыражение t максимальной сложности. Либо сложность заменяющей части меньше сложности заменяемой, либо она имеет единственное подвыражение максимальной сложности, получаемое из t удалением части операндов. При помощи задачи на описание тождество разрешается относительно t. Консеквентом новой теоремы становится равенство $t = T$ - конъюнктивный член ответа задачи. Результат упрощается. (Прием нормализация - 89).

Пример: вывод теоремы

$\forall_z(\mathrm{Re}(z) = 0 \ \& \ z - \text{комплексное} \to \mathrm{Im}(z) = -iz)$

из теоремы

$\forall_z(z - \text{комплексное} \ \& \ \mathrm{Re}(z) = 0 \to i\mathrm{Im}(z) = z)$

11. Попытка явного разрешения тождества относительно единственной численной операции над семейством. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель. Оно не имеет описателей "класс" и имеет единственное вхождение описателя "отображение". Это вхождение - единственный корневой операнд выражения t, значения которого - вещественные либо комплексные. Выражение t не является одной из частей тождества. При помощи задачи на описание тождество разрешается относительно t. Консеквентом новой теоремы становится равенство $t = T$ - конъюнктивный член ответа задачи. Результат упрощается. (Прием описатель - 27).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cd}(c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ 0 \le d - c \to \sum_{x=c}^{d} x = (c + d)(d - c + 1)/2)$

из теоремы

$\forall_{cd}(c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ 0 \le d - c \to d + 2\sum_{x=c}^{d} x - c + 1 = -c^2 + (d + 1)^2)$

12. Попытка разрешить не содержащее численных параметров подвыражение с невырожденными числовыми атомами относительно численных параметров. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат. Оно имеет единственный невырожденный числовой атом. Находится список P всех численных переменных тождества. Проверяется, что обе его части содержат переменную списка P. Предпринимается обращение к процедуре, содержащей приемы, ориентированные на разрешение равенства с невырожденными числовыми атомами относительно подвыражения с такими атомами, не содержащего численных переменных. Проверяется, что одна из частей результирующего равенства не содержит переменных списка P, и это равенство становится консеквентом новой теоремы. (Прием числкоэфф - 16).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{efghABCK}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (f, g)\ \&$
    $\text{коорд}(\text{вектор}(AC), K) = (e, h)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
    $\text{прямкоорд}(K) \to \cos(\angle(ABC)) = (ef + gh)/(\sqrt{e^2 + h^2} \cdot \sqrt{f^2 + g^2}))$

    из теоремы

    $\forall_{efghABCK}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (f, g)\ \&$
    $\text{коорд}(\text{вектор}(AC), K) = (e, h)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
    $\text{прямкоорд}(K) \to \cos(\angle(ABC)) = (ef + gh) = \sqrt{e^2 + h^2} \cdot \sqrt{f^2 + g^2} \cos(\angle(BAC)))$

13. Попытка явно разрешить соотношение относительно сложного подтерма. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, у которого внутри A_1 имеется единственное вхождение подтерма максимальной сложности, и этот подтерм имеет вид $f(t)$, где t - выражение с единственной бесповторной переменной x. Внутри A_2 - одно либо несколько подвыражений максимальной сложности $B_1, \ldots, B_k$, причем каждое B_j имеет вид $g_j(x)$. При помощи задачи на описание тождество разрешается относительно $f(t)$. Если ответ имеет вид дизъюнкции, то выбирается произвольный дизъюнктивный член, конъюнктивным членом которого служит равенство $f(t) = T$. Это равенство становится консеквентом новой теоремы, а к антецедентам добавляются условия, отделяющие указанный дизъюнктивный член от других. Результат упрощается. (Прием варприем - 2).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_f(0 < \sin f\ \&\ f - \text{число} \to \sin f = 1/\sqrt{1 + (\operatorname{ctg} f)^2})$

    из теоремы

    $\forall_f(\neg(\sin f = 0)\ \&\ f - \text{число} \to (\sin f)^2 = 1/(1 + (\operatorname{ctg} f)^2))$

14. Усиление тождества путем явного разрешения относительно сложной надоперации сложного терма. Теорема - тождество того же типа, что в предыдущем пункте. Среди собственных надвыражений выражения $f(t)$ выбирается наиболее сложное выражение r. Проверяется, что оно не совпадает с A_1. При помощи задачи на описание тождество разрешается относительно r. Консеквентом новой теоремы становится ответ этой задачи. Результат упрощается. (Прием варприем - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_b(b - \text{число} \to (\sin b)^2 = (1 - \cos(2b))/2)$

из теоремы

$\forall_b(b - \text{число} \to \cos(2b) = 1 - 2(\sin b)^2)$.

15. Попытка явно разрешить соотношение относительно сложного подтерма. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, позволяющее проварьировать выражение со сложным термом t без изменения оценки сложности. При помощи задачи на описание тождество разрешается относительно t. Если ответ имеет вид дизъюнкции, то выбирается произвольный дизъюнктивный член, конъюнктивным членом которого служит равенство $t = T$. Это равенство становится консеквентом новой теоремы, а к антецедентам добавляются условия, отделяющие указанный дизъюнктивный член от других. Результат упрощается. (Прием варьир - 6).

Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \ \& \ \sin a \leq 0 \to \sin a = -\sqrt{1 - (\cos a)^2})$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to (\sin a)^2 = 1 - (\cos a)^2)$

Разрешение одной части эквивалентности относительно некоторых переменных и переход к импликации

1. Попытка разрешения уравнений в заменяющей части относительно координат точки. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, выражающая утверждение A_1 через параметры координат. Имеется единственный антецедент вида "коорд$(B, K) = (a_1, \ldots, a_n)$", где $a_1, \ldots, a_n$ - попарно различные переменные. Возможно, имеются также антецеденты, выражающие координаты множеств объектов. Утверждение A_2 имеет не менее n конъюнктивных членов - уравнений с неизвестными $a_1, \ldots, a_n$. Эти уравнения разрешаются относительно $a_1, \ldots, a_n$, и получаются равенства $a_1 = t_1, \ldots, a_n = t_n$. Антецедент "коорд$(B, K) = (a_1, \ldots, a_n)$" исключается, в антецеденты переносятся A_1 и дополнительные посылки, возможно, введенные при решении задачи на описание. Консеквентом становится равенство "коорд$(B, K) = (t_1, \ldots, t_n)$". Результат упрощается. (Прием числопред - 17).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdefgkEK}(\neg(g = 0) \ \& \ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(f + ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \text{центр}(k, E) \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \ \& \ \text{линвторпорядка}(E) \ \& \ \text{невырожд}(E) \ \& \ g = 4ac - b^2 \to \text{коорд}(k, K) = ((be - 2cd)/g, (bd - 2ae)/g))$

из теоремы

$\forall_{abcdefghkEK}(\text{коорд}(k, K) = (g, h) \ \& \ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(f + ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \ \& \ \text{линвторпорядка}(E) \ \& \ \text{невырожд}(E) \to \text{центр}(k, E) \leftrightarrow d + 2ag + bh = 0 \ \& \ e + 2ch + bg = 0)$

Разрешение отношения в консеквенте относительно некоторого подвыражения

1. Попытка использовать встречное неравенство для исключения числового атома. Теорема - неравенство для невырожденных числовых атомов. Оно разрешается относительно одного из них - атома A_1, причем противоположная часть результата содержит другой невырожденный числовой атом A_2. Определяется дополнительная теорема - неравенство для невырожденных числовых атомов. Один из атомов ее консеквента унифицируется с A_1. Тогда другой атом переходит в A_2. После разрешения дополнительной теоремы относительно A_1 получается неравенство противоположного направления, чем то, которое давала исходная теорема. Далее используется транзитивность для неравенств, исключающая A_1, и результат разрешается относительно A_2.

   (Прием числоценка - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(B = C)\ \&\ \neg(A \in \text{прямая}(BC))\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&$
   $C - \text{точка}\ \&\ l(AB) \leq l(BC) \rightarrow \angle(ACB) < \pi/2)$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&$
   $\neg(A = C)\ \&\ l(AB) \leq l(BC) \rightarrow \angle(ACB) \leq \angle(BAC))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(C \in \text{прямая}(ab))\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка} \rightarrow$
   $0 < -\angle(acb) - \angle(bac) + \pi)$

2. Попытка использовать тождество для исключения числового атома. Аналогично предыдущему, но дополнительная теорема - тождество. (Прием числоценка - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ l(AB) < l(BC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
   $B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC) \rightarrow \angle(ACB) < \pi/4)$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&$
   $\neg(A = C)\ \&\ l(AB) < l(BC) \rightarrow \angle(ACB) < \angle(BAC))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = C)\ \&$
   $\neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow \angle(ACB) + \angle(ABC) = \pi/2)$

Зануление фрагмента заменяемой части эквивалентности либо тождества

1. Обращение в единицу операнда двуместной операции над параметрами координат. Теорема - эквивалентность, в одной части которой расположено неравенство для параметров координат. При помощи задачи на описание определяется значение некоторой переменной, зануляющее слагаемое одной из частей неравенства. (Прием вспомописание - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCcfghjk}(\neg(A=B)\ \&=\neg(A=C)\ \&\ g=(A,f,h)\ \&$ коорд$(B,g)=(c,0)\ \&$ коорд$(C,g)=(j,k)\ \&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&$ прямкоорд$(g)\rightarrow 0<cj\leftrightarrow 0<-\pi/2-\angle(BAC))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCcdfghjk}(\neg(A=B)\ \&=\neg(A=C)\ \&\ g=(A,f,h)\ \&$ коорд$(B,g)=(c,d)\ \&$ коорд$(C,g)=(j,k)\ \&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&$ прямкоорд$(g)\rightarrow 0<cj+dk\leftrightarrow 0<-\pi/2-\angle(BAC))$

   Новая теорема позволит создать прием для исключения неравенства $0<cj$, в то время как прием, основанный на исходной теореме, на это не способен.

   Обращение в единицу операнда двуместной операции над параметрами координат. Аналогично предыдущему, но в одной из частей эквивалентности расположено соотношение (равенство) для параметров координат. При помощи задачи на описание определяется значение некоторой переменной, зануляющее слагаемое одной из частей этого равенства. (Прием вспомпараметр - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{Bdefgp}(g=(d,e,f)\ \&$ коорд$(B,g)=(p,0)\ \&\ B-$точка $\&$ прямкоорд$(g)\rightarrow l(dB)^2=p^2)$

   из теоремы

   $\forall_{Bcdefgp}(g=(d,e,f)\ \&$ коорд$(B,g)=(p,q)\ \&\ c-$число $\&\ B-$точка $\&$ прямкоорд$(g)\rightarrow cl(dB)^2=cp^2+cq^2)$

Разрешение заменяющей части эквивалентности относительно параметра

1. Разрешение заменяемой части относительно самого сложного подвыражения и заменяющей - относительно параметра этого подвыражения. Теорема - эквивалентность $A_1\leftrightarrow A_2$, декомпозирующая утверждение A_1 с несколькими подвыражениями максимальной сложности в дизъюнктивно-конъюнктивную конструкцию A_2 утверждений той же сложности, каждое из которых имеет лишь одно подвыражение максимальной сложности. Выбирается некоторое подвыражение t максимальной сложности в A_1, и в нем - переменная x, входящая в него однократно. Утверждение A_2 разрешается при помощи задачи на описание относительно x. Проверяется, что оценка сложности ответа B меньше оценки сложности A_2. Затем A_1 разрешается при помощи задачи на описание относительно t. Получается некоторое утверждение C. Консеквентом новой теоремы

становится эквивалентность $C \leftrightarrow B$. Результат упрощается. (Прием разделены - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cd}(c - \text{число } \& \ d - \text{число} \rightarrow -\sin c = \sin d \leftrightarrow \exists_n(d = c + 2\pi n + \pi \ \& \ n - \text{целое}) \ \vee \exists_n(d = 2\pi n - c \ \& \ n - \text{целое}))$

из теоремы

$\forall_{cd}(c - \text{число } \& \ d - \text{число} \rightarrow \sin c + \sin d = 0 \leftrightarrow \sin((c+d)/2) = 0 \vee \cos((d-c)/2) = 0)$

2. Попытка разрешения заменяющей части относительно переменной - операнда самой сложной операции бесповторной заменяемой части. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, уменьшающая оценку сложности. Максимально сложный подтерм бесповторной левой части единственный - некоторое выражение t, имеющее своим корневым операндом переменную x. Глубина переменной x в A_1 и в максимальных элементарных подутверждениях утверждения A_2 больше 1. Решается задача на описание, условия которой - A_2 и все содержащие x антецеденты, посылки - не содержащие x антецеденты. Неизвестной является x. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность утверждения A_1 ответу данной задачи. Результат упрощается. (Прием уменьшение - 14).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \rightarrow b < |a| \leftrightarrow a < -b \ \vee \ b < a)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \rightarrow b < |a| \leftrightarrow b < a \ \vee \ b < -a)$

3. Сведение разрешения относительно переменной заменяемого утверждения к разрешению относительно этой переменной заменяющего. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, уменьшающая оценку сложности. Утверждение A_1 элементарно и бесповторно, имеет единственный максимально сложный подтерм, причем этот подтерм - корневой операнд A_1. Выбирается переменная x, глубина которой в A_1 и в максимальных элементарных подутверждениях утверждения A_2 больше 1. Решается задача на описание, условия которой - A_2 и все содержащие x антецеденты, посылки - не содержащие x антецеденты. Неизвестной является x. Ответ упрощается еще одной задачей на описание, посылками которой являются уже все антецеденты исходной теоремы, причем задача эта решается в режиме редактирования ответа. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность утверждения A_1 найденному ответу. Результат упрощается. (Прием уменьшение - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cd}(\neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число } \& \ d - \text{число} \rightarrow \log_d c = -1 \leftrightarrow \neg(c = 1) \ \& \ d = 1/c)$

   из теоремы

   $\forall_{cd}(\neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число } \& \ d - \text{число} \rightarrow \log_d c = -1 \leftrightarrow c = 1/d)$

Использование дополнительной теоремы для создания системы из двух уравнений с двумя неизвестными

1. Попытка получения эквивалентности для преобразования двух уравнений, имеющих каждое два сложных подтерма, в два уравнения, имеющих каждое один сложный подтерм. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, у которого A_1 имеет единственное максимально сложное подвыражение - само A_1, причем A_2 имеет несколько максимально сложных подвыражений той же сложности S. Внутри A_2 выделяются ровно два бесповторных подвыражения t_1, t_2, таких, что их надтерм уже не бесповторен. Корневые одноместные операции у t_1, t_2, если они есть, отбрасываются. Каждое из выражений t_1, t_2 содержит все переменные A_2, и каждая переменная A_2 расположена внутри t_1 либо t_2. Каждое из них имеет два подтерма сложности S. В текущем списке вывода находится другое тождество $B_1 = B_2$ аналогичного типа; внутри B_2 выделяются подвыражения r_1, r_2, аналогичные t_1, t_2. После переобозначения переменных r_1, r_2 преобразуются в t_1, t_2, а сами выражения B_1, B_2 - в C_1, C_2. Для проверки того, что t_1, t_2 однозначно восстанавливаются по A_1, C_1 из уравнений $A_1 = A_2, C_1 = C_2$, решается задача на описание. Выбираются новые переменные a, b; находятся результат D_1, D_2 замены в A_2, C_2 подвыражений t_1, t_2 на a, b, и консеквентом новой теоремы становится эквивалентность "$(t_1 = a \ \& \ t_2 = b \leftrightarrow A_1 = D_1 \ \& \ C_1 = D_2)$". Антецеденты ее формируются из антецедентов исходных теорем и условия на a, b. (Прием группмножитель - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow c = \sin a \cos b \ \& \ d = \sin b \cos a \leftrightarrow \sin(a + b) = c + d \ \& \ \sin(a - b) = c - d)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \sin(b - c) = \sin b \cos c - \cos b \sin c)$

2. Использование двух тождеств группировки для получения тождества, варьирующего сложный подтерм. Начало программы приема такое же, как в предыдущем случае, однако после решения задачи на описание рассматривается конъюнктивный член ответа, имеющий вид $t_i = T_i$ и выражающий t_i через A_1, C_1. Он и становится консеквентом новой теоремы. (Прием группмножитель - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin a \cos b = (\sin(a + b) + \sin(a - b))/2)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \sin(b - c) = \sin b \cos c - \sin c \cos b)$

Решение задачи на описание для установления связи объектов текущей и дополнительной теорем

1. Попытка выражения числового атома через характеристику атомарного выражения. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее невырожденный числовой атом A_1 через параметры координат. По заголовку f атома A_1 находится тождество $P(B_1) = B_2$, определяющее характеристику P нечислового атомарного выражения B_1 через выражение B_2 с заголовком f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Унифицирующая подстановка S отождествляет A_2 и B_2. Далее предполагаем, что A_1, A_2, B_1, B_2 уже преобразованы этой подстановкой. Среди антецедентов исходной теоремы имеются равенства вида коорд$(C, K) = (c_1, \ldots, c_n)$. При помощи задачи на описание предпринимается попытка "выразить" "коорд(B_1, K)" через параметры c_i этих равенств. Получается соотношения "коорд$(B_1, K) = (d_1, \ldots, d_n)$". Выбираются новые переменные $p_1, \ldots, p_n$, и с помощью еще одной задачи на описание предпринимается попытка выразить A_2 через $p_1, \ldots, p_n$ при использовании дополнительных посылок $d_1 = p_1, \ldots, d_n = p_n$. Ответ становится консеквентом новой теоремы. Ее антецеденты получаются из антецедентов двух исходных теорем и равенства "коорд$(B_1, K) - (p_1, \ldots, p_n)$". Результат упрощается. (Прием значпарам - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdfgK}$(коорд(вектор$(cd), K) = (f, g)$ & $c-$точка & $d-$точка & прямкоорд$(K) \to$ $l(cd) = \sqrt{f^2 + g^2}$)

   из теоремы

   $\forall_{ABabpqK}$($A-$точка & $B-$точка & прямкоорд(K) & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(B, K) = (p, q) \to l(AB) = \sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2}$)

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{AB}$($A-$точка & $B-$точка $\to$ длина(вектор$(AB)) = l(AB)$)

Однозначное определение варьируемых переменных квантора существования в консеквенте после добавления новых антецедентов

1. Фиксация уравнения множества точек, если известны координаты некоторой его точки. Теорема - кванторная импликация с консеквентом вида "$\exists_a$(коорд$(A, K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_n}(B)$ & C)", дающим общий вид уравнения для координат множества объектов. Выбираются новые переменные $b, c_1, \ldots, c_n$, и составляется список S_1, объединяющий антецеденты теоремы и утверждения "$b \in A$", "коорд$(b, K) = (c_1, \ldots, c_n)$". Рассматривается также список S_2, полученный добавлением к S_1 конъюнктивных членов C и результатов замены переменных $x_1, \ldots, x_n$ на $c_1, \ldots, c_n$ в конъюнктивных членах утверждения B. Решается задача на описание, условиями которой служат содержащие a утверждения списка S_2, а посылками - остальные утверждения этого списка. Выделяется конъюнктивный член ответа, имеющий вид $a = t$. Проверяется, что результат подстановки t вместо a в C - следствие S_1. Находится результат B_1 подстановки t вместо a в B, и консеквентом новой теоремы становится равенство "коорд$(A, K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_n}(B_1)$". Антецеденты - утверждения S_1. Результат упрощается. (Прием координаты - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acdefgjkqrstwz}(\neg(j=k)\ \&\ \neg(w=z)\ \&\ t=(q,r,s)\ \&\ \text{коорд}(a,t)=(c,g)\ \&$
$\text{коорд}(\text{прямая}(jk),t)=\text{set}_{uv}(f+du+ev=0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число})\ \&$
$a\in\text{прямая}(wz)\ \&\ w\in\text{плоскость}(qrs)\ \&\ z\in\text{плоскость}(qrs)\ \&\ d-\text{число}\ \&$
$e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ j-\text{точка}\ \&\ k-\text{точка}\ \&\ w-\text{точка}\ \&\ z-\text{точка}\ \&$
$\text{прямая}(jk)\parallel\text{прямая}(wz)\ \&\ \text{систкоорд}(t)\rightarrow\text{коорд}(\text{прямая}(wz),t)=$
$\text{set}_{np}(dn+ep-cd-eg=0\ \&\ n-\text{число}\ \&\ p-\text{число}))$

из теоремы

$\forall_{defjkqrstwz}(\neg(j=k)\ \&\ \neg(w=z)\ \&\ t=(q,r,s)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(jk),t)=$
$\text{set}_{uv}(f+du+ev=0\ \&\ u-\text{число}\ \&\ v-\text{число})\ \&\ w\in\text{плоскость}(qrs)\ \&$
$z\in\text{плоскость}(qrs)\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ f-\text{число}\ \&\ j-\text{точка}\ \&$
$k-\text{точка}\ \&\ w-\text{точка}\ \&\ z-\text{точка}\ \&\ \text{прямая}(jk)\parallel\text{прямая}(wz)\ \&$
$\text{систкоорд}(t)\rightarrow\exists_b(\text{коорд}(\text{прямая}(wz),t)=\text{set}_{np}(b+dn+ep=0\ \&\ n-\text{число}\ \&$
$p-\text{число})\ \&\ b-\text{число}))$

2. Сведение многопараметрического описания уравнения множества к однопараметрическому либо фиксация уравнения, если известны коорината некоторой точки множества. Аналогично предыдущему, но квантор существования берется не по одной, а по нескольким переменным $a_1,\ldots,a_k$. В результате ответ задачи на описание имеет вид квантора существования по единственной переменной y, навешенного на конъюнкцию равенств $a_i=t_i$. Эти равенства используются для подстановок $t_1,\ldots,t_k$ вместо $a_1,\ldots,a_k$, как и в предыдущем приеме, однако затем на консеквент навешивается квантор существования по y. Результат упрощается, причем в процессе упрощения квантор существования может оказаться устранен. (Прием координаты - 19).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdpqrsCDEFGH}(\neg(C=E)\ \&\ \neg(F=G)\ \&\ \neg(D\in\text{прямая}(CE))\ \&\ \text{коорд}(a,H)=$
   $(b,c,d)\ \&\ \text{коорд}(\text{плоскость}(CDE),H)=\text{set}_{uvw}(s+pu+qv+rw=0\ \&$
   $u-\text{число}\ \&\ v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\ \&\ a\in\text{прямая}(FG)\ \&\ p-\text{число}\ \&$
   $q-\text{число}\ \&\ r-\text{число}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\ \&$
   $G-\text{точка}\ \&\ \text{прямая}(FG)\perp\text{плоскость}(CDE)\ \&\ \text{прямкоорд}(H)\rightarrow$
   $\text{коорд}(\text{прямая}(FG),H)=\text{set}_{mnt}(m-\text{число}\ \&\ n-\text{число}\ \&\ t-\text{число}\ \&$
   $\text{пропорцнаборы}((p,q,r),(m-b,n-c,t-d))))$

   из теоремы

   $\forall_{pqrsCDEFGH}(\neg(C=E)\ \&\ \neg(F=G)\ \&\ \neg(D\in\text{прямая}(CE))\ \&$
   $\text{коорд}(\text{плоскость}(CDE),H)=\text{set}_{uvw}(s+pu+qv+rw=0\ \&\ u-\text{число}\ \&$
   $v-\text{число}\ \&\ w-\text{число})\ \&\ \ p-\text{число}\ \&\ q-\text{число}\ \&\ r-\text{число}\ \&\ C-\text{точка}\ \&$
   $D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\ \&\ G-\text{точка}\ \&\ \text{прямая}(FG)\perp\text{плоскость}(CDE)$
   $\&\ \text{прямкоорд}(H)\ \&\ \text{Трехмерн}(H)\rightarrow\exists_{ghl}(\text{коорд}(\text{прямая}(FG),H)=$
   $\text{set}_{mnt}(m-\text{число}\ \&\ n-\text{число}\ \&\ t-\text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((p,q,r),(l+m,$
   $g+n,h+t)))\ \&\ g-\text{число}\ \&\ h-\text{число}\ \&\ l-\text{число}))$

Переход от параметрического задания класса к непосредственному

1. Попытка перейти от параметрического описания класса к непосредственному. Теорема - кванторная импликация с консеквентом вида $\exists_{a_1\ldots a_k}(\text{коорд}(A,K) = \text{set}_{x_1\ldots x_n}(\exists_{y_1\ldots y_m}(B))\ \&\ C)$. Решается задача на описание, условиями которой служат конъюнктивные члены утверждения B, а посылками - антецеденты теоремы и C. Неизвестные - $y_1,\ldots,y_m$, причем все они несущественные. Ответ не содержит $y_1,\ldots,y_m$. Он преобразуется к виду д.н.ф. Каждый дизъюнктивный член D представляется в виде конъюнкции $D_1\ \&\ D_2$, где D_1 содержит переменные $x_1,\ldots,x_n$, а D_2 не содержит. Выражение "$\text{set}_{x_1\ldots x_n}(D_1)$" упрощается в предположении истинности D_2. Получается выражение D_3, сопровождаемое указанием D_2 на контекст, в котором оно равно классу из исходного параметрического описания. По мере возможности, пары (D_2, D_3) склеиваются. Условия на их контексты несовместны. По каждой паре создается новая теорема с консеквентом "$\text{set}_{x_1\ldots x_n}(\exists_{y_1\ldots y_m}(B)) = D_3$", к антецедентам которой добавляется D_2. Антецеденты результатов упрощаются. (Прием координаты - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abce}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ \neg(c^2 + e^2 = 0) \rightarrow \text{set}_{xy}(be + cx - ac - ey = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + et\ \&\ y = b + ct\ \&\ t - \text{число})))$

   из теоремы

   $\forall_{ABK}(\neg(A = B)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \exists_{abce}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + et\ \&\ y = b + ct\ \&\ t - \text{число}))\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число}))$

2. Попытка перехода от параметрического описания класса к обычному. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель. A_1 имеет вид "$P(\text{set}_{x_1\ldots x_n}(\exists_{y_1\ldots y_m}(B)))$". Решается на описание с условием B, посылками которой служат антецеденты теоремы. Неизвестные - переменные $y_1,\ldots,y_m$, причем все они несущественные. Ответ C не содержит переменных $y_1,\ldots,y_m$. Решается еще одна задача на описание, с условием C и прежними посылками. Неизвестные - переменные $x_1,\ldots,x_n$. Явное описание получать не требуется; разрешается вводить дополнительные посылки, если они естественным образом позволяют упростить ответ. В консеквенте исходной теоремы выражение $\exists_{y_1\ldots y_m}(B)$ заменяется на ответ задачи. Если вводились дополнительные посылки, они добавляются к антецедентам. Результат упрощается. (Прием описатель - 47).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{целое} \rightarrow \text{card}(\text{set}_b(a + 1 \leq b\ \&\ b - \text{целое})) = \text{счетное})$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \text{card}(\text{set}_b(\exists_c(b = a + c\ \&\ c - \text{натуральное}))) = \text{счетное})$

3. Попытка перейти от параметрического описания класса к явному описанию. Теорема - равенство вида $A = \text{set}_x(\exists_{y_1\ldots y_n}(B))$, определяющее множество A посредством параметрического описания. Решается задача на описание с условием

B, посылками которой служат антецеденты теоремы. Неизвестные - $y_1, \ldots, y_n$, единственный известный параметр - z. Ответ имеет вид $y_1 = t_1$ & $\ldots$ & $y_n = t_n$ & C. Определяется результат B_1 подстановки в B выражений $t_1, \ldots, t_n$ вместо переменных $y_1, \ldots, y_n$, и консеквент теоремы заменяется на "$A = \mathrm{set}_z(B_1$ & $C)$". Результат упрощается. (Прием определение - 160).

Пример: вывод теоремы

$\forall_A(A - \mathrm{set}$ & $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to$ комплформа$(A) = \mathrm{set}_z(z -$ комплексное & $(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)) \in A))$

из теоремы

$\forall_A(A - \mathrm{set}$ & $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to$ комплформа$(A) = \mathrm{set}_z(\exists_{xy}((x, y) \in A$ & $z = x + iy)))$

Попытка варьирования описателя

1. Попытка подбора параметров, при которых подмножество целочисленного луча превращается в подмножество натуральных чисел. Теорема - тождество "set_x(целое(x) & $t \leq x$ & $A) = B$, исключающее описатель "класс". Список $y_1, \ldots, y_m$ параметров выражения t, не входящих в A, непуст. Решается задача на описание с условием "set_x(целое(x) & $t \leq x$ & $A) = \mathrm{set}_x$(натуральное(x) & $A)$". К условиям относятся также все антецеденты, содержащие переменные списка $y_1, \ldots, y_m$, к посылкам - прочие антецеденты. Неизвестные суть $y_1, \ldots, y_m$. После того, как получен ответ, он преобразуется к виду д.н.ф., и выбирается тот дизъюнктивный член C, в котором имеются равенства, задающие значения всех неизвестных $y_1, \ldots, y_m$. Он добавляется к антецедентам, а левая часть консеквента заменяется на "set_x(натуральное(x) & $A)$". Результат упрощается. (Прием описатель - 53).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(b \in \{0, \ldots, a-1\}$ & $a -$ натуральное $\to \mathrm{card}(\mathrm{set}_c(c(\mathrm{mod}\ a) = b$ & $c -$ натуральное$)) =$ счетное$)$

   из теоремы

   $\forall_{abd}(b \in \{0, \ldots, a-1\}$ & $a -$ натуральное & $a|(d - b)$ & $d -$ целое $\to$ $\mathrm{card}(\mathrm{set}_c(c(\mathrm{mod}\ a) = b$ & $c -$ целое & $d \leq c)) =$ счетное$)$

2. Попытка разрешения описания класса относительно варьируемой переменной. Теорема - тождество вида "$\mathrm{set}_x(B_1$ & $\ldots$ & $B_n)$", причем все B_i элементарны. Однако, их конъюнкция не является явно разрешенной относительно x. Решается задача на описание с условиями $B_1, \ldots, B_n$, посылками которой служат антецеденты. Единственная неизвестная - x. При необходимости допускается ввод дополнительных посылок. После того, как получен ответ, он замещает исходную конъюнкцию B_1 & $\ldots$ & B_n. Если были дополнительные посылки, они присоединяются к антецедентам. Результат упрощается. (Прием описатель - 54).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{bc}(b-$ число & $c-$ число $\to \mathrm{set}_x(x < b$ & $x-$ целое & $c \le x) = \{-[-c], \ldots, -1 - [-b]\})$

из теоремы

$\forall_{bc}(b-$ число & $c-$ число $\to \mathrm{set}_x(0 < b - x$ & $x-$ целое & $0 \le x - c) = \{-[-c], \ldots, -1 - [-b]\})$

3. Попытка вывода равенства, варьирующего класс при вычислении его характеристики. Теорема - тождество вида $F(A) = f(x)$, где выражение A имеет заголовок "класс", а x - переменная, значением которой служит множество. Проверяется, что внутри A переменная x имеет единственное вхождение - вида "$t \in x$". Список отличных от "$x -$ set" антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных антецедентов. Решается задача на описание с условиями S_1 и посылками S_2. Она решается с целями "редакция", "развертка". Проверяется, что каждый конъюнктивный член ответа имеет вид "$\forall_y(y \in x \to B)$", причем B не содержит x. Переменные y переобозначаются так, чтобы они были одинаковы. Выбирается новая переменная P и формируется конъюнкция K всех утверждений B и утверждения $P(y)$. Выражение "$\mathrm{set}_y(K)$" упрощается и превращается в некоторое выражение "$\mathrm{set}_y(Q)$". Находится результат R_1 подстановки в Q выражения t вместо y в Q, и далее - результат R_2 замены подвыражения "$t \in x$" в левой части исходного тождества на R_1. После упрощения R_2 возникает выражение R_3. Консеквентом новой теоремы становится равенство $f(\mathrm{set}_y(Q)) = R_3$. Антецеденты суть утверждения S_2. Результат упрощается. (Прием описатель - 58).

Пример: вывод теоремы

$\forall_d(\mathrm{card}(\mathrm{set}_b(b - \mathrm{set}$ & $b \subseteq \mathbb{R}$ & $d(b)$ & конечное$(b))) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_a(d(\mathrm{Val}(a))$ & Возркортеж$(a))))$

из теоремы

$\forall_A(A - \mathrm{set}$ & $A \subseteq$ подмножества$(\mathbb{R})$ & конечные$(A) \to \mathrm{card}(A) = \mathrm{card}(\mathrm{set}_a(\mathrm{Val}(a) \in A$ & Возркортеж$(a))))$

4. Попытка исключить описатель "класс" в заменяющей части путем явного разрешения относительно связывающей приставки. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, у которой левая часть имеет единственный описатель "$\mathrm{set}_{x_1 \ldots x_k}(B)$" и не имеет описателя "отображение". Она является определением утверждения A_2. Утверждение B разрешается задачей на описание относительно переменных $x_1, \ldots, x_k$. Результат замены в A_1 подутверждения B на ответ данной задачи упрощается и превращается в утверждение C, не содержащее описателя "класс". Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $A_2 \leftrightarrow C$. Результат упрощается. (Прием связпарам - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(\neg(a = 0)$ & $\neg(b = 0)$ & $a -$ целое & $b -$ целое $\to$ нок$(a, b) = |ab|/$нод$(a, b))$

из теоремы

$\forall_{abc}(a -$ целое & $b -$ целое & $\neg(a = 0)$ & $\neg(b = 0) \to c =$ нок$(a, b) \leftrightarrow$ наименьший$(c, \mathrm{set}_n(n -$ натуральное & $a \mid n$ & $b \mid n)))$

Варьирование квантора существования

1. Варьирование связанной переменной под квантором существования. Теорема имеет антецедент вида "$\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1 \to \exists_y(A_2))$". Внутри A_2 выбирается вхождение неоднобуквенного подвыражения t, имеющего единственное вхождение переменной y и хотя бы одно вхождение переменной списка $x_1, \ldots, x_k$. Выбирается новая переменная z и решается задача на описание с условиями $A_2, t = z$. Посылками служат прочие антецеденты теоремы и утверждение A_1. Единственная неизвестная - y. Ответ имеет вид $y = T$ & C. Для получения новой теоремы подутверждение $\exists_y(A_2)$ заменяется на $\exists_z(C)$. Результат упрощается. (Прием существант - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{nA}(\forall_p(\text{перестановка}(p, \{1, \ldots, n\}) \to \exists_a(A(p(a), a) = 0 \ \& \ a \in \{1, \ldots, n\})) \ \& \ \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \to \det(A) = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{nA}(\forall_p(\text{перестановка}(p, \{1, \ldots, n\}) \to \exists_i(A(i, p(i)) = 0 \ \& \ i - \text{натуральное} \ \& \ i \leq n)) \ \& \ \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \to \det(A) = 0)$

Попытка разрешения подкванторного утверждения относительно переменных связывающей приставки

1. Попытка переформулировать условие существования бесквантором образом. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(A_2)$, являющаяся определением утверждения A_1. Среди конъюнктивных членов A_2 нет дизъюнкций, а число кванторов общности не более 2. Решается задача на описание с условием A_2, посылками которой служат антецеденты теоремы. Неизвестные - переменные $x_1, \ldots, x_k$, причем все они несущественные. Ответ B не содержит этих переменных. Если он имеет связанные переменные, то антецеденты новой теоремы получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы утверждения A_1, причем консеквентом становится произвольный конъюнктивный член B, являющиеся элементарным утверждение либо простой импликацией. Результаты упрощаются. Если же утверждение B не имеет связанных переменных, то оно преобразуется к виду д.н.ф. и затем обрабатывается нормализатором "нормили". Консеквентом становится эквивалентность полученного утверждения утверждению A_1. Антецеденты - те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием развертка - 94).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdef}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \to \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d, e, f)) \leftrightarrow ae - bd = 0 \ \& \ af - cd = 0 \ \& \ bf - ce = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{abcdef}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \to \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d, e, f)) \leftrightarrow \exists_{uv}(u - \text{число} \ \& \ v - \text{число} \ \& \ \neg(u^2 + v^2 = 0) \ \& \ au + dv = 0 \ \& \ bu + ev = 0 \ \& \ cu + fv = 0))$

2. Попытка получения явного параметрического описания для параметров одного из операндов определяемого двуместного отношения. Теорема - эквивалентность $P(t_1,t_2) \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(A)$, определяющая двуместное отношение $P(t_1,t_2)$. Среди конъюнктивных членов утверждения A встречается равенство. Переменные выражений t_1, t_2 различны. Выбирается некоторое $t_i, i = 1,2$, и рассматривается список $y_1, \ldots, y_n$ параметров этого t_i. Утверждение A разрешается при помощи задачи на описание относительно неизвестных $y_1, \ldots, y_n$. Посылками служат антецеденты теоремы. Ответ преобразуется к виду д.н.ф. Выбирается такой ее дизъюнктивный член D, среди конъюнктивных членов которого имеются равенства для каждого y_j. Составляется конъюнкция отрицаний сопровождающих (т.е. не содержащих переменных $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_n$) конъюнктивных членов прочих дизъюнктивных членов. Она упрощается и превращается в отличное от константы "ложь" утверждение K. При помощи задачи на преобразование утверждение "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(D)$" упрощается и превращается в некоторое утверждение E. Консеквентом новой теоремы становится $P(t_1,t_2) \leftrightarrow E$, антецедентами - антецеденты исходной теоремы и утверждение E. Результат упрощается. (Прием развертка - 74).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{mn}(\neg(n=0)\ \&\ m - \text{целое}\ \&\ m - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(\neg(k=0)\ \&\ m = n/k\ \&\ k - \text{целое}))$

   из теоремы

   $\forall_{mn}(m - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(k - \text{целое}\ \&\ n = mk))$

Операнды X подтерма T заменяемой части однозначно определяются по его значению. Это используется для получения эквивалентности, в которой подтерм T заменяемой части обозначен вспомогательной переменной, причем одна из частей эквивалентности - квантор общности по некоторому параметру списка X

1. Попытка извлечь эквивалентность кванторной свертки при усмотрении однозначно определимого операнда подтерма заменяемой части. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$ элементарного утверждения A_1 конъюнкции A_2 элементарных утверждений. A_2 представляется в виде $A_3\ \&\ A_4$, где A_3 - элементарное. Некоторый параметр a утверждения A_3 не встречается в A_4 и имеет единственное вхождение в A_1. Это вхождение расположено внутри некоторого подвыражения t, имеющего общий с A_4 параметр b, причем внутри A_1 параметр b встречается однократно. Выбирается новая переменная c, и определяется результат B замены в A_1 подвыражения t на c. Параметры t в утверждении B не встречаются. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих b, и подсписок S_2 остальных утверждений. Решается задача на описание, условиями которой служат S_1 и утверждение $c = t$. Посылки - утверждения S_2. Единственная неизвестная - b. Ответ имеет конъюнктивный член $b = r$. Проверяется, что из антецедентов, не содержащих параметров X выражения t, и утверждения B вытекает существование таких значений X, при которых истинны все антецеденты, содержащие данные параметры, а также равенство $c = t$. Консеквент новой теоремы имеет вид $\forall_a(A_3 \rightarrow \neg(c = t)) \leftrightarrow \neg(b = r)$. Антецеденты - B и антецеденты исходной теоремы. (Прием и - 74).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_{abde}(a - \text{set } \&\ b - \text{set } \&\ e \in a \times b \to \forall_c(c \in a \to \neg(e = (c, d))) \leftrightarrow \neg(d = e(2)))$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{set } \&\ b - \text{set} \to (c, d) \in a \times b \leftrightarrow c \in a\ \&\ d \in b)$$

Попытка выразить характеристику операции через такие же характеристики операндов

1. Попытка определить характеристику объединения множеств по характеристикам исходных множеств. Теорема - определение вида $P(x_1 \dots x_n) \leftrightarrow A$, причем значения операндов $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ отношения P однозначно определяются, в случае истинности этого отношения, значениями прочих операндов. Некоторый операнд x_j, отличный от указанных, представляет собой переменную для множества. Рассматривается копия T_1 исходной теоремы, в которой переменные $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, x_j$ заменены на новые переменные $y_1, \dots, y_m, y$, а также ее копия T_2, в которой переменные $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, x_j$ заменены на новые переменные $z_1, \dots, z_m$ и на выражение "$x_j \cup y$". При помощи задачи на описание переменные $z_1, \dots, z_m$ выражаются через $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}, y_1, \dots, y_m$. При этом в посылках присутствуют антецеденты исходной теоремы и теоремы T_1, а также определяющие части этих теорем. Антецеденты теоремы T_2 и ее определяющая часть суть условия задачи. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность определяемой части теоремы T_2 ответу задачи на описание. Антецеденты новой теоремы - антецеденты исходной теоремы, теоремы T_1 и определяемые части этих теорем. Результат упрощается и снабжается единственной характеристикой, указывающей, что теорема позволяет реализовать определяемую часть теоремы T_2 путем реализации определяемых частей исходной теоремы и теоремы T_1. (Прием определение - 236).

   Пример: вывод теоремы

$$\forall_{abcdefgAB}(d - \text{set } \&\ A - \text{set } \&\ d \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ A \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&$$
$$f - \text{функция } \&\ \text{Max}(f, d, a, c)\ \&\ \text{Max}(f, A, B, b) \to \text{Max}(f, d \cup A, e, g) \leftrightarrow$$
$$e = (B \text{ при } 0 \le b - c, \text{ иначе } \emptyset) \cup (a \text{ при } 0 \le c - b, \text{ иначе } \emptyset)\ \&\ g = \max(b, c))$$

   из теоремы

$$\forall_{fbAB}(f - \text{функция } \&\ A - \text{set } \&\ A \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \text{Max}(f, A, B, b) \leftrightarrow$$
$$\text{наибольший}(b, \text{образ}(f, A))\ \&\ B = A \cap \text{слой}(f, b))$$

Вывод явного параметрического описания из простой импликации

1. Попытка использования обобщающей импликации для получения явного параметрического описания. Теорема - кванторная импликация без существенных антецедентов, консеквент которой - элементарное утверждение $P(A_1 \dots A_n)$. Все A_k, кроме, быть может, одного, суть попарно различные переменные. Находится теорема с консеквентом вида $P(B_1 \dots B_n)$ и антецедентом $P(C_1 \dots C_n)$, у которой некоторое B_i меет вид $f(C_i, y)$, а прочие B_j равны C_j. Здесь операция

f имеет единицу по y. Переменные исходной теоремы переобозначены и не входят в допллнительную. Определяется подстановка S, переводящая $P(C_1 \dots C_n)$ в $P(A_1 \dots A_n)$. Выбирается новая переменная x и формируется выражение D вида $P(A_1 \dots A_{i-1} x A_{i+1} \dots A_n)$. Проверяется, что оно содержит все параметры A_i. Составляется список Q антецедентов исходной теоремы и результатов применения S к отличным от $P(C_1 \dots C_n)$ антецедентам дополнительной теоремы. Определяется результат E применения S к B_i и находится непустой список $z_1, \dots, z_m$ параметров выражения E, не входящих в D. Список Q разбивается на подсписок Q_1 утверждений, содержащих $z_1, \dots, z_m$, и подсписок Q_2 остальных утверждений. Решается задача на описание, условия которой суть Q_1 и $x = E$. Посылки - $Q_2, T(x), D$, где T - тип значения E. Неизвестные - $z_1, \dots, z_m$, причем все они несущественные. В задаче требуется лишь получить пример значений неизвестных. Если получен ответ, отличный от отказа, создается новая теорема с консеквентом $D \leftrightarrow \exists_{z_1 \dots z_m}(Q_1 \ \& \ x = E)$. Антецеденты - $Q_2, T(x)$. Результат упрощается. (Прием пример - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ae}(e - \text{set} \to a \in e \leftrightarrow \exists_c(e = c \cup \{a\} \ \& \ c - \text{set}))$

из теоремы

$\forall_a(a \in \{a\})$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ a \in b \to a \in b \cup c)$

Явное разрешение условия, подсказанного теоремой

1. Попытка получить явное описание для условия под описателем "класс" в заменяющей части. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$. В A_2 выделяется единственное вхождение описателя "класс", имеющего вид "$\text{set}_{x_1 \dots x_n}(B_1 \ \& \ \dots \ \& \ B_m)$". Описатель "отображение" в A_2 отсутствует. Решается задача на описание с условиями $B_1, \dots, B_m$, посылками которой служат антецеденты. Неизвестные - $x_1, \dots, x_n$. Ответ R не имеет связанных переменных. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность "$B_1 \ \& \ \dots \ \& \ B_m \leftrightarrow R$", антецеденты - те же, что у исходной теоремы. Она снабжается единственной характеристикой, указывающей, что заменяющая часть группирует несколько разрешенных относительно неизвестной утверждений в одно такое утверждение. Теорема упрощается. (Прием связпарам - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abn}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \to$
   $a \mid n \ \& \ b \mid n \leftrightarrow (ab/\text{нод}(a, b)) \mid n)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ \neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \to c = \text{нок}(a, b) \leftrightarrow$
   $\text{наименьший}(c, \text{set}_n(n - \text{натуральное} \ \& \ a \mid n \ \& \ b \mid n)))$

Использование дополнительного построения

1. Попытка варьирования теоремы путем дополнительного построения, позволяющего исключить старые числовые атомы. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее невырожденный числовой атом A_1 через другие невырожденные числовые атомы. Решается задача на исследование, посылками которой служат антецеденты теоремы и терм "консеквент(A_2)". Она имеет цель "допкадр" и позволяет определить список B_1 условий на вспомогательные переменные, при которых можно исключить из консеквента некоторый числовой атом C, выразив его с помощью этих переменных. При этом находится также некоторое следствие B_2 утверждений B_1, которое может оказаться полезным для указанного исключения. Составляется список S - объединение списка антецедентов, списков B_1, B_2 и тождества $A_1 = A_2$. Проверяется, что все числовые атомы в S невырожденные. Определяется список $D_1, \ldots, D_n$ отличных от C таких атомов. Выбираются новые переменные $d_1, \ldots, d_n$. Выбирается D_i, либо имеющее в S более одного вхождения, либо входящее в B_2. Решается задача на описание с условием $D_i = d_i$. Посылками служат S и равенства $D_1 = d_1, \ldots, D_{i-1} = d_{i-1}, D_{i+1} = d_{i+1}, \ldots, D_n = d_n$. Неизвестная - d_i, причем ее нужно выразить через $d_1, \ldots, d_{i-1}, d_{i+1}, \ldots, d_n$. Ответ имеет вид $d_i = t$. Консеквентом новой теоремы становится результат подстановки в этот ответ атомов D_j вместо d_j, антецедентами - антецеденты исходной теоремы и B_1. (Прием числовойатом - 54).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aABC}(\neg(a = A)\ \&\ \neg(a = B)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ B \in \text{прямая}(aA)\ \&$
   $a - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(aA) \perp \text{прямая}(BC) \rightarrow$
   $4(-l(AC)^2 + l(BC)^2)l(aA)^2 + (-l(aA)^2 - l(AC)^2 + l(aC)^2)^2 = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
   $\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC) \rightarrow l(AC)^2 = l(AB)^2 + l(BC)^2)$

   Здесь выводится соотношение для высоты треугольника и длин его сторон из теоремы Пифагора.

6.2 Получение явного описания для заданного условия

Усмотрение стандартных свойств определяемого множества

1. Вывод условия включения множеств. Теорема - определение "$x \in t \leftrightarrow A$" условия принадлежности множеству t. Здесь x - переменная, не входящая в t, причем все переменные теоремы встречаются в левой части эквивалентности. Рассматриваются параметры $x_1, \ldots, x_n$ выражения t. Выбираются новые переменные $y_1, \ldots, y_n$, и рассматривается результат переобозначения в исходной теореме переменных $x_1, \ldots, x_n$ на $y_1, \ldots, y_n$. Консеквент полученной теоремы имеет вид "$x \in t_1 \leftrightarrow A_1$. В объединенном контексте двух теорем решается задача на описание, условия которой - утверждение "$\forall_x(A \rightarrow A_1)$" и все антецеденты,

содержащие переменные $x_1, \ldots, x_n$. Неизвестные - $x_1, \ldots, x_n$. Если получается ответ R, проверяется, что он не чрезмерно длинный. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность "$t \subseteq t_1 \leftrightarrow R$", антецеденты - объединение антецедентов двух теорем. Результат упрощается. (Прием определение - 150).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcd}(a - \text{set } \& \ b - \text{set } \& \ c - \text{set } \& \ d - \text{set} \rightarrow a \times b \subseteq c \times d \leftrightarrow a \subseteq c \ \&$
$b \subseteq d \ \vee \ a = \emptyset \ \vee \ b = \emptyset)$

из теоремы

$\forall_{abf}(a - \text{set } \& \ b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово})$

2. Вывод условия непересечения множеств. Аналогично предыдущему, но условием задачи на описание служит утверждение "$\forall_x(A \rightarrow \neg(A_1))$", а консеквент новой теоремы имеет вид "$\text{непересек}(t, t_1) \leftrightarrow R$". (Прием определение - 151).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(a{-}\text{set } \& \ b{-}\text{set } \& \ c{-}\text{set } \& \ d{-}\text{set} \rightarrow \text{непересек}(a{\times}b, c{\times}d) \leftrightarrow \text{непересек}(a, c) \vee$
   $\text{непересек}(b, d))$

   из теоремы

   $\forall_{abf}(a - \text{set } \& \ b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово})$

3. Вывод условия равенства множеств. Аналогично предыдущему, но условием задачи на описание служит утверждение "$\forall_x(A \leftrightarrow A_1)$", а консеквент новой теоремы имеет вид "$t = t_1 \leftrightarrow R$". (Прием определение - 152).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(a - \text{set } \& \ b - \text{set } \& \ c - \text{set } \& \ d - \text{set} \rightarrow a \times b = c \times d \leftrightarrow$
   $(a = \emptyset \ \vee \ b = \emptyset) \ \& \ (c = \emptyset \ \vee \ d = \emptyset) \ \vee \ a = c \ \& \ b = d)$

   из теоремы

   $\forall_{abf}(a - \text{set } \& \ b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово})$

4. Попытка найти пересечение определяемого множества с другим определяемым множеством. Теорема - определение "$x \in t \leftrightarrow A$" условия принадлежности множеству t. Здесь x - переменная, не входящая в t, причем все переменные теоремы встречаются в левой части эквивалентности. Все конъюнктивные члены A суть элементарные утверждения. В том разделе, к которому относится заголовок t, находится другое (либо то же самое) определение аналогичного вида: "$y \in t_1 \leftrightarrow A_1$". Переменные переобозначены и не встречаются в исходной теореме. В дополнительной теореме переменная y заменяется на x, и конъюнкция $A \ \& \ A_1$ разрешается задачей на описание относительно x. Ответ преобразуется к виду д.н.ф. Выбирается некоторый дизъюнктивный член D. Определяется не содержащее x условие R при котором прочие дизъюнктивные члены можно проигнорировать. При этом утверждение D может несколько ослабляться. Выражение "$\text{set}_x(D)$" упрощается и становится не содержащим описателя

"класс" выражением D_1. Консеквентом новой теоремы становится равенство "$t \cap t_1 = D_1$", к антецедентам добавляется R. Результат упрощается. (Прием определение - 192).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcef}(b - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ e - \text{число } \& \ f - \text{число } \& \ 0 \leq b - e \ \& \ 0 \leq c - f \rightarrow (b, c] \cap (e, f) = (b, f))$

из теоремы

$\forall_{abc}(b - \text{число } \& \ c - \text{число} \rightarrow a \in (b, c] \leftrightarrow a - \text{число } \& \ 0 < a - b \ \& \ 0 \leq c - a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(b - \text{число } \& \ c - \text{число} \rightarrow a \in (b, c) \leftrightarrow a - \text{число } \& \ 0 < a - b \ \& \ 0 < c - a)$

5. Попытка найти разность определяемого множества с другим определяемым множеством. Аналогично предыдущему, но задачей на описание разрешается конъюнкция $A \ \& \ \neg(A_1)$. Консеквентом новой теоремы становится равенство "$t \setminus t_1 = D_1$". В действительности сразу рассматриваются две разности - "$t \setminus t_1$" и "$t_1 \setminus t$". Во избежание повторных действий, вводятся ограничения на размещение в оглавлении базы теорем исходной и дополнительной теорем: вторая должна идти раньше первой. (Прием определение - 193).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bd}(0 < d - b \ \& \ b - \text{число } \& \ d - \text{число} \rightarrow [b, \infty) \setminus [d, \infty) = [b, d))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{число} \rightarrow a \in [b, \infty) \leftrightarrow a - \text{число } \& \ 0 \leq a - b)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{число} \rightarrow a \in [b, \infty) \leftrightarrow a - \text{число } \& \ 0 \leq a - b)$

6. Примерка определения принадлежности бесквантворно определяемому множеству на элементарные операции раздела. Теорема - эквивалентность вида "$x \in t \leftrightarrow A$", где A - конъюнкция элементарных утверждений, причем переменная x не входит в t и в антецеденты. Среди конъюнктивных членов A имеется утверждение $P(x)$, где P - указатель типа объекта. Среди понятий того раздела, к которому относится символ P, выбирается символ операции f, тип значения которой - P либо надтип типа P. По арности n операции f выбираются новые переменные $x_1, \ldots, x_n$. Проверяется, что из $P(x_1), \ldots, P(x_n)$ вытекает $P(f(x_1 \ldots x_n))$. Определяется результат A_1 подстановки в A выражения $f(x_1 \ldots x_n)$ вместо x. Выбирается некоторая переменная x_i, и решается задача на описание с условиями $A_1, P(x_i)$. Посылками ее служат антецеденты теоремы и утверждения $P(x_j)$ при прочих j. Единственная неизвестная - x_i. Ответ разбивается в конъюнкцию утверждений R_1, содержащих x_i, и конъюнкцию R_2 прочих утверждений. Проверяется, что R_2 - следствие посылок задачи на описание и R_1. Выражение "$\text{set}_{x_i}(R_1)$" упрощается и превращается в выражение

B, не имеющее связанных переменных. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность "$f(x_1 \dots x_n) \in t \leftrightarrow x_i \in B$". Ее антецеденты - антецеденты исходной теоремы и утверждения $P(x_1), \dots, P(x_n)$. Результат упрощается. (Прием принадлежит - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abmn}(a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow (a+b) \in \{m, \dots, n\} \leftrightarrow a \in \{m-b, \dots, n-b\})$

из теоремы

$\forall_{mnx}(m{-}\text{целое} \ \& \ n{-}\text{целое} \rightarrow x \in \{m, \dots, n\} \leftrightarrow x{-}\text{целое} \ \& \ 0 \le x{-}m \ \& \ 0 \le n{-}x)$

7. Определение пересечения двух множеств, заданных однотипными параметрическими уравнениями. Теорема - тождество вида "коорд$(A_1, K) = \text{set}_{x_1 \dots x_n}(\exists_{y_1 \dots y_m}(A_2))$", где A_1 - неоднобуквенное выражение. Рассматривается теорема "коорд$(B_1, K) = \text{set}_{x_1 \dots x_n}(\exists_{z_1 \dots z_m}(B_2))$", полученная из исходной заменой всех переменных, кроме $K, x_1, \dots, x_n$, на новые переменные. Решается задача на описание, условия которой суть A_2, B_2, а посылки - антецеденты обеих теорем. Неизвестные - $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m$, причем $y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_m$ - несущественные. При решении задачи разрешается вводить дополнительные посылки. Ответ имеет вид $x_1 = t1 \ \& \ \dots x_n = t_n \ \& \ C$. Выбирается новая переменная X. Консеквентом новой теоремы становится равенство "коорд$(X, K) = (t_1, \dots, t_n)$", антецедентами - антецеденты обеих теорем, использованные дополнительные посылки и утверждения "$X \in A_1, X \in B_1$". Результат упрощается с привлечением усиленных средств; если имеются громоздкие повторяющиеся подвыражения, то для них в антецедентах вводятся вспомогательные обозначения. (Прием уравнмножество - 17).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdefghijklmnpABK}(\neg(l = m) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(i = 0) \ \& \ \text{коорд}(l, K) = (e, f) \ \& \ \text{коорд}(m, K) = (g, h) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \ \& \ j \in \text{прямая}(lm) \ \& \ j \in \text{прямая}(AB) \ \& \ l - \text{точка} \ \& \ m - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ i = n(a-c) + (b-d)p \ \& \ k = an + bp + eh - fg \ \& \ n = f - h \ \& \ p = g - e \rightarrow \text{коорд}(j, K) = (a + k(c-a)/i, b + k(d-b)/i))$

из теоремы

$\forall_{ABKabcd}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(t - \text{число} \ \& \ x = (c-a)t + a \ \& \ y = (d-b)t + b)))$

8. Попытка сравнения окрестностей двух типов. Теорема имеет консеквент вида "$x \in A$", причем бесповторное выражение A содержит переменную x и хотя бы еще одну переменную. В разделе, к которому относится заголовок выражения A, находится другая теорема с консеквентом вида "$y \in B$", аналогичная первой, но у нее заголовок B отличен от заголовка A. Переменные второй теоремы переобозначаются так, чтобы не встречаться в первой теореме, кроме переменной y, которая переобозначается на x. При этом B превращается в B_1. Далее рассматриваются два случая. В первом из них решается задача на описание

с условием "$A \subseteq B_1$) & $\neg(A = \emptyset)$", во втором - с условием "$B_1 \subseteq A$". Условиями служат также все содержащие отличную от x переменную антецеденты первой теоремы, посылками - прочие антецеденты обеих теорем. Неизвестные - все отличные от x параметры A. Ответ R не содержит этих неизвестных. Консеквентом новой теоремы служит эквивалентность квантора существования по неизвестным задачи на описание, навешенного на конъюнкцию ее исходных условий, утверждению R. Результат упрощается. (Прием свойства - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdf}(f -$ натуральное & числнабор(c, f) & числнабор$(d, f) \to \exists_b(0 < b$ & евклпрямокр$(d, c) \subseteq$ евклокр(d, b) & $b -$ число$))$

из теоремы

$\forall_{bdf}(0 < b$ & $b -$ число & $f -$ натуральное & числнабор$(d, f) \to d \in$ евклокр$(d, b))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abn}(\mathrm{Val}(b) \subseteq (0, \infty)$ & $n -$ натуральное & числнабор(a, n) & числнабор$(b, n) \to a \in$ евклпрямокр$(a, b))$

9. Вывод условия пустоты определяемого множества. Теорема - определение $A_1 = \mathrm{set}_{x_1 \ldots x_k}(A_2)$. Решается задача на описание с условием A_2, посылками которой служат антецеденты. Неизвестные - $x_1, \ldots, x_k$, причем все они несущественные. Ответ не содержит $x_1, \ldots, x_k$ и после упрощения превращается в элементарное утверждение R. Утверждение $\neg(\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_2))$ - следствие антецедентов и $\neg(R)$. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $A_1 = \emptyset \leftrightarrow \neg(R)$. Антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием определение - 244).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abn}(b -$ число & $n -$ натуральное & числнабор$(a, n) \to$ евклокр$(a, b) = \emptyset \leftrightarrow b \leq 0)$

из теоремы

$\forall_{abn}(n -$ натуральное & числнабор(a, n) & $b -$ число $\to$ евклокр$(a, b) =$ $\mathrm{set}_x($числнабор(x, n) & евклрасст$(x, a) < b))$

Усмотрение перенесения свойств исходных функций на свойство операции над функциями

1. Примерка кванторного определения свойства функции на элементарные операции раздела - указание на функцию в антецедентах. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$ некоторого свойства A_1 функции f, для которой имеется антецедент "$f -$ функция". Все параметры антецедентов входят в A_1. Имеется антецедент вида "$\mathrm{Val}(f) \subseteq B$". Выбирается новая переменная x, и решается задача на исследование, посылки которой суть антецеденты теоремы и утверждение "$x \in B$". После решения в ее списке посылок находится утверждение $P(x)$, указывающее тип значения переменной x. В разделе символа P либо его надразделах выбирается символ g операции арности n. Выбираются новые переменные

$y, M, h_1, \ldots, h_n$, и формируется выражение F вида "$\lambda_y(g(h_1(y), \ldots, h_n(y)),$ $y \in M)$". Решается задача на описание, единственное условие которой - результат подстановки F вместо f в утверждение A_2. Посылки - результаты такой же подстановки в антецеденты теоремы, утверждения "$h_1 -$ функция, $\ldots, h_n -$ функция, $\mathrm{Dom}(h_1) = M, \ldots, \mathrm{Dom}(h_n) = M$", а также всевозможные утверждения вида "$\forall_y(y \in M \to C$", где C - условие на о.д.з. выражения $g(h_1(y), \ldots,$ $h_n(y))$. Неизвестными служат $h_1, \ldots, h_n$, причем целью решения служит "разделение" этих неизвестных по различным утверждениям. Такая цель, разумеется, потребовала создания специальных приемов решателя, ориентированных на указанное разделение, так что основная работа происходит именно в "обычном" решателе. При разделении не требуется получить утверждение, эквивалентное исходным условиям, а лишь такое, следствием которого они являются. Затетим также, что на этапе редактирования ответа данной задачи возможно нарушение разделения переменных, не приводящее к искажению новой теоремы. Полученный ответ преобразуется к виду д.н.ф., и выбирается произвольный дизъюнктивный член D. Он проверяется на невырожденность (функции h_i не должны быть фиксированы). Консеквентом новой теоремы становится результат подстановки F вместо f в утверждение A_1, антецедентами - исходные посылки задачи на описание и D. Результат упрощается. (Прием определение - 37).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aghij}(\mathrm{Dom}(h) = g \;\&\; \mathrm{Dom}(j) = g \;\&\; g \subseteq \mathbb{R} \;\&\; \mathrm{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \;\&\; \mathrm{Val}(j) \subseteq \mathbb{R} \;\&$
$h -$ функция $\&\; j -$ функция $\&$ предел$(h, i, a) -$ число $\&$ предел$(j, i, a) -$ число $\&$
Число(a) $\&$ типпредела(i) $\&$ Локопред(h, a, i) $\&$ Локопред$(j, a, i) \to$
$\lim_{e \to a \setminus i}(h(e) + j(e)) =$ предел$(h, i, a) +$ предел$(j, i, a))$

из теоремы

$\forall_{abfi}(f -$функция $\&$ Число(a) $\&$ $b -$число $\&$ типпредела(i) $\&$ Локопред(f, a, i) $\&$
$\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \;\&\; \mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \to$ предел$(f, i, a) = b \leftrightarrow \forall_c(c -$ число $\&\; 0 < c \to$
$\exists_d(0 < d \;\&\; d -$число $\&\; \forall_x(x -$число $\&\; x \in$ Окрестность$(a, d, i) \to |f(x) - b| < c))))$

2. Примерка кванторного определения свойства функции на двуместные операции раздела, с подстановкой константы вместо одного из операндов. Аналогично предыдущему, но проверяется, что $n = 2$, и вместо выражения $g(h_1(y), \ldots, h_n(y))$ используется выражение $g(h_1, h_2(y))$ либо $g(h_1(y), h_2)$. Соответственно, в антецедентах исключаются утверждения, характеризующие функцию, вместо которой подставлена константа, но добавляются необходимые для сопровождения по о.д.з. утверждения, связанные с этой константой. (Прием определение - 65).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acde}(\mathrm{Dom}(e) = c \;\&\; a - \mathrm{set} \;\&\; a \subseteq c \;\&\; c \subseteq \mathbb{R} \;\&\; \mathrm{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \;\&\; e -$ функция $\&$
$d -$ число $\&$ убывает$(e, a) \to$ убывает$(\lambda_b(d + e(b), b \in c), a))$

из теоремы

$\forall_{afg}(a - \mathrm{set} \;\&\; f -$ функция $\&\; a \subseteq \mathrm{Dom}(f) \;\&\; \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \;\&\; \mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \to$
убывает$(f, a) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in a \;\&\; y \in a \;\&\; 0 < y - x \to 0 < f(x) - f(y)))$

3. Примерка кванторного определения свойства последовательности на элементарные операции раздела. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$ некоторого свойства A_1 последовательности f, для которой имеется антецедент "последовательность(f, B)". . Все параметры антецедентов входят в A_1. Выбирается новая переменная x, и решается задача на исследование, посылки которой суть антецеденты теоремы и утверждение "$x \in B$". После решения в ее списке посылок находится утверждение $P(x)$, указывающее тип значения переменной x. В разделе символа P либо его надразделах выбирается символ g операции арности n. Выбираются новые переменные $y, h_1, \ldots, h_n$, и формируется выражение F вида "$\lambda_y(g(h_1(y), \ldots, h_n(y)), y -$ натуральное)". Решается задача на описание, единственное условие которой - результат подстановки F вместо f в утверждение A_2. Посылки - результаты такой же подстановки в антецеденты теоремы, утверждения "последовательность$(h_1, B), \ldots,$ последовательность(h_n, B)", а также всевозможные утверждения вида "$\forall_y(y -$ натуральное $\rightarrow C$", где C - условие на о.д.з. выражения $g(h_1(y), \ldots, h_n(y))$. Неизвестными служат $h_1, \ldots, h_n$, причем целью решения служит "разделение" этих неизвестных по различным утверждениям. Полученный ответ преобразуется к виду д.н.ф., и выбирается произвольный дизъюнктивный член D. Он проверяется на невырожденность (последовательности h_i не должны быть фиксированы). Консеквентом новой теоремы становится результат подстановки F вместо f в утверждение A_1, антецедентами - исходные посылки задачи на описание и D. Результат упрощается. (Прием определение - 47).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fg}(\lim(f) -$ число & $\lim(g) -$ число & последовательность$(f, \mathbb{R})$ & последовательность$(g, \mathbb{R}) \rightarrow \lim(\lambda_c(f(c) + g(c), c -$ натуральное$)) = \lim(f) + \lim(g))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a -$ число & последовательность$(b, \mathbb{R}) \rightarrow \lim(b) = a \leftrightarrow \forall_e(e -$ число & $0 < e \rightarrow \exists_n(n -$ натуральное & $\forall_m(m -$ натуральное & $n \leq m \rightarrow |b(m) - a| < e))))$

4. Получение условий, при которых произведение двух функций определенного типа снова имеет этот тип. Теорема - определение вида $A_1 \leftrightarrow f -$функция & A_2. Все переменные теоремы входят в список параметров A_1, причем число этих параметров более 1. Рассматривается теорема T_1, полученная из исходной переобозначением переменных на новые переменные. Пусть при этом переобозначении f переходит в g. Рассматривается еще одна теорема T_2, полученная из исходной переобозначением всех ее переменных, отличных от f, на новые переменные, и подстановкой вместо f выражения "произведение(f, g)". Правая часть консеквента теоремы T_2 упрощается при помощи задачи на описание. Посылками служат антецеденты и правые части консеквентов исходной теоремы и теоремы T_1, а также утверждение "$\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Val}(g)$". Задача не имеет неизвестных и решается лишь с целью редактирования своих условий. В ответе получается некоторое утверждение D. Консеквентом новой теорема становится левая часть консеквента теоремы T_2. Антецеденты - антецеденты всех трех теорем, утверждение D, левые части консеквентов исходной теоремы и теоремы T_1, а также утверждение "$\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Val}(g)$". Результат упрощается. (Прием определение - 247).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{afA}$(перестановка$(a, \{1, \ldots, \text{card}(A)\})$ & перестановка(f, A) & $A -$ set & конечное$(A) \to$ перестановка(произведение$(f, a), A)$)

из теоремы

$\forall_{fA}(A -$ set & конечное$(A) \to$ перестановка$(f, A) \leftrightarrow f -$ функция & $\text{Dom}(f) = \{1, \ldots, \text{card}(A)\}$ & $\text{Val}(f) = A)$

5. Получение условий, при которых сужение функции определяемого типа снова имеет этот тип. Теорема - определение вида $A_1 \leftrightarrow f -$ функция & A_2. Все переменные теоремы входят в список параметров A_1. Выбирается новая переменная M, и рассматривается теорема T_1, полученная из исходной теоремы переобозначением ее переменных, отличных от f, на новые переменные, и заменой f а "сужение(f, M)". Правая часть консеквента теоремы T_1 упрощается при помощи задачи на описание. Посылками служат антецеденты исходной теоремы и теоремы T_1, правая часть консеквента исходной теоремы, а также утверждения "$M -$ set", "$M \subseteq \text{Dom}(f)$". Задача не имеет неизвестных и решается лишь с целью редактирования своих условий. Конъюнктивные члены ответа разбиваются на подсписок S_1 утверждений, содержащих M, и подсписок S_2 остальных утверждений. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность левой части консеквента теоремы T_1 конъюнкции утверждений S_2. Антецеденты - антецеденты обеих теорем, утверждения списка S_1, "$M -$ set", "$M \subseteq \text{Dom}(f)$" и левая часть консеквента исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием определение - 249).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bfA}$(перестановка(f, A) & $b-$set & $A-$set & $\text{card}(b) \leq \text{card}(A)$ & конечное$(A) \to$ перестановка(сужение$(f, \{1, \ldots, \text{card}(b)\}), b) \leftrightarrow$ образ$(f, \{1, \ldots, \text{card}(b)\}) = b)$

из теоремы

$\forall_{fA}(A -$ set & конечное$(A) \to$ перестановка$(f, A) \leftrightarrow f -$ функция & $\text{Dom}(f) = \{1, \ldots, \text{card}(A)\}$ & $\text{Val}(f) = A)$

6. Попытка применения простейших операций к функции, определяемрй косвенным образом. Теорема - кванторная импликация, консеквент которой имеет вид "$T -$ функция & $\text{Dom}(T) = A_1$ & $\forall_{xy_1 \ldots y_n}(P(y_1 \ldots y_n)$ & $x \in M \to T(x) = A_2)$". Здесь T - выражение вида $Q(f)$, где f - переменная. Рассматриваются несколько конкретных версий дополнительной теоремы, выражающих новую функцию через старые с помощью простейших арифметических операций: изменение знака, умножение на число, сложение, умножение. Все переменные дополнительной теоремы, выделенные антецедентом "функция", рассматриваются как функции вида $Q(g)$. В этих предположениях (т.е. считая переменные g известными) предпринимается попытка представить при помощи задачи на описание функцию - результат R указанной арифметической операции как некоторое $Q(F)$. Консеквентом новой теоремы является равенство $R = Q(F)$. Результат упрощается. (Прием конъюнкция - 13).

Пример: вывод теоремы

$\forall_h$(общзнач(h) $\subseteq \mathbb{R}$ & кусочнфунк(h) $\to$ $-$таблица(h) = таблица(set$_b$($\exists_a$(b = $-$функчасть(h, a) & $a \in$ области(h)))))

из теоремы

$\forall_F$(кусочнфунк(F) $\to$ таблица(F) $-$ функция & Dom(таблица(F)) = $\bigcup_{f, f \in F}$ Dom(f) & $\forall_{ax}$($a \in$ области(F) & $x \in a \to$ таблица(F)(x) = функчасть(F, a)(x)))

и дополнительной теоремы

$\forall_f$($f -$ функция & Val(f) $\subseteq \mathbb{R} \to -f = \lambda_x(-f(x), x \in$ Dom(f)))

Заметим, что исходная теорема определяет выражение "таблица(F)".

7. Переход к кортежу, получаемому добавлением одного элемента. Теорема - эквивалентность вида $A_1 \leftrightarrow A_2$, причем заголовком A_2 служит квантор. Имеется антецедент вида "кортеж(B, n, M)", где B, n - переменные, причем другого антецедента с заголовком "кортеж" нет. Стартовая теорема текущего цикла вывода - определение некоторого понятия, являющегося заголовком утверждения A_1. Выбирается новая переменная a. Решается задача на описание, условиями которой служат результаты подстановки в A_2 выражений "суффикс(B, a)" и "$n + 1$" вместо переменных B, n, а также утверждение "$a \in M$". Посылки - антецеденты теоремы и A_2; единственная неизвестная - a. В задаче не требуется получение явного описания. Ответ R не содержит символа "суффикс" и квантора общности, а также не является константой "ложь". Консеквентом новой теоремы служит результат подстановки в A_1 выражений "суффикс(B, a)" и "$n + 1$" вместо переменных B, n, антецедентами - антецеденты исходной теоремы, A_1 и R. Результат упрощается. (Прием развертка - 119).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{arGM}$(оргграф(G) & ведет(r, конец(M), a, G) & вершмаршрут(M, G) $\to$ вершмаршрут(суффикс(M, a), G))

   из теоремы

   $\forall_{nGM}$($n -$ натуральное & кортеж($M, n,$ вершины(G)) & оргграф(G) $\to$ вершмаршрут(M, G) $\leftrightarrow \forall_i$($i \in \{1, \ldots, n-1\} \to \exists_r$(ведет($r, M(i), M(i+1), g$))))

8. Переход к конкатенации двух кортежей. Теорема - эквивалентность вида $A_1 \leftrightarrow A_2$, причем заголовком A_2 служит квантор. Имеется антецедент вида "кортеж(B, n, M)", где B, n - переменные, причем другого антецедента с заголовком "кортеж" нет. Стартовая теорема текущего цикла вывода - определение некоторого понятия, являющегося заголовком утверждения A_1. Выбираются новые переменные C, m. Решается задача на описание, условиями которой служат результаты подстановки в A_2 выражений "конкатенация(B, C)" и "$n + m$" вместо переменных B, n, а также утверждения "кортеж(C, m, M)", "натуральное(m)". Посылки - антецеденты теоремы и A_2; единственная неизвестная - C. В задаче не требуется получение явного описания. Ответ R не содержит символа "конкатенация" и квантора общности, а также не является

константой "ложь". Консеквентом новой теоремы служит результат подстановки в A_1 выражений "конкатенация(B, C)" и "$n + m$" вместо переменных B, n антецедентами - антецеденты исходной теоремы, A_1 и R. Результат упрощается. (Прием развертка - 120).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{arGM}$(орграф(G) & ведет$(r, $конец$(M), $начало$(a), G)$ & вершмаршрут(a, G) & вершмаршрут$(M, G) \rightarrow$ вершмаршрут$(M; a, G))$

из теоремы

$\forall_{nGM}(n -$ натуральное & кортеж$(M, n, $вершины$(G))$ & орграф$(G) \rightarrow$ вершмаршрут$(M, G) \leftrightarrow \forall_i(i \in \{1, \ldots, n-1\} \rightarrow \exists_r($ведет$(r, M(i), M(i+1), g))))$

9. Соединение двух кортежей с наложением концевых элементов. Теорема - эквивалентность вида $A_1 \leftrightarrow A_2$, причем заголовком A_2 служит квантор. Имеется антецедент вида "кортеж(B, n, M)", где B, n - переменные, причем другого антецедента с заголовком "кортеж" нет. Стартовая теорема текущего цикла вывода - определение некоторого понятия, являющегося заголовком утверждения A_1. Выбираются новые переменные C, m. Решается задача на описание, условиями которой служат результаты подстановки в A_2 выражений "послед(B, C)" и "$n + m - 1$" вместо переменных B, n, а также утверждения "кортеж(C, m, M)", "натуральное(m)", "$2 \leq m$", "начало$(C) =$ конец(B)". Посылки - антецеденты теоремы и A_2; единственная неизвестная - C. В задаче не требуется получение явного описания. Ответ R не содержит символа "послед" и квантора общности, а также не является константой "ложь". Консеквентом новой теоремы служит результат подстановки в A_1 выражений "послед(B, C)" и "$n + m - 1$" вместо переменных B, n антецедентами - антецеденты исходной теоремы, A_1 и R. Результат упрощается. (Прием развертка - 121).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aGM}$(начало$(a) =$ конец(M) & $2 \leq l(a)$ & орграф(G) & вершмаршрут(a, G) & вершмаршрут$(M, G) \rightarrow$ вершмаршрут(послед$(M, a), G))$

из теоремы

$\forall_{nGM}(n -$ натуральное & кортеж$(M, n, $вершины$(G))$ & орграф$(G) \rightarrow$ вершмаршрут$(M, G) \leftrightarrow \forall_i(i \in \{1, \ldots, n-1\} \rightarrow \exists_r($ведет$(r, M(i), M(i+1), g))))$

10. Попытка проварьировать функцию с помощью двуместных операций раздела, имеющих константу одним из аргументов. Теорема - определение "$A_1 = \lambda_x(A3, A_2)$" некоторой функции A_1. Внутри A_3 выделяется подвыражение $f(t)$, где f - переменная, имеющая в A_2 единственное вхождение. Это подвыражение - корневой операнд некоторого элементарного утверждения B. переменная f стречается в антецедентах и в A_1. Выбирается новая переменная y, и решается задача на исследование, посылки которой суть антецеденты теоремы и утверждение "$y \in \mathrm{Val}(f)$". После решения в ее списке посылок находится утверждение $P(y)$, указывающее тип значения переменной y. В разделе символа P либо его надразделах выбирается символ g двуместной операции. Выбираются новые переменные a, b, c. Определяется результат B_1 замены в B подтерма $f(t)$

на a и результат B_2 замены в B этого же подтерма на $g(b,c)$. Решается задача на описание, условием которой служит B_2, а посылками - все утверждения из контекста подутверждения B. Единственная неизвестная - b. Среди дизъюнктивных членов ответа выбирается некоторый член D имеющий единственное вхождение переменной x. Среди конъюнктивных членов D выбирается утверждение D_1, имеющее тот же заголовок, что B, и содержащее b. D_1 - результат применения некоторой подстановки S к B_1. Эта подстановка переводит a в b, а x - в неоднобуквенное выражение E, содержащее x. Формируется выражение F вида "$\lambda_x(g(f(x),c), x \in \mathrm{Dom}(f))$". Консеквентом новой теоремы становится равенство результата подстановки в A_1 выражения F вместо f выражению "$\lambda_x(A_1(E), A_2)$". Антецеденты - антецеденты исходной теоремы; утверждения, полученные подстановкой в эти антецеденты выражения F вместо f, а также отличные от D_1 и не содержащие b конъюнктивные члены утверждения D. Предварительно, для корректности вывода, анализируются прочие конъюнктивные члены D. Результат упрощается. (Прием определение - 226).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cfP}(c - \text{число}\ \&\ \text{верпространство}(P)\ \&\ \text{случвеличина}(f,P) \rightarrow$
$\text{функраспред}(\lambda_x(c + f(x), x \in \text{элемсобытия}(P)), P) =$
$\lambda_x(\text{функраспред}(f,P)(x-c), x - \text{число}))$

из теоремы

$\forall_{fP}(\text{верпространство}(P)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{случвеличина}(f,P) \rightarrow$
$\text{функраспред}(f,P) = \lambda_x(\text{вероятность}(\text{set}_y(y \in \text{элемсобытия}(P)\ \&\ f(y) < x), P),$
$x - \text{число}))$

Определение стандартных свойств определяемой функции

1. Множество значений функции, заданной через описатель "отображение". Теорема - определение "$A_1 = \lambda_x(A_2, A_3)$" некоторой функции A_1. Выбирается новая переменная a, и решается задача на описание с условиями "$a = A_2$", "A_3". Единственная неизвестная - x. Посылками служат антецеденты. Если получен ответ R, предпринимается упрощение выражения "$\text{set}_a(\exists_x(R))$". Проверяется, что результат D не содержит символа "класс". Консеквентом новой теоремы становится равенство "$\mathrm{Val}(A_1) = D$", антецеденты - те же, что у исходной теоремы. (Прием определение - 32).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aB}(B - \text{set} \rightarrow \mathrm{Val}(\text{конст}(B,a)) = (\emptyset \text{ при } B = \emptyset,\ \text{иначе } \{a\}))$

   из теоремы

   $\forall_{aB}(B - \text{set} \rightarrow \text{конст}(B,a) = \lambda_x(a, x \in B))$

2. Вывод условия равенства функций, заданных через описатель "отображение". Теорема - определение "$A_1 = \lambda_{x_1 \ldots x_n}(A_3, A_2)$" некоторой функции A_1. Рассматривается теорема "$B_1 = \lambda_{x_1 \ldots x_n}(B_3, B_2)$", полученная из исходной теоремы переобозначением переменных ее корневой связывающей приставки на новые переменные. Решается задача на описание, условиями которой служат утверждения

"$\mathrm{set}_{x_1\ldots x_n}(A_2) = \mathrm{set}_{x_1\ldots x_n}(B_2)$", "$\forall_{x_1\ldots x_n}(A_2 \to A_3 = B_3)$". Посылки - антецеденты обеих теорем. Задача решается с целью упрощения своих условий; неизвестных у нее нет. Ответ R не содержит связанных переменных. Консеквентом новой теоремы служит эквивалентность $(A_1 = B_1 \leftrightarrow R$. Антецеденты - объединение антецедентов обеих теорем. Результат упрощается. (Прием определение - 43).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcB}(c - \mathrm{set}\ \&\ B - \mathrm{set} \to \mathrm{конст}(c, b) = \mathrm{конст}(B, a) \leftrightarrow a = b\ \&\ c = B\ \vee$
$c = \emptyset\ \&\ B = \emptyset)$

из теоремы

$\forall_{aB}(B - \mathrm{set} \to \mathrm{конст}(B, a) = \lambda_x(a, x \in B))$

3. Вывод условия существования параметра, при котором произвольная функция представима в заданном через описатель "отображение" виде. Теорема - определение "$A_1 = \lambda_{x_1\ldots x_n}(A_3, A_2)$" некоторой функции A_1. Выражение "$\mathrm{set}_x(A_2)$" упрощается и превращается в выражение B, не содержащее описателя "класс". Выбирается параметр y выражения A_1, не входящий в B. Выбирается новая переменная f. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих y, и подсписок S_2 остальных утверждений. Решается задача на описание с условиями S_1 и "$\forall_x(A_2 \to f(x) = A_3)$". Посылки - утверждения S_2 "функция(f)", "$\mathrm{Dom}(f) = B$". Единственная неизвестная - y. Ответ R не содержит связанных переменных. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность "$\exists_y(f = A_1\ \&\ S_1) \leftrightarrow (\mathrm{Dom}(f) = B\ \&\ R)$", антецедентами - S_2 и "функция(f)". Результат упрощается. (Прием определение - 33).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abA}(A - \mathrm{set}\ \&\ b - \text{функция} \to \exists_B(b = \text{индикатор}(A, B, a)) \leftrightarrow \mathrm{Dom}(b) = A\ \&$
$\mathrm{Val}(b) \subseteq \{a, 0\})$

из теоремы

$\forall_{ABa}(A - \mathrm{set}\ \&\ B - \mathrm{set}\ \&\ B \subseteq A \to \text{индикатор}(A, B, a) = \lambda_x((a \text{ при}$
$x \in B,\ \text{иначе } 0), x \in A))$

4. Явное разрешение относительно параметра условия представимости функции в заданном через описатель "отображение" виде. Начало действий приема, вплоть до момента формирования новой теоремы, совпадает с началом действий предыдущего приема. Однако, затем снова решается задача на описание. Ее условия - такие же, как у первой задачи на описание, однако к исходным посылкам первой задачи добавляется R. Неизвестная снова y. Ответ D не имеет связанных переменных. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность "$f = A_1 \leftrightarrow \mathrm{Dom}(f) = B\ \&\ R\ \&\ D$". Антецеденты получены добавлением к антецедентам исходной теоремы утверждения "функция(f)". Результат упрощается. (Прием определение - 36).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abAB}(A - \mathrm{set}\ \&\ B - \mathrm{set}\ \&\ B \subseteq\ \ \&\ b - \text{функция} \to b = \text{индикатор}(A, B, a) \leftrightarrow$
$\mathrm{Dom}(b) = A\ \&\ B \subseteq \text{слой}(b, a)\ \&\ (\emptyset \text{ при } a = 0,\ \text{иначе слой}(b, a)) \subseteq B\ \&$
$\mathrm{Val}(b) \subseteq \{a, 0\})$

из теоремы

$\forall_{ABa}(A - \text{set}\ \&\ B - \text{set}\ \&\ B \subseteq A \to \text{индикатор}(A, B, a) = \lambda_x((a\ \text{при}\ x \in B,\ \text{иначе}\ 0), x \in A))$

5. Явное разрешение относительно нескольких параметров условия представимости функции в заданном через описатель "отображение" виде. Теорема - определение "$A_1 = \lambda_{x_1 \ldots x_n}(A_3, A_2)$" некоторой функции A_1. Выражение "$\text{set}_x(A_2)$" упрощается и превращается в выражение B, не содержащее описателя "класс". Список $y_1, \ldots, y_k$ параметров выражения A_1 имеет не менее 2 элементов и не содержит параметров выражения B. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих $y_1, \ldots, y_k$, и подсписок S_2 остальных утверждений. Решается задача на описание с условиями S_1 и "$\forall_x(A_2 \to f(x) = A_3)$". Посылки - утверждения S_2 "функция(f)", "$\text{Dom}(f) = B$". Неизвестные - $y_1, \ldots, y_k$. Получается ответ R. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность "$f = A_1 \leftrightarrow (f - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(f) = B\ \&\ R)$". Антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием определение - 41).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall - abc(l(a) = l(b)\ \&\ a - \text{слово}\ \&\ b - \text{слово} \to c = \text{кортежпар}(a, b) \leftrightarrow \forall_i(i \in \{1, \ldots, l(c)\} \to l(c(i)) = 2\ \&\ c(i) - \text{слово})\ \&\ a = \lambda_i(c(i)(1), i \in \{1, \ldots, l(c)\})\ \&\ b = \lambda_i(c(i)(2), i \in \{1, \ldots, l(c)\})\ \&\ c - \text{слово})$

   из теоремы

   $\forall_{abn}(a - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(a) = \{1, \ldots, n\}\ \&\ b - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(b) = \{1, \ldots, n\} \to \text{кортежпар}(a, b) = \lambda_i((a(i), b(i)), i \in \{1, \ldots, n\}))$

6. Попытка извлечение параметрического описания для функций, удовлетворяющих дополнительному элементарному условию. Теорема - определение "$A_1 = \lambda_{x_1 \ldots x_n}(A_3, A_2)$" некоторой функции A_1. Выбирается новая переменная f, и решается задача на описание, условиями которой служат антецеденты теоремы и равенство "$f = \lambda_{x_1 \ldots x_n}(A_3, A_2)$". Единственная посылка - "$f - \text{функция}$". Неизвестные - все параметры $y_1, \ldots, y_m$ антецедентов и определяющей части. Список конъюнктивных членов ответа разбивается на подсписок S_1 утверждений, не содержащих неизвестных, подсписок S_2 равенств, определяющих значения неизвестных, и подсписок S_3 прочих утверждений с неизвестными. Проверяется, что все утверждения списков S_1, S_3 элементарны. Подсписок S_2 разбивается на непустой подсписок S_4 элементарных утверждений и непустой подсписок S_5 неэлементарных, определяющих значения неизвестных $z_1, \ldots, z_k$. Список антецедентов разбивается на подсписок Q_1 утверждений, содержащих переменные $z_1, \ldots, z_k$, и подсписок Q_2 остальных утверждений. Консеквентом новой теоремы служит эквивалентность $S_1\ \&\ S_4 \leftrightarrow \exists_{z_1 \ldots z_k}(Q_1\ \&\ f = A_1)$. Антецеденты - утверждения S_3, Q_2. (Прием определение - 26).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bci}(i - \text{натуральное}\ \&\ i \le l(c) \to c - \text{слово}\ \&\ b = c(i) \leftrightarrow \exists_a(a - \text{слово}\ \&\ i \in \{1, \ldots, l(a) + 1\}\ \&\ c = \text{Вставка}(a, i, b)))$

   из теоремы

$\forall_{abi}(a - \text{слово}\ \&\ i \in \{1,\ldots,l(a)+1\} \to \text{Вставка}(a,i,b) = \lambda_j((a(j)\ \text{при}\ j<i,\ \text{иначе}\ (b\ \text{при}\ j=i,\ \text{иначе}\ a(j-1))), j \in \{1,\ldots,l(a)+1\}))$

7. Попытка вывести условие на значение функции. Консеквент теоремы - конъюнкция, некоторый конъюнктивный член которой имеет вид "A – функция", где A - определяемое неоднобуквенное выражение. Выбираются новые переменные a, b, и решается задача на описание с единственным условием "$\exists_a(a \in \text{Dom}(A)\ \&\ b = A(a))$". Посылками служат антецеденты теоремы. Целью решения является расшифровка по определениям, неизвестных нет. Ответом R является элементарное утверждение. Консеквентом новой теоремы служит результат подстановка в R выражения $A(a)$ вместо b. Антецеденты получены добавлением к антецедентам исходной теоремы утверждения "$a \in \text{Dom}(A)$". Антецеденты новой теоремы упрощаются. (Прием определение - 110).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{af}(f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f)\ \&\ a \in \text{Val}(f) \to \text{обрфункция}(f)(a) \in \text{Dom}(f))$

   из теоремы

   $\forall_f(f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \to \text{обрфункция}(f) - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(\text{обрфункция}(f)) = \text{Val}(f)\ \&\ \forall_x(x \in \text{Dom}(f) \to \text{обрфункция}(f)(f(x)) = x))$

8. Попытка найти множество значений функции, определяемой без описателя "отображение". Начало действий приема, вплоть до создания новой теоремы, такое же, как в предыдущему приеме. Далее проверяется, что R имеет вид "$b \in M$", где M не содержит ни a, ни b. Консеквентом новой теоремы становится равенство "$\text{Val}(A) = M$". Антецеденты те же, что у исходной теоремы. (Прием определение - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_f(f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \to \text{Val}(\text{обрфункция}(f)) = \text{Dom}(f))$

   из теоремы

   $\forall_f(f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \to \text{обрфункция}(f) - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(\text{обрфункция}(f)) = \text{Val}(f)\ \&\ \forall_x(x \in \text{Dom}(f) \to \text{обрфункция}(f)(f(x)) = x))$

Попытка выразить координаты одного объекта через координаты другого

1. Попытка рассмотреть операцию, значением которой служит атомарный объект, координаты которого определяются. Теорема - определение "$A_1 = (t_1,\ldots,t_n)$" некоторого выражения A_1 (обычно - координат объекта). Внутри A_1 выделяется атомарное подвыражение A_2 Находится определение $B_1 = B_2$ некоторой операции B_1 над атомарными выражениями, у которого заголовок определяющего выражения B_2 тот же, что у A_2. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Затем они еще раз переобозначены так, что B_2 переводится в A_2. Рассматриваются все атомарные подвыражения $C_1,\ldots,C_k$ выражения B_1. Для каждого C_i создается копия T_i исходной теоремы, у которой сначала все

переменные переобозначены на новые переменные, а затем еще раз переобозначены так, что ее версия A_1 превращается в результат замены A_2 на C_i в исходном A_1. Списки антецедентов теорем объединяются и образубт список S. Для каждой T_i выбираются новые переменные $x_1, \ldots, x_n$, и к списку S добавляются равенства $r_1 = x_1, \ldots, r_n = x_n$, где $(r_1, \ldots, r_n)$ - выражение, соответствующее в T_i выражению $(t_1, \ldots, t_n)$. Выбираются новые переменные $y_1, \ldots, y_n$, и решается задача на описание с условиями $t_1 = y_1, \ldots, t_n = y_n$ и посылками S. В ней требуется выразить неизвестные y_i через переменные x_j. Консеквентом новой теоремы служит равенство результата замены A_2 в A_1 на B_1 набору найденных значений y_i. В антецедентах размещаются равенства результатов замены A_2 в A_1 на C_i соответствующим наборам $(x_1, \ldots, x_n)$. Результат упрощается. (Прием определение - 98).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABKefglm}$(коорд(вектор(fB), K) = (l, m) & коорд(вектор(Af), K) = (e, g) & f − точка & A − точка & B − точка & систкоорд(K) → коорд(вектор(fB) + вектор(Af), K) = $(e + l, g + m)$)

из теоремы

$\forall_{ABKabcd}$(систкоорд(K) & A − точка & B − точка & коорд(A, K) = (a, b) & коорд(B, K) = (c, d) → коорд(вектор(AB), K) = $(c - a, d - b)$)

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}$(A − точка & B − точка & C − точка → вектор(AB) + вектор(BC) = вектор(AC))

2. Попытка рассмотреть операцию, значением которой служит атомарный объект, координаты которого определяются - с подстановкой определяющего операцию терма в результирующее тождество. Аналогично предыдущему, но консеквентом служит равенство результата замены A_2 в A_1 на B_2 набору найденных значений y_i. (Прием определение - 136).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABKefglm}$(коорд(вектор(fB), K) = (l, m) & коорд(вектор(Af), K) = (e, g) & f − точка & A − точка & B − точка & систкоорд(K) → коорд(вектор(AB), K) = $(e + l, g + m)$)

из теоремы

$\forall_{ABKabcd}$(систкоорд(K) & A − точка & B − точка & коорд(A, K) = (a, b) & коорд(B, K) = (c, d) → коорд(вектор(AB), K) = $(c - a, d - b)$)

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}$(A − точка & B − точка & C − точка → вектор(AB) + вектор(BC) = вектор(AC))

3. Выражение координат объекта в системе координат другого типа через его координаты в системе текущего типа. Теорема - тождество вида $P(A,K) = (t_1,\ldots,t_n)$, определяющее координаты объекта A в системе координат K типа P. Выбирается какой-либо другой тип координат Q для той же самой системы K (например, K - тройка точек, определяющих центр системы координат и два направления; P - полярные координаты, Q - евклидовы). Выбираются новые переменные $a_1,\ldots,a_n,x_1,\ldots,x_n$, и решается задача на описание. Условием служит равенство $Q(A,K) = (x_1,\ldots,x_n)$, посылками - антецеденты теоремы и равенства $t_1 = a_1,\ldots,t_n = a_n$. Неизвестные - $x_1,\ldots,x_n$, причем их требуется выразить через известные параметры $a_1,\ldots,a_n$. Ответ имеет вид $x_1 = r_1$ & ... & $x_n = r_n$, Консеквентом новой теоремы служит равенство $Q(A,K) = (r_1,\ldots,r_n)$. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы и равенство $P(A,K) = (a_1,\ldots,a_n)$. Результат упрощается. (Прием систкоорд - 26).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abABCDK}(\neg(A = D)$ & $K = (A,B,C)$ & полкоорд$(D,K) = (a,b)$ &
   $D -$ точка & однасторона$(C,D,$прямая$(AB))$ & прямкоорд$(K) \to$
   коорд$(D,K) = (a\cos b, a\sin b))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDK}(D -$ точка & прямкоорд(K) & $\neg(A = D)$ & $K = (A,B,C)$ &
   однасторона$(C,D,$прямая$(AB)) \to$ полкоорд$(D,K) = (l(AD), \angle(BAD)))$

4. Выражение координат объекта в системе координат текущего типа через его координаты в системе другого типа. Теорема - тождество вида $P(A,K) = (t_1,\ldots,t_n)$, определяющее координаты объекта A в системе координат K типа P. Выбирается какой-либо другой тип координат Q для той же самой системы K (например, K - тройка точек, определяющих центр системы координат и два направления; P - полярные координаты, Q - евклидовы). Выбираются новые переменные $a_1,\ldots,a_n,x_1,\ldots,x_n$, и решается задача на описание. Условиями служат равенства $t_1 = x_1,\ldots,t_n = x_n$, посылками - антецеденты теоремы и равенство $Q(A,K) = (a_1,\ldots,a_n)$. Неизвестные - $x_1,\ldots,x_n$, причем их требуется выразить через известные параметры $a_1,\ldots,a_n$. Ответ имеет вид $x_1 = r_1$ & ... & $x_n = r_n$, Консеквентом новой теоремы служит равенство $P(A,K) = (r_1,\ldots,r_n)$. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы и равенство $Q(A,K) = (a_1,\ldots,a_n)$. Результат упрощается. (Прием систкоорд - 27).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdABCDK}(\neg(A = D)$ & $K = (A,B,C)$ & коорд$(D,K) = (c,d)$ & $D -$ точка &
   $d \le 0$ & прямкоорд$(K) \to$ полкоорд$(D,K) = (\sqrt{c^2+d^2}, -\arccos(c/\sqrt{c^2+d^2})))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDK}($прямкоорд(K) & $D -$ точка & $\neg(A = D)$ & $K = (A,B,C)$ &
   разныестороны$(C,D,$прямая$(AB)) \to$ полкоорд$(D,K) = (l(AD), -\angle(BAD)))$

5. Выражение координат операнда через координаты операции и других операндов. Теорема - тождество вида "коорд$(A,K) = (t_1,\ldots,t_n)$", где выражение A неоднобуквенное и не имеет атомарных невырожденных подтермов. Имеется

антецедент H вида "коорд$(B, K) = (r_1, \ldots, r_n)$", причем параметры выражений $r_1, \ldots, r_n$ включаются в параметры выражений $t_1, \ldots, t_n$. Выбираются новые переменные $a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_n$, и решается задача на описание с условиями $r_1 = x_1, \ldots, r_n = x_n$. Посылки - отличные от H антецеденты и равенства $t_1 = a_1, \ldots, t_n = a_n$. В задаче требуется выразить неизвестные $x_1, \ldots, x_n$ через известные: переменные $a_1, \ldots, a_n$ и параметры термов $t_1, \ldots, t)n$, не входящие в $r_1, \ldots, r_n$. Ответ имеет вид $x_1 = q_1$ & ... & $x_n = q_n$, Консеквентом новой теоремы служит эквивалентность коорд$(A, K) = (a_1, \ldots, a_n) \leftrightarrow$ коорд$(B, K) = (q_1, \ldots, q_n)$. Антецеденты - отличные от H антецеденты исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием систкоорд - 30).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdegK}$(коорд$(a, K) = (e, g)$ & $b -$ число & $d -$ число & систкоорд(K) & Вектор(a) & Вектор$(c) \rightarrow$ коорд$(a + c, K) = (b, d) \leftrightarrow$ коорд$(c, K) = (b - e, d - g))$

из теоремы

$\forall_{aceglmK}$(коорд$(c, K) = (l, m)$ & коорд$(a, K) = (e, g)$ & систкоорд(K) & Вектор(c) & Вектор$(a) \rightarrow$ коорд$(c + a, K) = (e + l, g + m))$

Попытка вычислить значение определяемой операции на других операциях раздела

1. Примерка использующего вспомогательные переменные определения одноместной операции на двуместные элементарные операции раздела. Теорема - определение $f(x) = t$ одноместной операции f. Выражение t имеет параметры $c_1, \ldots, c_n$, и все они отличны от x. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих только x, и непустой подсписок S_2 прочих утверждений. Для любых значений x удовлетворяющих S_1, существуют значения прочих переменных, при которых S_2 истинно. Имеется антецедент $P(x)$, указывающий тип P значения x. В разделе символа P либо его надразделах выбирается символ g двуместной операции. Тип значения операции g и тип значений допустимых по о.д.з. значений ее аргументов равен P. Выбираются новые переменные $y, d_1, \ldots, d_n$, и решается задача на описание, условия которой - результаты подстановки в утверждения S_2 термов $d_1, \ldots, d_n, g(x, y)$ вместо $c_1, \ldots, c_n, x$. Посылки - антецеденты и утверждение $P(y)$. Неизвестные суть $d_1, \ldots, d_n$, причем требуется, чтобы ответ не зависел от x. В задаче требуется лишь подобрать пример. Ответ имеет вид $d_1 = r_1$ & ... & $d_n = r_n$ & A. Определяется результат R_1 подстановки $r_1, \ldots, r_n$ вместо $c_1, \ldots, c_n$ в t. Внутри R_1 выделяется вхождение подтерма t, и определяется результат R_2 замены этого вхождения на $f(x)$. Этот результат не содержит переменных $c_1, \ldots, c_n$. Консеквентом новой теоремы становится равенство $f(g(x, y)) = R_2$. Антецеденты суть утверждения S_1, результаты подстановки в эти утверждения $g(x, y)$ вместо x, а также конъюнктивные члены A. Если такой конъюнктивный член имеет подтерм t, то этот подтерм заменяется на $f(x)$. Проверяется, что в результате конъюнктивные члены не содержат переменных $c_1, \ldots, c_n$. Результат упрощается. (Прием определение - 178).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ целое $\rightarrow [a + b] = b + [a])$

из теоремы

$\forall_{an}(a - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ n \leq a \ \& \ a < n + 1 \to [a] = n)$

2. Определяется одноместная операция над выражением из параметрического описания объектов заданного типа. Предпринимается попытка вычислить ее значение на других одноместных и двуместных операциях раздела (без исключения параметров). Теорема - определение $f(A_1) = A_2$ одноместной операции f. Выражение A_1 неоднобуквенное; тип его значения - P. Все переменные теоремы встречаются в A_1. Находится параметрическое описание $P(z) \leftrightarrow \exists_{a_1 \ldots a_n}(B \ \& \ z = t)$ объектов типа P. Антецеденты отсутствуют. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка, переводящая A_1 в t. Далее предполагается, что она уже применена к исходной теореме. Если какие-либо антецеденты исходной теоремы не являются следствиями $B, z = t$, то они переформулируются через z. В разделе символа P выбирается символ g одноместной либо двуместной операции. Пусть, например, двуместной. Выбираются новые переменные $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$, и находятся результаты t_1, t_2 замены в t переменных $a_1, \ldots, a_n$, соответственно, на $b_1, \ldots, b_n$ либо $c_1, \ldots, c_n$. Решается задача на описание, выражающая при помощи посылки $g(t_1, t_2) = t$ терм A_2 через известные параметры $b_1, \ldots, b_n$ либо $c_1, \ldots, c_n$. Получается терм A_3, не содержащший операции g. Консеквентом новой теоремы становится $f(g(t_1, t_2)) = A_3$. Доопределяются антецеденты. (Прием определение - 140).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abde}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \neg(d^2 + e^2 = 0) \to \mathrm{Re}((a + bi)/(d + ei)) = (ad + be)/(d^2 + e^2))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to \mathrm{Re}(a + bi) = a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$

3. Определяется одноместная операция над выражением из параметрического описания объектов заданного типа. Предпринимается попытка вычислить ее значение на других одноместных и двуместных операциях раздела (с исключением параметров). Аналогично предыдущему, но для t_1, t_2 вводятся обозначающие их переменные d_1, d_2, и с помощью задачи на описание, имеющей дополнительные посылки $d_1 = t_1, d_2 = t_2$, A_3 выражается через d_1, d_2. Получается выражение A_4. Консеквентом новой теоремы становится $f(g(d_1, d_2)) = A_4$. (Прием определение - 139).

Пример: вывод теоремы

$\mathrm{Re}(c/f) = (Re(c)Re(f) + Im(c)Im(f))/|f|^2$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to \mathrm{Re}(a + bi) = a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z = x + iy))$

4. Определяется одноместная операция f над выражением, задающим общий вид объектов некоторого типа. Предпринимается попытка выразить ее значение на других одноместных и двуместных операциях раздела через значение f от их операндов. Аналогично предыдущему, но решается другая задача на описание. Кроме посылки $g(t_1, t_2) = t$, добавляются посылки $d_1 = T_1, d_2 = T_2$, где T_1, T_2 - результаты замены в A_2 переменных $a_1, \ldots, a_n$, соответственно, на $b_1, \ldots, b_n$ либо $c_1, \ldots, c_n$. При этом A_2 выражается через d_1, d_2. Выбираются новые переменные z_1, z_2, и в ответе R вместо переменных d_1, d_2 подставляются выражения $f(z_1), f(z_2)$. Получается выражение R_1. Консеквентом новой теоремы становится $f(g(z_1, z_2)) = R_1$. (Прием определение - 146).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cf}(\neg(f = 0)\ \&\ c - \text{комплексное}\ \&\ f - \text{комплексное} \rightarrow \text{сопряженное}(c/f) = \text{сопряженное}(c)/\text{сопряженное}(f))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow \text{сопряженное}(a + bi) = a - bi)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z = x + iy))$

   Заметим, что предыдущий прием, применяемый к тем же теоремам, будет выражать сопряженное к дроби через вещественную и мнимую части числителя и знаменателя весьма громоздким образом. Чтобы выразить его через величины, сопряженные с числителем и знаменателем, и понадобился данный прием.

5. Применение операции к операнду исходного числового атома, преобразующей заданным образом один из заменяющих числовых атомов. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложный невырожденный бесповторного числовой атом A_1 через более простые. Выбирается некоторый невырожденный числовой атом B выражения A_2, имеющий единственный параметр. Этот параметр - один из корневых операндов атома A_1. По заголовку f атома B находится другое тождество $C_1 = C_2$, у которого C_1 - атом с заголовком C_1, причем C_2 имеет единственный невырожденный числовой атом C_3, и этот атом получается из C_1 удалением части операндов некоторых операций. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка S_1, переводящая B в C_1. Эта подстановка преобразует A_2 в A_3. Определяется результат A_4 замены в A_3 подвыражения C_1 на C_2. Определяется также подстановка S_2, переводящая B в C_3, и находится результат A_5 применения ее к A_2. Выбираются новые переменные a, bЮ и решается задача на описание с условием $b = A_4$. Посылки - результаты применения S_1 к антецедентам исходной теоремы, антецеденты дополнительной теоремы и равенство $a = A_5$. Неизвестная - b, причем требуется выразить ее через a и параметры C_2, не входящие в C_3. Ответ имеет вид $b = t$. Консеквентом новой теоремы становится равенство результата применения S_1

к A_1 результату подстановки в t вместо переменной a результата применения S_2 к A_1. Антецеденты - переобозначенные антецеденты исходной теоремы и антецеденты дополнительной. Результат упрощается. (Прием числатом - 28).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bc}(\text{Вектор}(b)\ \&\ \text{Вектор}(c) \to \text{скалумнож}(b,-c) = -\text{скалумнож}(b,c))$

из теоремы

$\forall_{ab}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Вектор}(b) \to \text{скалумнож}(a,b) =$
$\cos(\text{уголмежду}(a,b))\text{длина}(a)\text{длина}(b))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(\text{Вектор}(a) \to \text{длина}(-a) = \text{длина}(a))$

6. Попытка усмотрения дистрибутивности относительно операции, подсказанной антецедентом. Теорема - определение вида $f(a,t) = A$, где a - переменная. Эта переменная встречается в некотором антецеденте в виде $g(a,r)$, где g - ассоциативная и коммутативная операция, причем имеет место дистрибутивность g относительно некоторой ассоциативной и коммутативной операции h. В текущем списке вывода находятся теоремы T_1 и T_2, переменные которых переобозначены. Подходящие переобозначения переменных переводят левые части их консеквентов в $f(a,t)$, после чего в первом случае вместо a подставляется новая переменная b, а во втором - $h(a,b)$. Решается задача на описание, условием которой служит равенство правой части консеквента теоремы T_2 новой переменной x, а посылками - антецеденты трех теорем и равенства правых частей первых двух теорем новым переменным c,d. Неизвестной служит x, причем ее требуется выразить через c,d. После того, как получен ответ R, консеквентом новой теоремы становится результат подстановки в него левой части консеквента теоремы T_2 вместо x, $f(a,t)$ вместо c и левой части консеквента теоремы T_1 вместо d. Комплектуется список антецедентов. Результат упрощается. (Прием определение - 120).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABaj}(\neg(A=B)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ j - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ a \le 0\ \&$
$j \le 0 \to (a+j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$

из теоремы

$\forall_{ABCa}(a - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A=B)\ \&$
$C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ a \le 0\ \&\ l(AC) = -al(AB)\ \&\ A \in \text{отрезок}(BC) \to$
$a \cdot \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(AC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to ab + ac = a(b+c))$

7. Примерка определения операции к элементарным операциям раздела. Теорема - эквивалентность вида $x = t \leftrightarrow A_1\ \&\ \exists_{y_1 \ldots y_k}(z = r\ \&\ A_2)$, где переменная x не входит в бесповторное выражение t, переменная z входит в t. Имеется

антецедент $P(z)$, указывающий тип P начения переменной z. В разделе, к которому относится P, выбирается символ g двуместной операции, тип значения которой - надтип типа P (возможно, совпадающий с P). Проверяется, что эта операция сохраняет тип значений P. Выбираются новые переменные a, b, c, d. Список антецедентов раззбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих переменные x, z, и подсписок S_2 утверждений, не содержащих этих переменных. Решается задача на описание, условия которой - результаты подстановки в правую часть консеквента исходной теоремы и в утверждения S_1 выражений $d, g(a, b)$ вместо x, z. Посылки - S_2, результаты подстановки в утверждения S_1 и в правую часть консеквента переменных c, a вместо x, z, а также утверждение $P(b)$. Неизвестная - d, причем требуется выразить ее через отличные от z параметры t и переменные b, c. Ответом служит элементарное утверждение B, которое и становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты суть S_2, результаты подстановки в S_1 и в девую часть консеквента исходной теоремы переменных c, a вместо x, z, результат подстановки в эту же левую часть выражений $d, g(a, b)$ вместо x, z, и утверждение $P(b)$. Результат упрощается. (Прием развертка - 112).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abn}(n - \text{натуральное } \& \ a - \text{целое } \& \ b - \text{целое} \to (a + b)(\text{mod } n) = (b + a(\text{mod } n))(\text{mod } n))$

из теоремы

$\forall_{mnk}(m - \text{целое } \& \ n - \text{натуральное} \to m(\text{mod } n) = k \leftrightarrow k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \& \ \exists_p(p - \text{целое } \& \ m = k + np))$

8. Примерка простейших одноместных операций к веществennозначной функции, усматриваемой в заменяющей части. Теорема - определение $A_1 = A_2$, у которого о.д.з. определяющей части содержит утверждение "$f -$ функция", отсутствующее в антецедентах. Здесь f - параметр A_2, причем из антецедентов усматривается включение "$\text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$". Выбираются новые переменные x, a, b, c. Формируется выражение T одного из следующих типов: $f(x)/a, af(x), f(x) + a, -f(x)$. Далее рассматривается выражение T_1: $\lambda_x(T, x \in \text{Val}(f))$. Решается задача на описание, условием которой служит равенство b результату подстановки в A_2 выражения T_1 вместо f. Посылки - антецеденты, а также (если a входит в T) "$a -$ число", (если в T входит умножение либо дробь) "$\neg(a = 0)$". Кроме того, в посылки входит равенство $c = A_2$. Неизвестная - b, причем ее требуется выразить через a, c. Ответ имеет вид $b = Q$. Консеквентом новой теоремы становится равенство результата подстановки T_1 вместо f в A_1 выражению Q. Антецеденты - исходные посылки задачи на описание, в которых вместо $c = A_2$ берется $c = A_1$. (Прием отображение - 43).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bdfP}(\text{верпространство}(P) \ \& \ \text{дискрвеличина}(f, P) \ \& \ b - \text{число } \& \ \neg(b = 0) \ \& \ d = \text{рядраспред}(f, P) \to \text{рядраспред}(\lambda_a(bf(a), a \in \text{Dom}(f)), P) = \lambda_x(d(x/b), \exists_g(x = bg \ \& \ g \in \text{Dom}(d))))$

из теоремы

$\forall_{fP}$(верпространство(P) & дискрвеличина(f, P) $\rightarrow$ рядраспред(f, P) = λ_x(вероятность(слой(f, x), P), $x \in \mathrm{Val}(f)$)))

Определение стандартных свойств определяемой двуместной операции

1. Определение условия перестановочности элемента со всеми другими элементами. Теорема - определение вида $f(x, y) = A$, причем в списке вывода пока не установлена коммутативность операции f. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты теоремы и результаты переобозначения в этих антецедентах переменных x, y друг на друга. Список посылок результата решения не содержит константы "ложь". Он разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих y, и подсписок S_2 остальных утверждений. Решается задача на описание, условия которой - S_1 и отрицание равенства A_2 результату переобозначения в A_2 переменных x, y друг на друга. Посылки - S_2. Задача имеет единственную неизвестную y, причем эта неизвестная несущественная. Отрицание R ответа задачи упрощается при помощи другой задачи на описаниеЮ решаемой с целями "редакция", "свертка". Получается некоторое утверждение B. Исходный список посылок задачи на исследование разбивается на подсписок Q_1 утверждений, содержащих y, и подсписок Q_2 остальных утверждений. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $\forall_y(Q_1 \rightarrow f(x, y) = f(y, x)) \leftrightarrow B$. Антецеденты - Q_2. Результат упрощается. (Прием определение - 212).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{an}$(матр($a, \mathbb{R}, n, n$) $\leftrightarrow \forall_b$(матр($b, \mathbb{R}, n, n$) $\rightarrow ab = ba$) $\leftrightarrow \exists_b(a =$ скалярнматр(b, n)))

   из теоремы

   $\forall_{abmnk}(a -$ функция & $b -$ функция & $m -$ натуральное & $n -$ натуральное & $k -$ натуральное & $\mathrm{Val}(a) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(b) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Dom}(a) = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ & $\mathrm{Dom}(b) = \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, k\} \rightarrow ab = \lambda_{ij}(\sum_{p=1}^{n}(a(i, p)b(p, j)), i \in \{1, \ldots, m\}$ & $j \in \{1, \ldots, k\}))$

2. Попытка решить уравнение для стандартного представления значения операции. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, преобразующее выражение A_1 к виду A_2 стандартного представления объектов данного типа. Определяется тип P значения выражения A_1 и находится антецедент вида $P(x)$, где x - переменная, входящая в A_1. Проверяется наличие теоремы, дающей выражение для стандартного представления объектов типа P. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выбирается новая переменная y, и решается задача на описание, условиями которой служат утверждения S_1 и $A_2 = y$. Посылки - S_2 и $P(y)$. Неизвестная - x. Ответом служит утверждение R. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $A_1 = y \leftrightarrow R$. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы и $P(y)$. Результат упрощается. (Прием Стандкомпл - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abn}(a -$ комплексное & $b -$ комплексное & $n -$ натуральное $\rightarrow b = a^n \leftrightarrow$ $\exists_m(a = (|b|)^{1/n}\cos(2m\pi/n + \arg(b)/n) = (|b|)^{1/n}\sin(2m\pi/n + \arg(b)/n)i))$

из теоремы

$\forall_{an}(a - \text{комплексное } \& \ n - \text{натуральное} \to a^n = (|a|)^n(\cos(n \cdot \arg(a)) + i\sin(n \cdot \arg(a))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число } \& \ y - \text{число } \& \ z = x + iy))$

Определение условий, при которых фрагмент теоремы становится тождественно ложным либо тождественно истинным

1. Попытка найти условие ложности антецедентов определяющей импликации. Теорема - определение вида $A_1 \leftrightarrow \forall_{x_1 \ldots x_n}(A_2 \to a_3)$. Рассматривается утверждение B вида $\neg(\exists_{x_1 \ldots x_n}(A_2))$ и определяется список C его параметров. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих переменные C, и подсписок S_2 остальных утверждений. Решается задача на описание с условиями S_1, B и посылками S_2. Неизвестные - переменные C. Ответ R не содержит связанных переменных. Консеквент новой теоремы - тот же, что у исходной, а антецеденты - S_2 и R. Результат упрощается. В списке вывода регистрируются конъюнктивные члены утверждения, полученного после упрощения. (Прием определение - 222).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(b - \text{set} \to \text{непересек}(b, \emptyset))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set } \& \ b - \text{set} \to \text{непересек}(a, b) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \to \neg(c \in b)))$

Сравнение двух кванторных определений

1. Попытка вывести условие равенства двух объектов из кванторной эквивалентности с кванторной эквивалентностью в консеквенте. Теорема - эквивалентность вида $x = t \leftrightarrow \forall_{y_1 \ldots y_n}(A_1 \to (A_2 \leftrightarrow A_3))$. Здесь x - переменная, не входящая в t. Выражение t имеет непустой список параметров $a_1, \ldots, a_m$, причем $m \leq 2$. Переменная x имеет единственное вхождение в A_3, причем переменные $a_1, \ldots, a_m$ в A_3 не входят. Утверждение A_1 не содержит ни x, ни $a_1, \ldots, a_m$. Выбираются новые переменные $b_1, \ldots, b_m$, и определяется результат A_4 замены в A_2 переменных $a_1, \ldots, a_m$ на $b_1, \ldots, b_m$. Решается задача на описание с условиями "$\forall_{y_1 \ldots y_n}(A_1 \ \& \ A_2 \to A_4)$", "$\forall_{y_1 \ldots y_n}(A_1 \ \& \ A_4 \to A_2)$". Посылками служат антецеденты исходной теоремы и результаты замены $a_1, \ldots, a_m$ на $b_1, \ldots, b_m$ в этих антецедентах. Неизвестные - все параметры условий. Получить явное описание не требуется. Ответом служит утверждение R без связанных переменных. Определяется результат r замены в t переменных $a_1, \ldots, a_m$ на $b_1, \ldots, b_m$. Консеквентом новой теоремы служит эквивалентность $r = t \leftrightarrow R$, антецедентами - исходные посылки задачи на описание. Результат упрощается. (Прием развертка - 85).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcef}(\{b,f\}=\{c,e\}\leftrightarrow b=c\ \&\ e=f\ \vee\ b=e\ \&\ c=f)$

из теоремы

$\forall_{bdf}(d-\text{set}\rightarrow d=\{b,f\}\leftrightarrow\forall_a(a=b\ \vee\ a=f\leftrightarrow a\in d))$

Определение стандартных свойств числового атома

1. Попытка найти условие равенства числового атома нулю. Теорема - тождество $A_1=A_2$, выражающее сложный невырожденный числовой атом A_1 через более простые. Существенные антецеденты отсутствуют; оценка сложности A_2 меньше, чем у A_1. Выражение A_2 имеет непустой список параметров X. Он включает все переменные теоремы. Решается задача на описание, условиями которой служат антецеденты и равенство $A_2=0$. Единственная посылка - константа "истина", неизвестные - X. Явное описание получать не требуется. Ответ R не имеет связанных переменных. Консеквентом новой теоремы служит эквивалентность утверждения $A_1=0$ конъюнкции не являющихся антецедентами исходной теоремы конъюнктивных членов R. Антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием числатом - 29).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_c(\text{Вектор}(c)\rightarrow\text{скалумнож}(c,c)=0\leftrightarrow c=\text{вектор0})$

   из теоремы

   $\forall_c(\text{Вектор}(c)\rightarrow\text{скалумнож}(c,c)=(\text{длина}(c))^2)$

2. Попытка вывести неравенство для сравнения числового атома со специальным константным значением. Теорема - тождество $A_1=A_2$, выражающее сложный невырожденный числовой атом A_1 через более простые. Список X параметров A_2 непуст. По заголовку атома A_1 определяются константы, для которых целесообразно сравнивать с ними этот атом. Выбирается какая-то из этих констант - k. Последовательно рассматриваются утверждения B: $A_2<k, k<A_2, A_2\leq k, k\leq A_2$. Решается задача на описание с условием B, посылками которой являются антецеденты. Неизвестные - X. Явное описание получать не требуется. Ответ R отличен от B. Консеквентом новой теоремы становится B, антецедентами - антецеденты исходной теоремы и R. Результат упрощается. (Прием числатом - 42).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ l(AC)=l(BC)\ \&\ A-\text{точка}\ \&$
   $B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\rightarrow\angle(ABC)<\pi/2)$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A=B)\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ \neg(B=C)\ \&$
   $l(AC)=l(BC)\rightarrow\angle(ABC)=\arccos(l(AB)/(2l(AC))))$

3. Попытка альтернативной переформулировки заменяемого утверждения в терминах атомарных подвыражений заменяющего утверждения. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, переформулирующая нечисловое отношение A_1 через отношение A_2 для числовых атомов. В A_2 выделяются однотипные нечисловые атомарные подвыражения $t_1, \ldots, t_n$; $n > 0$. Список их параметров - X, причем каждый из этих параметров встречается в A_2 только внутри указанных атомарных подвыражений. Выбираются новые переменные $a_1, \ldots, a_n$, и решается задача на описание с условием A_1. Посылки - антецеденты теоремы и равенства $t_1 = a_1, \ldots, t_n = a_n$. Неизвестные - X, причем их требуется выразить через $a_1, \ldots, a_n$ и отличные от X параметры A_1. В ответ задачи вместо переменных $a_1, \ldots, a_n$ подставляются выражения $t_1, \ldots, t_n$. Проверяется, что полученное утверждение R отлично от A_2. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $A_2 \leftrightarrow R$, антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием числвыраз - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = c)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка} \rightarrow$
   $\text{уголмежду}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(ac)) = 0 \leftrightarrow \text{однонаправлены}(\text{вектор}(ab),$
   $\text{вектор}(ac)))$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = c)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка} \rightarrow$
   $\text{уголмежду}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(ac)) = 0 \leftrightarrow \text{точкалуча}(a, b, c))$

4. Попытка отождествить аргументы двух одноместных числовых атомов. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, где A_1 - невырожденный числовой атом вида $f(t)$. Выражение A_2 имеет единственный числовой атом. Он имеет вид $f(T)$ и не совпадает с A_2. Список X общих параметров выражений t, T непуст. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 тверждений, содержащих X, и подсписок S_2 остальных утверждений. Решается задача на описание, условиями которой служат S_1 и равенство $t = T$. Посылки - A_2, неизвестные - X. Получать явное описание не требуется. Рассматриваются конъюнктивные члены Q ответа задачи. Проверяется, что каждый содержащий переменную x списка X элемент Q либо имеет единственное вхождение x, либо имеет только вхождения x вида "значение($x \ldots$)". Консеквент новой теоремы получается из консеквента исходной заменой T на t. Антецеденты - S_2 и Q. Результат упрощается. (Прием числзнач - 37).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ijnA}(\neg(i - j = 0)\ \&\ \forall_a(a \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow A(a, i) = A(a, j))\ \&\ i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in$
   $\{1, \ldots, n\}\ \&\ \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \rightarrow \det(A) = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{ijnA}(\neg(i - j = 0)\ \&\ i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \rightarrow \det(A) =$
   $-\det(\text{транспстлб}(A, i, j)))$

5. Анализ экстремальных значений числового атома относительно числового параметра. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, где A_1 - невырожденный числовой

атом; A_2 - выражение, имеющее невырожденные числовые атомы, причем все они отличны от A_1. Выражение A_2 имеет также численный параметр x, не входящий в невырожденные числовые атомы этого выражения, но входящий в A_1. Единственный содержащий x антецедент имеет вид "$x \in T$". Выбираются новые переменные y, a, b, и решается задача на описание, условия которой суть "$\mathrm{Extr}(\lambda_x(A_2, x - \text{число}), y, a, b)$" и "$y \in T$". Посылки - антецеденты исходной теоремы, неизвестные - y, a, b. Ответ имеет вид "$y = t$ & $a = r$ & $b = h$ & D". Составляется список S пар (невырожденный числовой атом, относящийся к значению y параметра x - значение этого атома в данной точке). Изначально в него заносится пара (результат замены x на y в A_1 - r). Для пополнения данного списка привлекаются теоремы текущего списка вывода, антецеденты которых удается сопоставить с антецедентами исходной теоремы. Консеквентами теорем, выводимых данным приемом за одно его срабатывание, становятся равенства элементов пар списка S. Антецеденты - не содержащие x антецеденты исходной теоремы и утверждение "$P(\lambda_x(A_1, x \in T), y)$", где P - символ "локмаксимум" при $h = \max$ и "локминимум" при $h = \min$. Кроме того, выводится теорема с теми же антецедентами и консеквентом $y = t$ а также теоремы с теми же антецедентами, консеквентом которых служит конъюнктивный член D. Результаты упрощаются. (Прием числзнач - 39).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acefiK}(i = [c, f]$ & $c -$ число & $f -$ число & поверхнземли(K) &
Верхняяточка(e, K, i, a) & мточка(e) & бросок(e, i) & Числотр$(i) \to$
крд(Место$(e, a), K, 3) =$ крд(Скорость$(e, K, c), K, 3)^2/(2g)+$крд(Место$(e, c), K, 3))$

из теоремы

$\forall_{cdefiK}(i = [c, f]$ & $d \in i$ & $c -$ число & $f -$ число & поверхнземли(K) &
мточка(e) & бросок(e, i) & Числотр$(i) \to$ крд(Место$(e, d), K, 3) =$
$(d - c)$крд(Скорость$(e, K, c), K, 3) - (d - c)^2 g/2 +$ крд(Место$(e, c), K, 3))$

Определение связи числовых атомов с координатами

1. Попытка выразить определяемый числовой атом через координаты. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, определяющее сложный числовой атом A_1 через более простые. Каждый корневой операнд A_1 - либо переменная, либо заголовок выражения M, для которого имеется теорема, определяющая общий вид уравнения для координат точек множества M. К антецедентам теоремы добавляются уравнения для всех таких M, причем вводятся новые переменные для параметров уравнений. Если корневой операнд - переменная, то предполагается, что он обозначает отдельную точку, и к антецедентам добавляется равенство для координат этой точки, обозначенных новыми переменными. Решается задача на описание, в которой требуется выразить A_2 через эти новые переменные. Консеквентом новой теоремы становится равенство A_1 полученному выражению. При этом в антецедентах добавлены уравнения для выражений M. Результат упрощается. (Прием числатом - 54).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefghCEFG}(\neg(E = F)$ & $\neg(G \in$ прямая$(EF))$ & коорд$(C, a) = (f, g, h)$ &
   коорд(плоскость$(EFG), a) = \mathrm{set}_{ijk}(e + bi + cj + dk = 0$ & $i -$ число & $j -$ число &

$k-$число) & $b-$число & $c-$число & $d-$число & $e-$число & $C-$точка & $E-$точка & $F-$точка & $G-$точка & прямкоорд$(a) \to$ расстдоплоскости$(C,$ плоскость$(EFG)) = |e+bf+cg+dh|/\sqrt{b^2+c^2+d^2})$

из теоремы

$\forall_{ABCDEFG}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & $E-$точка & $F-$точка & $G-$точка & $\neg(A=B)$ & $C \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) & $D \in$ плоскость(EFG) & $\neg(E=F)$ & $\neg(G \in$ прямая$(EF))$ & прямая$(AB) \perp$ плоскость$(EFG) \to$ расстдоплоскости$(C,$ плоскость$(EFG)) = l(CD))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{fghABCDK}(\neg(f=g)$ & $\neg(h \in$ прямая$(fg))$ & $K=(A,B,C,D)$ & $f-$точка & $g-$точка & $h-$точка & систкоорд$(K) \to \exists_{abcd}(\neg(a^2+b^2+c^2=0)$ & координ(плоскость$(fgh),K) = \text{set}_{xyz}(d+ax+by+cz=0$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число) & $a-$число & $b-$число & $c-$число & $d-$число))

2. Попытка выразить определяющий числовой атом через координаты. Аналогично предыдущему, но консеквент - равенство A_2 найденному выражению. Предварительно проверяется, что A_2 имеет единственный невырожденный числовой атом, причем имеющий в A_2 единственное вхождение. (Прием числатом - 55).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefghCDEFG}(\neg(A=B)$ & $\neg(E=F)$ & $\neg(G \in$ прямая$(EF))$ & координ$(C,a) = (f,g,h)$ & координ(плоскость$(EFG),a) = \text{set}_{ijk}(e+bi+cj+dk=0$ & $i-$число & $j-$число & $k-$число) & $C \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) & $D \in$ плоскость(EFG) & $b-$число & $c-$число & $d-$число & $e-$число & $A-$точка & $B-$точка & & $C-$точка & $D-$точка & $E-$точка & $F-$точка & $G-$точка & прямая$(AB) \perp$ плоскость(EFG) & прямкоорд$(a) \to$ $l(CD) = |e+bf+cg+dh|/\sqrt{b^2+c^2+d^2})$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDEFG}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & $E-$точка & $F-$точка & $G-$точка & $\neg(A=B)$ & $C \in$ прямая(AB) & $D \in$ прямая(AB) & $D \in$ плоскость(EFG) & $\neg(E=F)$ & $\neg(G \in$ прямая$(EF))$ & прямая$(AB) \perp$ плоскость$(EFG) \to$ расстдоплоскости$(C,$ плоскость$(EFG)) = l(CD))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{fghABCDK}(\neg(f=g)$ & $\neg(h \in$ прямая$(fg))$ & $K=(A,B,C,D)$ & $f-$точка & $g-$точка & $h-$точка & систкоорд$(K) \to \exists_{abcd}(\neg(a^2+b^2+c^2=0)$ & координ(плоскость$(fgh),K) = \text{set}_{xyz}(d+ax+by+cz=0$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число) & $a-$число & $b-$число & $c-$число & $d-$число))

Попытка определить по уравнению для координат множества точек некоторые параметры

1. Усмотрение значений координат объектов либо числовых атомов из уравнения для множества объектов. Консеквент теоремы - уравнение "координ$(A_1,K) =$

$\text{set}_{x_1 \ldots x_n}(A_2)$" для координат множества объектов. Выражение A_1 неоднобуквенное и имеет непустой список параметров $a_1, \ldots, a_m$. Список $B_1, \ldots, B_k$ невырожденных числовых атомов выражения A_2 непуст. При помощи задачи на описание находятся подсписок S_1 списка $a_1, \ldots, a_m$ и подсписок S_2 списка $B_1, \ldots, B_k$ опорных точек и числовых атомов, однозначно определяемых по уравнению для координат. Выбираются новые переменные $b_1, \ldots, b_k$, и формируется теорема T, полученная из исходной теоремы заменой атомов $B_1, \ldots, B_k$ в консеквенте на переменные $b_1, \ldots, b_k$ и добавлением антецедентов $B_1 = b_1, \ldots, B_k = b_k$. Решается задача на описание, условиями которой служат антецеденты теоремы T, содержащие параметр списка $a_1, \ldots, a_m$, посылками - прочие антецеденты. Неизвестные - $a_1, \ldots, a_m$, причем все они несущественные. Получается ответ R, не содержащий неизвестных. Находится список Q антецедентов теоремы T, имеющих вид "коорд$(C, K) = t$", где C - переменная списка S_1, либо вид $C = t$ где C - атом списка S_2. Элементы списка Q становятся консекветами новых теорем. Их антецеденты - не входящие в Q антецеденты теоремы T и R. Эти теоремы упрощаются. (Прием уравнмножество - 8).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcABK}(\neg(A = B)$ & коорд(окружность$(AB), K) = \text{set}_{xy}(-2ax - 2by - c^2 + a^2 + b^2 + x^2 + y^2 = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & $0 < c$ & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $A -$ точка & $B -$ точка & прямкоорд$(K) \to$ коорд$(A, K) = (a, b))$

из теоремы

$\forall_{abABK}(A -$ точка & $B -$ точка & прямкоорд(K) & $\neg(A = B)$ & коорд$(A, K) = (a, b) \to$ коорд(окружность$(AB), K) = \text{set}_{xy}((x - a)^2 + (y - b)^2 = l(AB)^2$ & $x -$ число & $y -$ число))

2. Определение координат множества, выделенного квазипротоколом "актив(...)". Консеквент теоремы - уравнение "коорд$(A_1, K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_n}(A_2)$" для координат множества объектов. Находится квазипротокол с консеквентом вида "актив(B)", где A_1 - результат некоторой подстановки S, примененной к B. Переменные квазипротокола переобозначены и не входят в исходную теорему. После применения S к антецедентам квазипротокола и объединения с антецедентами исходной теоремы возникает список Q. В этом списке находятся все утверждения вида "коорд$(C, K) = t$". При помощи задачи на описание предпринимается попытка выразить "коорд(C, K)" через численные параметры остальных утверждений Q. Равенства полученных выражений выражениям t замещают в списке Q утверждения "коорд$(C, K) = t$". Консеквент новой теоремы тот же, что у исходной, а антецеденты - преобразованный указанным образом список Q. Результат упрощается. (Прием уравнмножество - 23).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdeK}(K = (d, e, c)$ & систкоорд$(K) \to$ коорд(прямая$(de), K) = \text{set}_{xy}(y = 0$ & $x -$ число))

из теоремы

$\forall_{deghijK}(\neg(d = e)$ & коорд$(d, K) = (g, h)$ & коорд$(e, K) = (i, j)$ & $d -$ точка & $e -$ точка & систкоорд$(K) \to$ коорд(прямая$(de), K) = \text{set}_{xy}(hi + x(j - h) + y(g - i) - gj = 0$ & $x -$ число & $y -$ число))

и квазипротокола

$\forall_{ABCK}(K = (A, B, C) \to \text{актив}(\text{прямая}(AB)))$

Попытка определить условие существования решения уравнения, удовлетворяющего дополнительному условию

1. Определение условия существования решения, удовлетворяющего дополнительному ограничению простейшего вида. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$ для разрешения утверждения A_1 относительно неизвестной x. Эта неизвестная имеет более одного вхождения в A_1. Оценка сложности A_2 больше оценки A_1. Составляется список S_1 конъюнктивных членов утверждения A_2 и содержащих x антецедентов, а также список S_2 остальных антецедентов. Имеется антецедент $P(x)$, определяющий тип значения переменной x. Находится символ бинарного отношения Q, используемого для объектов типа P. Выбирается новая переменная y, и решается задача на описание, условия которой - S_1 и утверждение $Q(x, y)$ (либо $Q(y, x)$). Посылки - S_2 и $P(y)$. Неизвестная - x, причем она несущественная. Ответ R не содержит x. Консеквентом становится эквивалентность "$\exists_x(S_1\ \&\ A_1\ \&\ Q(x, y)) \leftrightarrow R$", антецеденты - S_2 и $P(y)$. Результат упрощается. (Прием глуб - 26).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(b = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число} \to$
   $\exists_e(ae{+}be^2 = d\ \&\ c < e\ \&\ e{-}\text{число}) \leftrightarrow c < (\sqrt{4bd + a^2}\,\text{sg}(b){-}a)/(2b)\ \&\ 0 \le 4bd{+}a^2)$

   из теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(b = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \to ae + be^2 =$
   $d \leftrightarrow 0 \le 4bd + a^2\ \&\ (e = -(a + \sqrt{4bd + a^2})/(2b)\ \vee\ e = (-a + \sqrt{4bd + a^2})/(2b)))$

Попытка описать класс значений операции

1. Попытка описать класс значений операции над множеством на его подмножествах. Теорема - тождество $f(A_1) = A_2$, уменьщающее оценку сложности выражения. Значением неоднобуквенного выражения A_1 служит множество. Список $x_1, \ldots, x_n$ параметров этого выражения непуст. Теорема не имеет других переменных. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих $x_1, \ldots, x_n$, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выбираются новые переменные $y_1, \ldots, y_n, z$, и определяются: список S_3 результатов замены в S_1 переменных $x_1, \ldots, x_n$ на $y_1, \ldots, y_n$; результат A_3 такой же замены в выражении A_1, и результат A_4 этой замены в выражении A_2. Затем решается задача на описани с условиями S_3, "$A_3 \subseteq A_1$", "$z = A_4$". Посылки - антецеденты теоремы, неизвестные - $y_1, \ldots, y_n$, причем все они несущественные. Ответ R не содержит переменных $y_1, \ldots, y_n$. Консеквентом новой теоремы становится утверждение $\exists_{y_1}(y_1 \subseteq A_1\ \&\ y_1 - \text{set}\ \&\ f(y_1) = z)$. Антецедентами служат антецеденты исходной теоремы и R. (Прием упрощение - 23).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bn}(b - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ b \le n\ \&\ 0 \le b \to \exists_a(\text{card}(a) = b\ \&\ a - \text{set}\ \&$
   $a \subseteq \{1, \ldots, n\}))$

из теоремы

$\forall_n(n - \text{целое } \& \ 0 \le n \to \text{card}(\{1, \ldots, n\}) = n)$

2. Усмотрение теоремы, позволяющей ограничить область значений параметра в параметрическом описании. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, уменьшающее оценку сложности выражения. Правая часть получается из левой заменой вхождения собственного подвыражения t на переменную x, входящую в t. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выбирается новая переменная y, и решается задача на описание, условия которой - S_1 и равенство $y = t$. Посылки - S_2, единственная неизвестная - x, причем несущественная. Ответ R не содержит x. Находятся результаты B_1, B_2 упрощения выражений "$\text{set}_y(R)$" и "$\text{set}_x(S_1)$". Проверяется, что B_1 - собственное подмножество B_2. Консеквентом новой теоремы становится равенство "$\text{set}_y(\exists_x(y = t \ \& \ S_1)) = \text{set}_y(\exists_x(y = t \ \& \ y \in B_1))$". Антецеденты - утверждения S_2. Результат упрощается. (Прием упрощение - 34).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{agh}(a = \text{операция}(h) \ \& \ g \in \text{носитель}(h) \ \& \ \text{порядокэлемента}(g, h) - \text{натуральное} \ \& \ \text{группа}(h) \to \text{set}_b(\exists_m(b = \text{алгстепень}(g, a, m) \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ 0 \le m)) = \text{set}_b(\exists_m(b = \text{алгстепень}(g, a, m) \ \& \ m \in \{0, \ldots, \text{порядокэлемента}(g, h) - 1\})))$

из теоремы

$\forall_{aghm}(a = \text{операция}(h) \ \& \ g \in \text{носитель}(h) \ \& \ \text{порядокэлемента}(g, h) - \text{натуральное} \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ 0 \le m \ \& \ \text{группа}(h) \to \text{алгстепень}(g, a, m) = \text{алгстепень}(g, a, m(\text{mod порядокэлемента}(g, h))))$

Попытка определить условия для усиления консеквента

1. Усмотрение условий, при которых нестрогое неравенство для определяемого числового атома превращается в равенство. Консеквент теоремы - неравенство $a \le B$ (либо $B \le a$), где B - невырожденный числовой атом, a - константное выражение. Все параметры B встречаются в антецедентах. В текущем списке вывода находится определение $B = C$ атома B, причем список антецедентов этого определения такой же, как у исходной теоремы. Все параметры C встречаются в антецедентах. Находится список X параметров выражения C, и список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих переменную списка X, и подсписок S_2 остальных утверждений. Решается задача на описание с условиями $S_1, C = a$ и посылками S_2. Единственная неизвестная - первая переменная списка X. Явное описание получать не требуется. Ответ R не содержит связанных переменных. Консеквентом новой теоремы служит равенство $B = a$, антецеденты - S_2 и R. Результат упрощается. (Прием числоценка - 15).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{anA}(A \subseteq \mathbb{R}^n \ \& \ a \in A \ \& \ n - \text{натуральное} \to \text{евклрасстдо}(a, A) = 0)$

из теоремы

$\forall_{anA}(A \subseteq \mathbb{R}^n$ & $n -$ натуральное & числнабор$(a, n) \to 0 \leq$ евклрасстдо$(a, A))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{aAn}(n -$ натуральное & числнабор(a, n) & $A \subseteq \mathbb{R}^n \to$ евклрасстдо$(a, A) =$ $\inf(\text{set}_d(\exists_x(x \in A$ & $d =$ евклрасст$(a, x)))))$

Установка на вывод теорем

1. Решение задачи на описание. Квазипротокол представляет собой установку на вывод теоремы, определяющей значение заданного выражения через заданные параметры. Эта установка - кванторная импликация, антецеденты S которой определяют посылки задачи на описание с целью "известно", а консеквент имеет вид $A = F(a_1 \ldots a_n)$, где A - выражение, значение которого требуется выразить в задаче через известные параметры $a_1, \ldots, a_n$; F - переменная "x1". Выбирается новая переменная y, и решается задача на описание с условием $A = y$. Посылки - утверждения S, неизвестная - y, известные параметры - $a_1, \ldots, a_n$. Если получается ответ $y = t$, то новая теорема получается из квазипротокола заменой $F(a_1 \ldots a_n)$ на t. (Прием найти - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABmnkp}(A -$ set & $B -$ set & $A \subseteq B$ & $\text{card}(B) = n$ & $\text{card}(A) = m$ &
   $n -$ целое & $k -$ целое & $p -$ целое $\to \text{card}(\text{set}_C(C \subseteq B$ & $\text{card}(C) = k$ &
   $\text{card}(A \triangle C) = p$ & $C -$ set$)) = (C_m^{(k+m-p)/2} C_{n-m}^{(k+p-m)/2}$ при $2 \mid (k + p - m)$ &
   $0 \leq k + m - p$ & $0 \leq k + p - m,$ иначе $0))$

   из квазипротокола

   $\forall_{ABmnkp}(A -$ set & $B -$ set & $A \subseteq B$ & $\text{card}(B) = n$ & $\text{card}(A) = m$ &
   $n -$ целое & $k -$ целое & $p -$ целое $\to \text{card}(\text{set}_C(C \subseteq B$ & $\text{card}(C) = k$ &
   $\text{card}(A \triangle C) = p$ & $C -$ set$)) = F(k, m, n, p))$

6.3 Попытка решить уравнение

Попытка решить простейшее уравнение с определяемой операцией

1. Попытка разрешить простейшее уравнение с определяемой двуместной операцией (без ввода дополнительных ограничений). Теорема - определение $f(x, y) = A$ двуместной операции f. Существует содержащий x антецедент, переходящий в другой антецедент при замене в нем x на y. Корневая связывающая приставка теоремы состоит только из переменных x, y. Определение f не распадается на несколько теорем. Далее рассматриваются два случая - для выбора в качестве неизвестной x либо y. Ограничимся первым из них. Если в списке вывода уже имеется указание на коммутативность f, второй случай не рассматривается. Антецеденты разбиваются на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выбирается новая переменная a, и решается задача на описание с условиями $S_1, A = a$. Посылки - S_2, неизвестная - x. Ответ имеет вид $x = t$ & B, причем B не содержит x. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $f(x, a) = a \leftrightarrow x = t$. Антецеденты

получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы утверждения B. Результат упрощается; если в консеквенте сохраняются описатели, то предпринимается попытка исключить их с помощью задачи на преобразование. (Прием определение - 96).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{afg}(\mathrm{Dom}(a) = \mathrm{Dom}(g)\ \&\ \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)\ \&\ \mathrm{Val}(a) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&$
$\mathrm{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ a-\text{функция}\ \&\ f-\text{функция}\ \&\ g-\text{функция} \rightarrow a = f+g \leftrightarrow f = a-g)$

из теоремы

$\forall_{fg}(f - \text{функция}\ \&\ g - \text{функция}\ \&\ \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)\ \&\ \mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&$
$\mathrm{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f + g = \lambda_x(f(x) + g(x), x \in \mathrm{Dom}(f)))$

Эта теорема определяет терм "$f + g$". Имеется в виду операция "плюсфунк" сложения числовых функций.

2. Попытка разрешить простейшее уравнение с определяемой двуместной операцией (со вводом дополнительных ограничений). Аналогично предыдущему, но решить задачу на описание из предыдущего приема не удается. Тогда решается задача, отличающаяся от нее лишь разрешением вводить дополнительные посылки. Такие посылки добавляются к антецедентам новой теоремы. (Прием определение - 231).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{afg}(\mathrm{Val}(a) \subseteq \mathrm{Val}(f)\ \&\ \mathrm{Val}(g) \subseteq \mathrm{Dom}(f)\ \&\ a - \text{функция}\ \&\ f - \text{функция}\ \&$
   $g - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow a = \text{произведение}(f, g) \leftrightarrow$
   $g = \text{произведение}(\text{обрфункция}(f), a))$

   из теоремы

   $\forall_{fg}(f - \text{функция}\ \&\ g - \text{функция} \rightarrow \text{произведение}(f, g) =$
   $\lambda_x(f(g(x)), x \in \text{прообраз}(g, \mathrm{Dom}(f))))$

Попытка разрешить отношения раздела относительно определяемой одноместной операции

1. Попытка разрешить двуместные отношения раздела относительно операнда определяемой одноместной операции. Теорема - определение $f(a) = A$ одноместной операции f. Выражение A имеет единственный параметр a. Определяется тип P значения выражения A и проверяется наличие антецедента $P(a)$. В разделе символа P и его надразделах находится двуместное отношение Q. Выбирается новая переменная b, и решается задача на описание с условием $Q(b, A)$, посылками которой служат антецеденты теоремы и необходимые для сопровождения условия по о.д.з. утверждения, не содержащие a. Неизвестной служит a. В полученном ответе предпринимается попытка упростить максимальные не содержащие a подвыражения. Возникает некоторое утверждение R. Консеквентом новой теоремы служит эквивалентность $Q(b, f(a)) \leftrightarrow R$. Антецеденты - исходные посылки задачи на описание. Результат упрощается. (Прием определение - 181).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \to b \leq [a] \leftrightarrow -[-b] \leq a)$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to [a] = \sup(\text{set}_n(n - \text{целое} \ \& \ n \leq a)))$

Глава 7

Вывод следствий с помощью задачи на исследование

7.1 Вывод следствий из антецедентов и консеквента

Вывод новых теорем путем анализа объединенного списка антецедентов и частей определяющей эквивалентности

1. Вывод элементарных следствий из обеих частей определения элементарного утверждения и условий на новые объектв. Теорема - кванторная импликация с квантором существования $\exists_{x_1 \ldots x_k}(A)$ в консеквенте. Стартовая теорема списка вывода - определение $B_1 \leftrightarrow B_2$ некоторого утверждения B_1. Список антецедентов исходной теоремы получается добавлением к списку антецедентов стартовой теоремы утверждения B_1 Создается список S_1 - объединение списка антецедентов стартовой теоремы и конъюнктивных членов утверждения B_2. Кроме того, создается список S_2 - объединение списка S_1 с конъюнктивными членами утверждения A. Решается задача на исследование Z_1 со списком посылок S_1, а также задача на исследование Z_2 со списком посылок S_2. Неизвестными каждой из этих задач служат параметры ее посылок, причем задача имеет также цели "теорема" и "известно". В задаче Z_2 имеется дополнительная установка на вывод следствий, не содержащих переменных $x_1, \ldots, x_k$. Если в текущем списке вывода имеется теорема, список антецедентов которой включается в список антецедентов исходной теоремы, то к посылкам задачи Z_2 добавляется консеквент этой теоремы. После решения задач выбирается элементарная посылка P задачи Z_2, не входящая в список посылок задачи Z_1, не имеющая заголовка "актив" и не содержащая переменных, отсутствовавших в S_2. Проверяется, что либо P содержит переменные $x_1, \ldots, x_k$, либо является равенством невырожденного числового атома другому атому или константе, либо не имеет численных корневых операндов. Консеквентом новой теоремы становится P, антецедентами - антецеденты исходной теоремы, а если P содержит переменные $x_1, \ldots, x_k$, то также утверждение A. Результат упрощается. Проверяется отсутствие избыточных антецедентов. (Прием допконтекст - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDE}(E \in \text{прямая}(AC)\ \&\ E \in \text{прямая}(BD)\ \&\ \text{параллелограмм}(ABCD)\ \&$
   $A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка} \rightarrow l(DE) = l(BE))$

   из теоремы

$\forall_{ABCD}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & параллелограмм$(ABCD)$ $\rightarrow \exists_E(E-$ точка & $E \in$ отрезок(BD) & $E \in$ отрезок$(AC)))$

2. Вывод элементарных следствий обеих частей определения элементарного утверждения. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$. Решается задача на исследование, посылками которой служат антецеденты теоремы и утверждения A_1, A_2. Неизвестные - все параметры посылок, кроме того имеются цели "известно" и "теорема". После решения выбирается элементарная посылка P, не входящая в список антецедентов и отличная от P. Ее заголовок отличен от символа "актив", причем все ее параметры входят в исходный список посылок. Проверяется, что P не является следствием списка антецедентов. После этого создается новая теорема с консеквентом P, антецедентами которой служат антецеденты исходной теоремы и утверждение A_1. Результат упрощается. (Прием определение - 21).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}($параллелограмм$(ABCD)$ & $A-$ точка & $B-$ точка & $C-$ точка & $D-$ точка $\rightarrow 2l(AB)^2 + 2l(AD)^2 - l(AC)^2 - l(BD)^2 = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A-$ точка & $B-$ точка & $C-$ точка & $D-$ точка $\rightarrow$ параллелограмм$(ABCD) \leftrightarrow$ четырехугольник$(ABCD)$ & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(BC) \parallel$ прямая$(AD))$

3. Вывод следствий обеих частей определения элементарного утверждения с исключением кванторов. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$. Решается задача на исследование Z_1, посылками которой служат антецеденты теоремы и утверждения A_1, A_2 Неизвестные - все параметры посылок, кроме того имеются цели "известно" и "теорема". После ее решения устанавливается существования посылок, содержащих квантор "длялюбого". Составляется список S параметров выражения A_1. Если некоторые из этих параметров x выделены антецедентом "$x-$функция", то в списке S сохраняются только они. Решается задача на исследование Z_2, посылки которой те же, что у задачи Z_1. Она имеет всего две цели - "фокус S" и "квантимплик". Первая указывает на приоритет прерформулировки посылок с использованием переменных S, вторая - на исключение кванторных импликаций специальными приемами, заменяющими такую импликацию на групп антецедентов и консеквент, с сохранением указаний на это преобразование в комментариях (квантимплик ...). Кроме того, эта цель форсирует исключение кванторов существования с помощью ввода сколемовских функций. После решения выбирается элементарная посылка P, не имеющая заголовка "актив", содержащая переменную списка S и не имеющая переменных, не входящих в исходную теорему. Она становится консеквентом новой теоремы, антецедентами которой служат антецеденты исходной теоремы и утверждение A_1. Результат упрощается. (Прием определение - 182).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{GMN}($оргграф(G) & маршрут(N, G) & подмаршрут$(M, N) \rightarrow$ мвершины$(M) \subseteq$ мвершины$(N))$

из теоремы

$\forall_{MNG}$(орграф(G) & маршрут(N, G) $\rightarrow$ подмаршрут(M, N) $\leftrightarrow$
маршрут(M, G) & $\exists_{im}$($m-$натуральное & $m \leq$ мдлина(N) &
индексы($i, m+1,$ мдлина(N) $+1$) & $M = \lambda_j$(мверш($N, i(j)$),
$j \in \{1, \ldots, m+1\}), \lambda_j$(мребро($N, i(j)), j \in \{1, \ldots, m\}$)))

4. Вывод элементарных следствий обеих частей определения элементарного утверждения, имеющего параметры, не входящие в антецеденты. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$, причем список X параметров утверждения A_1, не входящих в антецеденты, непуст. Решается задача на исследование Z_1, посылками которой служат антецеденты теоремы и утверждения A_1, A_2. Неизвестные - все параметры посылок, кроме того имеются цели "известно" и "теорема". Затем решается задача на исследование Z_2 с теми же посылками, что у Z_1. Ее неизвестные - параметры посылок, причем имеются цели "известно" и "фокус X", "теорема". После решения задачи Z_2 выбирается содержащая переменную списка X элементарная посылка P, не входящая в список посылок задачи Z_1, возникший после ее решения, и не имеющая заголовка "актив". Проверяется, что все переменные P встречаются в исходной теореме и что P не является следствием антецедентов этой теоремы. Затем создается новая теорема с консеквентом P, антецедентами которой служат антецеденты исходной теоремы и утверждение A_1. Результат упрощается. (Прием определение - 154).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDE}$($B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & $E-$точка & квадрат($BCDE$) &
центр(A, фигура($BCDE$)) $\rightarrow$ прямая(AB) $\perp$ прямая(AC))

из теоремы

$\forall_{ABCDE}$($B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & $E-$точка & квадрат($BCDE$) $\rightarrow$
центр(A, фигура($BCDE$)) $\leftrightarrow$ $A-$точка & $A \in$ отрезок(BD) & $A \in$ отрезок(CE))

5. Вывод соотношений для числовых атомов, связанных с объектами антецедентов теоремы. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$, причем список X параметров утверждения A_1, не входящих в антецеденты, непуст. Решается задача на исследование Z_1, посылками которой служат антецеденты теоремы и утверждения A_1, A_2. Неизвестные - все параметры посылок, кроме того имеются цели "известно" и "теорема". После ее решения составляется список $B_1, \ldots, B_n$ входящих в посылки равенств, содержащих невырожденный числовой атом и не имеющих параметров, не входящих в антецеденты и A_1. Проверяется, что $n \geq 2$, и создается новая теорема с консеквентом B_1 & ... & B_n антецедентами которой служат антецеденты исходной теоремы и утверждение A_1. Результат упрощается. (Прием определение - 114).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}$($A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & $\neg(A=B)$ &
$\neg(A=D)$ & $\neg(A=C)$ & биссектриса($BACD$) $\rightarrow \angle(BAC) = 2\angle(BAD)$ &
$\angle(CAD) = \angle(BAD)$)

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ \neg(A = C) \to \text{биссектриса}(BACD) \leftrightarrow \angle(CAD) = \angle(DAB)\ \&\ \text{разныестороны}(B, C, \text{прямая}(AD))\ \&\ \angle(CAD) \leq \pi/2)$

6. Перенесение неравенства для одного числового атома на другой числовой атом с помощью связи между ними. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$. Решается задача на исследование Z_1, посылками которой служат антецеденты теоремы и утверждения A_1, A_2. Неизвестные - все параметры посылок, кроме того имеются цели "известно" и "теорема". В списке посылок находится строгое либо нестрогое неравенство D с невырожденным числовым атомом B_1 в одной части и константным термом t в другой. Находится также равенство $B_2 = T$ другого невырожденного числового атома B_2 выражению T, содержащему атом B_1. Усматривается, что T монотонно невозрастает при возрастании B_1 либо монотонно неубывает при таком возрастании. Определяется результат r замены в T атома B_1 на t. Затем неравенство D преобразуется в неравенство D_1, одной из частей которого служит B_2, а другой - r (в случае монотонного неубывания порядок операндов D сохраняется, иначе - изменяется). Создается новая теорема с консеквентом D_1, антецедентами которой служат антецеденты исходной теоремы и утверждение A_1. Результат упрощается. (Прием определение - 155).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{трапеция}(ABCD) \to \pi/2 \leq \angle(ABC))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \to \text{трапеция}(ABCD) \leftrightarrow \text{четырехугольник}(ABCD)\ \&\ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD))\ \&\ \angle(BAD) \leq \pi/2\ \&\ \angle(ADC) \leq \pi/2)$

7. Усиленный анализ контекста теоремы. Теорема представляет собой эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$ для кванторной расшифровки. Антецеденты элементарны, стартовая теорема цикла вывода - некоторое определение. Координаты в теореме не рассматриваются. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты теоремы и конъюнктивные члены утверждения A_2. Неизвестные - параметры посылок. Кроме того, имеются цель "теорвывод", подключающая дополнительные приемы решателя (как правило, просто имеющие ослабленные фильтры "стандартные" приемы), и цель "смтеорема", усиливающая анализ контекста. После решения выбирается посылка P, не имеющая заголовка "актив" и не входящая в исходный список посылок. Проверяется, что все ее переменные входят в исходную теорему и что она не является следствием антецедентов. Затем создается новая теорема с консеквентом P, антецедентами которой служат антецеденты исходной теоремы и утверждение A_1. Результат упрощается. (Прием развертка - 89).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_f(\text{сходится}(f)\ \&\ \text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \to \text{огрмнож}(\text{Val}(f)))$

   из теоремы

$\forall_f$(последовательность$(f, \mathbb{R})$ $\rightarrow$ сходится(f) $\leftrightarrow$ $\exists_a(\forall_d(0 < d$ & $d -$ число $\rightarrow$ $\exists_g(\forall_e(e-$натуральное & $g \leq e \rightarrow |f(e)-a| < d)$ & $g-$натуральное)) & $a-$число))

8. Вывод следствий из антецедентов определения и всех следствий этого определения, найденных в цикле вывода. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$, причем A_2 имеет связанные переменные. Создается список S, в который включаются антецеденты теоремы и конъюнктивные члены утверждения A_2. Начинается цикл пополнения списка S. Просматривается текущий список вывода. В нем находятся теоремы T, имеющие характеристику "вывод" либо "числовойатом" либо "числатом". Переменные переобозначены так, что не входят в исходную теорему. Определяется подстановка Q, переобозначающая переменные X антецедентов исходной теоремы в различные переменные Y таким образом, что антецеденты исходной теоремы переводятся в подмножество антецедентов теоремы T. Рассматривается список остальных антецедентов теоремы T. После обратного переобозначения в нем переменных Y на X возникает некоторый список утверждений D. Консеквент теоремы T переводится таким же переобозначением в утверждение E. Находится список Z переменных утверждений D, E, не вхоящих в исходную теорему. Если он пуст, проверяется пустота списка D, и в список S добавляется E. Иначе - в S добавляется импликация "$\forall_Z(D \rightarrow E)$". По окончании пополнения списка S решается задача на исследование с посылками S. Неизвестными служат все параметры посылок; имеется цель "известно". После решения выбирается элементарная посылка R, не имеющая заголовка "актив" и не входящая в исходный список посылок. Проверяется, что все ее переменные входят в исходную теорему и что она не является следствием антецедентов. Затем создается новая теорема с консеквентом R, антецедентами которой служат антецеденты исходной теоремы и утверждение A_1. Результат упрощается. (Прием определение - 238).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_G$(граф(G) & ациклический$(G) \rightarrow$ простграф(G))

   из теоремы

   $\forall_G$(граф$(G) \rightarrow$ ациклический$(G) \leftrightarrow \forall_M(\neg$(цикл$(M, G))))$

9. Попытка связать координатные выражения с невырожденными числовыми атомами. Теорема - тождество для выражений вида "крд(A, K, i)", не содержащее других невырожденных числовых атомов. Решается задача на исследование, посылками которой служат антецеденты теоремы и ее консеквент. Неизвестные - все параметры посылок. Имеются цели "известно", "теорема", "доппосылки" (разрешение вводить дополнительные посылки), "числатом" (указание на вывод соотношений, связывающих разряды координат с некоорднатными невырожденными числовыми атомами). После решения выбирается посылка B, при выводе которой использовался консеквент теоремы. Проверяется наличие в B невырожденного некоординатного числового атома. Проверяется наличие в B равенства. Составляется список S антецедентов теоремы и введенных при решении задачи дополнительных посылок. Если B имеет вид дизъюнкции, некоторый дизъюнктивный член которой - равенство, а остальные не содержат невырожденных числовых атомов, то B заменяется на указанное равенство,

а отрицания остальных членов добавляются к списку S. Проверяется, что в результате B - равенство. Создается новая теорема с консеквентом B и антецедентами S. Она упрощается. (Прием нормкрд - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdeftK}(c = \text{Место}(e,t)\ \&\ d = \text{Место}(e,t)\ \&\ \text{крд}(c,K,2) = \text{крд}(d,K,2)\ \&$
$e \in a\ \&\ f \in a\ \&\ t - \text{число}\ \&\ 0 \leq \text{крд}(c,K,1) - \text{крд}(d,K,1)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&$
$\text{Наклплоск}(a,K,b,t) \to \text{крд}(c,K,1) = \cos bl(cd) + \text{крд}(d,K,1))$

из теоремы

$\forall_{abcdeftK}(c = \text{Место}(e,t)\ \&\ d = \text{Место}(e,t)\ \&\ e \in a\ \&\ f \in a\ \&\ t - \text{число}\ \&$
$\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{Наклплоск}(a,K,b,t) \to (\text{крд}(c,K,1) - \text{крд}(d,K,1)) \sin b =$
$(\text{крд}(c,K,3) - \text{крд}(d,K,3)) \cos b)$

Вывод новых теорем путем анализа объединенного списка антецедентов и консеквента

1. Попытка вывести из консеквента равенство двух других числовых атомов. Консеквент имеет вид $A_1 = A_2$, где A_1, A_2 - невырожденные числовые атомы. Имеется единственное равенство в антецедентах. Выбирается новая переменная a, и решается задача на исследование, посылки которой суть антецеденты и утверждения $A_1 = a, A_2 = a, a -$ число. Неизвестные - параметры антецедентов, имеется цель "известно". Иными словами, в этой задаче a - единственный известный параметр. После решения в посылках находится равенство $B_1 = b$, где B_1 - невырожденный числовой атом, отличный от A_1, A_2; b - выражение, содержащее переменную a. В посылках же находится другое равенство $B_2 = b$, где B_2 - невырожденный числовой атом. Консеквентом теоремы становится равенство $B_1 = B_2$ антецеденты - те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием равны - 20).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ l(AC) = l(BC)\ \&\ C \in \text{прямая}(AB)\ \&$
   $A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \to$
   $\angle(BDC) = \angle(ADC))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ l(AC) = l(BC)\ \&\ C \in \text{прямая}(AB)\ \&$
   $A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \to$
   $\angle(BAD) = \angle(ABD))$

2. Попытка связать координатные выражения с невырожденными числовыми атомами. Теорема - тождество для выражений вида "крд(A,K,i)", не содержащее других невырожденных числовых атомов. Решается задача на исследование, посылками которой служат антецеденты теоремы и ее консеквент. Неизвестные - все параметры посылок. Имеются цели "известно", "теорема", "доппосылки" (разрешение вводить дополнительные посылки), "числатом" (указание на вывод соотношений, связывающих разряды координат с некоорднатными невырожденными числовыми атомами). После решения выбирается посылка

B, при выводе которой использовался консеквент теоремы. Проверяется наличие в B невырожденного некоординатного числового атома. Проверяется наличие в B равенства. Составляется список S антецедентов теоремы и введенных при решении задачи дополнительных посылок. Если B имеет вид дизъюнкции, некоторый дизъюнктивный член которой - равенство, а остальные не содержат невырожденных числовых атомов, то B заменяется на указанное равенство, а отрицания остальных членов добавляются к списку S. Проверяется, что в результате B - равенство. Создается новая теорема с консеквентом B и антецедентами S. Она упрощается. (Прием нормкрд - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdeftK}(c = \text{Место}(e,t)\ \&\ d = \text{Место}(e,t)\ \&\ \text{крд}(c,K,2) = \text{крд}(d,K,2)\ \&$
$e \in a\ \&\ f \in a\ \&\ t - \text{число}\ \&\ 0 \leq \text{крд}(c,K,1) - \text{крд}(d,K,1)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&$
$\text{Наклплоск}(a,K,b,t) \rightarrow \text{крд}(c,K,1) = \cos bl(cd) + \text{крд}(d,K,1))$

из теоремы

$\forall_{abcdeftK}(c = \text{Место}(e,t)\ \&\ d = \text{Место}(e,t)\ \&\ e \in a\ \&\ f \in a\ \&\ t - \text{число}\ \&$
$\text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{Наклплоск}(a,K,b,t) \rightarrow (\text{крд}(c,K,1) - \text{крд}(d,K,1))\sin b =$
$(\text{крд}(c,K,3) - \text{крд}(d,K,3))\cos b)$

3. Попытка вывода следствий антецедентов и консеквента, не содержащих однозначно определяемой переменной. Теорема имеет своим консеквентом нечисловое двуместное отношение, причем значение некоторой переменной x однозначно определяется консеквентом и частью антецедентов. Независимо от этого, значение переменной x однозначно определяется некоторой группой антецедентов. Решается задача на исследование Z_1 посылками которой служат антецеденты и консеквент. Неизвестные - все параметры посылок. Имеются также цели "известно", "теорвывод", а также цель, указывающая тенденицю к выводу следствий, не содержащих x. Затем решается задача на исследование Z_2, посылки которой - антецеденты и все возникшие после решения посылки задачи Z_1 с заголовком "актив", переменные которых включаются в список переменных антецедентов исходной теоремы. Цели те же, что в задаче Z_1. По окончании выбирается посылка $t_1 = t_2$ задачи Z_1, не являющаяся посылкой задачи Z_2, выведенная с использованием консеквента и не содержащая переменных, не встречающихся в антецедентах теоремы. Эта посылка заносится в список S, пополняемый далее за счет не содержащих x равенств $r_1 = r_2$ из списка посылок задачи Z_1, имеющих ровно два невырожденных числовых атома A_1, A_2, причем A_1 встречается в посылке $t_1 = t_2$, а A_2 не встречается. Равенство $r_1 = r_2$ разрешается относительно A_1, и результат замены в $t_1 = t_2$ подвыражения A_1 на результат указанного разрешения добавляется в список S. По окончании пополнения списка S выбирается произвольный его элемент, который становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы и утверждения, необходимые для сопровождения консеквента по о.д.з. Результат упрощается. (Прием опрзнач - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ l(AC) = l(BC)\ \&$
$l(AD) = l(BD)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
$D - \text{точка} \rightarrow l(AB) = 2\cos(\angle(ABC))l(BC))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ l(AC) = l(BC)\ \&\ l(AD) = l(BD)\ \&$
$D \in$ прямая$(AB)\ \&\ A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&\ C -$ точка $\&\ D -$ точка $\rightarrow$
прямая$(AB) \perp$ прямая$(CD))$

В качестве переменной x здесь выступает D.

4. Вывод не содержащих описателей следствий из консеквента, содержащего описатель "класс". Теорема - определение выражения t путем указания условий на него. Консеквент P - конъюнкция этих условий и не имеет заголовка "равно" либо "эквивалентно". Утверждение P содержит описатель "класс" и не содержит кванторов. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и консеквент. Единственная цель - "теорема". После решения выбирается посылка P, содержащая подтерм t и не содержащая параметров, отсутствовавших в исходных посылках. P - элементарное утверждение либо простая импликация. Это утверждение становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием определение - 20).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(\neg(a = \emptyset)\ \&\ a -$ set $\&\ a \subseteq \mathbb{R}\ \&$ огрснизу$(a) \rightarrow$ нижняягрань$(\inf(a), a))$

   из теоремы

   $\forall_a(a -$ set $\&$ огрснизу$(a)\ \&\ \neg(a = \emptyset)\ \&\ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow$ наибольший$(\inf(a),$
   $\text{set}_b($нижняягрань$(b, a))))$

5. Попытка анализа контекста теоремы для вывода равенств невырожденных числовых атомов. Теорема - соотношение для невырожденных числовых атомов (тождество). Решается задача на исследование Z_1, посылками которой служат антецеденты и консеквент. Неизвестные - все параметры посылок. Имеется также цель "теорвывод". Затем решается задача на исследование Z_2, посылки которой - антецеденты и все возникшие после решения посылки задачи Z_1 с заголовком "актив". Цели те же, что в задаче Z_1. По окончании выбирается посылка $t_1 = t_2$ задачи Z_1, не являющаяся посылкой задачи Z_2, у которой t_1, t_2 - невырожденные числовые атомы. Проверяется, что эта посылка не содержит переменных, не встречающихся в антецедентах теоремы и что в посылках задачи Z_2 нет двух равенств вида $t_1 = a, t_2 = a$. Тогда создается новая теорема с консеквентом $t_1 = t_2$. Антецедентами служат антецеденты исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 36).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(D = F)\ \&$
   $\neg(E = F)\ \&\ l(AC) = l(DF)\ \&\ \angle(ACB) = \angle(DFE)\ \&\ A -$ точка $\&$
   $B -$ точка $\&\ C -$ точка $\&\ D -$ точка $\&\ E -$ точка $\&\ F -$ точка $\&$
   прямая$(AB) \perp$ прямая$(BC)\ \&$ прямая$(DE) \perp$ прямая$(EF) \rightarrow l(EF) = l(BC))$

   из теоремы

$\forall_{ABCDEF}(A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&\ E-$точка $\&$
$F-$точка $\&\ \neg(D=F)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(E=F)\ \&\ \neg(D=E)\ \&$
$\neg(B=C)\ \&\ \neg(A=B)\ \&$ прямая$(AB)\perp$ прямая$(BC)\ \&$
прямая$(DE)\perp$ прямая$(EF)\ \&\ l(AC)=l(DF)\ \&\ \angle(ACB)=\angle(EFD)\rightarrow$
$l(AB)=l(DE))$

6. Попытка анализа контекста теоремы для получения нечисловых предикатов. Аналогично предыдущему, но в списке посылок задачи Z_1 выбирается посылка P без связанных переменных, не имеющая своим заголовком символ "актив", либо "равно", либо "меньше", либо "меньшеилиравно". Проверяется, что она не входит в список посылок задачи Z_2, и создается новая теорема с консеквентом P. Антецеденты - те же, что в исходной теореме. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 20).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(B=D)\ \&\ \angle(ABD)=\angle(CBD)\ \&$
   $B\in$ отрезок$(AC)\ \&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&$
   $D-$точка $\rightarrow$ прямая$(AC)\perp$ прямая$(BD))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(B=D)\ \&\ \angle(ABD)=\angle(CBD)\ \&$
   $B\in$ отрезок$(AC)\ \&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&$
   $D-$точка $\rightarrow\angle(CBD)=\pi/2)$

7. Попытка анализа контекста теоремы для вывода равенств невырожденных числовых атомов, содержащих только переменные консеквента. Теорема - соотношение для невырожденных числовых атомов. Решается задача на исследование Z_1, посылками которой служат антецеденты и консеквент. Неизвестные - все параметры посылок. Имеется также цель "теорвывод". После решения в ее списке посылок выбирается равенство P, не входящее в ее исходный список посылок и не имеющее переменных, отсутствующих в антецедентах. Параметры P включаются в список параметров консеквента. Список X параметров антецедентов, не входящих в P, непуст. Длина терма P не очень велика. Не усматривается, что P - следствие антецедентов, не содержащих переменные X. Тогда создается новая теорема с консеквентом P. Антецеденты - те же, что в исходной теореме. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 84).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abeghAC}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(e=g)\ \&\ \neg(g=h)\ \&\ \neg(h=A)\ \&\ \neg(h=C)\ \&$
   $\neg(A=C)\ \&\ h\in$ прямая$(eg)\ \&\ h\in$ окружность$(ab)\ \&\ A\in$ окружность$(ab)\ \&$
   $C\in$ отрезок$(gA)\ \&\ C\in$ окружность$(ab)\ \&\ a-$точка $\&\ b-$точка $\&\ e-$точка $\&$
   $g-$точка $\&\ h-$точка $\&\ A-$точка $\&\ C-$точка $\&$ прямая$(ah)\perp$ прямая$(eg)\rightarrow$
   $l(gA)l(gC)=l(gh)^2)$

   из теоремы

   $\forall_{abeghAC}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(e=g)\ \&\ \neg(g=h)\ \&\ \neg(h=A)\ \&\ \neg(h=C)\ \&$
   $\neg(A=C)\ \&\ h\in$ прямая$(eg)\ \&\ h\in$ окружность$(ab)\ \&\ A\in$ окружность$(ab)\ \&$
   $C\in$ отрезок$(gA)\ \&\ C\in$ окружность$(ab)\ \&\ a-$точка $\&\ b-$точка $\&\ e-$точка $\&$

$g-$точка & $h-$точка & $A-$точка & $C-$точка & прямая$(ah) \perp$ прямая$(eg) \rightarrow \angle(gAh) = \angle(ghC))$

8. Попытка анализа контекста теоремы для вывода дополнительных соотношений, позволяющих в сочетании с исходным соотношением выразить сложный числовой атом через равенство для простых атомов (умножение соотношений пропорциональности). Теорема - соотношение пропорциональности "$k_1A_1 = k_2A_2$" для двух невыролженных числовых атомов A_1, A_2. Коэффициенты k_1, k_2 содержат единственный невырожденный числовой атом A_3, причем его сложность больше сложности атомов A_1, A_2. Выбираются новые переменные a, b, c и решается задача на исследование, посылками которой служат антецеденты и консеквент исходной теоремы, а также равенства $A_1 = a, A_2 = b, A_3 = c$. Неизвестные-все параметры атомов A_1, A_2, A_3. Имеются цели "известно" и "теорвывод". После решения в списке посылок находится равенство, превращающееся после подстановки A_1, A_2, A_3 вместо a, b, c в другое соотношение пропорциональности "$m_1B_1 = m_2B_2$" для невырожденных числовых атомов B_1, B_2. Коэффициенты m_1, m_2 содержат единственный невырожденный числовой атом, который совпадает с A_3 и имеет оценку сложности, большую, чем B_1 и B_2. Усматривается, что A_1, B_1 отличны от 0. Выбираются новые переменные p, q, и консеквентом новой теоремы становится равенство "$pk_1m_1 = qk_2m_2$". Антецеденты получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы равенства "$qA_1B_1 = pA_2B_2$" и утверждений "$p-$число", "$q-$число". Результат упрощается. (Прием числовойатом - 32).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abABC}(\neg(A = B)$ & $\neg(A = C)$ & $\neg(B = C)$ & $al(AB)l(AC) = bl(BC)^2$ & $a-$число & $b-$число & $A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC) \rightarrow a\sin(2\angle(ABC)) = 2b)$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $\neg(B = C)$ & $\neg(A = C)$ & $\neg(A = B)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC) \rightarrow l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$

9. Попытка анализа контекста теоремы для вывода дополнительных соотношений, позволяющих в сочетании с исходным соотношением выразить сложный числовой атом через равенство для простых атомов (сложение соотношений пропорциональности). Начало приема совпадает с началом предыдущего приема, однако проверка отличия от 0 атомов A_1, B_1 не выполняется. Вместо этого проверяется, что $A_2 = B_2$ и что от нуля отличны k_1, m_1, A_2. Далее выбираются новые переменные p, q, и консеквентом новой теоремы становится "$pk_2m_1 + pm_2k_1 = qk_1m_1$". Антецеденты получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы равенства "$pA_1 + pB_1 = qA_2$" и утверждений "$p-$число", "$q-$число". Результат упрощается. (Прием числовойатом - 33).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abABC}(\neg(A = B)$ & $\neg(A = C)$ & $\neg(B = C)$ & $al(AB) + al(AC) = bl(BC)$ & $a-$число & $b-$число & $A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & прямая$(AB) \perp$ прямая$(AC) \rightarrow a\sqrt{2}\sin(\pi/4 + \angle(ABC)) = b)$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = C)\ \&$
$\neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$

10. Решение задачи на исследование с целью "известно" для выода равенства двух невырожденных числовых атомов. Теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. Решается задача на исследование Z_1, посылки которой - антецеденты и консеквент. Неизвестные - все параметры посылок; имеется также цель "теорвывод". После ее решения решается задача на исследование Z_2, посылки которой - антецеденты теоремы м все утверждения с заголовком "актив" из списка посылок задачи Z_1. Неизвестные - параметры посылок; имеется цель "теорвывод". Наконец, решается задача на исследование Z_3, посылки которой - антецеденты и консеквент. Неизвестные - параметры ее посылок. Имеются также цели "известно", "теорвывод". После решения в списке посылок задачи Z_3 выбирается равенство $t_1 = t_2$, не входящее в список посылок задачи Z_2. t_1 - невырожденный числовой атом, входящий в консеквент. Просматриваются посылки вида $t_3 = t_2$, где t_3 - невырожденный числовой атом, не входящий в консеквент. Если t_2 - невырожденный числовой атом, не входящий в консеквент, то рассматривается также случай, когда в качестве t_3 берется t_2. Консеквентом новой теоремы становится равенство $t_1 = t_3$; антецеденты - те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 79).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdeAB}(\neg(b = c)\ \&\ \neg(b = d)\ \&\ \neg(c = e)\ \&\ \neg(d = e)\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
$b \in \text{отрезок}(ac)\ \&\ b \in \text{окружность}(AB)\ \&\ c \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$d \in \text{отрезок}(ae)\ \&\ d \in \text{окружность}(AB)\ \&\ e \in \text{окружность}(AB)\ \&\ a - \text{точка}\ \&$
$b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \rightarrow$
$\angle(aec) = \angle(abd))$

из теоремы

$\forall_{abcdeAB}(e - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&$
$a - \text{точка}\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ \neg(b = d)\ \&\ \neg(c = e)\ \&\ \neg(d = e)\ \&\ b \in \text{отрезок}(ac)\ \&$
$b \in \text{окружность}(AB)\ \&\ c \in \text{окружность}(AB)\ \&\ d \in \text{отрезок}(ae)\ \&$
$d \in \text{окружность}(AB)\ \&\ e \in \text{окружность}(AB)\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ \ \&\ d - \text{точка} \rightarrow$
$\angle(aec) + \angle(cbd) = \pi)$

11. Вывод общих следствий антецедентов и консеквента с созданием дополнительных посылок. Теорема - кванторная импликация, используемая для создания приема вывода в посылках задач (не тождество и не эквивалентность). Решается задача на исследование Z_1, посылки которой - антецеденты и консеквент. Неизвестные - все параметры посылок; имеются также цели "теорема", "известно", "доппосылки". Последняя цель разрешает ввод дополнительных посылок при решении задачи. После решения задачи обнаруживается непустой список S дополнительных посылок. Рассматривается список X их параметров. Если имеется комментарий посылок "(исходныепосылки x A)", где A - конъюнкция посылок, сопровождавших ввод новой переменной x, то A добавляется к S, а x - к X. Проверяется, что все параметры утверждений S встречаются в списке X. Решается задача на исследование Z_2, посылки которой - антецеденты теоремы

и S. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "теорема" и "известно". После решения выбирается посылка P задачи Z_1, не входящая в список посылок задачи Z_2, не имеющая заголовка "актив", отличная от консеквента и не являющаяся следствием посылок задачи Z_2. Она становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы, утверждения S и утверждения, необходимые для сопровождения P по о.д.з. Результат упрощается. (Прием вывод - 69).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDEF}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(C=E)\ \&\ \neg(E=F)\ \&\ E \in \text{прямая}(CD)\ \&$
$E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ F \in \text{окружность}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&$
$C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&$
$\text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB)\ \&$
$\text{разныестороны}(A, C, \text{прямая}(EF)) \to \angle(EAF) = 2\angle(CEF))$

из теоремы

$\forall_{ABCDF}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&$
$\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB)\ \&$
$F \in \text{окружность}(AB) \to \text{однасторона}(A, F, \text{прямая}(CD)))$

12. Вывод общих следствий антецедентов и консеквента без создания дополнительных посылок. Начало приема такое же, как в предыдущем пункте. Однако, список S дополнительных посылок оказывается пустым. После решения задачи Z_1 выбирается ее элементарная посылок P, при выводе которой использовался консеквент и которая не является следствием антецедентов. Она становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием вывод - 91).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{atKT}(t \in T\ \&\ \text{мточка}(a)\ \&\ \text{одномерндвиж}(a, K, T)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\ \&$
$\text{Числотр}(T) \to \text{крд}(\text{Сила}(a, t), K, 3) = 0)$

из теоремы

$\forall_{atKT}(t \in T\ \&\ \text{мточка}(a)\ \&\ \text{одномерндвиж}(a, K, T)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\ \&$
$\text{Числотр}(T) \to \text{одномерный}(\text{Ускорение}(a, K, t), K))$

13. Попытка анализа следствий антецедентов и консеквента для получения соотношения с более простыми числовыми атомами, чем в консеквенте. Теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты теоремы и ее консеквент. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "теорема", "известно", "доппосылки". После решения выбирается посылка P без связанных переменных, при выоде которой использовался консеквент. Эта посылка содержит невырожденные числовые атомы, причем оценка наиболее сложного из них меньше оценки наиболее сложного из числовых атомов консеквента. Эта посылка становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты ее - антецеденты исходной теоремы и все дополнительные посылки, введенные при решении задачи. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 85).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC))\ \&$
$D \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow$
$\sin(\angle(ABD))l(AB)l(BD) + \sin(\angle(CBD))l(BC)l(BD) =$
$\sin(\angle(ABD) + \angle(CBD))l(AB)l(BC))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC))\ \&$
$D \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow S(\text{фигура}(ABC)) =$
$S(\text{фигура}(ABD)) + S(\text{фигура}(BCD)))$

14. Вывод следствий из антецедентов и консеквента. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель "отображение". Описатель "класс" и символ "вариант" в левой части отсутствует. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и равенство $A_2 = A_1$, сопровожденное комментарием, блокирующим перестановку его операндов. Неизвестные - все параметры посылок; имеются также цели "известно", "теорвывод". После решения выбирается посылка P без связанных переменных, не входящая в исходный список посылок, при выводе которой использовалось равенство $A_2 = A_1$. Заголовок P отличен от "актив"; ее параметры те же, что у консеквента. Утверждение P становится консеквентом новой теоремы; антецеденты ее те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием описатель - 101).

Пример: вывод теоремы

$\forall_G(\text{граф}(G)\ \&\ \text{конечнграф}(G) \rightarrow \text{card}(\text{set}_a(\neg(\text{степеньвершины}(a, G) - \text{even})\ \&$
$a \in \text{вершины}(G))) - \text{even})$

из теоремы

$\forall_G(\text{граф}(G)\ \&\ \text{конечнграф}(G) \rightarrow \sum_{a, a \in \text{вершины}(G)} \text{степеньвершины}(a, G) =$
$2\text{card}(\text{ребра}(G)))$

15. Вывод следствий из антецедентов и равенства для определяемого выражения. Теорема - определение $A_1 = A_2$. Выбирается новая переменная x, и решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и равенство $x = A_2$. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "теорвывод". После решения выбирается содержащая x элементарная посылка P, все параметры которой встречаются в исходной списке посылок и не имеющая заголовка "актив". Определяется результат Q подстановки в P выражения A_1 вместо x. Он становится консеквентом новой теоремы; антецеденты ее - те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием определение - 240).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abn}(n - \text{целое}\ \&\ 0 \leq n\ \&\ \text{двнабор}(a, n)\ \&\ \text{двнабор}(b, n) \rightarrow \text{двнабор}(a \cdot b, n))$

из теоремы

$\forall_{abn}(n - \text{целое}\ \&\ 0 \leq n\ \&\ \text{двнабор}(a, n)\ \&\ \text{двнабор}(b, n) \rightarrow a \cdot b =$
$\lambda_i(a(i) \cdot b(i), i \in \{1, \ldots, n\}))$

Здесь точкой обозначены как конъюнкция двоичных наборов "кнвект", так и обычная двоичная конъюнкция "кн".

16. Попытка разделения координат, встречающихся в соотношении пропорциональности. Теорема - соотношение пропорциональности вида "k_1крд$(A, K, i) = k_2$крд(A, K, j)". Среди антецедентов нет равенства. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и консеквент. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "теорвывод", "доппосылки". После решения обнаруживается единственная дополнительная посылка B, причем ее параметры встречаются в исходных посылках. Список S равенств в посылках, имеющих подвыражение вида "крд(A, K, p)" и не имеющих других вхождений символа "крд", причем таких, что все их параметры встречаются в исходных посылках, содержит не менее 2 элементов. Консеквентом новой теоремы становится конъюнкция утверждений S; антецедентами - антецеденты исходной теоремы и B. Результат упрощается. (Прием пропорция - 19).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{bcdeK}(e -$ число & прямкоорд(K) & лежитна(d, c, e) & мточка(d) & Наклплоск(c, K, b, e) & вертплоск(силатрения$(d, c, e), K)$ & мповерхн(c) & Трехмерн$(K) \to |\sin b|$длина(силатрения$(d, c, e)) =$ |крд(силатрения$(d, c, e), K, 3)|$ & $\cos b$длина(силатрения$(d, c, e)) =$ |крд(силатрения$(d, c, e), K, 1)|$ & крд(силатрения$(d, c, e), K, 2) = 0)$

    из теоремы

    $\forall_{bcdeK}(e -$ число & прямкоорд(K) & лежитна(d, c, e) & мточка(d) & Наклплоск(c, K, b, e) & мповерхн(c) & Трехмерн$(K) \to$ $\cos b$крд(силатрения$(d, c, e), K, 3) = \sin b$крд(силатрения$(d, c, e), K, 1))$

17. Вывод элементарных общих следствий антецедентов и консеквента. Теорема - кванторная импликация, корневое отношение консеквента которой имеет наибольшую сложность среди всех ее подтермов. Консеквент не имеет связанных переменных. Теорема - стартовая для цикла вывода. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и консеквент. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "теоремы". После решения выбирается элементарная посылка P, выведенная при использовании консеквента и не содержащая переменных, отсутствовавших в исходных посылках. Проверяется, что она не является следствием антецедентов. Тогда создается новая теорема с консеквентом P, антецеденты которой - те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием реализация - 28).

Пополнение консеквента дополнительными следствиями антецедентов

1. Анализ контекста теоремы для получения дополнительного соотношения, связывающего новый числовой атом со старыми. Теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и консеквент теоремы. Неизвестные - параметры посылок. Имеется цель "теорвывод". После решения в списке посылок выбирается равенство A, содержащее хотя бы один невырожденный числовой атом консеквента и ровно один такой атом, не входящий в консеквент. Все параметры утверждения

A встречаются в антецедентах. При получении A использовался консеквент. A не является следствием только консеквента и о.д.з. консеквента. Новая теорема получается из исходной заменой консеквента на конъюнкцию этого консеквента и A. (Прием числовойатом - 57).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ l(AC)=l(BC)\ \&$
$D\in$ прямая$(AB)\ \&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&$
прямая$(AB)\perp$ прямая$(CD)\to\angle(ACD)=\angle(BCD)\ \&\ 2\angle(ACD)=\angle(ACB))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ l(AC)=l(BC)\ \&$
$D\in$ прямая$(AB)\ \&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&$
прямая$(AB)\perp$ прямая$(CD)\to\angle(ACD)=\angle(BCD))$

2. Добавление к консеквенту следствий, выведенных во вспомогательной задаче на исследование и не содержащих новых переменных. Теорема - кванторная импликация с элементарными антецедентами и консеквентом, имеющим вид конъюнкции утверждений. Решается задача на описание, посылки которой - антецеденты и конъюнктивные члены консеквента. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "теорвывод". После решения составляется список S посылок, не имеющих заголовка "актив", не являющихся антецедентами либо следствиями антецедентов, не используемых для сопровождения по о.д.з. и не имеющих переменных, не входящих в консеквент. Проверяется, что этот список имеет больше утверждений, чем имел список конъюнктивных членов консеквента. Консеквентом новой теоремы становится конъюнкция утверждений S; антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием конъюнкция - 8).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDEF}(\neg(A=C)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg($прямая$(AC)=$ прямая$(BC))\ \&$
$l(AE)=l(CE)\ \&\ l(BD)=l(CD)\ \&\ D\in$ прямая$(BC)\ \&\ E\in$ прямая$(AC)\ \&$
$F\in$ прямая$(AD)\ \&\ F\in$ прямая$(BE)\ \&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&$
$D-$точка $\&\ E-$точка $\&\ F-$точка $\to 2l(EF)=l(BF)\ \&\ 3l(EF)=l(BE)\ \&$
$F\in$ отрезок$(BE))$

из теоремы

$\forall_{ABCDEF}(\triangle(ABC)\ \&\ D-$точка $\&\ E-$точка $\&\ F-$точка $\&\ D\in$ отрезок$(BC)\ \&$
$l(BD)=l(DC)\ \&\ E\in$ отрезок$(AC)\ \&\ l(AE)=l(EC)\ \&\ F\in$ прямая$(BE)\ \&$
$F\in$ прямая$(AD)\to F\in$ отрезок$(BE)\ \&\ 2l(FE)=l(BF))$

3. Добавление к консеквенту следствий, выведенных во вспомогательной задаче на исследование и не содержащих новых переменных. Аналогично предыдущему, но теорема - кванторная импликация, консеквентом которой служит отличный от равенства нечисловой двуместный предикат. Проверяется, что список S не менее чем двухэлементный. В остальном все так же, как выше. (Прием отношение - 35).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDEFG}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC))\ \&$
$l(AD) = l(BD)\ \&\ l(AF) = l(CF)\ \&\ l(BE) = l(CE)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&$
$E \in \text{прямая}(BC)\ \&\ F \in \text{прямая}(AC)\ \&\ G \in \text{отрезок}(AE)\ \&\ G \in \text{отрезок}(BF)\ \&$
$A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&$
$G - \text{точка} \to 2l(DG) = l(CG)\ \&\ 3l(DG) = l(CD)\ \&\ G \in \text{отрезок}(CD))$

из теоремы

$\forall_{ABCDEFG}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC))\ \&$
$l(AD) = l(BD)\ \&\ l(AF) = l(CF)\ \&\ l(BE) = l(CE)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&$
$E \in \text{прямая}(BC)\ \&\ F \in \text{прямая}(AC)\ \&\ G \in \text{отрезок}(AE)\ \&\ G \in \text{отрезок}(BF)\ \&$
$A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&$
$G - \text{точка} \to G \in \text{отрезок}(CD))$

Вывод следствий из антецедентов и обеих частей определяющей эквивалентности для реализации антецедентов дополнительной теоремы

1. Использование следствий обеих частей определения элементарного утверждения и однозначной определимости вспомогательного параметра. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты теоремы и A_1, A_2. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "теорема". После решения в посылках находится утверждение $P(x)$, где x - переменная, отсутствовавшая в теореме. По символу P находится дополнительная теорема, у которой консеквент имеет вид равенства $y = z$ двух переменных, симметричным образом входящих в антецеденты, причем имеется антецедент $P(y)$. Никакой антецедент не содержит y и z одновременно. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Составляется список S результатов подстановки x вместо y в антецеденты дополнительной теоремы, не содержащие z. Список Q параметров утверждений S, отличных от x, непуст. Определяется подстановка D вместо переменных Q, переводящая утверждения S в некоторые посылки задачи на исследование. Определяется список E_1 использованных при этом посылок. Находится подсписок E_2 списка E_1 утверждений, содержащих x. Выбирается посылка R задачи на исследование, содержащая x и не входящая в E_2, причем такая, что ее параметры включаются в параметры антецедентов исходной теоремы и утверждений E_2. Задача на доказательство не усматривает, что R - следствие этих антецедентов и E_2. Тогда создается новая теорема с консеквентом R, антецеденты которой - антецеденты исходной теоремы, E_2 и A_1. Результат упрощается. (Прием определение - 75).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(\neg(D = E)\ \&\ F \in \text{прямая}(AC)\ \&\ F \in \text{окружность}(DE)\ \&\ A - \text{точка}$
   $\&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&$
   $\text{окружность}(DE)\ \text{вписана в фигура}(ABC) \to F \in \text{отрезок}(AC))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \triangle(ABC)\ \&\ D - \text{точка}\ \&$
   $E - \text{точка}\ \&\ \neg(D = E) \to \text{окружность}(DE)\ \text{вписана в фигура}(ABC) \leftrightarrow$

отрезок(AB) – касательная к окружность(DE) & отрезок(BC) – касательная к окружность(DE) & отрезок(AC) – касательная к окружность(DE))

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDEF}(A$ – точка & B – точка & D – точка & E – точка & $\neg(D = E)$ & $\neg(A = B)$ & отрезок(AB) – касательная к окружность(DE) & C – точка & $C \in$ окружность(DE) & $C \in$ прямая(AB) & F – точка & $F \in$ окружность(DE) & $F \in$ прямая$(AB) \to C = F)$

Решение задачи на исследование для выражения старых параметров через новые

1. Попытка исключить дублирование в определяющей части с использованием ее элементарного следствия. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$, причем определяющая часть A_2 не имеет связанных переменных. Решается задача на исследование Z_1, посылки которой - антецеденты теоремы и A_1, A_2. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "теорема". После решения в посылках выбирается элементарное утверждение P, не являющееся исходной посылкой, не имеющее заголовка "актив" и не содержащее переменных, не входящих в исходные посылки. Выбирается переменная x, имеющая в A_2 более одного вхождения, причем такая, что некоторый входящий в A_2 невырожденный числовой атом t имеет единственную переменную x. Выбирается новая переменная y, и находится результат A_3 замены в A_2 всех вхождений t на y. Составляется список S, образованный антецедентами, утверждением P и конъюнктивными членами утверждения A_3. Для пополнения этого списка решается задача на исследование Z_2, посылки которой - S и равенство $t = y$. Неизвестные - все параметры посылок, причем указывается тенденция к выводу следствий, не содержащих x. После решения к списку S добавляются все посылки, имеющие единственную переменную y. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство $t = y$ - следствие S. Определяется подсписок Q списка S, полученный отбрасыванием антецедентов. Этот подсписок разбивается на подсписок Q_1 утверждений, содержащих y, и подсписок Q_2 остальных утверждений. Консеквентом новой теоремы становится $A_1 \leftrightarrow Q_2$ & $\exists_y(Q_1)$. Антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием определение - 87).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{Af}(A$ – set & конечное$(A) \to$ перестановка$(f, A) \leftrightarrow \exists_a(\mathrm{Dom}(f) = \{1, \ldots, a\}$ & a – целое & $0 \le a)$ & $A = \mathrm{Val}(f)$ & f – функция & взаимнооднозначно$(f))$

   из теоремы

   $\forall_{Af}(A$ – set & конечное$(A) \to$ перестановка$(f, A) \leftrightarrow f$ – функция & $\mathrm{Dom}(f) = \{1, \ldots, \mathrm{card}(A)\}$ & $\mathrm{Val}(f) = A)$

По итогам предварительного анализа следствий из антецедентов и обеих частей эквивалентности формулируется некоторое дополнительное условие A. После анализа пополненного контекста выявляются новые утверждения. Из отрицания таких утверждений выводится отрицание утверждения A

1. Вывод импликации для проверочного оператора усмотрения различия объектов заданного типа. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$. Решается задача на исследование Z_1, посылки которой - антецеденты теоремы и A_1, A_2. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "теорема". После решения в посылках находятся утверждения "актив(t_1)", "актив(t_2)", у которых заголовки t_1, t_2 совпадают и равны f. Существует специальный оператор усмотрения различия атомарных объектов с заголовком f. Общее число посылок с заголовком "актив" не более 4. Решается задача на исследование Z_2, посылки которой получены добавлением к посылкам Z_1 утверждения $t_1 = t_2$. Проверяется, что после решения не возникает посылка "ложь". Выбирается посылка P задачи Z_2, не имеющая заголовка "актив", не входящая в список посылок задачи Z_1 (после решения последней), отлисная от $t_1 = t_2$ и не имеющая переменных, не входящих в ее исходные посылки. При помощи еще одной задачи на исследование проверяется, что добавление $\neg(P)$ к посылкам задачи Z_1 не ведет к противоречию. Тогда создается новая теорема, консеквент которой - "$\neg(t_1 = t_2)$", а антецеденты получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы утверждений $A_1, \neg(P)$. Список антецедентов упрощается. (Прием определение - 116).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
   $\neg(A = D)\ \&\ \text{биссектриса}(BACD)\ \&\ \neg(C \in \text{прямая}(AB)) \rightarrow$
   $\neg(\text{прямая}(AD) = \text{прямая}(AC)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
   $\neg(A = D)\ \&\ neg(A = C) \rightarrow \text{биссектриса}(BACD) \leftrightarrow \angle(CAD) = \angle(DAB)\ \&$
   $\text{разныестороны}(B, C, \text{прямая}(AD))\ \&\ \angle(CAD) \leq \pi/2)$

Анализ объединения двух контекстов - исходного объединения антецедентов с частями эквивалентности в консеквенте и контекста, полученного заменой некоторого параметра на новую переменную

1. Варьирование одного из параметров антецедента и анализ общего контекста. Теорема - кванторная импликация, консеквентом которой служит отличный от равенства нечисловой двуместный предикат. Выбирается такой параметр x антецедентов, для которого неверно, что его значение однозначно определяется консеквентом и частью антецедентов, а независимо от этого - только некоторой группой антецедентов. Берется параметр, имеющий наименьшее число вхождений в существенные антецеденты. Выбирается новая переменная y и решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты теоремы и консеквент, а также результаты замены x на y в антецедентах и консеквенте. Неизвестные -

все параметры посылок; имеются также цели "теорвывод", "известно", "доппосылки". Проверяется, что после решения не возникает посылки вида $y = t$. Выбирается посылка P, содержащая одновременно x и y. Она становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты получаются объединением антецедентов исходной теоремы с результатами замены в них x на y. Если при решении добавлялись новые посылки, то они тоже включаются в список антецедентов. Результат упрощается. (Прием отношение - 40).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aABCD}(\neg(a = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ l(aA) = l(aB)\ \&$
$l(AC) = l(BC)\ \&\ l(AD) = l(BD)\ \&\ C \in \text{плоскость}(aAB)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB)\ \&$
$a - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \rightarrow C \in \text{прямая}(aD))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ l(AC) = l(BC)\ \&\ l(AD) = l(BD)\ \&$
$D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \rightarrow$
$\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD))$

Анализ следствий из антецедентов и подкванторных утверждений квантора существования

1. Попытка вывода из подкванторных утверждений квантора существования следствий, не зависящих от переменных связывающей приставки. Теорема - эквивалентность вида $A_1 \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(A_2)$, где утверждение A_1 элементарно. Решается задача на исследование, посылками которой служат антецеденты и A_2. Цели задачи - "исключ $x_1 \ldots x_k$" и "теорвывод". Первая из них ориентирует на вывод утверждений, не содержащих $x_1, \ldots, x_k$. После решения выбирается посылка P, не имеющая заголовка "актив", не содержащая переменных $x_1, \ldots, x_k$, не являющаяся исходной посылкой и имеющая параметр утверждения A_1. Составляется список S, в который включаются антецеденты, A_1 и необходимые для сопровождения P по о.д.з. утверждения. Если P имеет переменную, не входящую в исходные посылки, то к S добавляются все исходные утверждения, сопровождавшие первичный ввод этой переменной при решении задачи. Консеквентом новой теремы служит P, антецедентом - S. Результат упрощается. (Прием развертка - 41).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C \in \text{прямая}(AB))\ \&\ D \in \text{фигура}(ABC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
   $B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \rightarrow \text{однасторона}(C, D, \text{прямая}(AB)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(C \in \text{прямая}(AB)) \rightarrow$
   $D \in \text{фигура}(ABC) \leftrightarrow \exists_E(E \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ D \in \text{отрезок}(CE)))$

2. Добавление к подкванторным утверждениям следствий, выведенных во вспомогательной задаче на исслелование и содержащих только переменные консеквента источника. Теорема - кванторная импликация с консеквентом вида

"$\exists_x(A_1$ & ... & A_n". Она была выведена другим приемом из теоремы T с консеквентом A_i, усмотревшим реализуемость группы антецедентов с параметром x и перенесшим эти антецеденты под квантор существования. Решается задача на исследование, посылками которой служат антецеденты исходной теоремы и $A_1, \ldots, A_n$. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "теорвывод". После решения находится список S посылок, не имеющих заголовка "актив", имеющих параметр x и содержащих только параметры утверждения A_i. Проверяется, что он не включается в список $A_1, \ldots, A_n$. Новая теорема получается из исходной занесением под квантор существования в консеквенте всех утверждений списка S (старые утверждения A_i под квантором сохраняются). Результат упрощается. (Прием допконтекст - 8).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCEFG}(\neg(A = C)$ & $\neg(B = C)$ & $\neg($прямая$(AC) =$ прямая$(BC))$ &
$l(AF) = l(CF)$ & $l(BE) = l(CE)$ & $E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AC) &
$G \in$ отрезок(AE) & $G \in$ отрезок(BF) & $A -$ точка & $B -$ точка &
$C-$точка & $E-$точка & $F-$точка & $G-$точка $\rightarrow \exists_D(2l(DG) = l(CG)$ & $3l(DG) =$
$l(CD)$ & $l(AD) = l(BD)$ & $D \in$ отрезок(AB) & $G \in$ отрезок(CD) & $D -$точка$))$

из теоремы

$\forall_{ABCEFG}(\neg(A = C)$ & $\neg(B = C)$ & $\neg($прямая$(AC) =$ прямая$(BC))$ & $l(AF) =$
$l(CF)$ & $l(BE) = l(CE)$ & $E \in$ прямая(BC) & $F \in$ прямая(AC) &
$G \in$ отрезок(AE) & $G \in$ отрезок(BF) & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка &
$E -$ точка & $F -$ точка & $G -$ точка $\rightarrow \exists_D(l(AD) = l(BD)$ & $D \in$ отрезок(AB) &
$G \in$ отрезок(CD) & $D -$ точка$))$

3. Добавление к подкванторным утверждениям консеквента равенств, каждый числовой атом которых содержит переменную связывающей приставки. Теорема - кванторная импликация с консеквентом вида $\exists_{x_1 \ldots x_m}(A_1$ & ... & $A_n)$. Стартовая теорема T цикла вывода - определение $B_1 \leftrightarrow B_2$, причем список антецедентов текущей теоремы получается из списка антецедентов теоремы T добавлением утверждения B_1. Решается задача на исследование Z_1, посылками которой служат антецеденты теоремы T, B_2 и $A_1, \ldots, A_n$. К посылкам добавляются равенства - консеквенты теорем текущего списка вывода, антецеденты которых включаются в антецеденты исходной теоремы. Неизвестные - параметры посылок, имеютмя также цели "известно", "теорема" и цель, определяющая тенденцию к выводу следствий, не содержащих $x_1, \ldots, x_m$ Решается также задача на исследование Z_2, посылки которой - антецеденты теоремы T и B_2. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "теорема". После решения составляется список S равенств в посылках задачи Z_1, содержащих переменнеы $x_1, \ldots, x_m$, не содержащих переменных, не входящих в исходную теорему и имеющих только такие числовые атомы, которые содержат переменную списка $x_1, \ldots, x_m$ и встречаются в равенстве однократно. Если список S не включается в список $A_1, \ldots, A_n$ то те его утверждения, которые отличны от $A_1, \ldots, A_n$, заносятся под квантор существования исходной теоремы в дополнение к $A_1, \ldots, A_n$. (Прием допконтекст - 9).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&$ параллелограмм$(ABCD)$ $\rightarrow \exists_E(E-$ точка $\&\ E \in$ отрезок$(BD)\ \&\ E \in$ отрезок$(AC)\ \&\ l(BE)=l(DE)\ \&$ $l(AE)=l(CE)))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&$ параллелограмм$(ABCD)$ $\rightarrow \exists_E(E-$ точка $\&\ E \in$ отрезок$(BD)\ \&\ E \in$ отрезок$(AC)))$

Теорема T имеет вид:

$\forall_{ABCD}(A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&\ D-$ точка $\rightarrow$ параллелограмм$(ABCD) \leftrightarrow$ четырехугольник$(ABCD)\ \&$ прямая$(AB) \parallel$ прямая$(CD)\ \&$ прямая$(BC) \parallel$ прямая$(AD))$

Вывод следствий антецедентов и консеквента с навешиванием квантора существования

1. Вывод утверждения существования путем усмотрения реализуемости группы антецедентов, содержащих заданный параметр, с пополнением списка подквантворных утверждений. Консеквент теоремы - конъюнкция утверждений. Выбирается параметр консеквента x, и список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Проверяется, что S_1 имеет не более 3 элементов, а длина S_2 не меньше длины S_1. Проверяется, что из S_2 вытекает $\exists_x(S_1)$. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и консеквент. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "теорвывод". После решения составляется список Q посылок, не имеющих заголовка "актив", содержащих x, не содержащих параметры, не входящие в S_1 и в консеквент, причем таких, что их заголовок встречается среди заголовков S_1 и конъюнктивных членов консеквента. Консеквентом новой теоремы становится $\exists_x(Q)$, антецедентами - S_2. (Прием конъюнкция - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDE}(\neg(A=C)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg($прямая$(AC)=$ прямая$(BC))\ \&$ $l(AE)=l(CE)\ \&\ l(BD)=l(CD)\ \&\ D \in$ прямая$(BC)\ \&\ E \in$ прямая$(AC)\ \&$ $A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&\ D-$ точка $\&\ E-$ точка $\rightarrow$ $\exists_F(2l(DF)=l(AF)\ \&\ 2l(EF)=l(BF)\ \&\ 3l(DF)=l(AD)\ \&\ 3l(EF)=l(BE)\ \&$ $F \in$ отрезок$(AD)\ \&\ F \in$ отрезок$(BE)\ \&\ F-$ точка$))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(\triangle(ABC)\ \&\ D-$ точка $\&\ E-$ точка $\&\ F-$ точка $\&\ D \in$ отрезок$(BC)\ \&$ $l(BD)=l(DC)\ \&\ E \in$ отрезок$(AC)\ \&\ l(AE)=l(EC)\ \&\ F \in$ прямая$(BE)\ \&\ F \in$ прямая$(AD) \rightarrow F \in$ отрезок$(BE)\ \&\ 2l(FE)=l(BF))$

2. Попытка характеризации сложного операнда консеквента и вывода утверждения существования. Теорема - кванторная импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках. Консеквент имеет одним из своих корневых операндов переменную, не входящую в некоторый другой корневой операнд A. Выражение A имеет не менее 3 параметров, является одним

из самых сложных подтермов консеквента с оценкой сложности, большей 6. Решается задача на исследование, посылками которой служат антецеденты и консеквента. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "теорема". После решения составляется список Q элементарных посылок, не имеющих заголовка "актив" и содержащих подтерм A. Проверяется, что в нем не менее 2 элементов. Выбирается новая переменная a, и составляется список S результатов замены в утверждениях Q одтермов A на a. Из S отбрасываются утверждения, являющиеся следствиями антецедентов и других элементов S. Проверяется, что S имеет не менее 2 элементов. Рассматривается утверждение $\exists_a(S)$ и определяется список X параметров антецедентов, не являющихся параметрами этого утверждения. Список антецедентов разбивается на подсписок D_1 утверждений, содержащих X, и подсписок D_2 остальных утверждений. Предпринимается попытка упростить утверждение $\exists_X(D_1)$ относительно посылок D_2. Проверяется, что результат - элементарное утверждение, и оно добавляется к D_2. Консеквентом новой теоремы становится $\exists_a(S)$, антецедентами - D_2. Результат упрощается. (Прием вывод - 72).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cd}(\neg($простаяцепь(c,d) & оргграф(d) & цепь$(c,d) \rightarrow \exists_e($цикл$(e,d)$ & подмаршрут$(e,c)))$

из теоремы

$\forall_{abcd}($мверш$(c,a) =$ мверш(c,b) & $0 < b-a$ & $a-$натуральное & $b-$натуральное & $b \leq$ длина$(c)+1$ & оргграф(d) & цепь$(c,d) \rightarrow$ цикл$($отрмарш$(c,a,b),d))$

3. Вывод утверждения существования из антецедентов и консеквента. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$. Решается задача на исследование, посылками которой служат антецеденты и A_1, A_2. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "теорема". После решения выбирается бесповторная элементарная посылка P с двумя параметрами, отличная от антецедентов и A_1, не имеющая заголовка "актив", причем такая, что ее заголовок не встречается в теореме, оценка сложности не меньше 6, причем один из параметров - некоторая переменная x - не встречается в исходных посылках, а другой встречается. Консеквентом новой теоремы становится $\exists_x(P)$, антецедентами - антецеденты исходной теоремы и A_1. Результат упрощается. (Прием определение - 252).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bA}(b =$ операция(A) & группа$(A) \rightarrow \exists_a($Единица$(a,b)))$

из теоремы

$\forall_A($группа$(A) \leftrightarrow$ группоид(A) & ассоциативно$($операция$(A))$ & обратимо$($операция$(A)))$

Вывод следствий из антецедентов и утверждений под квантором существования в консеквенте

1. Вывод новых утверждений существования. Консеквент теоремы имеет вид $\exists_{x_1 \ldots x_k}(A)$, где A - элементарное утверждение. Решается задача на исследование, посыл-

ки которой - антецеденты и A. Цели задачи - "теорвывод", "смтеорема", "Существует". После решения выбирается элементарная посылка P, не имеющая заголовка "актив", содержащая все параметры консеквента и дополнительно некоторые параметры X. При ее выводе использовалось утверждение A. Консеквентом новой теоремы становится утверждение $\exists_X(P)$. Антецеденты те же, что у исходной теоремы. (Прием допконтекст - 17).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{fA}(\neg(A = \emptyset)\ \&\ A - \text{set}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&\ \text{правобратимо}(f)\ \&$
$\text{левобратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, A) \to \exists_b(\text{Единица}(b, f)))$

из теоремы

$\forall_{fA}(\neg(A = \emptyset)\ \&\ A - \text{set}\ \&\ \text{ассоциативно}(f)\ \&\ \text{правобратимо}(f)\ \&$
$\text{левобратимо}(f)\ \&\ \text{бинарнооперация}(f, A) \to \exists_z(\text{левединица}(z, f)))$

2. Попытка усмотреть новое условие существования. Теорема - кванторная импликация без существенных антецедентов с консеквентом $\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n)$. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и утверждения $A_1, \ldots, A_n$. Неизвестные - параметры посылок. Имеются также цели "известно", "теорвывод", "Существует" и цель, ориентирующая на вывод утверждений, не содержащих переменных $x_1, \ldots, x_k$. После решения выбирается параметр y посылок, не встречающийся в исходных посылках. Составляется непустой список S содержащих y и не содержащих $x_1, \ldots, x_k$ посылок, не имеющих подвыражений с более чем 2 параметрами. Проверяется, что его утверждения имеют хотя бы один параметр антецедентов. Консеквентом новой теоремы становится утверждение $\exists_y(S)$. Антецеденты те же, что у исходной теоремы. (Прием нормсуществует - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_f(f\text{—функция} \to \exists_a(\text{взаимнооднозначно}(a)\ \&\ a\text{—функция}\ \&\ \text{Val}(a) \subseteq \text{Dom}(f)\ \&$
$\text{Val}(f) = \text{Dom}(a)))$

из теоремы

$\forall_f(f - \text{функция} \to \exists_A(A - \text{set}\ \&\ A \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ \text{образ}(f, A) = \text{Val}(f)\ \&$
$\text{взаимнооднозначно}(\text{сужение}(f, A))))$

Вывод следствий из антецедентов и условия, связанного с консеквентом

1. Попытка вывода следствий из условия принадлежности определяемому множеству. Теорема - определение $A_1 = A_2$, где значением выражения A_2 является множество. Выбирается новая переменная x, и решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты теоремы и утверждение "$x \in A_2$". Единственная неизвестная - x. После решения выбирается элементарная посылка P, не имеющая заголовка "актив", содержащая x и не содержащая параметров, не входящих в исходные посылки. Эта посылка отлична от $x \in A_2$. Новая теорема имеет P своим консеквентом. Ее антецеденты - антецеденты исходной теоремы и "$x \in A_1$". Результат упрощается. (Прием определение - 34).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABa}(\neg(A = B)\ \&\ a \in \text{окружность}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \rightarrow l(aA) = l(AB))$

из теоремы

$\forall_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B) \rightarrow \text{окружность}(AB) = \text{set}_C(C - \text{точка}\ \&\ l(AC) = l(AB)))$

2. Попытка вывода следствий из условия принадлежности множеству определяемого типа. Теорема - определение вида $P(a) \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(B_1)\ \&\ B_2$, где a - переменная, причем существует антецедент либо конъюнктивный член утверждения B_2, имеющий вид "$a - \text{set}$". Выбирается новая переменная b, и решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты, B_1 и "$b \in a$". Неизвестные - параметры посылок. Имеются также цели "известно", "теорема". После решени выбирается неконстантная посылка P, не имеющая отличных от a, b параметров, заголовок которой отличен от символа "актив". Она становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы, $P(a)$ и "$b \in a$". Результат упрощается. (Прием определение - 73).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cE}(c \in E\ \&\ \text{эллипс}(E) \rightarrow c - \text{точка})$

   из теоремы

   $\forall_E(\text{эллипс}(E) \leftrightarrow E - \text{set}\ \&\ \exists_{ABCKab}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ E \subseteq \text{плоскость}(ABC)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ 0 < b\ \&\ 0 \leq a - b\ \&\ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})))$

3. Попытка усиления конъюнктивного члена определяющей части. Теорема - определение вида $A \leftrightarrow B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_n$, где $n \geq 2$. Некоторое B_i имеет вид $F(t_1 \ldots t_m)$, причем существует усиленная версия G отношения F. Заголовок A не является усиленной версией F. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты, $B_1, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_n$, а также $G(t_1 \ldots t_m)$. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "теорема". После решения выбирается элементарная посылка P, не имеющая заголовка "актив", не входящая в исходный список посылок и не содержащая переменных, отсутствовавших в исходных посылках. Проверяется, что она не является следствием антецедентов и $B_1, \ldots, B_n$, а также следствием антецедентов и $G(t_1 \ldots t_m)$. Затем создается новая теорема с консеквентом P. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы, A и $G(t_1 \ldots t_m)$. Результат упрощается. (Прием определение - 76).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \neg(E = F)\ \&\ \text{окружность}(EF)\ \text{описана около фигура}(ABCD)\ \&\ \text{квадрат}(ABCD) \rightarrow \angle(CDE) = \pi/4)$

   из теоремы

$\forall_{ABCDEF}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка & $F -$ точка & $\neg(E = F) \rightarrow$ окружность(EF) описана около фигура$(ABCD) \leftrightarrow$ четырехугольник$(ABCD)$ & $A \in$ окружность(EF) & $B \in$ окружность(EF) & $C \in$ окружность(EF) & $D \in$ окружность$(EF))$

4. Анализ подслучая, в котором заданный разряд определяющего набора - константный. Теорема - определение вида $A_1 = (t_1, \ldots, t_n)$. Некоторое t_i не имеет переменных. Рассматриваются все определения - стартовые теоремы $T_1, \ldots, T_m$ текущего цикла вывода, имеющие вид $A_1 = (r_1, \ldots, r_n)$. Проверяется, что текущая теорема - первая в лексикографическом порядке среди теорем $T_1, \ldots, T_m$, у которых $r_i = t_i$. Составляется список $B_1, \ldots, B_m$ наборов антецедентов теорем $T_1, \ldots, T_m$, а также список $C_1, \ldots, C_m$ правых частей их консеквентов. Определяется пересечение S всех списков $B_1, \ldots, B_m$. Составляется список X параметров терма A_1, и выделяется подсписок S_1 списка S, образованный всеми утверждениями, параметры которых включаются в X. Затем предпринимается, пока это возможно, цикл пополнения списков S_1 и X. Именно, если в S имеется не входящее в S_1 равенство $x = t$, где переменная x входит в X, то все параметры t добавляются к X, а к S_1 - добавляются все утверждения списка S, параметры которых включаются в расширенный список X. По окончании цикла для каждой переменной x, такой, что некоторое B_j одержит утверждение вида $P(x)$, предпринимается попытка доказать, что $P(x)$ - следствие любого из $B_1, \ldots, B_m$. Если это так, утверждение $P(x)$ добавляется к S_1. Далее предпринимается цикл решения задач на исследование $Z_1, \ldots, Z_m$. Посылками задачи Z_j служат утверждения B_j и равенство $r_i = t_i$, где C_j - терм "$(r_1, \ldots, r_n)$". Неизвестные - параметры посылок; кроме того, имеются цели "известно", "анализпосылок". После решения B_j заменяется на список посылок задачи, не входящих в S_1 и не имеющих заголовка "актив". По окончании цикла решения задач выбирается элементарное утверждение D, входящее в некоторое B_j, не содержащее константы "ложь" и не имеющее параметров, не входящих в S_1. Проверяется, что D есть слелствие любого другого B_k, причем не усматривается, что D - следствие S_1. Тогда выбираются новые переменные $y_1, \ldots, y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots, y_n$, и антецедентами новой теоремы становятся S_1, "$A_1 = (y_1, \ldots, y_{i-1}, t_i, y_{i+1}, \ldots, y_n)$". Консеквент - D. (Прием определение - 129).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDKa}($систкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $D -$ точка & коорд$(D, K) = (a, 0) \rightarrow$ $D \in$ прямая$(AB))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDK}($систкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AB) & $A \in$ отрезок$(BD) \rightarrow$ коорд$(D, K) = (-l(AD)/l(AB), 0))$

5. Вывод следствий из условия принадлежности множеству, заданному описателем "отображение". Теорема - определение вида $A_1 = \mathrm{set}_x(A_2)$. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и A_2. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "теорема". После решения находится посылка "$x \in t$", у которой t не имеет параметров, не являющихся параметрами выражения "$\mathrm{set}_x(A_2)$". Новая теорема имеет консеквент "$A_1 \subseteq t$". Антецеденты те же, что у исходной теоремы. (Прием определение - 224).

Пример: вывод теоремы

$\forall_A(A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \to \text{внутренность}(A) \subseteq A)$

из теоремы

$\forall_A(A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \to \text{внутренность}(A) = \text{set}_x(x \in A \ \& \ \exists_b(b - \text{число} \ \& \ 0 \leq b \ \& \ (x - b, x + b) \subseteq A)))$

6. Попытка рассмотреть одноместную характеристику определяемого объекта. Теорема - определение вида $A_1 = A_2$, где A_2 - атомарный нечисловой объект. Просматриваются атомарные нечисловые подтермы T консеквента, имеющие тот же тип, что A_2, и по их заголовкам Q находятся одноместные характеристики F, такие, что существует определение терма $F(Q(\ldots))$. Выбираются новые переменные b, и составляется список S равенств $b = F(T)$. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и равенства S. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "теорема". После решения выбирается посылка P, не содержащая параметров термов T, но содержащая хотя бы одну переменную b. Все ее параметры встречаются в исходных посылках. Определяется результат P_1 подстановки в P термов T вместо переменных b, а затем - результат P_2 замены в P_1 непустого списка вхождений атома A_2 на выражение A_1. Новая теорема имеет консеквент P_2; ее антецеденты - все антецеденты исходной теоремы, не содержащие параметров терма A_2, не входящих в A_1. (Прием определение - 90).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABa}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ 0 \leq a \to \text{длина}(a \cdot \text{вектор}(AB)) = a \cdot \text{длина}(\text{вектор}(AB)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCa}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ 0 \leq a \ \& \ l(AC) = al(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \to a \cdot \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(AC))$

7. Сравнение значений функции числового аргумента в двух точках. Теорема - определение вида "$A_1 = \lambda_x(A_3, A_2)$". Из антецедентов и A_2 вытекает, что значение x - число. Выбираются новые переменные a, b, c, d и решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты, результаты T_1, T_2 подстановки в A_2 вместо x переменных a, b, неравенство $a \leq b$ и равенства результатов подстановки в A_3 вместо x переменных a, b, соответственно переменным c, d. Неизвестные - a, b; имеются также цели "известно" и "теорвывод". После решения выбирается посылка P, содержащая c и не имеющая заголовка "актив". Либо эта посылка содержит также d, либо не содержит ни a, ни b. Определяется результат R подстановки в P вместо c, d выражений $A_1(a), A_1(b)$. Этот результат становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты новой теоремы - антецеденты исходной теоремы и T_1, а если P содержит d, то также T_2 и $a \leq b$. Антецеденты упрощаются. (Прием отображение - 11).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{abfP}$(верпространство(P) & $f-$функция & случвеличина(f,P) & $a-$число & $b-$число & $0 \le b-a \to 0 \le$ функраспред(f,P)(b) $-$ функраспред(f,P)(a))

из теоремы

$\forall_{fP}$(верпространство(P) & $f-$функция & случвеличина(f,P) $\to$ функраспред(f,P) $= \lambda_x$(вероятность(set$_y$($y \in$ элемсобытия(P) & $f(y) < x$), P), $x-$число))

8. Анализ принадлежности двукратному результату применения операции над множеством. Теорема - простая импликация с консеквентом вида "$x \subseteq t$", где переменная x входит в бесповторное выражение t. Среди антецедентов нет указаний на множества, отличные от x. Определяется результат r подстановки в t выражения t вместо x. Выбирается новая переменная y, и решается задача на исследование, посылки которой суть антецеденты и утверждение "$y \in r$". Цели - "квантимплик", "свойства", "теорвывод". Первая из них разрешает исключать кванторные импликации, заменяя их в посылках на группу антецедентов и консеквент. При этом создаются комментарии к посылкам (квантимплик X Q), указывающие переменную X, входившую в связывающую приставку, и конъюнкцию Q содержавших ее антецедентов. Цель "свойства" разрешает исключать кванторы существования без ввода сколемовских функций. Комментарий к посылкам "кванторнаясвертка" блокирует применение свертки кванторов в бескванторные утверждения. По окончании решения задачи определяется список S переменных посылок, отсутствовавших в исходных посылках и не отмеченных комментариями "квантимплик". Иными словами, это переменные для объектов типа "дополнительных построений", существования которых вытекало из контекста. Выбирается переменная z списка S и составляется непустой список D содержащих ее посылок, не имеющих заголовка "актив" и не содержащих других переменных списка S. Определяется непустой список комментариев (квантимплик u T), где переменные u входят в D. Создается кванторная импликация, связывающая приставка которой - переменные u данных комментариев, антецеденты - утверждения T, а консеквент - $\exists_z(D)$. Эта кванторная импликация упрощается задачей на описание, посылки которой - исходные посылки задачи на исследование, а цели - "редакция" и "свертка". Возникает утверждение R без связанных переменных. Оно становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты ее суть антецеденты исходной теоремы и "$y \in r$". Результат упрощается. (Прием свойства - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acn}(c-$set & $c \subseteq \mathbb{R}^n$ & $a \in$ замыкание(замыкание(c)) & $n-$натуральное $\to$ точкаприкосн(a,c))

из теоремы

$\forall_{cn}(c-$set & $c \subseteq \mathbb{R}^n$ & $n-$натуральное $\to c \subseteq$ замыкание(c))

Сразу из полученной теоремы будет выводиться утверждение о совпадении двойного замыкания с однократным.

9. Вывод неравенства для определяемого числового атома. Теорема - определение $A_1 = A_2$ невырожденного числового атома A_1. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и равенство $A_2 = A_1$, сопровожденное комментарием "ориентацияравенства", блокирующим перестановку частей равенства. Цели задачи - "теорвывод", "неравенства". Последняя цель ориентирует на вывод неравенств для невырожденных числовых атомов. После решения выбирается строгое либо нестрогое неравенство P посылках, содержащее A_1. Составляется список S, включающий антецеденты, а также исходные утверждения, сопровождавшие новые переменные, вводимые при решении задачи и входящие в P. Новая теорема имеет консеквент P и антецеденты S. Результат упрощается. (Прием числатом - 57).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcn}(c - \text{натуральное}\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ c \leq n\ \&\ \text{числнабор}(a, n)\ \&\ \text{числнабор}(b, n) \rightarrow 0 \leq \text{евклрасст}(a, b) - |b(c) - a(c)|)$

   из теоремы

   $\forall_{abn}(n - \text{натуральное}\ \&\ \text{числнабор}(a, n)\ \&\ \text{числнабор}(b, n) \rightarrow \text{евклрасст}(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a(i) - b(i))^2})$

Вывод следствий из антецедентов и заменяющей части эквивалентности после применения к ним некоторой подстановки

1. Анализ условия для объединения двух множеств. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$, причем A_2 содержит кванторы. Имеется антецедент "$a - \text{set}$", где a - переменная, входящая в бесповторное A_1. Выбирается новая переменная b и составляется список S результатов подстановки в антецеденты и в A_2 выражения "$a \cup b$" вместо a. Решается задача на исследование, посылки - S и утверждения "$a - \text{set}$", "$b - \text{set}$". Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "теорвывод". После решения выбирается посылка P, не являющаяся антецедентом, выведенная при использовании каких-либо утверждений списка S, не имеющая связанных переменных, причем все ее переменные встречаются в S. Она становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты - результаты подстановки в антецеденты исходной теоремы и в A_1 выражения "$a \cup b$" вместо a, а также утверждения "$a - \text{set}$", "$b - \text{set}$". Результат упрощается. (Прием развертка - 115).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abd}(a - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ a \subseteq \mathbb{R}\ \&\ d \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Нижняягрань}(b, a \cup d) \rightarrow \text{Нижняягрань}(b, d))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{Нижняягрань}(b, a) \leftrightarrow b - \text{число}\ \&\ \forall_c(c \in a \rightarrow b < c))$

Решение задач на исследование для антецедентов и каждого дизъюнктивного члена консеквента, с последующим извлечением общих следствий

1. Определение значений числовых атомов, содержащих выделенные переменные. Теорема создана для приема, срабатывающего только в контекстах, где переменные a, b входят симметричным образом. Ее консеквент - дизъюнкция $A_1 \vee A_2$ двух конъюнкций. Решаются задачи на исследование Z_1, Z_2, посылки которых - антецеденты и, соответственно, A_1 либо A_2. Неизвестные - a, b; имеются также цели "известно", "теорвывод", "числовойатом". После решения составляются списки S_1, S_2 равенств в посылках этих задач вида $t_1 = t_2$, где t_1 - числовой атом, содержащий одновременно a и b. Выбираются равенства $r_1 = r_2$ и $r_1 = r_3$, входящие, соответственно, в S_1 и S_2. Выбирается такой конъюнктивный член Q утверждения A_1, параметры которого включаются в параметры r_2, r_3, что его отрицание - следствие A_2. При помощи задачи на преобразование выражение "(r_2 при Q, иначе r_3)" упрощается и превращается в некоторое выражение C. Консеквентом новой теоремы становится равенство $r_1 = C$. Антецеденты те же, что у исходной теоремы. (Прием симметрично - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefAEK}(\neg(a = 0)\ \&\ \neg(c = 0)\ \&\ \neg(f = A)\ \&\ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(e + ax^2 + bx + cy^2 + dy = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{фокус}(f, E)\ \&\ \text{фокус}(A, E) \to l(fA) = \sqrt{|(c - a)(4ac - ad^2 - cb^2)|}/|ac|)$

   из теоремы

   $\forall_{abcdefmpqAEK}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{фокус}(A, E)\ \&\ \neg(c = 0)\ \&\ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + bx + cy^2 + dy + e = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \neg(a = 0)\ \&\ m = 4ace - b^2c - d^2a\ \&\ p = -b/(2a)\ \&\ q = -d/(2c)\ \&\ f - \text{точка}\ \&\ \text{фокус}(f, E)\ \&\ \neg(A = f) \to \text{коорд}(f, K) = (p, q - \sqrt{m(c - a)}/(2ac))\ \&\ \text{коорд}(A, K) = (p, q + \sqrt{m(c - a)}/(2ac))\ \&\ 0 < m(c - a) \vee \text{коорд}(f, K) = (p, q - \sqrt{m(a - c)}/(2ac))\ \&\ \text{коорд}(A, K) = (p, q + \sqrt{m(a - c)}/(2ac))\ \&\ 0 \le m(a - c))$

2. Попытка определить связь между координатами выделенных объектов. Теорема создана для приема, срабатывающего только в контекстах, где переменные a, b входят симметричным образом. Ее консеквент - дизъюнкция $A_1 \vee A_2$ двух конъюнкций. Для каждой переменной X из пары a, b в каждом A_i имеется конъюнктивный член вида "коорд$(X, K) = (t_1, \ldots, t_n)$". Выбираются новые переменные $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$. Для каждого $i = 1, 2$ среди конъюнктивных членов A_i выбираются равенства "коорд$(a, K) = (t_1, \ldots, t_n)$" и "коорд$(b, K) = (r_1, \ldots, r_n)$". Решается задача на исследование Z_i, посылки которой - антецеденты, остальные конъюнктивные члены утверждения A_i, а также равенства $t_1 = x_1, \ldots, t_n = x_n$ и $r_1 = y_1, \ldots, r_n = y_n$. Цели - "числсвязь a b" и "известно". После решения задач Z_1, Z_2 для каждого $i = 1, 2$ в списке посылок задачи Z_i находится равенство R_i, содержащее обе переменные a, b, такое, что оно является следствием посылок другой задачи Z_j. Консеквентом новой теоремы становится R_1 & R_2. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы и равенства "коорд$(a, K) = (x_1, \ldots, x_n)$", "коорд$(b, K) = (y_1, \ldots, y_n)$". Результат упрощается. (Прием симметрично - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdefghijAEK}(\neg(a=0)\ \&\ \neg(c=0)\ \&\ \neg(f=A)\ \&\ \text{коорд}(f,K)=(g,h)\ \&$
$\text{коорд}(A,K)=(i,j)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=\text{set}_{xy}(e+ax^2+bx+cy^2+dy=0\ \&$
$x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&$
$e-\text{число}\ \&\ f-\text{точка}\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{фокус}(f,E)\ \&\ \text{фокус}(A,E)\rightarrow$
$b+a(g+i)=0\ \&\ d+c(h_j)=0)$

из теоремы

$\forall_{abcdefmpqAEK}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ d-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&$
$A-\text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{фокус}(A,E)\ \&\ \neg(c=0)\ \&\ \text{коорд}(E,K)=$
$\text{set}_{xy}(ax^2+bx+cy^2+dy+e=0\ \&\ x-\text{число}\ \&\ y-\text{число})\ \&\ \neg(a=0)\ \&$
$m=4ace-b^2c-d^2a\ \&\ p=-b/(2a)\ \&\ q=-d/(2c)\ \&\ f-\text{точка}\ \&\ \text{фокус}(f,E)\ \&$
$\neg(A=f)\rightarrow\text{коорд}(f,K)=(p,q-\sqrt{m(c-a)}/(2ac))\ \&\ \text{коорд}(A,K)=$
$(p,q+\sqrt{m(c-a)}/(2ac))\ \&\ 0<m(c-a)\vee\text{коорд}(f,K)=(p,q-\sqrt{m(a-c)}/(2ac))\ \&$
$\text{коорд}(A,K)=(p,q+\sqrt{m(a-c)}/(2ac))\ \&\ 0\leq m(a-c))$

Вывод следствий из антецедентов и подслучая условного выражения в консеквенте теоремы

1. Анализ подслучаев для операции, определенной условным выражением. Теорема - определение $A=(t_1$ при $B,$ иначе $t_2)$. Выбирается новая переменная x, и решаются задачи на исследование Z_1, Z_2. Посылками задачи Z_1 служат антецеденты и утверждения $B, x=t_1$. Посылками задачи Z_2 - антецеденты, $\neg(B)$ и $x=t_2$. Неизвестные каждой из этих задач - x. Кроме того, имеются цели "известно" и "теорвывод". После решения составляются списки S_1, S_2 посылок задач Z_1, Z_2, не являющихся антецедентами и отличных от $B, \neg(B)$. Рассматривается произвольный список S_i, и в нем выбирается бесповторное утверждение C с единственным параметром x. Проверяется, что $\neg(C)$ - следствие другого S_j. В списке S_i выбирается отличное от C утверждение P, не имеющее вида $x=T$. Оно становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты ее - антецеденты исходной теоремы, $A=x$ и B (при $i=1$) либо $\neg(B)$ (при $i=2$). Результат упрощается. (Прием услопред - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{axA}(a=\text{операция}(A)\ \&\ x\in\text{носитель}(A)\ \&\ \text{порядокэлемента}(x,A)-\text{натуральное}$
   $\&\ \text{группа}(A)\rightarrow\text{единица}(a)=\text{алгстепень}(x,a,\text{порядокэлемента}(x,A)))$

   из теоремы

   $\forall_{AxfP}(\text{группа}(A)\ \&\ x\in\text{носитель}(A)\ \&\ f=\text{операция}(A)\ \&$
   $\text{set}_n(\text{алгстепень}(x,f,n)=\text{единица}(f)\ \&\ n-\text{натуральное})=P\rightarrow$
   $\text{порядокэлемента}(x,A)=(\infty\text{ при }P=\emptyset,\text{ иначе }\inf(P)))$

Использование задачи на исследование для усмотрения возможной замены переменной

1. Попытка переформулировать мощность класса путем замены переменной. Теорема - тождество вида $A_1=\text{card}(\text{set}_x(A_2))$. Решается задача на исследование

Z_1, посылки которой - антецеденты и A_2. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "теорвывод". После решения выбирается переменная a, входящая в посылки, но отсутствовашая в исходных посылках. Составляется список S посылок, содержащих a. Проверяется, что эти посылки не имеют связанных переменных и содержат переменную x. Проверяется, что при выборе новой переменной b равенство $a = b$ оказывается следствием посылок задачи Z_1 и результатов замены в утверждениях S переменной a на b. Определяется объединение B исходных посылок задачи Z_1 со списком S. Выделяется подсписок B_1 списка B, состоящий из всех утверждений, содержащих x. Выбирается новая переменная y и решается задача на исследование Z_2, посылки которой - B, результаты замены в утверждениях B_1 переменной x на y и утверждение "$\neg(x = y)$". Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "теорвывод". После решения выбирается элементарная посылка $\neg(C)$, все переменные которой входят в антецеденты и которая не является антецедентом. Консеквентом новой теоремы становится равенство $A_1 = \text{card}(\text{set}_a(\exists_x(S)))$. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы и C. Результат упрощается. (Прием описатель - 100).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aG}(a \in \text{вершины}(G)\ \&\ \text{простграф}(G) \rightarrow \text{степеньвершины}(a, G) = \text{card}(\text{смежнверш}(a, G)))$

из теоремы

$\forall_{aG}(\text{граф}(G)\ \&\ a \in \text{вершины}(G) \rightarrow \text{степеньвершины}(a, G) = \text{card}(\text{set}_x(x \in \text{ребра}(G)\ \&\ \text{конецребра}(a, x, G))))$

7.2 Решение задачи на исследование с целью исключить заданные подвыражения

1. Попытка исключить дополнительные параметры антецедентов. Теорема имеет антецеденты - равенства для координат отдельных точек; консеквент ее - равенство двух переменных. Составляется список S сех переменных, входящих в антецеденты вида "$\text{коорд}(A, K) = (t_1, \ldots, t_n)$", а также переменных равенства $K = (B_1, \ldots, B_m)$, если оно есть. Список X параметров антецедентов, не вошедших в S, непуст. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты, а неизвестные - параметры посылок. Она имеет также цели "антецеденты", "усиление", "исключ X". Цели "антецеденты" и "исключ X" указывают, что нужно исключить все посылки, содержащие X; цель "усиление" разрешает ввод дополнительных посылок, если они понадобятся для исключения X. После решения задачи оказывается, что ее посылки не содержат X. Антецедентами новой теоремы становятся все посылки задачи, не имеющие заголовка "актив". Консеквент прежний. Результат упрощается. (Прием коорд - 13).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefgABCDEK}(\neg(g = E)\ \&\ \neg(g \in \text{плоскость}(ABC))\ \&\ \neg(E \in \text{плоскость}(ABC))\ \&\ \neg(\text{прямая}(gE) \parallel \text{прямая}(AD))\ \&\ K = (A, B, C, D)\ \&\ \text{коорд}(g, K) = (d, e, f)$

& коорд$(E,K)=(a,b,c)$ & $g-$точка & $E-$точка & прямая$(gE)\parallel$ плоскость(ACD) & систкоорд$(K)\to a=d)$

из теоремы

$\forall_{abcdefghABCDEFK}(\neg(g=h)$ & $\neg(h=F)$ & $\neg(E=F)$ & $K=(A,B,C,D)$ & коорд$(g,K)=(d,e,f)$ & коорд$(E,K)=(a,b,c)$ & $g-$точка & $h-$точка & $E-$точка & $F-$точка & прямая$(gh)\parallel$ прямая(AD) & прямая$(gh)\parallel$ прямая(EF) & прямая$(hF)\parallel$ прямая(AC) & систкоорд(K) & $h\in$ плоскость$(ABC)\to a=d)$

2. Повторное применение операции к атомарному выражению. Теорема - определение вида $f(x,A_1)=A_2$, где x - переменная; A_1 и A_2 - нечисловые атомарные выражения с одинаковым заголовком, не содержащие x. В текущем списке вывода находится определение T (возможно, совпадающее с исходной теоремой), имеющее консеквент вида $f(y,B_1)=B_2$. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Находится подстановка S, переводящая B_1 в A_2. Составляется объединенный список C антецедентов исходной теоремы и результатов применения S к антецедентам теоремы T. Находится результат B_3 применения S к B_2, и формируется равенство D_1: $f(y,f(x,A_1))=B_3$. Если в списке C имеются утверждения, содержащие параметры, не встречающиеся в равенстве D_1, то при помощи задачи на описание находится условие существования таких параметров, при которых истинны указанные утверждения. Оно замещает эти утверждения в списке C. Определяется непустой список Q параметров B_3, не входящих в $f(y,f(x,A_1))$. Выбирается новая переменная z, и решается задача на исследование с посылками C и $z=B_3$. Ее неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "нормтеорема", "исключ Q". При решении разрешается пользоваться уже имеющимися в списке вывода теоремами. После решения находится посылка $z=t$, где t не содержит переменных Q. Формируется равенство D_2: $f(y,f(x,A_1))=t$ Если в списке C имеются утверждения, содержащие параметры, не встречающиеся в равенстве D_2, то при помощи задачи на описание находится условие существования таких параметров, при которых истинны указанные утверждения. Оно замещает эти утверждения в списке C. Новая теорема имеет консеквент D_2 и антецеденты C. Результат упрощается. (Прием определение - 82).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABab}(\neg(A=B)$ & $0<a$ & $a-$число & $b-$число & $A-$точка & $B-$точка & $b\le 0\to b(a$вектор$(AB))=(ab)$вектор$(AB))$

из теоремы

$\forall_{ABCa}(a-$число & $A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $\neg(A=B)$ & $C\in$ прямая(AB) & $0\le a$ & $l(AC)=al(AB)$ & точкалуча$(A,B,C)\to$ aвектор$(AB)=$ вектор$(AC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCa}(a-$число & $A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $\neg(A=B)$ & $C\in$ прямая(AB) & $a\le 0$ & $l(AC)=-al(AB)$ & $A\in$ отрезок$(BC)\to$ aвектор$(AB)=$ вектор$(AC))$

3. Дополнительное построение для использования определения. Теорема - определение $A_1 = A_2$. Выбирается параметр x антецедентов, содержащих x. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты, параметры которых включаются в объединение X со списком параметров A_1. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "антецеденты" и "исключ X". После решения составляется список S всех посылок, не имеющих заголовка "актив". Проверяется, что его утверждения не содержат переменных X. Антецедентами новой теоремы служат утверждения S; консеквентом - конъюнкция антецедентов исходной теоремы, содержащих x. Теорема сопровождается единственной характеристикой, указывающей, что она вводит в рассмотрение дополнительные объекты, необходимые для использования определения выражения A_1. (Прием определение - 134).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDFK}(\neg(D \in \text{прямая}(AB))\ \&\ \text{разныестороны}(B, D, \text{прямая}(AC))\ \&$
   $D - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ (A, B, C) = K \to F - \text{точка}\ \&\ \neg(D = F)\ \&$
   $F \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AC)\ \&\ A \in \text{отрезок}(BF))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDEFK}(D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&$
   $\neg(D = F)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ E \in \text{прямая}(AC)\ \&$
   $F \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{прямая}(DF) \parallel$
   $\text{прямая}(AC)\ \&\ A \in \text{отрезок}(BF)\ \&\ A \in \text{отрезок}(CE) \to \text{коорд}(D, K) =$
   $(-l(AF)/l(AB), -l(AE)/l(AC)))$

4. Присоединение определяющих утверждений к контексту дополнительной теоремы, вывод следствий с исключением старого параметра и попытка свертки по определению текущего раздела. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$. Список S_1 невырожденных числовых атомов утверждения A_2 содержит не менее 3 элементов, причем все эти элементы имеют вид "крд(A, K, i)". Все переменные теоремы встречаются в этих атомах. Находится другая теорема, консеквент которой - равенство, содержащее выражения "крд$(\ldots)$". Отсутствует ее антецедент, имеющий вид равенства с переменной в одной части. Если эта теорема имеет антецедент вида "$i \in \{k_1, \ldots, k_n\}$", где i не встречается в прочих антецедентах, то ее консеквент разворачивается в конъюнкцию утверждений, получаемых заменой i на $k_1, \ldots, k_n$. Список S_2 невырожденных числовых атомов консеквента дополнительной теоремы не короче списка S_1, причем заголовком любого такого атома служит символ "крд". Определяется подстановка Q, переводящая S_1 в некоторый подсписок списка S_2. Определяется непустой остаток S_3 списка S_2. В этом остатке имеется единственная переменная, не входящая в термы, подставляемые подстановкой Q. Решается задача на исследование Z_1, посылки которой - антецеденты дополнительной теоремы и результаты применения Q к антецедентам исходной теоремы. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" "теорема". После ее решения составляется объединенный список B посылок задачи Z_1, консеквента дополнительной теоремы и результата C применения Q к консеквенту исходной теоремы. Выбирается параметр x утверждения C, не входящий в S_3, и решается задача на исследование Z_2, посылками которой служат утверждения B. Неизвестные - параметры

посылок; имеются также цели "известно", "доппосылки", "теорема" и "исключ x". После решения в текущем списке вывода находится определение $D_1 \leftrightarrow D_2$, конъюнктивные члены определяющей части D_2 которого переводятся некоторой подстановкой E в подмножество посылок задачи Z_2. Результат R_1 применения E к D_1 не содержит переменной x и отличен от результата R_2 применения Q к A_1. Консеквентом новой теоремы становится R_1; антецеденты - антецеденты дополнительной теоремы, результаты применения Q к антецедентам исходной и утверждение R_2. Результат упрощается. (Прием определение - 159).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCK}(\neg(A = C)\ \&\ C \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$ $\text{вниз}(\text{вектор}(AC), K)\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вниз}(\text{вектор}(CB), K))$

из теоремы

$\forall_{Kbc}(b\text{—точка}\ \&\ c\text{—точка}\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вниз}(\text{вектор}(bc), K) \leftrightarrow \text{крд}(b, K, 1) =$ $\text{крд}(c, K, 1)\ \&\ \text{крд}(b, K, 2) = \text{крд}(c, K, 2)\ \&\ 0 \leq \text{крд}(b, K, 3) - \text{крд}(c, K, 3))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCKipq}(p - \text{число}\ \&\ q - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$ $\text{Трехмерн}(K)\ \&\ i \in \{1, 2, 3\}\ \&\ 0 \leq p\ \&\ 0 \leq q\ \&\ 0 < p + q\ \&\ C \in \text{отрезок}(AB)\ \&$ $pl(AC) = ql(BC) \rightarrow \text{крд}(C, K, i) = (p \cdot \text{крд}(A, K, i) + q \cdot \text{крд}(B, K, i))/(p + q))$

5. Попытка анализа контекста теоремы для получения соотношения, не содержащего точки, координаты которой определяются теоремой. Консеквент теоремы имеет вид "коорд$(A, K) = (t_1, \ldots, t_n)$". Определяется непустой список X параметров выражения A, и решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и консеквент. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "сокращ", "теорвывод", "исключ X". После решения задачи выбирается ее посылка P, представляющая собой равенство без связанных переменных, не содержащее X, не входящее в антецеденты, но имеющее только такие параметры, которые встречаются в антецедентах. Проверяется, что P содержит невырожденный числовой атом. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих X, и подсписок S_2 остальных утверждений. Решается задача на описание, посылками которой служит S_2, а условиями - S_1. Неизвестные - X, причем все они несущественные. Имеются также цели "полный", "прямойответ", "попыткаспуска". Ответ Q не содержит переменных X. Консеквентом новой теоремы становится P, антецедентами - S_2 и Q. Результат упрощается. (Прием систкоорд - 36).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcdefghijlmnp}(\neg(m = n)\ \&\ \neg(l \in \text{прямая}(mn))\ \&\ \text{коорд}(l, p) = (b, d, e)\ \&$ $\text{коорд}(\text{прямая}(mn), p) = \text{set}_{qrs}(q - \text{число}\ \&\ r - \text{число}\ \&\ s - \text{число}\ \&$ $\text{пропорцнаборы}((h, i, j), (c + q, f + r, g + s)))\ \&\ c - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&$ $g - \text{число}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ i - \text{число}\ \&\ j - \text{число}\ \&\ l - \text{точка}\ \&\ m - \text{точка}\ \&$ $n - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(p) \rightarrow (h(d + f) - i(b + c))^2 + (i(e + g) - j(d + f))^2 +$ $(h(e + g) - j(b + c))^2 = (h^2 + i^2 + j^2)(\text{расстдопрямой}(l, \text{прямая}(mn)))^2)$

из теоремы

$\forall_{abcdefghijlmnptu}(\neg(a=l)\ \&\ \neg(m=n)\ \&\ t=h(b+c)+i(d+f)+j(e+q)\ \&$
$u=h^2+i^2+j^2\ \&$ коорд$(l,p)=(b,d,e)$ &коорд(прямая$(mn),p)=$
$\text{set}_{qrs}(q-$число $\&\ r-$число $\&\ s-$число $\&$ пропорцнаборы$((h,i,j),(c+q,f+r,$
$g+s)))\ \&\ a\in$ прямая$(mn)\ \&\ c-$число $\&\ f-$число $\&\ g-$число $\&\ h-$число $\&$
$i-$число $\&\ j-$число $\&\ a-$точка $\&\ l-$точка $\&\ m-$точка $\&\ n-$точка $\&$ прямая$(al)\perp$
прямая$(mn)\ \&$ прямкоорд$(p)\rightarrow$ коорд$(a,p)=(-c+ht/u,-f+it/u,-g+jt/u))$

6. Попытка изменения знака параметра. Теорема - определение $A_1=A_2$. Некоторый существенный антецедент имеет двуместную операцию $f(t_1,t_2)$. Находится теорема вида $f(g(x),y)=g(f(x,y))$, и она применяется для преобразования данной двуместной операции. В результате получается теорема T с консеквентом вида $B_1=B_2$. Список X параметров B_2, не входящих в B_1, непуст. Выбирается новая переменная a, и решается задача на исследование, посылками которой служат антецеденты теоремы T и равенство $a=B_2$. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "нормтеорема", "исключ X". Разрешается использовать теоремы, уже имеющиеся в списке вывода. После решения находится посылка вида $a=r$, где r не содержит X. Список антецедентов теоремы T разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих X, и подсписок S_2 остальных утверждений. Проверяется, что $\exists_X(S_1)$ - следствие S_2. Консеквентом новой теоремы становится равенство $B_1=r$, антецедентами - S_2. Результат упрощается. (Прием определение - 92).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABb}(\neg(A=B)\ \&\ b-$число $\&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ b\le 0\rightarrow(-b)$вектор$(AB)=$
   $-(b$вектор$(AB)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCa}(a-$число $\&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ \neg(A=B)\ \&$
   $C\in$ прямая$(AB)\ \&\ 0\le a\ \&\ l(AC)=al(AB)\ \&$ точкалуча$(A,B,C)\rightarrow$
   $a\cdot$ вектор$(AB)=$ вектор$(AC))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a-$число $\&\ b-$число $\rightarrow -ab=(-a)b)$

7. Попытка исключить переменную после усмотрения реализуемости группы содержащих ее антецедентов. Теорема - кванторная импликация, консеквент которой - отличный от равенства нечисловой двуместный предикат без новых объектов. Выбирается некоторый параметр консеквента x. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. Проверяется, что длина S_1 не более 3, список S_2 не короче списка S_1, а оценка сложности конъюнкции утверждений S_2 не меньше оценки сложности конъюнкции S_1 и консеквента. Утверждение $\exists_x(S_1)$ - следствие S_2. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и консеквент. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "антецедент", "новпосылка", "исключ x". Цели "антецедент", "исключ x" ориентируют на исключение x из посылок; цель "новпосылка" разрешает ввод дополнительных посылок A и регистрации их в комментариях (новпосылка A). После решения выбирается не входящая в антецеденты посылка P, не содержащая x, новыведенная при помощи исходной посылки, содержащей x. Она

становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты - S_2 и утверждения A из комментариев (новпосылка A). Результат упрощается. (Прием отношение - 24).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDFG}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC))\ \&$
$D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ F \in \text{прямая}(AC)\ \&\ G \in \text{прямая}(BF)\ \&\ G \in \text{прямая}(CD)\ \&$
$\text{биссектриса}(ABCF)\ \&\ \text{биссектриса}(ACBD)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&$
$C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ G - \text{точка} \to \text{биссектриса}(BACG))$

из теоремы

$\forall_{ABCDEFG}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC))\ \&$
$D \in \text{прямая}(AB)\ \&\ E \in \text{прямая}(BC)\ \&\ F \in \text{прямая}(AC)\ \&\ G \in \text{прямая}(BF)\ \&$
$G \in \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{биссектриса}(ABCF)\ \&\ \text{биссектриса}(ACBD)\ \&$
$\text{биссектриса}(BACE)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&$
$E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ G - \text{точка} \to G \in \text{отрезок}(AE)))$

8. Попытка исключения отношения двух числовых атомов. Теорема - соотношение пропорциональности "$k_1A_1 = k_2A_2$" для невырожденных числовых атомов A_1, A_2. Все переменные теоремы встречаются в ее консеквенте. Определяется непустой список S числовых атомов в антецедентах, являющихся равенствами. Все они невырожденные, и ни один из них не содержит всех параметров атомов A_1, A_2. Выбираются новые переменные a, b, и решается задача на исследование, посылки которой - "$A_1 = a, A_2 = b, ak_1 = bk_2$", а также антецеденты теоремы. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "теорема", "исключ a b". После решения выбирается посылка P, содержащая равенство, не имеющая параметров a, b и содержащая все параметры консеквента. Каждый дизъюнктивный член утверждения P - равенство. Если некоторый такой дизъюнктивный член - равенство вида $B_1 - B_2 = 0$, то предпринимается попытка отбросить его, установив, что дизъюнкция остальных членов - следствие антецедентов и этого равенства. После этого P превращается в равенство. Проверяется, что оно имеет не менее двух числовых атомов - сомножителей частей консеквента. Тогда создается новая теорема с консеквентом P. Ее антецеденты те же, что у исходной теоремы. (Прием пропорция - 15).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC))\ \&$
$\angle(ABD) = \angle(CBD)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&$
$C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \to 2\cos(\angle(CBD))l(AB)l(BC) = (l(AB) + l(BC))l(BD))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&$
$\neg(A = B)\ \&\ \angle(ABD) = \angle(DBC)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)) \to l(AB)l(CD) = l(AD)l(BC))$

9. Попытка варьирования теоремы путем дополнительного построения, позволяющего исключить старую переменную в заменяющей части. Теорема - тождество $A_1 = A_2$ для невырожденного числового атома A_1, не встречающегося в правой

части, причем эта часть не является невырожденным числовым атомом, но содержит такие атомы. Корневая связывающая приставка имеет менее 7 переменных; либо она имеет менее 5 переменных, либо консеквент не содержит невырожденного числового атома с более чем 3 параметрами. Решается задача на исследование Z_1, посылки которой - антецедент и терм "конскевент($A_1 = A_2$)". Неизвестные - параметры посылок. Имеется цель "допкадр", указывающая на необходимость найти дополнительное построение в антецедентах, которое могло бы позволить исключить из теоремы некоторые выражения. После решения выбирается комментарий к посылкам (допкадр B_1 B_2 B_3), определяющий одно из таких построений. B_1 - конъюнкция дополнительных антецедентов, содержащих новые переменные; B_2 - конъюнкция соотношений (следствий из антецедентов и B_1), которые могут оказаться плезными при исключении выражений; B_3 - список выражений, которые должны быть исключены из теоремы после ввода новых антецедентов. Проверяется, что B_3 - некоторая переменная C, входящая в A_1 и имеющая единственное вхождение в A_2. Выбирается новая переменная x, и решается задача на исследование Z_2, посылки которой - антецеденты, B_1, B_2 и $x = A_2$. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "исключ C". После решения выбирается посылка вида $x = t$, где t не содержит C. Консеквентом новой теоремы становится равенство $A_1 = t$, антецедентами - антецеденты исходной теоремы и B_1. Результат упрощается. Проверяется, что консеквент новой теоремы имеет не больше невырожденных числовых атомов, чем консеквент исходной, а длина корневой связывающей приставки превосходит длину приставки исходной теоремы не более чем на 1. (Прием числзнач - 29).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_{aABC}(\neg(a = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ l(aB) = l(BC)\ \&$$
$$A \in \text{прямая}(aC)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$$
$$\text{прямая}(aC) \perp \text{прямая}(AB) \to l(AB) = \cos(\angle(aBC)/2)l(BC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = C)\ \&$$
$$\neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \to l(AB) = \cos(\angle(ABC))l(BC))$$

10. Попытка варьирования теоремы путем дополнительного построения, позволяющего исключить старую переменную в заменяемой части. Аналогично предыдущему, но B_3 - переменная C, имеющая единственное вхождение в A_1 и не имеющая единственного вхождения в A_2. Соответственно, посылкой новой задачи служит не $x = A_2$, а $x = A_1$. Консеквентом новой теоремы становится равенство $A_2 = t$. В остальном все такое же. (Прием числзнач - 44).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_{abcdefF}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(c = d)\ \&\ \neg(c = e)\ \&\ \neg(e = f)\ \&\ \neg(e = F)\ \&$$
$$\neg(f = F)\ \&\ e \in \text{прямая}(cd)\ \&\ e \in \text{окружность}(ab)\ \&\ f \in \text{окружность}(ab)\ \&$$
$$F \in \text{окружность}(ab)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&$$
$$e - \text{точка}\ \&\ f - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(ae) \perp \text{прямая}(cd)\ \&$$
$$0 \le \pi/2 - \angle(ceF)\ \&\ 0 \le \pi/2 - \angle(efF) \to \angle(ceF) = \angle(efF))$$

из теоремы

$\forall_{abcdeF}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(c=d)\ \&\ \neg(c=e)\ \&\ \neg(e=F)\ \&\ e \in \text{прямая}(cd)\ \&$
$e \in \text{окружность}(ab)\ \&\ F \in \text{окружность}(ab)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&$
$c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(ae) \perp \text{прямая}(cd)\ \&$
$0 \le \pi/2 - \angle(ceF) \to \angle(eaF) = 2\angle(ceF))$

11. Попытка перехода к соотношению для другого числового атома с исключением одного из объектов теоремы. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат. Рассматривается параметр x некоторого невырожденного числового атома, входящего в это тождество. Решается задача на исследование, посылками которой служат антецеденты и консеквент. Цели - "теорвывод" и "исключ x". После решения в посылках выбирается численное равенство P, не содержащее x. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. При помощи задачи на описание с посылками S_2 и условиями S_1 находится не содержащее x условие Q, выполнение которого эквивалентно $\exists_x(S_1)$. Консеквентом новой теоремы становится P, антецедентами - S_2 и Q. Результат упрощается. (Прием числкоэфф - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdeACDK}(\neg(C=D)\ \&\ \neg(A \in \text{прямая}(CD))\ \&\ \text{коорд}(A,K) = (d,e)\ \&$
$\text{коорд}(\text{прямая}(CD),K) = \text{set}_{xy}(c+ax+by=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&$
$a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&$
$\text{прямкоорд}(K) \to (c+ad+be)^2 = (a^2+b^2)(\text{расстдопрямой}(A,\text{прямая}(CD)))^2)$

из теоремы

$\forall_{ABCDKabcde}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
$D - \text{точка}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(A=B)\ \&$
$\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD)\ \&\ B \in \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(CD),K) =$
$\text{set}_{xy}(ax+by+c=0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ \text{коорд}(A,K) = (d,e) \to$
$l(AB)^2 = (ad+be+c)^2/(a^2+b^2))$

12. Попытка исключения переменной, встречающейся в невырожденном числовом атоме консеквента. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат. Составляется список X параметров невырожденных числовых атомов консеквента. Находится антецедент D вида "коорд$(A,K) = (t_1,\ldots,t_n)$", и определяется список B параметров этого антецедента. Если имеется антецедент вида "$K = (C_1,\ldots,C_m)$", то его параметры добавляются к $B4$. В списке X имеется единственный параметр x, не принадлежащий B. Решается задача на исследование, посылками которой служат отличные от D утверждения и терм "фикс$(A_1 = A_2)$". Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "антецеденты", "исключ x". После решения составляется список S посылок, не имеющих заголовка "актив". Проверяется, что эти посылки не содержат x. В списке S находится терм "фикс(P)". Равенство P становится консеквентом новой теоремы. Ее антецеденты - отличные от "фикс(P)" элементы S и утверждение D. Результат упрощается. (Прием числкоэфф - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abABCDEK}(\neg(D = E)\ \&\ \neg(D \in \text{прямая}(AC))\ \&\ K = (A, B, C)\ \&$
$\text{коорд}(D, K) = (a, b)\ \&\ E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$\text{прямая}(AC) \parallel \text{прямая}(DE)\ \&\ 0 \leq b\ \&\ \text{систкоорд}(K) \rightarrow bl(AC) = l(DE))$

из теоремы

$\forall_{abABCDEFK}(D - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&$
$\neg(D = E)\ \&\ \neg(D = F)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ F \in \text{прямая}(AC)\ \&$
$\text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ E \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{точкалуча}(A, C, F)\ \&$
$\text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow l(AF) = bl(AC))$

13. Попытка вывода условия равенства заданных разрядов координат двух объектов с исключением вспомогательных параметров. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат. Единственная числовая переменная консеквента - a, причем она имеет единственное вхождение в консеквент. Имеется антецедент вида "коорд$(B, K) = (t_1, \ldots, t_n)$", такой, что некоторое t_i есть a. Составляется список S, в который включается переменная K, а если имеется антецедент вида $K = (X_1, \ldots, X_m)$, то также все переменные этого антецедента. Имеется единственный невырожденный числовой атом T консеквента, параметры которого не включаются в список S. Выбирается параметр b терма T, не входящий в S и отличный от B. Проверяется, что если имеется антецедент, содержащий одновременно b и B, то B встречается в T. Проверяется, что каждая переменная теоремы, не встречающаяся в консеквенте и не входящая в S, встречается в некотором антецеденте одновременно с B. Составляется непустой список $x_1, \ldots, x_k$ параметров антецедентов, не входящих в S. Переменная a - элемент x_j этого списка; переменная b - элемент x_q. Выбираются новые переменные $y_1, \ldots, y_k$ и определяется список Q, образованный антецедентами теоремы, результатами подстановки в них переменных $y_1, \ldots, y_k$ вместо $x_1, \ldots, x_k$, а также равенством атома T результату применения к T такой же подстановки. Переменная a есть некоторое x_j. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что $x_j = y_j$ - следствие Q, консеквента и результата применения указанной выше подстановки к консеквенту. Решается задача на исследование с посылками Q. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "антецеденты", "усиление" и "исключ x_q y_q". После решения проверяется, что посылки не содержат переменных x_q, y_q. Консеквентом новой теоремы становится равенство "$x_q = y_q$", антецеденты - все не имеющие заголовка "актив" посылки задачи на исследование. Результат упрощается. (Прием числкоэфф - 22).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdefgABCDEK}(\neg(g = E)\ \&\ \neg(g \in \text{прямая}(AB))\ \&\ K = (A, B, C, D)\ \&$
$\text{коорд}(g, K) = (d, e, f)\ \&\ \text{коорд}(E, K) = (a, b, c)\ \&\ g - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$\text{прямая}(gE) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{однасторона}(g, C, \text{прямая}(AB))\ \&\ \text{систкоорд}(K) \rightarrow$
$b = e)$

из теоремы

$\forall_{abcABCDEHK}(\neg(E = H)\ \&\ K = (A, B, C, D)\ \&\ \text{коорд}(E, K) = (a, b, c)\ \&$
$H \in \text{прямая}(AB)\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ H - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AC) \parallel \text{прямая}(EH)\ \&$
$\text{однасторона}(C, E, \text{прямая}(AB))\ \&\ \text{систкоорд}(K) \rightarrow bl(AC) = l(EH))$

14. Попытка анализа контекст теоремы для получения соотношений, не содержащих промежуточных параметров. Теорема - тождество A для невырожденных числовых атомов. Решаетя задача на исследование, посылки которой - антецеденты и консеквент. Неизвестные - параметры посылок. Имеется также цель "теорвывод". После решения выбирается равенство T в посылках, не входящее в исходный список посылок, все параметры которого встречаются в антецедентах, причем список X параметров антецедентов, не встречающихся в T, непуст. Усматривается, что T было выведено с использованием консеквента. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих X, и непустой подсписок S_2 остальных утверждений. При помощи задачи на доказательство проверяется, что $\exists_X(S_1)$ - следствие S_2. Проверяется, что после решения задачи на исследование, аналогичной приведенной выше, но с посылками S_2, утверждение T уже не появляется в посылках. Дополнительно, чтобы перепроверить, что T не выводится из S_2 "старыми" средствами, используется задача на доказательство. Если на нее получен "отказ", создается новая теорема с консеквентом T и антецедентами S_2. Предварительно T упрощается. (Прием числовойатом - 16).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ABC}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
    $\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(BC)^2 = l(AB)^2 + l(AC)^2)$

    из теоремы

    $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(A = C)\ \&$
    $\neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC)\ \&\ D \in \text{прямая}(BC)\ \&$
    $\text{прямая}(AD) \perp \text{прямая}(BC) \rightarrow l(BD)l(CD) = l(AD)^2)$

15. Попытка варьирования теоремы путем дополнительного построения, позволяющего исключить старую переменную. Теорема - тождество A для невырожденных числовых атомов. Решается задача на исследование Z_1, посылки которой - антецедент и терм "консеквент(A)". Неизвестные - параметры посылок. Имеется цель "допкадр", указывающая на необходимость найти дополнительное построенив антецедентах, которое могло бы позволить исключить из теоремы некоторые выражения. После решения выбирается комментарий к посылкам (допкадр B_1 B_2 B_3), определяющий одно из таких построений. B_1 - конъюнкция дополнительных антецедентов, содержащих новые переменные; B_2 - конъюнкция соотношений (следствий из антецедентов и B_1), которые могут оказаться плезными при исключении выражений; B_3 - список выражений, которые должны быть исключены из теоремы после ввода новых антецедентов. Проверяется, что B_3 - некоторая переменная C. Решается задача на исследование Z_2, посылки которой - антецеденты, B_1, B_2 и A. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "исключ C". Консеквент A помечается комментарием посылки "экв", позволяющим определить, во что он превратится по ходу решения. После решения выбирается посылка с комментарием "экв" - некоторое равенство R. Проверяется, что оно не содержит C. Далее решается задача на исследование Z_3, посылки которой - антецеденты и B_1. Неизвестные - параметры посылок. Имеются также цели "известно", "антецеденты", "исключ C". После решения составляется список S посылок, не имеющих заголовка "актив".

Из него удаляются утверждения вида "$\neg(E)$", такие, что при замене их на E удается усмотреть истинность R. Проверяется, что утверждения S не содержат C. Консеквентом новой теоремы становится R, антецедентами - утверждения S, пополненные утверждениями, необходимыми для сопровождения по о.д.з. (Прием числовойатом - 17).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \neg(\text{прямая}(BC) = \text{прямая}(CD))\ \&$
$\angle(ACB) = \angle(ACD)\ \&\ A \in \text{прямая}(BD)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&$
$C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \rightarrow l(AD)l(BC) = l(AB)l(CD))$

из теоремы

$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$\neg(A = E)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ B \in \text{прямая}(AD)\ \&$
$\text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC)\ \&\ C \in \text{прямая}(AE)\ \&$
$\neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(AD)) \rightarrow l(AB)l(DE) = l(AD)l(BC))$

Здесь выводится свойство биссектрисы угла треугольника из соотношения пропорциональности отрезков, связанных с параллельными прямыми.

16. Попытка варьирования теоремы путем дополнительного построения, позволяющего исключить вспомогательную переменную антецедентов. Консеквент теоремы - нечисловой двуместный предикат A. Решается задача на исследование Z_1, посылки которой - антецедент и терм "консеквент(A)". Неизвестные - параметры посылок. Имеется цель "допкадр", указывающая на необходимость найти дополнительное построенив антецедентах, которое могло бы позволить исключить из теоремы некоторые выражения. После решения выбирается комментарий к посылкам (допкадр B_1 B_2 B_3), определяющий одно из таких построений. B_1 - конъюнкция дополнительных антецедентов, содержащих новые переменные; B_2 - конъюнкция соотношений (следствий из антецедентов и B_1), которые могут оказаться плезными при исключении выражений; B_3 - список выражений, которые должны быть исключены из теоремы после ввода новых антецедентов. Проверяется, что B_3 - некоторая переменная C, входящая в консеквент. Решается задача на исследование Z_2, посылки которой - антецеденты, B_1 и терм "консеквент(A)". Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "исключ C". По окончании решения составляется список S посылок, не имеющих заголовка "актив". Проверяется, что утверждения S не содержат переменной C. В списке S находится терм "консеквент(B)". Он исключается из S. Консеквентом новой теоремы становится B; антецедентами - S. Результат упрощается. (Прием отношение - 19).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abBCDE}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = D)\ \&\ \neg(b = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(B = D)\ \&$
$\neg(C = E)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(\text{прямая}(ab) = \text{прямая}(aD))\ \&\ \neg(\text{прямая}(aD) \parallel$
$\text{прямая}(bB))\ \&\ l(aD)l(BC) = l(bB)l(DE)\ \&\ C \in \text{прямая}(bB)\ \&\ E \in \text{прямая}(aD)$
$\&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&$
$E - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(BD)\ \&\ \text{однасторона}(B, D, \text{прямая}(CE))\ \&$
$\text{однасторона}(C, E, \text{прямая}(BD)) \rightarrow \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(CE))$

из теоремы

$\forall_{ABCDE}(\neg(B = C)\ \&\ \neg(B = D)\ \&\ \neg(C = E)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ l(AB)l(DE) = l(AD)l(BC)\ \&\ A \in \text{прямая}(BC)\ \&\ A \in \text{прямая}(DE)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \text{однасторона}(B, D, \text{прямая}(CE))\ \&\ \text{однасторона}(C, E, \text{прямая}(BD)) \rightarrow \text{прямая}(BD) \parallel \text{прямая}(CE))$

Исходная теорема усматривает из соотношений пропорциональности параллельность двух прямых, пересекающихся с двумя пересекающимися в точке A прямыми BC, DE. Итоговая теорема освобождается от точки A, рассматривая пропорциональные отрезки между тремя параллельными прямыми.

17. Попытка вывести соотношение с дополнительным числовым атомом и исключить из него старый атом. Теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. Составляется список S невырожденных числовых атомов консеквента. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и консеквент. Неизвестные - параметры посылок; имеется также цель "теорвывод". После решения в посылках выбирается равенство A, список невырожденных числовых атомов которого не включается в S причем это равенство имеет только невырожденные числовые атомы. Предпринимается цикл попыток преобразовать равенство A при помощи других равенств $t_1 = t_2$ в посылках, таких, что t_1 - невырожденный числовой атом, входящий в A и не входящий в S, t_2. Каждый числовой атом выражения t_2 входит либо в S, либо в A.Если такое равенство обнаружено, то предпринимается замена всех вхождений t_1 в A на t_2. Такое преобразование A выполняется, пока это возможно. По завершении составляется список Q числовых атомов выражения A. Проверяется, что S - подспиок Q. Выбирается элемент T списка S, и консеквент разрешается относительно T. Возникает равенство $T = P$. Определяется результат R замены в A всех вхождений T на P. После его упрощения возникает равенство, которое становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 56).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC))\ \&\ \angle(ABD) = \angle(CBD)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \rightarrow l(BD)^2 l(CD) + l(CD)^2 l(AD) = l(BC)^2 l(AD))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \angle(ABD) = \angle(DBC)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)) \rightarrow l(AB)l(CD) = l(AD)l(BC))$

18. Попытка выразить уникальный числовой атом выведенного соотношения через другие числовые атомы, не содержащие заданного параметра выражаемого атома. Теорема - тождество A для невырожденных числовых атомов. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и консеквент. Неизвестные - параметры посылок. Имеется также цель "теорвывод". После решения выбирается равенство T в посылках, не входящее в исходный список

посылок, список параметров которого совпадает со списком параметров антецедентов. Составляется список B невырожденных числовых атомов равенства T. Хотя бы один из них встречается в консеквенте. Выбирается элемент C списка B, входящий в T однократно. Выбирается некоторый его параметр X. Составляется подсписок B_1 списка B, образованный содержащими X выражениями, отличными от C. Составляется список D равенств в посылках задачи на исследование, не содержащих C, но содержащих некоторый атом списка B. Проверяется, что этот список не короче списка B_1. Если он имеет ту же длину, что B_1, то проверяется, что все содержащие X невырожденные числовые атомы равенств D входят в список B_1. Составляется список $t_1, \ldots, t_n$ всех не содержаших ни X, ни переменных, отсутствующих в антецедентах невырожденных числовых атомов посылок задачи на исследование. Выбираются новые переменные $x, a_1, \ldots, a_n$, и решается задача на описание с условиями "$x = C$", "x – число". Посылками служат посылки задачи на исследование, равенства $t_1 = a_1, \ldots, t_n = a_n$ и a_1 – число, $\ldots, a_n$ – число. Неизвестная - x, причем ее нужно выразить через $a_1, \ldots, a_n$. Ответ имеет вид $x = r$. Консеквентом новой теоремы становится результат подстановки в этот ответ выражений $C, t_1, \ldots, t_n$ вместо $x, a_1, \ldots, a_n$. (Прием числовойатом - 60).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&$
$\neg(A = B)\ \&\ \angle(ABD) = \angle(DBC)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&$
$\neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)) \rightarrow l(BD) =$
$\sqrt{l(AB)l(BC)(l(AC) + l(AB) + l(BC))(l(AB) + l(BC) - l(AC))}/(l(AB)+l(BC)))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&$
$\neg(A = B)\ \&\ \angle(ABD) = \angle(DBC)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&$
$\neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)) \rightarrow l(AB)l(CD) = l(AD)l(BC))$

19. Попытка варьирования теоремы путем дополнительных построений, позволяющих выразить сложные числовые атомы в заменяющей части через более простые - случай двух атомов. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее невырожденный числовой атом A_1 через другие невырожденные числовые атомы. Два из них - атомы B_1 и B_2 - имеют в A_2 максимальную сложность. Решается задача на исследование Z_1, посылки которой суть антецеденты и терм "консеквент($A_1 = A_2$)". Неизвестные - параметры посылок. Имеется также цель "выразить A_1 B_1 B_2". Такая цель указывает, что задача решается для определени вариантов дополнительных построений, позволяющих выразить числовые атомы A_1, B_1, B_2 через более простые числовые атомы. После решения возникают комментарии (выразить C_1 C_2), указывающие конъюнкцию C_1 утверждений, определяющих дополнительное построение, и равенство C_2, выражающее некоторый из атомов A_1, B_1, B_2 через более простые атомы, возникающие после дополнительного построения. После решения составляется список S комментариев вида (выразить C_1 $A_1 = T$). Выбирается также комментарий (выразить D_1 $B_1 = T_1$) и комментарий (выразить D_2 $B_2 = T_2$). Переменные второго из них, не встречающиеся в антецедентах (т.е. вводимые дополнительным построеним) переобозначаются так, чтобы не встречаться в первом. Проверяется, что в списке

S нет элемента (выразить $C_1\ A_1 = T$), такого, что C_1 - результат подстановки в D_1 либо в D_2. Составляется список E возникших после решения задачи Z_1 посылок вида "актив(P)", где P отлично от A_1, B_1, B_2 и имеет нечисловое значение. Решается задача на исследование Z_2, посылки которой - антецеденты, D_1, D_2 и "актив(A_1)". Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "теорвывод". Проверяется, что после решения хотя бы один из термов списка E не является посылкой задачи Z_2. Консеквентом новой теоремы становится равенство A_1 результату замены в A_2 выражений B_1, B_2 на T_1, T_2. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы, D_1 и D_2. Результат упрощается. (Прием числзнач - 46).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abABCD}(\neg(a = D)\ \&\ \neg(b = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC))\ \&\ a \in \text{прямая}(AB)\ \&\ b \in \text{прямая}(BC)\ \&\ D \in \text{отрезок}(AC)\ \&$
$a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
$\text{прямая}(aD) \perp \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{прямая}(bD) \perp \text{прямая}(BC) \rightarrow$
$l(aD)l(AB) + l(bD)l(BC) = 2S(\text{фигура}(ABC)))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC))\ \&$
$D \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow S(\text{фигура}(ABC)) =$
$S(\text{фигура}(ABD)) + S(\text{фигура}(BCD)))$

20. Попытка варьирования теоремы путем дополнительных построений, позволяющих выразить сложные числовые атомы в заменяющей части через более простые - случай трех атомов. Аналогично предыдущему, но в A_2 выделяются три атома B_1, B_2, B_3. (Прием числзнач - 48).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abcdefC}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = C)\ \&\ \neg(b = C)\ \&\ \neg(c = d)\ \&\ \neg(d = e)\ \&\ \neg(d = f)\ \&$
    $c \in \text{прямая}(ab)\ \&\ d \in \text{фигура}(abC)\ \&\ e \in \text{прямая}(bC)\ \&\ f \in \text{прямая}(aC)\ \&$
    $a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
    $\text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(cd)\ \&\ \text{прямая}(aC) \perp \text{прямая}(df)\ \&$
    $\text{прямая}(bC) \perp \text{прямая}(de) \rightarrow$
    $l(ab)l(cd) + l(aC)l(df) + l(bC)l(de) = 2S(\text{фигура}(abC)))$

    из теоремы

    $\forall_{abdC}(d \in \text{фигура}(abC)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка} \rightarrow S(\text{фигура}(abC)) =$
    $S(\text{фигура}(abd)) + S(\text{фигура}(adC)) + S(\text{фигура}(bdC)))$

21. Попытка переформулировки числовых атомов заменяющей части через уже имеющиеся объекты. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее невырожденный числовой атом A_1 через три других невырожденных числовых атома B_1, B_2, B_3, являющихся максимально сложными подтермами в A_2. Выбирается новая переменная x, и решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и равенство $A_2 = x$. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "теорема", "исклтерм B_1", "исклтерм B_2", "исклтерм

B_3". Последние три цели указывают тенденцию на вывод утверждений, не содержащих B_1, B_2, B_3. После решения выбирается посылка $x = t$, где выражение t не имеет параметров, отсутствовавших в исходных посылках, причем список его невырожденных числовых атомов не более чем трехэлементный и не включается в B_1, B_2, B_3. Консеквентом новой теоремы становится равенство $A_1 = t$, антецеденты - те же, что у исходной теоремы. (Прием числзнач - 47).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abdC}(d \in \text{фигура}(abC)$ & $a-$точка & $b-$точка & $C-$точка $\rightarrow S(\text{фигура}(abC)) = S(\text{фигура}(abd)) + S(\text{фигура}(adC)) + S(\text{фигура}(bdC)))$

из теоремы

$\forall_{abcdC}(c \in \text{отрезок}(bC)$ & $d \in \text{отрезок}(ac)$ & $a -$ точка & $b -$ точка & $c-$точка & $C-$точка $\rightarrow S(\text{фигура}(abC)) = S(\text{фигура}(abd)) + S(\text{фигура}(acC)) + S(\text{фигура}(bcd)))$

7.3 Изменение уравнения для координат множества объектов

1. Попытка заменить неоднобуквенные подвыражения уравнения на координаты вспомогательного объекта. Теорема - тождество вида "коорд$(A_1, K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_n}(A_2)$". Не менее двух антецедентов определяют наборы координат отдельных точек. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты теоремы. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "систкоорд". Последняя цель ориентирует на вывод координат всевозможных объектов, выразимых только через координаты, изначально указанные в посылках. По окончании решения выбирается посылка вида "коорд$(B, K) = (t_1, \ldots, t_n)$", не входящая в исходный список посылок, у которой каждое выражение t_i неоднобуквенное. Проверяется, что эта посылка не содержит переменных, отсутствовавших в исходных посылках и что каждое t_i встречается в A_2. Выбирается антецедент "коорд$(C, K) = (y_1, \ldots, y_n)$", такой, что $y_1, \ldots, y_n$ - различные переменные, каждая из которых имеет единственное вхождение в A_2 и встречается в выражениях $t_1, \ldots, t_n$. Выбираются новые переменные $a_1, \ldots, a_n$. Консеквентом новой теоремы становится результат замены в консеквенте выражений $t_1, \ldots, t_n$ на переменные $a_1, \ldots, a_n$. Антецеденты - отличные от "коорд$(C, K) = (y_1, \ldots, y_n)$" антецеденты исходной теоремы и равенство "коорд$(B, K) = (a_1, \ldots, a_n)$". Результат упрощается. (Прием уравнмножество - 16).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abefABK}(\neg(A = B)$ & коорд$(A, K) = (a, b)$ & коорд$(\text{вектор}(AB), K) = (e, f)$ & $A -$ точка & $B -$ точка & систкоорд$(K) \rightarrow$ коорд$(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + et$ & $y = b + ft$ & $t -$ число$)))$

   из теоремы

$\forall_{ABKabcd}(A -$ точка & $B -$ точка & систкоорд(K) & коорд$(A,K) = (a,b)$ & коорд$(B,K) = (c,d)$ & $\neg(A = B) \rightarrow$ коорд(прямая$(AB),K) =$ set$_{xy}(\exists_t(t -$ число & $x = (c-a)t + a$ & $y = (d-b)t + b)))$

2. Попытка использовать в антецедентах координаты других объектов. Теорема - тождество вида "коорд$(A_1,K) =$ set$_{x_1\ldots x_n}(A_2)$". Имеются антецеденты вида "коорд$(B,K) = (a_1,\ldots,a_n)$". Составляется непустой список X параметров всех таких выражений $a_1,\ldots,a_n$. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и консеквент. Неизвестные - X; имеется также цель "известно". После решения выбирается посылка вида "коорд$(C,K) = (t_1,\ldots,t_n)$", такая, что все ее параметры встречаются в исходных посылках и что выражение $(t_1,\ldots,t_n)$ встречается в консеквенте. Выбираются новые переменные $y_1,\ldots,y_n$, и консеквентом новой теоремы становится результат замены в консеквенте исходной подвыражения $(t_1,\ldots,t_n)$ на $(y_1,\ldots,y_n)$. Антецедентами новой теоремы становятся антецеденты исходной и утверждение "коорд$(C,K) = (y_1,\ldots,y_n)$". Результат упрощается. (Прием уравнмножество - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{adefghijK}(\neg(a = g)$ & коорд$(g,K) = (h,i,j)$ & коорд(вектор$(ga),K) = (d,e,f)$ & $a -$ точка & $g -$ точка & Трехмерн$(K) \rightarrow$ коорд(прямая$(ag),K) =$ set$_{xyz}(x -$ число & $y -$ число & $z -$ число & пропорцнаборы$((d,e,f),(x-h,$ $y-i,z-j))))$

   из теоремы

   $\forall_{abcghijkK}(\neg(a = g)$ & коорд$(a,K) = (b,c,k)$ & коорд$(g,K) = (h,i,j)$ & $a -$ точка & $g -$ точка & Трехмерн$(K) \rightarrow$ коорд(прямая$(ag),K) =$ set$_{xyz}(x -$ число & $y -$ число & $z -$ число & пропорцнаборы$((b-h,c-i,$ $k-j),(x-h,y-i,z-j))))$

3. Попытка рассмотреть координаты еще одного элемента множества и исключить с их помощью часть параметров уравнения. Теорема имеет консеквент вида "$\exists_{x_1\ldots x_m}$(коорд$(A_1,K) =$ set$_{y_1\ldots y_n}(A_2)$ & $A_3)$", причем A_1 - переменная, а заголовок A_2 отличен от символа "существует". Рассматриваются все антецеденты вида "$B \in A_1$". Проверяется, что все B суть переменные, причем для каждой из них имеется также антецедент вида "коорд$(B,K) = (a_1,\ldots,a_n)$". Составляется список $B_1,\ldots,B_k$ всех таких B и список S антецедентов, задающих их координаты. Выбираются новые переменные $C,b_1,\ldots,b_n$ и решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты, "коорд$(A_1,K) =$ set$_{y_1\ldots y_n}(A_2)$", A_3, "$\neg(C = B_1),\ldots,\neg(C = B_k)$", "$C \in A_1$", "коорд$(C,K) = (b_1,\ldots,b_n)$". Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "исключ $x_1\ldots x_m$". После решения выбирается посылка "коорд$(D_1,K) =$ set$_{z_1\ldots z_n}(D_2)$". Проверяется, что число параметров $x_1,\ldots,x_m$, входящих в "set$_{z_1\ldots z_n}(D_2)$", меньше числа таких параметров в "set$_{y_1\ldots y_n}(A_2)$". Консеквентом новой теоремы становится "$\exists_{x_1\ldots x_m}$(коорд$(D_1,K) =$ set$_{z_1\ldots z_n}(D_2)$ & $A_3)$". Антецеденты - антецеденты исходной теоремы, "$\neg(C = B_1),\ldots,\neg(C = B_k)$", "$C \in A_1$", "коорд$(C,K) = (b_1,\ldots,b_n)$", а также все необходимые указатели типа значения переменной. Результат упрощается. (Прием координаты - 8).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcghijkK}(\neg(a = g)$ & коорд$(a, K) = (b, c, k)$ & коорд$(g, K) = (h, i, j)$ & $a -$ точка & $g-$точка & Трехмерн$(K) \to$ коорд(прямая$(ag), K) = \text{set}_{xyz}(x-$число & $y-$число & $z-$число & пропорцнаборы$((b-h, c-i, k-j), (x-h, y-i, z-j))))$

из теоремы

$\forall_{ghijKP}($коорд$(g, K) = (h, i, j)$ & $g \in P$ & Прямая(P) & Трехмерн$(K) \to$
$\exists_{def}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0)$ & коорд$(P, K) = \text{set}_{xyz}(x -$ число & $y -$ число & $z -$ число & пропорцнаборы$((d, e, f), (x-h, y-i, z-j)))$ & $d-$число & $e-$число & $f-$число$))$

4. Попытка проварьировать координаты множества объектов с помощью координаь явно указанного элемента этого множества. Теорема имеет консеквент вида "$\exists_{x_1 \ldots x_m}($коорд$(A_1, K) = \text{set}_{y_1 \ldots y_n}(A_2)$ & $A_3)$", причем A_1 - неоднобуквенное выражение с заголовком f, а заголовок A_2 отличен от символа "существует". Среди антецедентов нет равенства. В разделе символа f находится не имеющая существенных антецедентов теорема с консеквентом вида "$t_1 \in t_2$", где заголовок выражения t_2 равен f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Все переменные теоремы входят в t_2. Определяется подстановка S, переводящая t_2 в A_1. Проверяется, что результаты применения ее к антецедентам дополнительной теоремы - следствия антецедентов исходной теоремы. Определяется результат r применения S к t_1. Выбираются новые переменные $a_1, \ldots, a_n$, и решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты, "коорд$(A_1, K) = \text{set}_{y_1 \ldots y_n}(A_2)$", A_3 и "коорд$(r, K) = (a_1, \ldots, a_n)$". Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "исключ $x_1 \ldots x_m$". После решения выбирается посылка "коорд$(A_1, K) = B$", где выражение B имеет меньше параметров списка $x_1, \ldots, x)k$, чем "$\text{set}_{y_1 \ldots y_n}(A_2)$". Эта посылка становится консеквентом новой теоремы; ее антецеденты - исходные посылки задачи на исследование. Результат упрощается. (Прием координаты - 9).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdefghiBCK}(\neg(B = C)$ & $B -$ точка & $C -$ точка & Трехмерн(K) &
коорд(прямая$(BC), K) = \text{set}_{xyz}(x -$ число & $y -$ число & $z -$ число &
пропорцнаборы$((d, e, f), (g + x, a + y, b + z)))$ & $a -$ число & $b -$ число &
$d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $g -$ число & коорд$(B, K) = (c, h, i) \to$
коорд(прямая$(BC), K) = \text{set}_{xyz}(x -$ число & $y -$ число & $z -$ число &
пропорцнаборы$((d, e, f), (x - c, y - h, z - i))))$

из теоремы

$\forall_{BCK}(\neg(B = C)$ & $B -$ точка & $C -$ точка & Трехмерн$(K) \to$
$\exists_{abdefg}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0)$ & коорд(прямая$(BC), K) = \text{set}_{xyz}(x -$ число &
$y -$ число & $z -$ число & пропорцнаборы$((d, e, f), (g + x, a + y, b + z)))$ &
$a -$ число & $b -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $g -$ число$))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{AB}(A -$ точка & $B -$ точка & $\neg(A = B) \to A \in$ прямая$(AB))$

5. Попытка рассмотреть координаты элемента множества и исключить с их помощью часть параметров уравнения. Теорема - эквивалентность вида "$A_1 \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_m}(\text{коорд}(P,K) = \text{set}_{y_1 \ldots y_n}(A_2)\ \&\ A_3$", причем A_1 - элементарное утверждение с единственным параметром P, не входящим в A_2, A_3. ВЫбираются новые переменные $B, a_1, \ldots, a_n$, и решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты, "коорд$(P,K) = \text{set}_{y_1 \ldots y_n}(A_2)$", A_3, A_1, "$B \in P$", "коорд$(B,K) = (a_1, \ldots, a_n)$". Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "исключ $x_1 \ldots x_m$". После решения выбирается посылка вида "коорд$(P,K) = C$". Проверяется, что число переменных $x_1, \ldots, x_m$, являющихся параметрами C, меньше числа таких переменных - параметров "$\text{set}_{y_1 \ldots y_n}(A_2)$". Консеквентом новой теоремы становится утверждение "$\exists_{x_1 \ldots x_m}(\text{коорд}(P,K) = C\ \&\ A_3)$". Антецеденты - антецеденты исходной теоремы, A_1, "$B \in P$", "коорд$(B,K) = (a_1, \ldots, a_n)$". Результат упрощается. (Прием уравнкрив - 13).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ghijKP}(\text{коорд}(g,K) = (h,i,j)\ \&\ g \in P\ \&\ \text{Прямая}(P)\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow$
   $\exists_{def}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0)\ \&\ \text{коорд}(P,K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&$
   $z - \text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((d,e,f),(x-h,y-i,z-j)))\ \&\ d - \text{число}\ \&$
   $e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}))$"

   из теоремы

   $\forall_{KP}(P - \text{set}\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\ \&\ P \subseteq \text{Точки} \rightarrow \text{Прямая}(P) \leftrightarrow$
   $\exists_{abcdef}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&$
   $f - \text{число}\ \&\ \neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0)\ \&\ \text{коорд}(P,K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&$
   $z - \text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((x-a,y-b,z-c),(d,e,f)))))$

7.4 Вывод следствий при расширенном списке антецедентов

Анализ антецедентов и консеквента исходной теоремы, с добавлением фрагмента дополнительной теоремы

1. Попытка найти достаточные условия для наличия свойства, уточняющего исходное свойство. Теорема - простая импликация с бесповторным консеквентом A, имеющим заголовок f. Находится теорема T, представляющая собой определение $B_1 \leftrightarrow B_2\ \&\ B_3$, в котором B_2 имеет заголовок f, B_3 - конъюнкция элементарных утверждений, причем f - самый сложный символ определяющей части. Все переменные теоремы T входят в B_2. Определяется подстановка S, переводящая B_2 в A. Составляется список C, образованный антецедентами исходной теоремы и результатами применения S к антецедентам теоремы T. При помощи задачи на исследование Z_1 с посылками C и целью "противоречие" он тестируется на непротиворечивость. Затем решается задача на исследование Z_2, посылки которой - C, A и $\neg(S(B_3))$. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "теорвывод" и "Случаи". Последняя цель означает, что задача решается до момента возникновения в ее списке посылок дизъюнкции. Затем решение разветвляется: независимо решается задача

для каждого подслучая. Процесс продолжается до исчерпания возможностей, после чего создается набор N концевых задач возникшего при разборе случаев дерева задач. Каждая из задач набора N корректируется: если в ее списке посылок находятся два равенства $t_1 = t_2$, $t_1 = t_3$, где первое получено при использовании $\neg(S(B_3))$ и имеет переменную, не входящую в исходный список посылок задачи Z_2, то добавляется посылка $t_2 = t_3$. Создается набор M списков посылок задач N, выведенных при использовании $\neg(S(B_3))$, не содержащих параметров, отсутствующих в исходных посылках и не имеющих заголовка "актив". Проверяется, что каждый элемент набора M непуст. Составляется список K, образованный утверждениями, отобранными в соответствующих элементах списка M. Если такой элемент E имеет утверждение вида $\neg(P(a_1 \ldots a_k))$, где все $a_1, \ldots, a_k$ однобуквенные, то отбирается то из них, которое имеет меньше всего переменных. Иначе берется отрицание имеющего меньше всего параметров утверждения списка E. К списку K добавляются утверждения, необходимые для сопровождения по о.д.з. Консеквентом новой теоремы становится $S(B_1)$, антецедентами - утверждения C и K. Результат упрощается. (Прием свойства - 10).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{arGM}$(орграф(G) & простаяцепь(M, G) & ведет(r, послвершина(M), a, G) → цепь(мсуффикс(M, r, a), G))

из теоремы

$\forall_{arGM}$(орграф(G) & маршрут(M, G) & ведет(r, послвершина(M), a, G) → маршрут(мсуффикс(M, r, a), G))

и дополнительной теоремы

$\forall_{MG}$(орграф(G) → цепь(M, G) ↔ маршрут(M, G) & различны($M(2)$))

2. Использование дополнительной теоремы для усмотрения свойства сопутствующего объекта и вывод утверждения существования. Теорема - простая импликация с бесповторным консеквентом A, выражающим свойство "сложного" бесповторного выражения t_1. Внутри A выделяется вхождение другого подвыражения t_2, не пересекающегося с t_1, причем такого, что каждое вхождение переменной вне t_1 расположено внутри указанного вхождения t_2, причем t_2 - непосредственный операнд некоторого отношения. Сложность выражения t_2 не меньше 6; его заголовок - f. В разделе символа f находится теорема T, имеющая содержащий f элементарный консеквент с заголовком, отличным от "не". Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Единственный самый сложный подтерм B консеквента теоремы T имеет заголовок f. Определяется подстановка S, переводящая B в t_2. Составляется список C результатов применения S к антецедентам теоремы T. Параметры утверждений C не включаются в параметры t_2. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты исходной теоремы, утверждения C и результат применения S к консеквенту теоремы T. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "теорема". После решения составляется список D всех элементарных посылок, имеющих вхождение t_2, а также вхождение какой-либо не

входящей в t_1 переменной вне данного вхождения t_2. Отбираются только утверждения без заголовка "актив", все параметры которых встречаются в исходных посылках. Проверяется, что длина D не менее 2. Выбирается новая переменная x. Консеквентом новой теоремы становится результат навешивания квантора существования по x на результат замены в конъюнкции D и A подтерма t_2 на x. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы и C. Результат упрощается. (Прием свойства - 13).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{byG}(\text{граф}(G)\ \&\ \text{смежны}(b,y,G) \to \exists_a(a \in \text{компоненты}(G)\ \&\ b \in a\ \&\ y \in a))$

из теоремы

$\forall_{yG}(y \in \text{вершины}(G)\ \&\ \text{граф}(G) \to \text{компсвязн}(G,y) \in \text{компоненты}(G))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abe}(\text{граф}(e)\ \&\ \text{смежны}(a,b,e) \to b \in \text{компсвязн}(e,a))$

3. Попытка дополнить список антецедентов текущей теоремы антецедентами дополнительного тождества, выражающего отдельную координату вектора, встречающегося в заменяемой части консеквента. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, где A_1 - атомарное векторное выражение. Внутри A_2 выбирается другое атомарное векторное выражение t с заголовком f. Находится теорема T, консеквент которой - тождество вида "крд$(B_1, i, K) = B_2$", где B_1 - атомарное с заголовком f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка S, переводящая B_1 в t, и решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты исходной теоремы, результаты применения S к антецедентам теоремы T и равенство $A_1 = A_2$. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "нормкрд", "теорвывод". После решения выбирается элементарная посылка C, не имеющая заголовка "актив", все параметры которой включаются в параметры исходных посылок. Проверяется, что при ее выводе использовалось равенство $A_1 = A_2$. Эта посылка становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы и результаты применения S к антецедентам теоремы T. Результат упрощается. Для предотвращения дублирования отслеживаются списки антецедентов теорем T: дважды один и тот же (после применения S) не рассматривается. (Прием Атомарное - 27).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdeK}(e - \text{число}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{мточка}(d)\ \&\ \text{движениепо}(d,c,e)\ \&$
$\text{горизповерхн}(c,K,e)\ \&\ \text{мповерхн}(c) \to \text{силатрения}(d,c,e) \perp \text{плоскнормаль}(c,e))$

из теоремы

$\forall_{cde}(e - \text{число}\ \&\ \text{мточка}(d)\ \&\ \text{движениепо}(d,c,e)\ \&\ \text{мповерхн}(c)\ \&$
$\text{плоскповерхн}(c) \to \text{нормреакция}(d,c,e) =$
$\text{проекция}(\text{сила}(d,c,e), \text{плоскнормаль}(c,e)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{atK}(t - \text{число}\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{горизповерхн}(a, K, t) \rightarrow$
$\text{крд}(\text{плоскнормаль}(a, t), K, 1) = 0)$

Добавление антецедентов для исключения квантора существования в консеквенте

1. Попытка определить связь между координатами двух точек множества. Теорема представляет собой кванторную импликацию с консеквентом вида "$\exists_x(\text{коорд}(A_1, K) = \text{set}_{y_1 \ldots y_n}(A_2)\ \&\ A_3)$". Имеется не более одного антецедента, представляющего собой равенство, причем правая часть этого равенства, если оно есть, не имеет заголовка "класс". Выбираются новые переменные $a, b, z_1, \ldots, z_n$, и составляется список S, состоящий из антецедентов теоремы и утверждений "$a \in A_1$", "$b \in A_1$", "$\text{коорд}(a, K) = (y_1, \ldots, y_n)$", "$\text{коорд}(b, K) = (z_1, \ldots, z_n)$". Решается задача на исследование, посылки которой - S, A_3, A_2 и результат подстановки в A_2 переменных $z_1, \ldots, z_n$ вместо $y_1, \ldots, y_n$. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "исключ x". После решения выбирается посылка $t_1 = t_2$, не содержащая x и символа "коорд". Проверяется, что она имеет не менее 3 параметров, причем хотя бы один параметр списка $y_1, \ldots, y_n$ и хотя бы один параметр списка $z_1, \ldots, z_n$. Она становится консеквентом новой теоремы; антецедентами - утверждения S. Результат упрощается. (Прием координаты - 20).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcdepqxyBK}(\neg(b = c)\ \&\ \text{коорд}(b, K) = (x, y)\ \&\ \text{коорд}(c, K) = (d, e)\ \&\ \text{коорд}(B, K) = (p, q)\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ B \parallel \text{прямая}(bc)\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \text{Вектор}(B) \rightarrow p(e - y) = q(d - x))$

   из теоремы

   $\forall_{pqABCK}(\neg(A = C)\ \&\ \text{коорд}(B, K) = (p, q)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
   $B \parallel \text{прямая}(bc)\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \text{Вектор}(B) \rightarrow \exists_a(\text{коорд}(\text{прямая}(AC), K) = \text{set}_{xy}(a + qx - py = 0\ \&\ x - \text{число}\ \&\ y - \text{число})\ \&\ a - \text{число}))$

Вывод следствий с привлечением дополнительных построений

1. Вывод следствий после дополнительного построения. Теорема A - тождество для числовых атомов. Выбирается наиболее сложный символ f некоторого антецедента, и находится квазипротокол T, вводящий в рассмотрение объекты, которые часто встречаются в контексте, определяемом его антецедентами. При этом f - самый сложный символ антецедентов квазипротокола. Переменные квазипротокола переобозначены и не входят в исходную теорему. Антецеденты квазипротокола не имеют связанных переменных. Определяется подстановка S, переводящая антецеденты квазипротокола в некоторое подмножество M антецедентов исходной теоремы. Все переменные антецедентов исходной теоремы встречаются в утверждениях M. Определяется результат K применения S к консеквенту квазипротокола. Список X параметров K, не входящих в антецеденты исходной теоремы, непуст. Решается задача на исследование Z_1, посылки которой - антецеденты исходной теоремы, ее консеквент и K. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "Смтеор", "теорема". Затем

решается задача на исследование Z_2, посылки которой - результаты применения S к антецедентам квазипротокола и K. Неизвестные - параметры посылок; есть также цели "известно", "Смтеор", "теорема". После решения обеих задач в разности списков посылок Z_1 и Z_2 выбирается равенство $R_1 = R_2$ двух невырожденных числовых атомов, хотя бы один из которых имеет параметр списка X. При необходимости это равенство составляется из двух равенств $R_1 = a, R_2 = a$. Данное равенство становится консеквентом новой теоремы. Ее антецеденты - антецеденты исходной теоремы и K. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 67).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{efABCD}(l(AB) = l(CD)$ & $e \in$ прямая(AD) & $f \in$ прямая(AD) & $e -$ точка &
$f -$ точка & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка &
прямая$(eB) \perp$ прямая(AD) & прямая$(fC) \perp$ прямая(AD) &
трапеция$(ABCD) \rightarrow l(eA) = l(fD))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(CD)$ & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка &
трапеция$(ABCD) \rightarrow \angle(BAD) = \angle(ADC))$

и дополнительной теоремы (квазипротокола)

$\forall_{ABCDEF}($трапеция$(ABCD) \rightarrow E \in$ прямая(AD) & $E -$ точка &
прямая$(BE) \perp$ прямая(AD) & $F -$ точка & $F \in$ прямая(AD) &
прямая$(CF) \perp$ прямая$(AD))$

2. Решение задачи на исследование для обнаружения дополнительных посылок, позволяющих получить интересные следствия. Теорема - кванторная импликация с элементарными антецедентами и консеквентом, имеющим вид конъюнкции утверждений. Среди антецедентов нет равенсва. Список S невырожденных числовых атомов консеквента непуст. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и консеквент. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "допвыводимо" и "теорвывод". Цель "допвыводимо" определяет поиск дополнительных посылок, в предположении истинности которых возникают интересные следствия. Пары таких посылок A_1 и следствий A_2 сохраняются в комментариях (допвыводимо A_1 A_2) к посылкам задачи. После решения выбирается некоторый такой комментарий. A_2 становится консеквентом новой теоремы; антецедентами - антецеденты исходной теоремы и A_1. Результат упрощается. (Прием конъюнкция - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdeAB}(\neg(a = b)$ & $\neg(a = c)$ & $\neg(a = d)$ & $\neg(b = c)$ & $\neg(b = d)$ &
$\neg(A = B)$ & $a \in$ окружность(AB) & $b \in$ окружность(AB) & $c \in$ окружность(AB)
& $d \in$ окружность(AB) & $e \in$ отрезок(ad) & $e \in$ отрезок(bc) & $a -$ точка &
$b-$точка & $c-$точка & $d-$точка & $A-$точка & $B-$точка $\rightarrow l(be)l(ce) = l(ae)l(de))$

из теоремы

$\forall_{abcdeAB}(c -$ точка & $b -$ точка & $d -$ точка & $a -$ точка & $\neg(A = B)$ &
$B -$ точка & $A -$ точка & $\neg(a = c)$ & $\neg(a = d)$ & $\neg(b = c)$ & $\neg(b = d)$ &

$a \in$ окружность(AB) & $b \in$ окружность(AB) & $c \in$ окружность(AB) & $d \in$ окружность(AB) & $e \in$ отрезок(ad) & $e \in$ отрезок$(bc) \to \angle(acb) = \angle(adb)$ & $\angle(cad) = \angle(cbd))$

3. Решение задачи на исследование для обнаружения дополнительных посылок, позволяющих получить интересные следствия. Отличие от предыдущего приема лишь в том, что исходная теорема - тождество для числовых атомов. (Прием числовойатом - 77).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdeAB}(\neg(a = d)$ & $\neg(a = e)$ & $\neg(b = d)$ & $\neg(b = e)$ & $\neg(c = d)$ & $\neg(c = e)$ & $\neg(A = B)$ & $\neg($прямая$(cd) =$ прямая$(ce))$ & $a \in$ отрезок(cd) & $a \in$ окружность(AB) & $b \in$ отрезок(ce) & $b \in$ окружность(AB) & $d \in$ окружность(AB) & $e \in$ окружность(AB) & $a -$ точка & $b -$ точка & $c-$точка & $d-$точка & $e-$точка & $A-$точка & $B-$точка $\to l(ac)l(cd) = l(bc)l(ce))$

   из теоремы

   $\forall_{abcdeAB}(e -$ точка & $\neg(A = B)$ & $B -$ точка & $A -$ точка & $d -$ точка & $c -$ точка & $\neg(c = e)$ & $\neg(a = e)$ & $a -$ точка & $\neg(c = d)$ & $\neg(b = d)$ & $b -$ точка & $\neg(a = d)$ & $\neg(b = e)$ & $a \in$ отрезок(cd) & $a \in$ окружность(AB) & $b \in$ отрезок(ce) & $b \in$ окружность(AB) & $d \in$ окружность(AB) & $e \in$ окружность$(AB) \to \angle(bdc) = \angle(aec))$

Пополнение списка антецедентов равенствами для вспомогательных обозначений подтермов консеквента. Следствие с этими обозначениями преобразуется согласно исходной связи между обозначенными подтермами

1. Попытка усмотрения альтернативного равенства числовых атомов в теореме, выводящей равенство одной пары атомов из равенства другой. Теорема - соотношение $t_1 = t_2$ ля невырожденных числовых атомов. Имеется антецедент $A_1 = A_2$, представляющий собой равенство двух невырожденных числовых атомов с одним и тем же заголовком, причем других равенств в антецедентах нет. Выбираются новые переменные a, b, и решается задача на исследование, посылками которой служат отличные от $A_1 = A_2$ антецеденты, утверждения "актив(A_1)", "актив(A_2)" и "$t_1 = a$", "$t_2 = b$". Неизвестные - все параметры посылок, отличные от a, b. Имеются также цели "известно", "теорвывод". После решения в посылках выбирается равенство $B_1 = r_1$, где r_1 содержит единственную переменную a, причем B_1 - невырожденный числовой атом, отличный от t_1, t_2. Определяется результат r_2 замены в r_1 переменной a на b, и в посылках находится равенство $B_2 = r_2$, где B_2 - невырожденный числовой атом, отличный от B_1, t_1, t_2. Создается новая теорема с консеквентом $B_1 = B_2$; антецеденты те же, что у исходной теоремы. (Прием числовойатом - 68).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(A = B)$ & $\neg(C = D)$ & $l(AC) = l(BC)$ & $C \in$ прямая(AB) & $A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & прямая$(AB) \perp$ прямая$(CD) \to \angle(CBD) = \angle(CAD))$

   из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ l(AC)=l(BC)\ \&\ C\in \text{прямая}(AB)\ \&$
$A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AB)\perp \text{прямая}(CD)\rightarrow$
$\angle(BDC)=\angle(ADC))$

7.5 Анализ утверждения типа "длялюбого существует длялюбого"

1. Анализ определения типа "длялюбого существует длялюбого" (варьирование внешнего параметра для элементарного следствия). Теорема имеет вид "$A_1\leftrightarrow \forall_{x_1\ldots x_n}(A_2\rightarrow\exists_{y_1\ldots y_m}(A_3\ \&\ \forall_{z_1\ldots z_k}(A_4\rightarrow A_5)))$". Все конъюнктивные члены утверждений A_2, A_3, A_4 и утверждение A_5 элементарны. Список X общих параметров утверждений A_1, A_5 непуст. Переменные $x_1,\ldots,x_n$ не встречаются в A_3 и A_4. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты, A_2, A_3, A_4 и A_5. Неизвестные - X; имеется также цель "теорвывод". После решения выбирается элементарная посылка P, содержащая переменные $x_1,\ldots,x_n$, отличная от A_5 и не содержащая переменных, отсутствовавших в исходных посылках. Выбирается переменная x_i, входящая в P. Внутри P выбирается максимальное элементарное подвыражение t, содержащее x_i и не содержащее переменных $X, y_1,\ldots,y_m, z_1,\ldots,z_k$. Оно неоднобуквенное и содержит все вхождения x_i в P. Выбирается новая переменная u и решается задача на описание с условиями $A_2, u=t, Q(u)$, где Q - тип значения t. Если P имеет вид $a<t$ либо $a\le t$, то вместо равенства $u=t$ берется неравенство $t\le u$. Посылки - антецеденты исходной теоремы. Единственная неизвестная - x_i, причем она несущественная. Ответ R не содержит x_i. Дополнительно решается еще одна задача на описание с условием R и теми же посылками: предпринимается попытка явно разрешить R относительно u. Если это удалось, в качестве R берется ее ответ, иначе сохраняется исходное R. Определяется результат P_1 замены в P подтерма t на u. Консеквентом новой теоремы становится утверждение "$\exists_{y_1\ldots y_m}(A_3\ \&\ \forall_{z_1\ldots z_k}(A_4\rightarrow P_1))$", антецедентами - антецеденты исходной теоремы, A_1 и R. Результат упрощается. (Прием развертка - 95).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\lim(b)=a\ \&\ c<a\ \&\ a-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ \text{последовательность}(b,\mathbb{R})\rightarrow$
   $\exists_n(\forall_m(m-\text{натуральное}\ \&\ n\le m\rightarrow c<b(m))\ \&\ n-\text{натуральное}))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a-\text{число}\ \&\ \text{последовательность}(b,\mathbb{R})\rightarrow\lim(b)=a\leftrightarrow\forall_e(e-\text{число}\ \&$
   $0<e\rightarrow\exists_n(n-\text{натуральное}\ \&\ \forall_m(m-\text{натуральное}\ \&\ n\le m\rightarrow|b(m)-a|<e))))$

2. Анализ определения типа "длялюбого существует длялюбого" (свертка для элементарного следствия). Начало приема совпадает с началом предыдущего приема, однако t оказывается однобукенным - совпадающим с x_i. Тогда формируется утверждение B вида $\forall_{x_1\ldots x_n}(A_2\rightarrow\exists_{y_1\ldots y_m}(A_3\ \&\ \forall_{z_1\ldots z_k}(A_4\rightarrow P)))$. Оно упрощается относительно антецедентов задачей на преобразование, имеющей цель "свертка". Ответ R не содержит квантора общности и становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы и A_1 (Прием развертка - 97).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}$(последовательность$(a, \mathbb{C})$ & $b-$ комплексное & $\lim_{n\to\infty}\{a(n)\} = b \to$
$\lim(\lambda_n(\mathrm{Re}(a(n)), n-$ натуральное$)) = \mathrm{Re}(b)$)

из теоремы

$\forall_{ab}$(последовательность$(a, \mathbb{C})$ & $b-$ комплексное $\to \lim_{n\to\infty}\{a(n)\} = b \leftrightarrow$
$\forall_e(e-$ число & $0 < e \to \exists_m(m-$ натуральное & $\forall_n(n-$ натуральное & $n > m \to$
$|a(n) - b| < e))))$

3. Анализ определения типа "длялюбого существует длялюбого" (варьирование внешнего параметра для дизъюнктивного следствия). Теорема имеет вид "$A_1 \leftrightarrow \forall_{x_1\ldots x_n}(A_2 \to \exists_{y_1\ldots y_m}(A_3 \,\&\, \forall_{z_1\ldots z_k}(A_4 \to A_5)))$". Все конъюнктивные члены утверждений A_2, A_3, A_4 и утверждение A_5 элементарны. Список X общих параметров утверждений A_1, A_5 непуст. Переменные $x_1, \ldots, x_n$ не встречаются в A_3 и A_4. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты, A_2, A_3, A_4 и A_5. Неизвестные - X; имеется также цель "теорвывод". После решения выбирается посылка вида $P_1 \vee P_2$, где P_1, P_2 элементарны, причем P_1 не содержит переменных X, а P_2 содержит некоторую переменную x_i. Внутри P_2 выбирается максимальное элементарное подвыражение t, содержащее x_i и не содержащее переменных $X, y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_k$. Оно неоднобуквенное и содержит все вхождения x_i в P_2. Выбирается новая переменная u и решается задача на описание с условиями $A_2, \neg(P_1), u = t, Q(u)$, где Q - тип значения t. Если P_2 имеет вид $a < t$ либо $a \le t$, то вместо равенства $u = t$ берется неравенство $t \le u$. Посылки - антецеденты исходной теоремы. Единственная неизвестная - x_i, причем она несущественная. Ответ R не содержит x_i. Дополнительно решается еще одна задача на описание с условием R и теми же посылками: предпринимается попытка явно разрешить R относительно u. Если это удалось, в качестве R берется ее ответ, иначе сохраняется исходное R. Определяется результат P_3 замены в P_2 подтерма t на u. Консеквентом новой теоремы становится утверждение "$\exists_{y_1\ldots y_m}(A_3 \,\&\, \forall_{z_1\ldots z_k}(A_4 \to P_3))$", антецедентами - антецеденты исходной теоремы, A_1 и R. Результат упрощается. (Прием развертка - 96).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abefi}$(предел$(f, i, a) = b$ & $e < |b|$ & $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $f-$функция &
$b-$ число & $e-$ число & Число(a) & типпредела(i) & Локопред$(f, a, i) \to$
$\exists_d(\forall_x(x \in$ Окрестн(a, d, i) & $x-$ число $\to e < |f(x)|)$ & $0 < d$ & $d-$ число$))$

из теоремы

$\forall_{abfi}(f-$функция & Число(a) & $b-$число & типпредела(i) & Локопред(f, a, i) &
$\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \to$ предел$(f, i, a) = b \leftrightarrow \forall_c(c-$ число & $0 < c \to$
$\exists_d(0 < d$ & $d-$ число & $\forall_x(x-$ число & $x \in$ Окрестн$(a, d, i) \to |f(x) - b| < c))))$

7.6 Рассмотрение экстремального значения параметра

1. Попытка рассмотрения экстремального значения параметра нечислового объекта. Теорема - простая импликация с бесповторными антецедентами и консе-

кентом, у которой каждая переменная антецедентов встречается в консеквенте. Число корневых операндов консеквента A больше 1. Имеется антецедент B, заголовок f которого тот же, что у A. Утверждение A получается из B заменой некоторой переменной x на нечисловое выражение t, содержащее x. По заголовку t определяется такой целочисленный параметр P, что из объединенного списка S антецедентов и консеквента усматривается неравенство $P(t) > P(x)$. Рассматривается список X параметров A, не входящих в B. Для каждого содержащего x, не содержащего переменных X и отличного от B антецедента устанавливается, что результат подстановки в него t вместо x - следствие S. Для $P(x)$ находится не зависящая от переменных X, x верхняя оценка M. Утверждение "M – число" упрощается и превращается в некоторое утверждение C. Список антецедентов разбивается на подсписок D_1 утверждений, содержащих переменные X, x, и подсписок D_2 остальных утверждений. К списку D_2 добавляется утверждение C. Список D_1 разбивается на непустой подсписок D_3 утверждений, содержащих переменные X, и подсписок D_4 остальных утверждений. Утверждение "$\neg(\exists_X(D_3))$" упрощается задачей на преобразование с посылками D_2, D_4 и превращается в элементарное утверждение E. Составляется список $r_1, \ldots, r_n$ всех подтермов терма E, корневым операндом которых служит x. Все эти подтермы суть выражения. Выбираются новые переменные $y_1, \ldots, y_n$, и решается задача на исследование, посылки которой - $D_2, D_4, E, r_1 = y_1, \ldots, r_n = y_n$. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "теорвывод", "исключ x". После решения составляется непустой список R всех элементарных посылок, не содержащих x, содержащих переменные списка $y_1, \ldots, y_n$ не имеющих заголовка "актив". Консеквентом новой теоремы становится "$\exists_{y_1 \ldots y_n}(R)$". Антецеденты - D_2 и не содержащий связанных переменных результат упрощения утверждения "$\exists_x(D_4)$". Результат упрощается. (Прием попыткаспуска - 25).

Пример: вывод теоремы

$\forall_G$(конечное(ребра(G)) & орграф(G) & ациклический(G) →
$\exists_b$(выходнаястепень(b, G) = 0 & $b \in$ вершины(G)))

из теоремы

$\forall_{arGM}$(орграф(G) & ациклический(G) & простаяцепь(M, G) &
ведет(r, послвершина(M), a, G) → простаяцепь(мсуффикс(M, r, a), G))

7.7 Анализ однозначной определимости

Попытка усмотрения однозначного определения переменной под квантором существования

1. Попытка усмотрения однозначности восстановления переменных кванторной приставки по части конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Теорема - эквивалентность вида $A \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_n}(B_1 \ \& \ \ldots \ \& \ B_m)$. Выбирается некоторое B_i, не имеющее связанных переменных, не используемое для сопровождения по о.д.з. и имеющее параметр, отличный от $x_1, \ldots, x_n$. Выбираются новые переменные $y_1, \ldots, y_n$, и решается задача на исследование, посылки которой

- антецеденты, $B_1, \ldots, B_m$, утверждения списка S результатов замены переменных $x_1, \ldots, x_n$ на $y_1, \ldots, y_n$ в элементарных B_j, отличных от B_i, а также утверждение $\neg(x_1 = y_1) \vee \ldots \vee \neg(x_n = y_n)$. Цели задачи - "противоречие", "теорвывод". После решения возникает посылка "ложь". Консеквентом новой теоремы становится B_i, антецедентами - антецеденты исходной теоремы, $B_1, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_m$ и A. Результат упрощается. (Прием развертка - 42).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ E \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ E \in \text{окружность}(CD)\ \&$
$A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$\text{внешкасаются}(\text{окружность}(AB), \text{окружность}(CD)) \rightarrow E \in \text{окружность}(AB))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D)\ \&$
$\neg(A = B) \rightarrow \text{внешкасаются}(\text{окружность}(AB), \text{окружность}(CD)) \leftrightarrow$
$\exists_E(E - \text{точка}\ \&\ E \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$E \in \text{окружность}(CD)))$

2. Попытка усмотрения однозначности восстановления переменных кванторной приставки по части конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Начало приема, вплоть до формирования итоговой теоремы, совпадает с началом предыдущего приема. Однако, консеквентом новой теоремы становится $x_1 = y_1\ \&\ \ldots\ \&\ x_n = y_n$, антецедентами - антецеденты исходной теоремы, утверждения $B_1, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_m$, утверждения списка S и утверждение A. Результат упрощается. (Прием развертка - 123).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aABCDE}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ a \in \text{окружность}(AB)\ \&\ a \in \text{окружность}(CD)$
$\&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{окружность}(CD)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
$B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \text{внешкасаются}(\text{окружность}(AB),$
$\text{окружность}(CD)) \rightarrow a = E)$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D)\ \&$
$\neg(A = B) \rightarrow \text{внешкасаются}(\text{окружность}(AB), \text{окружность}(CD)) \leftrightarrow$
$\exists_E(E - \text{точка}\ \&\ E \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$E \in \text{окружность}(CD)))$

3. Попытка усмотрения однозначности определения переменной под квантором существования по дополнительным условиям: вывод импликации. Теорема - эквивалентность вида $A_1 \leftrightarrow \exists_x(A_2)$. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и конъюнктивные члены утверждения A_2. Неизвестная - x; имеется также цель "идент", форсирующая вывод следствий, являющихся исходными данными обращений к идентифицирующим операторам. После решения выбирается посылка вида $P(x)$. Находится теорема T, консеквент которой имеет вид $y = z$ равенства двух переменных, симметричным образом входящих в антецеденты. Она имеет антецеденты $P(y), P(z)$, причем ни один

антецедент не содержит одновременно y и z. Составляется список S_1 антецедентов теоремы T, содержащих y. Проверяется, что все переменные теоремы T, отличные от z, встречаются в S_1. Находится подстановка B, переводящая S_1 в подмножество D посылок задачи на исследование. Составляется список S_2 результатов применения D к антецедентам теоремы T, не содержащим ни y, ни z. Проверяется, что каждая новая посылка, введенная при решении задачи на исследование и не являющаяся следствием исходных посылок, принадлежит S_2. Список S_3 конъюнктивны членов утверждения A_2, не входящих в D, непуст. Консеквентом новой теоремы становится конъюнкция утверждений S_3, антецедентами - антецеденты исходной теоремы, утверждения D, S_2 и A_1. Результат упрощается. (Прием развертка - 43).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDE}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB)=\text{прямая}(CD))\ \&$
$E\in\text{прямая}(AB)\ \&\ E\in\text{прямая}(CD)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&$
$D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ \text{разныестороны}(A,B,\text{прямая}(CD))\to E\in\text{отрезок}(AB))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \neg(C=D)\to$
$\text{разныестороны}(A,B,\text{прямая}(CD))\leftrightarrow\exists_E(E-\text{точка}\ \&\ E\in\text{отрезок}(AB)\ \&$
$E\in\text{прямая}(CD)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDEF}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \neg(C=D)\ \&$
$\neg(A=B)\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\ \&\ E\in\text{прямая}(AB)\ \&\ F\in\text{прямая}(AB)\ \&$
$E\in\text{прямая}(CD)\ \&\ F\in\text{прямая}(CD)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB)=\text{прямая}(CD))\to$
$E=F)$

Использование задачи на исследование для определения условий однозначной определимости объектов

1. Перестановка антецедента и консеквента, однозначно определяющих один и тот же объект: решается задача на исследование, посылки которой суть все антецеденты и консеквент. Эта задача имеет цель "опрзнач", ориентирующую на получение комментариев (опрзнач A_1 A_2 A_3), указывающих, что в случае истинности утверждения A_2 существует единственное значение переменной A_3, при котором истинно утверждение A_1. Выбираются два таких комментария (опрзнач A_1 A_2 x) и (опрзнач B_1 B_2 x), относящихся к одной и той же переменной x. Проверяется, что конъюнктивные члены A_1 содержатся в списке антецедентов, а конъюнктивные члены B_1 пересекаются с конъюнктивными членами консеквента. Тогда создается импликация, антецеденты которой суть все не входящие в A_1 антецеденты исходной теоремы, а также конъюнктивные члены B_1, B_2, A_2. Консеквентом служит единственный не входящий в новый список антецедентов конъюнктивный член утверждения A_1. (Прием опрзнач - 1).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ l(AC) = l(BC)\ \&$
$D \in$ прямая$(AB)\ \&\ A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&\ C -$ точка $\&\ D -$ точка $\&$
прямая$(AB) \perp$ прямая$(CD) \to \angle(ACD) = \angle(BCD))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&\ C -$ точка $\&\ D -$ точка $\&\ \neg(B = C)\ \&$
$\neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \angle(ACD) = \angle(DCB)\ \&$
$l(AC) = l(BC)\ \&\ D \in$ прямая$(AB) \to$ прямая$(CD) \perp$ прямая$(AB)\ \&$
$l(AD) = l(DB))$

Характеристика "опрзнач(D)" исходной теоремы указывает, что ее консеквент и часть антецедентов однозначно определяют значение переменной D, независимо от этого определяемой некоторой группой антецедентов.

2. Решается задача на исследование, посылки которой суть все антецеденты и консеквент. Эта задача имеет цель "опрзнач", ориентирующую на получение комментариев (опрзнач $A_1\ A_2\ A_3$), указывающих, что в случае истинности утверждения A_2 существует единственное значение переменной A_3, при котором истинно утверждение A_1. Выбираются три таких комментария (опрзнач $A_1\ A_2\ x$), (опрзнач $B_1\ B_2\ x$), (опрзнач $C_1\ C_2\ x$), относящихся к одной и той же переменной x. Проверяется, что конъюнктивные члены A_1 содержатся в списке антецедентов, а конъюнктивные члены каждого из утверждений B_1, C_1 пересекаются с конъюнктивными членами консеквента. Тогда создается импликация, антецеденты которой суть все не входящие в A_1 антецеденты исходной теоремы, а также конъюнктивные члены B_1, B_2, A_2. Консеквентом служит единственный не входящий в новый список антецедентов конъюнктивный член утверждения C_1. (Прием опрзнач - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ l(AC) = l(BC)\ \&\ D \in$ прямая$(AB)\ \&$
   $A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(CD) \to$
   $l(AD) = l(BD))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&\ C -$ точка $\&\ D -$ точка $\&\ \neg(B = C)\ \&$
   $\neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \angle(ACD) = \angle(DCB)\ \&$
   $l(AC) = l(BC)\ \&\ D \in$ прямая$(AB) \to$ прямая$(CD) \perp$ прямая$(AB)\ \&$
   $l(AD) = l(DB))$

   Характеристика - "опрзнач(D)".

3. Однозначное определение одной из переменных связывающей приставки по другим ее переменным. Теорема - кванторная импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Она является стартовой теоремой цикла вывода. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты теоремы. Незвестные - параметры посылок. После решения выбирается равенство $x = t$ в посылках, такое, что переменная x не входит в t, причем все переменные равенства встречаются в антецедентах. Консеквент

новой теоремы становится результат подстановки t вместо x в консеквент исходной теоремы, антецедентами - результаты такой же подстановки t вместо x в консеквент исходной теоремы, антецедентами - результаты такой же подстановки в антецеденты исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием вывод - 26).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ACD}(\neg(A = C)\ \&\ A \in D\ \&\ C \in D\ \&\ \text{Плоскость}(D) \rightarrow \text{прямая}(AC) \subseteq D)$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A \in B\ \&\ C \in B\ \&\ \text{Прямая}(B)\ \&\ \text{Плоскость}(D)\ \&\ A \in D\ \&$
$C \in D\ \&\ \neg(A = C) \rightarrow B \subseteq D)$

7.8 Использование задачи на исследование для формирования гипотезы

1. Попытка усмотрения пары необходимых условий, дающих эквивалентное определение. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$, где A_2 - конъюнкция элементарных утверждений. Конъюнктивные члены A_2 разбиваются на непустой подсписок B_1 утверждений, имеющих более чем двуместное отношение, и непустой подсписок B_2 остальных утверждений. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты, A_1 и A_2. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "теорема". После решения составляется список S элементарных посылок, не являющихся антецедентами, не входящих в B_1, отличных от A_1, не имеющих заголовка "актив" и не являющихся следствиями антецедентов и B_1. Этот список пополняется равенствами $t_1 = t_2$, такими, что $t_1 = a$ и $t_2 = a$ - элементы S. Проверяется, что длина списка S меньше 10. Просматриваются всевозможные пары P_1, P_2 элементов списка S, такие, что P_2 не имеет невырожденных числовых атомов, заголовки которых отсутствуют в P_1, причем данная пара не включается в B_2. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что B_2 - следствие списка Q антецедентов, B_1 и P_1, P_2. Тогда создается новая теорема с консеквентом A_1 и антецедентами Q. Результат упрощается. (Прием определение - 60).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(l(AB) = l(CD)\ \&\ l(AD) = l(BC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&$
   $C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{четырехугольник}(ABCD) \rightarrow \text{параллелограмм}(ABCD))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \rightarrow$
   $\text{параллелограмм}(ABCD) \leftrightarrow \text{четырехугольник}(ABCD)\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel$
   $\text{прямая}(CD)\ \&\ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD))$

2. Анализ равенства двух значений определяемой двуместной операции при варьировании единственного корневого параметра - случай идентичных теорем. Теорема - определение вида $f(x, t) = A$, где x - переменная, причем левая часть

бесповторна. Создается теорема T, полученная из исходной теоремы переобозначением всех переменных на новые переменные. Ее консеквент имеет вид $f(y,r)=B$. Определяется подстановка S, переводящая r в t. Создается список D, образованный антецедентами исходной теоремы и результаты применения S к антецедентам теоремы T. Находится результат B_1 применения подстановки S к B, и решается задача на исследование. Ее посылки - D и равенство $A=B_1$. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "нормтеорема" и "теорема". После решения обнарживается посылка $x=y$. Создается утверждение R вида "$f(x,t)=f(y,t)\leftrightarrow x=y$". Список D подразбивается на подсписок D_1 утверждений, параметры которых включаются в параметры R, и подсписок D_2 стальных утверждений. Если D_2 непуст, то усматривается, что квантор существования по всем не входящим в R переменным, навешенный на конъюнкцию утверждений D_2, является следствием D_1. Консеквентом новой теоремы становится R, антецедентами - D_1. Результат упрощается. (Прием определение - 107).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABab}(\neg(A=B)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ 0\le a\ \&\ 0\le b\to a\cdot\text{вектор}(AB)=b\cdot\text{вектор}(AB)\leftrightarrow a=b)$

из теоремы

$\forall_{ABCa}(a-\text{число}\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ C\in\text{прямая}(AB)\ \&\ 0\le a\ \&\ l(AC)=al(AB)\ \&\ \text{точкалуча}(A,B,C)\to a\cdot\text{вектор}(AB)=\text{вектор}(AC))$

3. Анализ равенства двух значений определяемой двуместной операции при варьировании единственного корневого параметра - случай различных теорем. Аналогично предыдущему, но в качестве T берется не копия исходной теоремы, а некоторая другая теорема списка вывода. После переобозначения ее переменных на переменные, отсутствующие в исходной теореме, консеквент приобретает вид $f(y,r)=B$. Далее - как в предыдущем пункте. (Прием определение - 108).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABab}(\neg(A=B)\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ a\le 0\ \&\ 0\le b\to a\cdot\text{вектор}(AB)=b\cdot\text{вектор}(AB)\leftrightarrow a=b)$

из теоремы

$\forall_{ABCa}(a-\text{число}\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ C\in\text{прямая}(AB)\ \&\ a\le 0\ \&\ l(AC)=-al(AB)\ \&\ A\in\text{отрезок}(BC)\to a\cdot\text{вектор}(AB)=\text{вектор}(AC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCa}(a-\text{число}\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ C\in\text{прямая}(AB)\ \&\ 0\le a\ \&\ l(AC)=al(AB)\ \&\ \text{точкалуча}(A,B,C)\to a\cdot\text{вектор}(AB)=\text{вектор}(AC))$

4. Попытка усмотрения связей между корнями, эквивалентных уравнению. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$ для разрешения утверждения A_1 относительно переменной x. Утверждение A_2 содержит символ "или". Оно представляется в виде A_3 & A_4, где A_3 - конъюнкция списка (возможно, пустого) утверждений, не содержащих x. Выражение "$\mathrm{set}_x(A_4)$" упрощается и приобретает вид "$\{t_1, \ldots, t_n\}$", где $n \geq 2$. Выбираются новые переменные $a_1, \ldots, a_n$, и решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты, A_3 и $t_1 = a_1, \ldots, t_n = a_n$. Неизвестные - $a_1, \ldots, a_n$; имеется также цель "связнеизв", указывающая на тенденцию вывода посылок, устанавливающих связи между неизвестными. После решения составляется список S посылок, имеющих более одного вхождения неизвестной и не имеющих кратных вхождений одной и той же неизвестной. Проверяется, что этот список имеет не менее n элементов. Проверяется, что каждый результат подстановки в A_1 выражения t_i вместо x - следствие антецедентов и S. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность "$\mathrm{set}_x(A_1) = \{a_1, \ldots, a_n\} \leftrightarrow S$". Антецеденты те же, что у исходной теоремы. (Прием глуб - 58).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdef}(\neg(b = 0)$ & $a -$ число & $b -$ число & $d -$ число & $e -$ число $\rightarrow$
   $\mathrm{set}_e(ae + be^2 = d) = \{c, f\} \leftrightarrow bcf = -d$ & $b(c + f) = -a)$

   из теоремы

   $\forall_{abde}(\neg(b = 0)$ & $a -$ число & $b -$ число & $d -$ число & $e -$ число $\rightarrow$
   $ae + be^2 = d \leftrightarrow 0 \leq 4bd + a^2$ & $(e = -(a + \sqrt{4bd + a^2})/(2b)$ $\vee$
   $e = (-a + \sqrt{4bd + a^2})/(2b)))$

5. Усмотрение объекта, однозначно определяемого по исходному объекту класса, и вывод неравенства для мощностей. Теорема - тождество вида $A_1 = \mathrm{card}(\mathrm{set}_x(x \in A_2$ & $A_3))$, причем переменная x не входит в A_2. Решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты, "$x \in A_2$" и A_3. Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно" и "теорвывод". Выбирается переменная y, входящая после решения задачи в ее посылки и не входящая в исходные посылки. Составляется список S посылок, содержащих y. Проверяется, что среди этих посылок имеется посылка, содержащая x, причем y - единственный их параметр, не входящий в исходные посылки. Выбирается новая переменная z, и проверяется, что равенство $y = z$ - следствие результирующих посылок задачи и результатов замены в утверждениях S переменной y на z. Консеквентом новой теоремы становится неравенство "$\mathrm{card}(\mathrm{set}_y(\exists_x(S))) - A_1 \leq 0$". Антецеденты - антецеденты исходной теоремы и утверждение "конечное(A_2)". Результат упрощается. (Прием описатель - 102).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aG}(a \in$ вершины(G) & конечное(ребра$(G))$ & граф$(G) \rightarrow$
   $0 \leq$ степеньвершины$(a, G) -$ card(смежнверш$(a, G)))$

   из теоремы

   $\forall_{aG}($граф(G) & $a \in$ вершины$(G) \rightarrow$ степеньвершины$(a, G) =$
   card$(\mathrm{set}_x(x \in$ ребра(G) & конецребра$(a, x, G))))$

Глава 8

Вывод следствий с помощью задачи на преобразование

Упрощение характеристики определяемого объекта

1. Область определения функции, заданной через описатель "отображение". Теорема - определение "$A_1 = \lambda_{x_1 \ldots x_n}(A_3, A_2)$". При помощи задачи на преобразование упрощается выражение "$\text{set}_{x_1 \ldots x_n}(A_2)$". Результат упрощения - некоторое выражение P. Консеквентом новой теоремы становится равенство "область$(A_1) = P$". Антецеденты те же что у исходной теоремы. (Прием определение - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aAB}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ B \subseteq A \to \text{Dom}(\text{индикатор}(A, B, a)) = A)$

   из теоремы

   $\forall_{ABa}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ B \subseteq A \to \text{индикатор}(A, B, a) = \lambda_x((a \text{ при } x \in B, \text{ иначе } 0), x \in A))$

2. Вывод условия принадлежности области определения функции. Теорема - определение "$A_1 = \lambda_x(A_3, A_2)$". Утверждение A_2 упрощается при помощи задачи на преобразование. Результат P имеет заголовок "и". Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность "$x \in \text{Dom}(A_1) \leftrightarrow P$". Антецеденты те же, что у исходной теоремы. (Прием определение - 230).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fgx}(f - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \to x \in \text{Dom}(\text{произведение}(f, g)) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(g) \ \& \ g(x) \in \text{Dom}(f))$

   из теоремы

   $\forall_{fg}(f - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \to \text{произведение}(f, g) = \lambda_x(f(g(x)), x \in \text{прообраз}(g, \text{Dom}(f))))$

3. Образ множества для функции, заданной посредством описателя "отображение". Теорема - определение "$A_1 = \lambda_{x_1 \ldots x_n}(A_3, A_2)$". Выбираются новые переменные a, b, и выражение "$\text{set}_a(\exists_{x_1 \ldots x_n}((x_1, \ldots, x_n) \in b \ \& \ A_2 \ \& \ a = A_3))$" упрощается задачей на преобразование. Посылки - антецеденты и утверждения "$b - \text{set}$",

"$b \subseteq \text{set}_{x_1 \ldots x_n}(A_2)$". Результат P имеет вид "$\text{set}_{y_1 \ldots y_m}(\exists_z(B))$". Решается задача на описание, условия которой - конъюнктивные члены утверждения B. Посылки те же, что у задачи на преобразование. Неизвестная - z. После нахождения ответа Q предпринимается упрощение выражения "$\text{set}_{y_1 \ldots y_m}(\exists_z(Q))$". Посылки задачи на преобразование те же, что выше. Результат упрощения R не имеет связанных переменных. Число условных выражений в нем не более 2. Консеквентом новой теоремы становится равенство "$\text{образ}(A_1, b) = R$". Антецеденты - исходные посылки первой задачи на преобразование. Результат упрощается. (Прием определение - 16).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bfA}(b - \text{set} \ \& \ A - \text{set} \ \& \ b \subseteq A \ \& \ b \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow$
$\text{образ}(\text{сужение}(f, A), b) = \text{образ}(f, b))$

из теоремы

$\forall_{fA}(f - \text{функция} \ \& \ A - \text{set} \rightarrow \text{сужение}(f, A) = \lambda_x(f(x), x \in A \cap \text{Dom}(f)))$

4. Прообраз элемента для функции, заданной посредством описателя "отображение". Теорема - определение "$A_1 = \lambda_{x_1 \ldots x_n}(A_3, A_2)$". Выбирается новая переменная a, и выражение "$\text{set}_{x_1 \ldots x_n}(a = A_3 \ \& \ A_2)$" упрощается задачей на преобразование. Посылки - антецеденты. Результат R либо не имеет связанных переменных, либо содержит символ "слой". Консеквентом новой теоремы становится равенство "$\text{слой}(A_1, a) = R$". Антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. Если после упрощения получается конъюнкция, в списке вывода регистрируется каждый ее конъюнктивный член. (Прием определение - 17).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abAB}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ B \subseteq A \rightarrow \text{слой}(\text{индикатор}(A, B, a), b) =$
   $(A \text{ при } a = 0, \text{ иначе } B) \text{ при } a = b, \text{ иначе } (A \setminus B \text{ при } b = 0), \text{ иначе } \emptyset)$

   из теоремы

   $\forall_{ABa}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ B \subseteq A \rightarrow \text{индикатор}(A, B, a) =$
   $\lambda_x((a \text{ при } x \in B, \text{ иначе } 0), x \in A))$

5. Прообраз множества для функции, заданной посредством описателя "отображение". Теорема - определение "$A_1 = \lambda_{x_1 \ldots x_n}(A_3, A_2)$". Выбирается новая переменная a, и выражение "$\text{set}_{x_1 \ldots x_n}(A_3 \in a \ \& \ A_3)$" упрощается задачей на преобразование. Посылки - антецеденты и утверждение "$a - \text{set}$". Результат R не содержит связанных переменных и условных выражений. Консеквентом новой теоремы становится равенство "$\text{прообраз}(A_1, a) = R$". Антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. Если после упрощения получается конъюнкция, в списке вывода регистрируется каждый ее конъюнктивный член. (Прием определение - 229).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{afA}(A - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \text{прообраз}(\text{сужение}(f, A), a) = A \cap \text{прообраз}(f, a))$

из теоремы

$\forall_{fA}(f - \text{функция}\ \&\ A - \text{set} \to \text{сужение}(f, A) = \lambda_x(f(x), x \in A \cap \text{Dom}(f)))$

6. Сравнение мощностей множеств, характеризующих определяемый объект и исходный объект. Теорема - определение вида "$(x = A_1) \leftrightarrow A_2$", где x - переменная, не входящая в A_1. Утверждение A_2 - конъюнкция, имеющая конъюнктивный член $B_1 = B_2$, причем B_1 содержит x и имеет своим значением множество. Заголовок B_1 - символ f, причем внутри B_2 выделяется подтерм t с заголовком f. Выражение "card(B_2)" упрощается задачей на преобразование, имеющей своими посылками антецеденты и утверждений "конечное(t)". Результат R не содержит связанных переменных. Символ "мощность" внутри R может встречаться только в виде "card(t). Определяется результат P подстановки в B_1 выражения A_1 вместо x. Консеквентом новой теоремы становится равенство "card(P) = R". Антецеденты - исходные посылки задачи на преобразования. Результат упрощается. (Прием определение - 242).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{vG}(v \in \text{вершины}(G)\ \&\ \text{конечное}(\text{вершины}(G))\ \&\ \text{граф}(G) \to$
$\text{card}(\text{вершины}(\text{удалениеверш}(G, v))) = \text{card}(\text{вершины}(G)) - 1)$

из теоремы

$\forall_{Gv}(\text{граф}(G)\ \&\ v \in \text{вершины}(G) \to H = \text{удалениеверш}(G, v) \leftrightarrow$
$\text{подграф}(H, G)\ \&\ \text{вершины}(H) = \text{вершины}(G) \setminus \{v\}\ \&\ \text{ребра}(H) =$
$\text{set}_x(x \in \text{ребра}(G)\ \&\ \neg(\text{конецребра}(v, x, G))))$

7. Определени множества значений функции, заданной косвенным определением. Теорема - определение выражения F, имеющее своим консеквентом конъюнкцию вида "$F - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(F) = A_1\ \&\ \forall_{x_1 \ldots x_k}(A_2 \to F(x_i) = A_3)$". Выбирается новая переменная y, и выражение "$\text{set}_y(\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_2\ \&\ y = A_3))$" упрощается задачей на преобразование. Посылки - антецеденты. Результат R не содержит символа "класс". Консеквентом новой теоремы становится равенство "Val(F) = R". Антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием конъюнкция - 14).

Пример: вывод теоремы

$\forall_F(\text{кусочнфунк}(F) \to \text{Val}(\text{таблица}(F)) = \bigcup_{a, a \in F}(\text{Val}(a)))$

из теоремы

$\forall_F(\text{кусочнфунк}(F) \to \text{таблица}(F) - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(\text{таблица}(F)) =$
$\bigcup_{f, f \in F} \text{Dom}(f)\ \&\ \forall_{ax}(a \in \text{области}(F)\ \&\ x \in a \to$
$\text{таблица}(F)(x) = \text{функчасть}(F, a)(x)))$

8. Определение прообраза элемента функции, заданной косвенным определением. Теорема - определение выражения F, имеющее своим консеквентом конъюнкцию вида "$F - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(F) = A_1\ \&\ \forall_{x_1 \ldots x_k}(A_2 \to F(x_i) = A_3)$". Выражение F имеет вид $P(a)$, где a - переменная. $n \geq 2$. Выбирается новая переменная y, и выражение "$\text{set}_{x_i}(\exists_{x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1}\ \ldots\ x_n}(A_2\ \&\ A_3 = y))$" упрощается задачей на

преобразование. Посылки - антецеденты. Результат R либо не имеет связанных переменных, либо содержит символ "слой". Консеквентом теоремы становится равенство "слой$(F, y) = R$". Антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием конъюнкция - 15).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bF}(\text{кусочнфунк}(F) \to \text{слой}(\text{таблица}(F), b) = \bigcup_{a, a \in F} \text{слой}(a, b))$

из теоремы

$\forall_F(\text{кусочнфунк}(F) \to \text{таблица}(F) - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(\text{таблица}(F)) =$
$\bigcup_{f, f \in F} \text{Dom}(f)\ \&\ \forall_{ax}(a \in \text{области}(F)\ \&\ x \in a \to$
$\text{таблица}(F)(x) = \text{функчасть}(F, a)(x)))$

Проверка стандартного тождества для определяемой операции

1. Проверка дистрибутивност двуместной операции над функциями. Теорема - определение вида "$A_1 = \lambda_{x_1 \ldots x_n}(A_3, A_2)$". Определяемое выражение A_1 одержит переменную f, для которой существует антецедент "$f -$ функция". Переменная f имеет единственное вхождение в A_3, причем это вхождение имеет вид "$g(B, f(t))$", где g - операция, для которой существет теорема T вида $g(x, h(y, z)) = h(g(x, y), g(x, z))$. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих f, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выбираются новые переменные p, u, и выражение "$\lambda_u(h(f(u), p(u)), u \in \text{Dom}(f))$" упрощается задачей на преобразование Z_1. Посылки - антецеденты, список S_3 результатов замены в S_1 переменной f на p, и утверждение "$\text{Dom}(f) = \text{Dom}(p)$". Результат R_1 не содержит символа "отображение". Далее задачей на преобразование Z_2 упрощается результат замены в терме "$\lambda_{x_1 \ldots x_n}(A_3, A_2)$" подвыражения $g(B, f(t))$ на $h(g(B, f(t)), G(B, p(t))$. Посылки те же, что у Z_1. Результат R_2 не содержит символа "отображение". Консеквентом новой теоремы становится равенство результата замены в A_1 переменной f на R_1 выражению R_2. Антецеденты - исходные посылки задачи Z_1. Результат упрощается. (Прием определение - 211).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abf}(\text{Dom}(b) = \text{Dom}(f)\ \&\ \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ b - \text{функция}\ \&$
   $f - \text{функция}\ \&\ a - \text{число} \to a(b + f) = ab + af)$

   из теоремы

   $\forall_{af}(a - \text{число}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \to af = \lambda_x(af(x), x \in \text{Dom}(f)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число} \to ab + ac = a(b + c))$

   В первых двух теоремах имеются в виду операции "числкоэфф" и "плюсфунк", в третьей - обычные умножение и сложение.

Попытка упростить результат применения определяемой операции к стандартной операции над ее аргументом

1. Попытка рассмотреть конкатенации двух наборов. Теорема - определене вида $P(a) = A$, где a - переменная, для которой в антецедентах имеется утверждение "a – слово". Выбирается новая переменная b, и результат подстановки в A выражения "конкатенация(a, b)" вместо переменной a упрощается задачей на преобразование. Посылки - антецеденты и результаты подстановки в эти антецеденты переменной b вместо a. При упрощении разрешается использовать приемы, основанные на теоремах, уже имеющихся в списке вывода. Проверяется, что полученный ответ R содержит как $P(a)$, так и $P(b)$. Консеквентом новой теоремы становится равенство $P($конкатенация$(a, b)) = R$. Антецеденты - исходные посылки задачи на преобразование. (Прием определение - 261).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{слово} \;\&\; b - \text{слово} \rightarrow l(a;b) = l(a) + l(b))$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{слово} \rightarrow l(a) = \text{card}(\text{Dom}(a)))$

Попытка упростить результат применения к определяемой операции стандартной одноместной операции

1. Попытка применить одноместную операцию раздела к определяемой операции и свернуть заменяющее условное выражение. Теорема - определение "$A_1 = (t_1 \;\text{ при } A_2, \text{ иначе } t_2)$". В разделе, к которому относится заголовок f выражения A_1, находится одноместная операция g. Сложность ее меньше сложности f; тип значения операции f допустим для операнда операции g. Сначала с помощью задач на преобразование упрощаются выражения $g(t_1)$ и $g(t_2)$. Посылки - антецеденты. Получаемые выражения r_1 и r_2 не содержат g. Затем упрощается выражение "$(r_1 \;\text{ при } A_2, \text{ иначе } r_2)$". Посылки те же. Результат упрощения R не содержит символа "вариант". Консеквентом новой теоремы становится равенство $g(A_1) = R$. Антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием варианты - 19).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{boolean} \;\&\; b - \text{boolean} \rightarrow \neg(a \cdot b) = \neg(a) \;\vee\; \neg(b))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{boolean} \;\&\; b - \text{boolean} \rightarrow a \cdot b = (1 \text{ при } a = 1 \;\&\; b = 1, \text{ иначе } 0))$

2. Попытка применить одноместную операцию раздела к определяемой операции и свернуть заменяющее условное выражение. Теорема - определение "$A_1 = A_2$, у которого определяющая часть не содержит символа "вариант" и бесповторна. В разделе, к которому относится заголовок f выражения A_1, находится одноместная операция g. Сложность ее меньше сложности f; тип значения операции f допустим для операнда операции g. При помощи задачи на преобразование упрощается выражение $g(A_2)$. Посылки - антецеденты. Результат R не имеет

заголовка g. Консеквентом новой теоремы становится равенство $g(A_1) = R$. Антецеденты те же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием свертка - 98).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow \neg(a \Rightarrow b) = a \cdot \neg(b))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \Rightarrow b = \neg(a) \ \vee \ b)$

Примерка определяемой операции к элементарным операциям раздела

1. Примерка использующего описатели определения операции над функцией на элементарные операции раздела. Теорема - определение $A_1 = A_2$ некоторого выражения A_1, содержащего переменную f, для которой имеется антецедент "$f -$ функция". Внутри A_2 имеется единственный описатель "$\lambda_z(A_4, A_3)$". Все параметры антецедентов входят в A_1. Имеется антецедент вида "$\text{Val}(f) \subseteq B$". Выбирается новая переменная x, и решается задача на исследование, посылки которой суть антецеденты теоремы и утверждение "$x \in B$". После решения в ее списке посылок находится утверждение $P(x)$, указывающее тип значения переменной x. В разделе символа P либо его надразделах выбирается символ g операции арности n. Выбираются новые переменные $y, M, h_1, \ldots, h_n$, и формируется выражение F вида "$\lambda_y(g(h_1(y), \ldots, h_n(y)), y \in M)$". Результат подстановки F вместо f в A_2 упрощается и превращается в выражение C_1. Составляется список S результатов подстановки в антецеденты вместо f выражений $F, h_1, \ldots, h_n$. При помощи задачи на преобразование C_1 упрощается относительно S и результатов подстановки в равенство $A_1 = A_2$ функций h_i вместо f. Предварительно делается замена переменных: выбираются новые переменные $F_1, \ldots, F_n$, рассматриваются результаты R_i подстановки в A_4 переменных h_i вместо f, и уравнения $R_i = F_i(z)$ разрешаются относительно $h_i(z)$. Далее в посылках и условии C_1 задачи на преобразование предпринимается исключение $h_i(z)$. Проверяется, что ответ D задачи на преобразование не содержит описателей. Консеквентом новой теоремы становится равенство результата замены в A_1 переменной f на F выражению D. Антецеденты - утверждения S. Результат упрощается. (Прием определение - 61).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aeg}(\text{Dom}(e) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \&$
   $a \in \text{Dom}(g) \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ \text{дифференцируема}(e, a) \ \&$
   $\text{дифференцируема}(g, a) \rightarrow \text{производная}(\lambda_c(e(c) + g(c), c \in \text{Dom}(g)), a) =$
   $\text{производная}(e, a) + \text{производная}(g, a))$

   из теоремы

   $\forall_{abf}(f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \in \text{Dom}(f) \ \& \ \text{типпредела}(b)$
   $\& \ \text{локопред}(f, a, b) \ \& \ \text{дифференцируема}(f, a) \rightarrow \text{производная}(f, a) =$
   $\lim_{x \rightarrow a \backslash b}(f(x) - f(a))/(x - a))$

   Эта теорема определяет терм "$\text{производная}(f, a)$". Утверждение "$\text{локопред}(f, a, b)$" означает, что функция f определена в некоторой ненулевой окрестности

точки a, причем b - указатель типа окрестности: 0 - двусторонняя, 1 - левая, 2 - правая.

Глава 9

Вывод следствий с помощью задачи на доказательство

Проверка стандартного свойства операции либо отношения

1. Усмотрение определения коммутативной двуместной операции - случай переменных. Теорема - определение $f(x,y) = A$ двуместной операции f. Переменные x, y входят в антецеденты симметричным образом. Среди стартовых теорем цикла вывода нет определения операции f для альтернативных случаев. Определяется результат B перестановки переменных x, y в утверждении A. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство $A = B$ - следствие антецедентов. Выводится протокол "коммутативно(f)". (Прием определение - 94).

   Пример: вывод теоремы

   "коммутативно(плюсфунк)"

   из теоремы

   $\forall_{fg}(f - \text{функция } \& \ g - \text{функция } \& \ \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{плюсфунк}(f,g) = \lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f)))$

2. Усмотрение определения коммутативной двуместной операции - случай сложных операндов. Теорема - определение $f(t_1, t_2) = A$ двуместной операции f, где оба операнда t_1, t_2 однобуквенные. Составляется список S стартовых теорем, определяющих операцию f в альтернативных случаях. Проверяется, что все другие теоремы списка S короче исходной теоремы и что у каждой теоремы списка S все переменные включаются в параметры определяемой (левой) части. Просматриваются теоремы T_1 вида $f(r_1, r_2) = B$ списка S. Для каждой из них находится в списке S теорема T_2 (быть может, та же самая) вида $f(p_1, p_2) = C$, для которой существует подстановка Q, переводящая $f(p_1, p_2)$ в $f(r_2, r_1)$. Проверяется, что результаты применения Q к антецедентам T_2 - следствия антецедентов T_1 и что из антецедентов теоремы T_1 выводится равенство $B = Q(C)$. По завершении просмотра теорем списка S выводится протокол "коммутативно(f)". (Прием определение - 128).

   Пример: вывод теоремы

   "коммутативно(скалумнож)"

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D)\ \&$
$\neg(A = B) \to \text{скалумнож}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD)) =$
$l(AB)l(CD)\cos(\text{уголмежду}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD))))$

3. Усмотрение определения ассоциативной двуместной операции - случай переменных. Теорема - определение $f(x, y) = A$ двуместной операции f. Существует антецедент, подстановка в который y вместо x дает другой антецедент. Корневая связывающая приставка теоремы содержит только переменные x, y. Среди стартовых теорем цикла вывода нет определения операции f для альтернативных случаев. Выбирается новая переменная z. Определяется теорема T, полученная из исходной теоремы подстановкой y, z вместо x, y. Ее консеквент имеет вид $f(y, z) = B$ Составляется объединенный список S антецедентов исходной теоремы и теоремы T. Проверяется, что каждый антецедент исходной теоремы, после подстановки в него B вместо y, а также каждый антецедент теоремы T, после подстановки в него A вместо y, оказывается следствием S. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство результата подстановка в A выражения B вместо y результату подстановки в B выражения A вместо y - следствие S. Тогда выводится протокол "ассоциативно(f)". (Прием определение - 95).

   Пример: вывод теоремы

   "ассоциативно(плюсфунк)"

   из теоремы

   $\forall_{fg}(f - \text{функция}\ \&\ g - \text{функция}\ \&\ \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&$
   $\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \to \text{плюсфунк}(f, g) = \lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f)))$

4. Усмотрение определения ассоциативной двуместной операции - случай атомарных выражений. Теорема - определение $f(t_1, t_2) = A$ двуместной операции f. t_1, t_2 - неоднобуквенные атомарные выражения с одним и тем же заголовком. Среди стартовых теорем цикла вывода нет определения операции f для альтернативных случаев. Определяется результат T переобозначения в исходной теореме всех ее переменных на новые переменные. Ее консеквент имеет вид $f(r_1, r_2) = B$. Находится подстановка S_1, переводящая r_1 в A. Находятся также подстановка S_2, переводящая $f(t_1, t_2)$ в $f(t_2, S_1(r_2))$ и подстановка S_3, переводящая $f(t_1, t_2)$ в $f(t_1, S_2(A))$. Проверяется, что результат применения S_1 к B совпадает с результатом применения S_3 к A. Создается объединение D списка антецедентов исходной теоремы и результатов применения S_1 к антецедентам теоремы T. Проверяется, что результаты применения подстановок S_2 и S_3 к антецедентам исходной теоремы - следствия утверждений S. Затем выводится протокол "ассоциативно(f)". (Прием определение - 111).

   Пример: вывод теоремы

   "асоциативно(плюсвект)"

   из теоремы

$\forall_{ABC}(A - $ точка $\&\ B - $ точка $\&\ C - $ точка $\rightarrow$ вектор$(AB) +$ вектор$(BC) =$ вектор$(AC))$

5. Усмотрение определения ассоциативной двуместной операции - случай дополнительных параметров. Теорема - определение $f(x,y) = A$ двуместной операции f Среди стартовых теорем цикла вывода нет определения операции f для альтернативных случаев. Существует антецедент, подстановка в который y вместо x дает другой антецедент. Корневая связывающая приставка имеет переменные, отличные от x, y. Определяется тип s значения выражения A, и проверяется, что среди антецедентов имеются утверждения $s(x), s(y)$. Подсписок S_1 антецедентов, содержащих x, не пересекается со списком S_2 антецедентов, содержащих y. Остальные антецеденты образуют подсписок S_3. Создается копия T исходной теоремы, в которой все переменные переобозначены на новые. Ее консеквент имеет вид $f(u,v) = B$. Решается задача на исследование Z_1, посылки которой суть антецеденты теоремы T, S_2, S_3 и результаты подстановки в S_1 выражения B вместо x. Цели - "противоречие", "сохр". После решения проверяется непротиворечивость посылок. Находится результат R_1 упрощения относительно этих посылок результата подстановки в A выражения B вместо переменной x. Определяются подсписок Q_1 антецедентов теоремы T, содержащих u, подсписок Q_2 антецедентов, содержащих v, и подсписок Q_3 остальных антецедентов. Решается задача на исследование Z_2, посылки которой - результаты подстановки в S_1 переменной v вместо a, S_2, S_3, Q_1, результаты подстановки в Q_2 вместо v результата замены в A переменной x на v, а также Q_3. После решения проверяется непротиворечивость посылок. При помощи задачи на доказательство проверяется эквивалентность результата навешивания квантора существования по всем параметрам посылок задачи Z_1, отличным от y, u, v, на конъюнкцию посылок этой задачи аналогичному квантору существования для Z_2. Исходная теорема, применяемая слева направо, преобразует выражение $f(v,y)$ в некоторое выражение D, а затем эта же теорема преобразует выражение $f(u,D)$ в выражение R_2. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство $R_1 = R_2$ - следствие посылок задачи Z_1. Затем выводится протокол "ассоциативно(f)". (Прием определение - 210).

   Пример: вывод теоремы

   "ассоциативно(умножматр)"

   из теоремы

   $\forall_{abmnk}(a - $ функция $\&\ b - $ функция $\&\ m - $ натуральное $\&\ n - $ натуральное $\&$ $k -$ натуральное $\&$ Val$(a) \subseteq \mathbb{R}\ \&$ Val$(b) \subseteq \mathbb{R}\ \&$ Dom$(a) = \{1,\ldots,m\} \times \{1,\ldots,n\}\ \&$ Dom$(b) = \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,k\} \rightarrow ab = \lambda_{ij}(\sum_{p=1}^{n}(a(i,p)b(p,j)),\ i \in \{1,\ldots,m\}\ \&$ $j \in \{1,\ldots,k\}))$

6. Усмотрение определения ассоциативной двуместной операции - эквивалентность для равенства. Теорема - эквивалентность $c = f(a,b) \leftrightarrow A$, определяющая двуместную операцию f. Здесь a, b, c - переменные, причем переменная "c" не встречается в антецедентах. Среди стартовых теоремы цикла вывода нет определения операции f для альтернативных случаев. Создается копия T исходной теоремы, в которой все переменные переобозначены на новые. Ее консеквент

имеет вид "$r = f(p,q) \leftrightarrow B$". Выбираются новые переменные x, y, и решается задача Z на доказательство равенства "$c = y$". Посылки - антецеденты теоремы T, результаты подстановки в антецеденты исходной теоремы переменной p вместо b, результат замены в A переменной b на r, утверждение B, результат замены в A переменных c, b на x, p, и результат замены в B переменных r, p на y, x. Проверяется, что результаты подстановки переменной r вместо b в антецеденты исходной теоремы и результаты подстановки переменной x вместо p в антецеденты теоремы T суть следствия посылок задачи Z. Затем выводится протокол "ассоциативно(f)". (Прием определение - 268).

Пример: вывод теоремы

"ассоциативно(нод)"

из теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{целое } \& \ b - \text{целое } \& \ \neg(a^2 + b^2 = 0) \rightarrow c = \text{нод}(a,b) \leftrightarrow$
$\text{наибольший}(c, \text{set}_n(n - \text{натуральное } \& \ n \mid a \ \& \ n \mid b)))$

7. Проверка рефлексивности двуместного отношения. Теорема - определение вида $P(t_1, t_2) \leftrightarrow A$. Корневая связывающая приставка теоремы включается в список параметров левой части эквивалентности. Параметры выражений t_1, t_2 не пересекаются, причем t_2 получается из t_1 применением некоторой подстановки S, выполняющей переобозначение переменных без их отождествления. Определяется список Q результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что $S(A)$ - следствие Q. Консеквентом новой теоремы становится $P(t_1, t_2)$, антецедентами - утверждения Q. Результат упрощается. (Прием определение - 125).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(b - \text{set} \rightarrow b \subseteq b)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set } \& \ b - \text{set} \rightarrow a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow c \in b))$

8. Проверка транзитивности двуместного отношения. Теорема - определение вида $P(t_1, t_2) \leftrightarrow A$. Корневая связывающая приставка теоремы включается в список параметров левой части эквивалентности. Параметры выражений t_1, t_2 не пересекаются, причем t_2 получается из t_1 применением некоторой подстановки S, выполняющей переобозначение переменных без их отождествления. Определяется теорема T, полученная из исходной теоремы переобозначением параметров утверждения $P(t_1, t_2)$ на новые переменные. Ее консеквент имеет вид $P(r_1, r_2) \leftrightarrow B$. Определяется подстановка Q_1, переводящая r_1 в t_2, а также подстановка Q_2, переводящая t_2 в r_2. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что конъюнкция результатов применения Q_2 к антецедентам исходной теоремы и к A - следствие антецедентов исходной теоремы, результатов применения Q_1 к антецедентам исходной теоремы T, а также утверждений A и $Q_1(B)$. Проверяется непротиворечивость исходных посылок этой задачи.

Консеквентом новой теоремы становится $P(t_1, r_2)$, антецедентами - антецеденты исходной теоремы, результаты применения Q_1 к антецедентам исходной теоремы, а также утверждения $P(t_1, t_2), P(t_2, r_2)$. Результат упрощается. (Прием определение - 124).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cmn}(m|n \ \& \ n|c \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|c)$

из теоремы

$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(k - \text{целое} \ \& \ n = mk))$

9. Проверка симметричности двуместного отношения. Теорема - определение вида $P(t_1, t_2) \leftrightarrow A$. Корневая связывающая приставка теоремы включается в список параметров левой части эквивалентности. Парметры выражений t_1, t_2 не пересекаются. Теорема не имеет существенных антецедентов. Находится подстановка S, переводящая выражения t_1, t_2 друг в друга. Проверяется, что эта подстановка переводит список антецедентов в себя. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что $P(t_2, t_1)$ - следствие антецедентов и $P(t_1, t_2)$. Затем выводится протокол "коммутативно(P)". (Прием определение - 202).

   Пример: вывод теоремы

   "коммутативно(пропорцнаборы)"

   из теоремы

   $\forall_{abcdef}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow$ пропорцнаборы$((a, b, c), (d, e, f)) \leftrightarrow \exists_{uv}(u - \text{число} \ \& \ v - \text{число} \ \& \ \neg(u^2 + v^2 = 0) \ \& \ au + dv = 0 \ \& \ bu + ev = 0 \ \& \ cu + fv = 0))$

10. Попытка усмотреть транзитивность. Теорема - эквивалентность вида $A_1 \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_m}(a_1 = t_1 \ \& \ \ldots \ \& \ a_k = t_k \ \& \ A_2)$, дающая параметрическое описание для наборов $a_1, \ldots, a_k$, удовлетворяющих условию A_1. Здесь $a_1, \ldots, a_k$ - различные переменные, отличные от $x_1, \ldots, x_m$. Каждое из выражений t_i имеет единственный параметр b_i, не входящий в $x_1, \ldots, x_m$. Переменные $b_1, \ldots, b_k$ различны. Определяется теорема T, полученная из исходной теоремы переобозначением переменных, отличных от $a_1, \ldots, a_k$, на новые переменные, а переменных $a_1, \ldots, a_k$ - на $b_1, \ldots, b_k$. При этом переменные $b_1, \ldots, b_k$ оказываются переобозначены на некоторые переменные $c_1, \ldots, c_k$. Консеквент теоремы T имеет вид $B_1 \leftrightarrow \exists_{y_1 \ldots y_m}(b_1 = r_1 \ \& \ \ldots \ b_k = r_k \ \& \ B_2)$. Выбираются новые переменные $z_1, \ldots, z_m$ и рассматриваются подстановка S_1 выражений $r_1, \ldots, r_k$ вместо переменных $b_1, \ldots, b_k$, а также подстановка S_2 переменных $z_1, \ldots, z_m$ вместо переменных $y_1, \ldots, y_m$. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что утверждение $\exists_{z_1 \ldots z_m}(S_1(t_1) = S_2(r_1) \ \& \ \ldots \ \& \ S_1(t_k) = S_2(r_k) \ \& \ S_2(B_2))$ - следствие антецедентов теоремы T, а также утверждений A_2, B_2. Консеквентом новой теоремы становится результат замены в A_1 переменных $b_1, \ldots, b_k$ на $c_1, \ldots, c_k$. Антецеденты ее служат антецеденты исходной теоремы и теоремы T, результаты замены в антецедентах исходной теоремы переменных $b_1, \ldots, b_k$ на $c_1, \ldots, c_k$, а также утверждения A_1 и B_1. Результат упрощается. (Прием параметризация - 23).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abx}(\neg(a = \text{вектор0})\ \&\ \neg(b = \text{вектор0})\ \&\ \text{коллинеарны}(a, b)\ \&\ \text{коллинеарны}(a, x)\ \&\ \text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Вектор}(b)\ \&\ \text{Вектор}(x) \to \text{коллинеарны}(b, x))$

из теоремы

$\forall_{ax}(\neg(a = \text{вектор0})\ \&\ \text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Вектор}(x) \to \text{коллинеарны}(a, x) \leftrightarrow \exists_y(x = ya\ \&\ y - \text{число}))$

В качестве умножения здесь фигурирует операция "умножвект" умножение вектора на число.

11. Вывод условия непустоты константного множества. Теорема - равенство $A_1 = \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A_2)$. Корневой квантор общности отсутствует. При помощи задачи на доказательство устанавливается истинность утверждения $\exists_{x_1 \ldots x_k}(A_2)$. Единственная посылка - константа "истина". Затем выводится теорема "$\neg(A_1 = \emptyset)$". (Прием описатель - 15).

Пример: вывод теоремы

$\neg(\mathbb{N} = \emptyset)$

из теоремы

$\mathbb{N} = \text{set}_n(n - \text{натуральное})$

12. Примерка определяемого свойства множества к определяемым множествам раздела. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$. Одним из корневых операндов утверждения A_1 служит переменная x, для которой имеется антецедент "$x - \text{set}$". Других явных указанй на множества в антецедентах нет. В разделе заголовка P утверждения A_1 находится определение T вида "$B_1 = \text{set}_{y_1 \ldots y_k}(B_2)$". Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что результат подстановки в A_2 выражения "$\text{set}_{y_1 \ldots y_k}(B_2)$" вместо переменной x - следствие результатов применения такой же подстановки к антецедентам исходной теоремы и антецедентов теоремы T. Предварительно при помощи задачи на исследование тестируется непротиворечивость посылок S задачи на доказательство. Консеквентом новой теоремы становится результат подстановки B_1 вместо x в A_1. Антецеденты - S. Результат упрощается. (Прием определение - 257).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abn}(b - \text{число}\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ \text{числнабор}(a, n) \to \text{открытое}(\text{евклокр}(a, b)))$

из теоремы

$\forall_{An}(n - \text{натуральное}\ \&\ A - \text{set}\ \&\ A \subseteq \mathbb{R}^n \to \text{открытое}(A) \leftrightarrow \forall_x(x \in A \to \text{Внутртчк}(x, A)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abn}(n - \text{натуральное}\ \&\ \text{числнабор}(a, n)\ \&\ b - \text{число} \to \text{евклокр}(a, b) = \text{set}_x(\text{числнабор}(x, n)\ \&\ \text{евклрасст}(x, a) < b))$

13. Усмотрение монотонности по включению относительно параметра - множества с помощью задачи на доказательство. Теорема - определение "$A_1 = \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A_2)$". Выбирается параметр a выражения A_1, для которого имеется антецедент "$a -$ set". Выбирается новая переменная b, находится результат A_3 замены в A_2 переменной a на b, и при помощи задачи на доказательство устанавливается, что утверждение "$\text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A_2) \subseteq \text{set}_{x_1 \ldots x_k}(A_3)$" - следствие антецедентов исходной теоремы, результатов подстановки в них b вместо a, а также утверждения "$a \subseteq b$". (Прием определение - 254).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{anA}(a - \text{set} \ \& \ A - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R}^n \ \& \ A \subseteq a \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow$
    $\text{замыкание}(A) \subseteq \text{замыкание}(a))$

    из теоремы

    $\forall_{nA}(n - \text{натуральное} \ \& \ A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \text{замыкание}(A) =$
    $\text{set}_x(\text{точкаприкосн}(x, A)))$

14. Усмотрение взаимной однозначности определяемого отображения. Теорема - определение вида "$A_1 = \lambda_{x_1 \ldots x_k}(A_3, A_2)$". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что утверждение "взаимнооднозначно$(\lambda_{x_1 \ldots x_k}(A_3, A_2))$" - следствие антецедентов. Консеквентом новой теоремы становится утверждение "взаимнооднозначно(A_1)". Антецеденты те же, что у исходной теоремы. (Прием отображение - 38).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ijn}(\neg(i = j) \ \& \ i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow$
    $\text{взаимнооднозначно}(\text{транспозиция}(i, j, n)))$

    из теоремы

    $\forall_{ijn}(n - \text{натуральное} \ \& \ i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ \neg(i = j) \rightarrow$
    $\text{транспозиция}(i, j, n) = \lambda_a((j \text{ при } a = i, \text{ иначе } (i \text{ при } a = j, \text{ иначе } a)),$
    $a \in \{1, \ldots, n\}))$

15. Усмотрение перестановки. Теорема - определение вида $A_1 = \lambda_{x_1 \ldots x_k}(A_3, A_2)$. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что утверждение "взаимнооднозначно$(\lambda_{x_1 \ldots x_k}(A_3, A_2))$" - следствие антецедентов. Выражение "$\text{Dom}(\lambda_{x_1 \ldots x_k}(A_3, A_2))$" упрощается и превращается в выражение R, не содержащее символа "значения". Консеквентом новой теоремы становится утверждение "перестановка(A_1, R)". Антецеденты те же, что у исходной теоремы. (Прием отображение - 39).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{ijn}(\neg(i = j) \ \& \ i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow$
    $\text{перестановка}(\text{транспозиция}(i, j, n), \{1, \ldots, n\}))$

    из теоремы

$\forall_{ijn}(n - $натуральное & $i \in \{1, \ldots, n\}$ & $j \in \{1, \ldots, n\}$ & $\neg(i = j) \rightarrow$
транспозиция$(i, j, n) = \lambda_a((j$ при $a = i,$ иначе $(i$ при $a = j,$ иначе $a)),$
$a \in \{1, \ldots, n\}))$

16. Проверка неравенства треугольника для неотрицательного, симметричного и удовлетворяющего аксиоме тождества двуместного функционала. Консеквент теоремы имеет вид $0 \leq f(x, y)$, где $x, y)$ - переменные. Стартовая теорема цикла вывода - определение операции f. В текущем списке вывода уже имеется теорема "коммутативно(f)", а также теоремы вида $f(u, v) = 0 \leftrightarrow u = v$. Выбирается новая переменная z, и при помощи задачи на доказательство усматривается, что неравенство N вида $f(x, z) \leq f(x, y) + f(y, z)$ - следствие антецедентов исходной теоремы и результатов подстановки в эти антецеденты переменной z вместо x. Консеквентом новой теоремы становится N, антецедентами - исходные посылки задачи на доказательство. (Прием числоценка - 17).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcn}(n - $натуральное & числнабор$(a, n)$ & числнабор(b, n) & числнабор$(c, n) \rightarrow$
   евклрасст$(a, c) \leq$ евклрасст$(a, b) +$ евклрасст$(b, c))$

   из теоремы

   $\forall_{abn}(n -$натуральное & числнабор(a, n) & числнабор$(b, n) \rightarrow 0 \leq$ евклрасст$(a, b))$

   и дополнительных теорем

   "коммутативно(евклрасст)"

   $\forall_{cdf}(f -$ натуральное & числнабор(c, f) & числнабор$(d, f) \rightarrow$ евклрасст$(c, d) =$
   $0 \leftrightarrow c = d)$

17. Сужение операции над функциями на специальные типы функций. Теорема - определение некоторой операции над числовыми функциями. Рассматриваются определения функций специальных видов - кортежей, слов, последовательностей и матриц. При помощи задачи на доказательство проверяется, что рассматриваемая операция не выводит из данного класса функций. (Прием определение - 206).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{efgh}($матр$(f, \mathbb{R}, e, h)$ & матр$(g, \mathbb{R}, e, h) \rightarrow$ матр$(f + g, \mathbb{R}, e, h))$

   из теоремы

   $\forall_{fg}(f -$ функция & $g -$ функция & $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$ & $\mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ &
   $\mathrm{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f + g = \lambda_x(f(x) + g(x), x \in \mathrm{Dom}(f)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abmn}(m -$ натуральное & $n -$ натуральное & $b -$ set $\rightarrow$ матр$(a, b, m, n) \leftrightarrow$
   $a -$ функция & $\mathrm{Dom}(a) = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$ & $\mathrm{Val}(a) \subseteq b)$

   В зависимости от контекста, знак сложения обозначает либо логический символ "плюсфунк", либо символ "плюс". Как видно из дополнительной теоремы, утверждение "матр(a, b, m, n)" означает, что a - матрица размера $m \times n$ с элементами из множества b.

Проверка сохранения определяемого свойства после применения элементарных операций раздела

1. Попытка усмотреть сохранение определяемого свойства после применения элементарных операций раздела - случай определяющей элементарной конъюнкции. Теорема - определение вида $P(x) \leftrightarrow Q(x)$ & A, где x - переменная, Q - указатель типа объекта. Переменных, отличных от x, теорема не имеет. В разделах, связанных с типом Q и его надтипами, находится операция $f(a_1 \ldots a_n)$, тип значения которой - Q либо надтип Q. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что из результатов подстановки в антецеденты и правую часть консеквента исходной теоремы переменных a_i вместо x следует результат подстановки в эту правую часть выражения $f(a_1 \ldots a_n)$ вместо x. Консеквентом новой теоремы становится $P(f(a_1 \ldots a_n))$. Антецеденты - результаты подстановки a_i вместо x в антецеденты исходной теоремы и утверждения $P(a_1), \ldots, P(a_n)$. (Прием определение - 172).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{натуральное}$ & $b - \text{натуральное} \rightarrow a + b - \text{натуральное})$

   из теоремы

   $\forall_n(n - \text{натуральное} \leftrightarrow n - \text{целое}$ & $1 \leq n)$

2. Попытка усмотреть сохранение определяемого свойства после применения элементарных операций раздела - случай определяющего параметрического описания. Теорема - определение $P(a) \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(a = t$ & $A)$, где a - переменная. Определяется тип T значения выражения t, и в разделе, к которому относится T, находится символ f n-местной операции, значение которой и все операнды имеют тип T. Выбираются новые переменные $b_1, \ldots, b_n$, определяется конъюнкция Q результатов подстановки в антецедентах выражения $f(b_1 \ldots b_n)$ вместо переменной a, и при помощи задачи на доказательство устанавливается, что $\exists_{x_1 \ldots x_k}(f(b_1, \ldots, b_n) = t$ & $A)$ & Q - следствие результатов подстановки в антецеденты переменных $b_1, \ldots, b_n$ вместо a и утверждений "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(b_i = t$ & $A); i = 1, \ldots, n$". Консеквентом новой теоремы служит утверждение $P(f(b_1, \ldots, b_n))$, антецедентами - результаты подстановки в антецеденты переменных $b_1, \ldots, b_n$ вместо a и утверждения $P(b_1), \ldots, P(b_n)$. Антецеденты упрощаются. (Прием определение - 171).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{rational}$ & $c - \text{rational} \rightarrow (b + c) - \text{rational})$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{rational} \leftrightarrow \exists_{mn}(m - \text{целое}$ & $n - \text{натуральное}$ & $a = m/n))$

3. Усмотрение сохранения свойства множества относительно объединения или пересечения. Теорема - определение $P(a) \leftrightarrow A$, причем имеется антецедент "$a -$ set". Выбирается новая переменная b, и рассматривается выражение Q вида "$a \cup b$" либо "$a \cap b$". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что результат подстановки в A выражения Q вместо a - следствие антецедентов,

результатов подстановки в антецеденты переменной b вместо a, утверждения A и результата подстановки в A переменной b вместо a. Консеквентом новой теоремы становится $P(Q)$, антецедентами - антецеденты исходной теоремы, результаты подстановки в них b вместо a, а ткже утверждение A и результат замены в A переменной a на b. Результат упрощается. (Прием определение - 253).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{anA}(a - \text{set} \ \& \ A - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R}^n \ \& \ A \subseteq \mathbb{R}^n \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ \text{открытое}(a) \ \& \ \text{открытое}(A) \rightarrow \text{окрытое}(a \cup A))$

из теоремы

$\forall_{An}(n - \text{натуральное} \ \& \ A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \text{открытое}(A) \leftrightarrow \forall_x(x \in A \rightarrow \text{Внутртчк}(x, A)))$

4. Попытка усмотреть сохранение определяемого свойства множества относительно теоретико-множественных операций. Теорема - определение "$A_1 \leftrightarrow a - \text{set} \ \& \ A_2$", причем переменная a - один из корневых операндов утверждения A_1. Других вхождений в A_1 она не имеет. Утверждение A_2 имеет конъюнктивный член, представляющий собой кванторную импликацию и не имеет конъюнктивных членов вида "$X - \text{set}$". Выбирается новая переменная b, и рассматривается выражение Q вида "$a \cup b$" либо "$a \cap b$". Создается теорема T, полученная из исходной теоремы заменой переменной a на b. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что результат подстановки в определяющее утверждение выражения Q вместо a - следствие антецедентов исходной теоремы и теоремы T, а также определяемых и определяющих частей обеих теорем. Консеквентом новой теоремы становится результат подстановки Q вместо a в утверждение A_1, антецедентами - антецеденты исходной теоремы и теоремы T, а также определяемые части обеих теорем. Результат упрощается. (Прием развертка - 140).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abA}(\text{группа}(A) \ \& \ \text{подгруппа}(a, A) \ \& \ \text{подгруппа}(b, A) \rightarrow \text{подгруппа}(a \cap b, A))$

   из теоремы

   $\forall_{afA}(\text{группа}(A) \ \& \ f = \text{операция}(A) \rightarrow \text{подгруппа}(a, A) \leftrightarrow a - \text{set} \ \&$
   $a \subseteq \text{носитель}(A) \ \& \ \neg(a = \emptyset) \ \& \ \forall_{xy}(x \in a \ \& \ y \in a \rightarrow f(x, y) \in a) \ \& \ \forall_x(x \in a \rightarrow \text{обрэлемент}(x, f) \in a))$

5. Переход к обратному набору. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, выполняющая кванторную расшифровку. Стартовая теорема списка вывода - определение предикатного символа, являющегося заголовком утверждения A_2. Имеется антецедент "$\text{кортеж}(B, n, C)$", и других антецедентов с заголовком "кортеж" нет. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что результат подстановки в A_2 выражения "$\text{обрнабор}(B)$" вместо B - следствие антецедентов и утверждения A_2. Консеквентом новой теоремы становится результат подстановки "$\text{обрнабор}(B)$" вместо B в утверждение A_1, антецедентами - антецеденты исходной теоремы и A_1. Результат упрощается. (Прием развертка - 122).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{GM}(\text{граф}(G)\ \&\ \text{вершмаршрут}(M,G) \to \text{вершмаршрут}(\text{обрнабор}(M),G))$

из теоремы

$\forall_{nGM}(n - \text{натуральное}\ \&\ \text{кортеж}(M,n,\text{вершины}(G))\ \&\ \text{граф}(G) \to$
$\text{вершмаршрут}(M,G) \leftrightarrow \forall_i(i \in \{1,\ldots,n-1\} \to \text{смежны}(M(i),M(i+1),G)))$

Попытка доказательство гипотезы, подсказанной предметной областью

1. Переход к области определения исходных функций. Теорема имеет консеквент вида $P(t_1 \ldots t_n)$, где некоторое t_i - выражение "$\lambda_x(t, x \in \mathrm{Dom}(f))$", причем переменная f не входит в t. Внутри t встречается подвыражение "значение(g,r)". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство $\mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g)$ - следствие антецедентов. Новая теорема получается из исходной путем замены внутри t_i подтерма $\mathrm{Dom}(f)$ на $\mathrm{Dom}(g)$. Она регистрируется как обобщение исходной теоремы, исключаемой из дальнейших выводов. (Прием функперех - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ae}(\mathrm{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ a - \text{функция}\ \&\ \text{первообразная}(a,e) \to$
   $\text{первообразная}(\lambda_x(-a(x), x \in \mathrm{Dom}(a)), \lambda_c(-e(c), c \in \mathrm{Dom}(e))))$

   из теоремы

   $\forall_{ae}(\mathrm{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ a - \text{функция}\ \&\ \text{первообразная}(a,e) \to$
   $\text{первообразная}(\lambda_x(-a(x), x \in \mathrm{Dom}(e)), \lambda_c(-e(c), c \in \mathrm{Dom}(e))))$

2. Попытка усмотрения не менее чем двумерного множества точек. Теорема имеет консеквент вида $A_1 \leftrightarrow A_2\ \&\ \exists_{z_1 \ldots z_n}(A_3\ \&\ \text{коорд}(B,K) = \mathrm{set}_{xy}(A_4))$, определяющий общий вид уравнения для координат множества точек B заданного типа. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что утверждение "двумерн(B)" (т.е. B - не подмножество прямой) - следствие антецедентов и подкванторных утверждений квантора существования. Консеквентом новой теоремы становится утверждение "двумерн(B)", антецедентами - антецеденты исходной теоремы и A_1. Результат упрощается. (Прием уравнкрив - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_E(\text{эллипс}(E) \to \text{двумерн}(E))$

   из теоремы

   $\forall_E(\text{эллипс}(E) \leftrightarrow E - \text{set}\ \&\ \exists_{Kab}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&$
   $0 < b\ \&\ 0 \le a - b\ \&\ \text{коорд}(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\ \&\ x - \text{число}\ \&$
   $y - \text{число})))$

3. Отождествление плоскостей, содержащих не менее чем двумерное множество. Начало описания приема, вплоть до формирования новой теоремы, такое же, как в предыдущем пункте. Затем выбираются новые переменные $C, D, E, P, Q, R,$

и создается теорема с консеквентом "плоскость(CDE) = плоскость(PQR)". Антецедентами служат антецеденты исходной теоремы, A_1, утверждения "$B \subseteq$ плоскость(CDE)", "$B \subseteq$ плоскость(PQR)" и утверждения, необходимые для сопровождения по о.д.з. выражений "плоскость$(\ldots)$". Результат упрощается. (Прием уравнкрив - 9).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdefghE}(\neg(c = d)\ \&\ \neg(f = g)\ \&\ \neg(e \in \text{прямая}(cd))\ \&\ \neg(h \in \text{прямая}(fg))\ \&$
$E \subseteq \text{плоскость}(cde)\ \&\ E \subseteq \text{плоскость}(fgh)\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&$
$e - \text{точка}\ \&\ f - \text{точка}\ \&\ g - \text{точка}\ \&\ h - \text{точка}\ \&\ \text{эллипс}(E) \rightarrow \text{плоскость}(cde) =$
$\text{плоскость}(fgh))$

из теоремы

$\forall_E(\text{эллипс}(E) \leftrightarrow E - \text{set}\ \&\ \exists_{Kab}(\text{прямкоорд}(K)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&$
$0 < b\ \&\ 0 \leq a - b\ \&\ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1\ \&\ x - \text{число}\ \&$
$y - \text{число})))$

4. Усмотрение неравенства для двух числовых атомов из выражения для их разности. Консеквент теоремы имеет вид $A_1 = A_2 - A_3$, где A_1, A_2, A_3 - невырожденные числовые атомы. Усматривается неотрицательность атома A_1. Консеквентом новой теоремы служит неравенство $A_3 \leq A_2$. Антецеденты те же, что в исходной теореме. (Прием числатом - 51).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ a \subseteq b\ \&\ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a) \leq \text{card}(b))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(b)\ \&\ a \subseteq b \rightarrow \text{card}(b \setminus a) = \text{card}(b) - \text{card}(a))$

5. Попытка усмотреть неявное определение наибольшего либо наименьшего целого. Теорема - тождество $A_1 = n$, определяющее операцию A_1 через вспомогательную переменную n, входящую в антецеденты и не входящую в A_1. Для любых значений переменных утсерждения A_1, удовлетворяющих всем содержащим только такие переменные антецедентам, существует подходящее значение переменной n. Имеется антецедент "целое(n)". Имеется ровно два других антецедента B_1, B_2, содержащих n. Все не содержащие n антецеденты образуют список S. Рассматривается два случая. В первом из них в качестве t берется выражение $n+1$, в качестве символа C - символ "суп". Во втором случае в качестве t берется $n-1$, в качестве C - "инф". При помощи задачи на доказательство устанавливается эквивалентность отрицания результата подстановки в B_1 выражение t вместо n утверждению B_2. Посылки - S. Устанавливается, что результат подстановки в B_2 выражения t вместо n - следствие утверждений S, "целое(n)", B_2. Устанавливается, что утверждение "$\exists_n$(целое(n) & B_1)" - следствие S. Находится результат R явного разрешения утверждений "целое(n)", B_1 относительно n. Консеквентом новой теоремы становится равенство $A_1 = C(\text{set}_n(R))$. Антецеденты - S. Результат упрощается. (Прием определение - 180).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \to [a] = \sup(\text{set}_n(n - \text{целое } \& \ n \leq a)))$

из теоремы

$\forall_{an}(a - \text{число } \& \ n - \text{целое } \& \ n \leq a \ \& \ a < n + 1 \to [a] = n)$

6. Попытка усмотреть возможность перевести цепочкой преобразований одно отображение в другое. Консеквент теоремы выражает свойство сложного понятия и имеет вид $P(A, B)$. Значением выражения A служит некоторая функция. Рассматривается непустой список X параметров выражения B, и список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих X, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выбираются новые переменные a, b, и при помощи задачи на доказательство устанавливается, что утверждение "$P(\text{произведение}(a, b), B)$" - следствие $S_2, P(a, B), P(b, B)$. Определяется непустой список Y параметров выражения A, не входящих в B. Список антецедентов разбивается на подсписок Q_1 утверждений, содержащих Y, и подсписок Q_2 остальных утверждений. Выбирается новая переменная x и формируется выражение "$\text{set}_x(\exists_Y(Q_1 \ \& \ x = A))$". После упрощения оно приобретает вид R, не содержащий описателя "класс". Формируется утверждение D вида "$\exists_x(\text{Переводит}(x, a, b) \ \& \ \text{Val}(x) \subseteq R)$". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что оно является следствием $Q_2, P(a, B), P(b, B)$. Консеквентом новой теоремы становится D, антецедентами - $Q_2, P(a, B), P(b, B)$. (Прием свойства - 14).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcn}(n{-}\text{натуральное } \& \ \text{перестановка}(b, \{1, \ldots, n\}) \ \& \ \text{перестановка}(c, \{1, \ldots, n\}) \to \exists_a(\text{Переводит}(a, b, c) \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq \text{транспозиции}(n)))$

   из теоремы

   $\forall_{ijn}(\neg(i = j) \ \& \ i \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ j \in \{1, \ldots, n\} \ \& \ n - \text{натуральное} \to \text{перестановка}(\text{транспозиция}(i, j, n), \{1, \ldots, n\}))$

Примерка определяемого отношения на элементарные операции раздела

1. Примерка использующего описатели определения свойства функции на элементарные операции раздела. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$ некоторого свойства A_1 функции f, для которой имеется антецедент "$f-$функция". Внутри A_2 имеется единственный описатель "$\lambda_z(A_4, A_3)$". Все параметры антецедентов входят в A_1. Имеется антецедент вида "$Val(f) \subseteq B$". Выбирается новая переменная x, и решается задача на исследование, посылки которой суть антецеденты теоремы и утверждение "$x \in B$". После решения в ее списке посылок находится утверждение $P(x)$, указывающее тип значения переменной x. В разделе символа P либо его надразделах выбирается символ g операции арности n. Выбираются новые переменные $y, M, h_1, \ldots, h_n$, и формируется выражение F вида "$\lambda_y(g(h_1(y), \ldots, h_n(y)), y \in M)$". Результат подстановки F вместо f в A_2 упрощается и превращается в утверждение C_1. Составляется список S результатов подстановки в антецеденты вместо f выражений $F, h_1, \ldots, h_n$. При помощи задачи на доказательство усматривается, что C_1 - следствие S и результатов подстановки в A_2 функций h_i вместо f. Предварительно делается замена переменных: выбираются новые переменные $F_1, \ldots, F_n$, рассматриваются результаты R_i

подстановки в A_4 переменных h_i вместо f, и уравнения $R_i = F_i(z)$ разрешаются относительно $h_i(z)$. Далее в посылках и условии C_1 задачи на доказательство предпринимается исключение $h_i(z)$. Консеквентом новой теоремы становится результат замены в A_1 переменной f на F. Антецеденты - утверждения S. Результат упрощается. (Прием определение - 194).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aeg}(\mathrm{Dom}(e) = \mathrm{Dom}(g)$ & $\mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(e) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}$ &
$e -$ функция & $g -$ функция & $a -$ число & дифференцируема(e, a) &
дифференцируема$(g, a) \rightarrow$ & дифференцируема$(\lambda_c(e(c) + g(c), c \in \mathrm{Dom}(g)), a))$

из теоремы

$\forall_{af}(f -$ функция & $a -$ число & $\mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ & локопред(f, a, b) &
типпредела$(b) \rightarrow$ дифференцируема$(f, a) \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a \setminus b}(f(x) - f(a))/(x - a) -$
число$)$

Глава 10

Варьирование антецедентов теоремы

10.1 Реализация антецедента текущей теоремы

Использование реализующей теоремы без существенных антецедентов

1. Использование примера для реализации антецедента. Консеквент теоремы - равенство $A_1 = A_2$ двух атомарных выражений. Выбирается существенный антецедент B. После отбрасывания его корневого отрицания, если оно есть, возникает утверждение с заголовком f. Находится теорема T без существенных антецедентов, консеквент которой (после отбрасывания корневого отрицания, если оно есть) тоже имеет заголовок f. Число параметров этого консеквента меньше числа параметров B. После переобозначения переменных теоремы T на новые переменные, унификации ее консеквента с антецедентом B и применения унифицирующей подстановки к обеим теоремам предпринимается замена антецедента B на антецедент теоремы T. Результат упрощается. (Прием равны - 12).

   Далее процедуру использования дополнительной теоремы для аналогичной замены (неэквивалентной) антецедента исходной теоремы на антецеденты дополнительной называем "реализацией указанного антецедента с помощью дополнительной теоремы".

   Пример применения приема: вывод теоремы

   $\forall_{abB}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = B)\ \&\ B \in \text{прямая}(ab)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&$
   $B - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(aB) = \text{прямая}(ab))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ A \in \text{прямая}(CD)\ \&\ B \in \text{прямая}(CD)\ \&$
   $A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B) \rightarrow A \in \text{прямая}(AB))$

2. Попытка реализации антецедента путем подбора примера. Теорема имеет своим консеквентом двуместное отношение, определяющее характеристику некоторой функции. Выбирается ее существенный элементарный антецедент A, имеющий

не менее двух параметров. По заголовку f этого антецедента находится теорема без существенных антецедентов, консеквент которой тоже имеет заголовок f. Эта теорема используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием функперех - 26).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abce}(b - \text{целое}\ \&\ \text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^{b-2}/e(l), l - \text{число}), c) \rightarrow$
$\text{первообразная}(\lambda_x(a(x^{-1})/(e(x^{-1})x^b), x - \text{число}), \lambda_d(-c(d^{-1}), d - \text{число})))$

из теоремы

$\forall_{abcej}(\neg(j = 0)\ \&\ j| - b + 1\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ j - \text{целое}\ \&$
$\text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^{-1+(-b+1)/j}/e(l), l - \text{число}), c) \rightarrow$
$\text{первообразная}(\lambda_x(a(x^j)/(e(x^j)x^b), x - \text{число}), \lambda_d(c(d^j)/j, d - \text{число})))$

и дополнительной теоремы

$\forall_n(n - \text{целое} \rightarrow -1|n)$

3. Попытка реализации антецедента. Теорема - тождество, выражающее сложный числовой атом через более простые. Выбирается существенный антецедент B. После отбрасывания его корневого отрицания, если оно есть, возникает утверждение с заголовком f. Находится теорема T_1 без существенных антецедентов, консеквент которой (после отбрасывания корневого отрицания, если оно есть) тоже имеет заголовок f. Эта теорема используется для реализации антецедента B. После предварительного упрощения возникает теорема T_2, среди антецедентов которой нет равенства, а консеквент - равенство. Выбирается самый сложный числовой атом консеквента, включающий все параметры консеквента. Консеквент разрешается при помощи задачи на описание относительно этого атома. Результирующая теорема упрощается. (Прием числатом - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(c)\ \&\ \text{конечное}(d) \rightarrow \text{card}(c \cup d) = \text{card}(c) + \text{card}(d \setminus c))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(b)\ \&\ a \subseteq b \rightarrow \text{card}(b \setminus a) = \text{card}(b) - \text{card}(a))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{set}\ \&\ c - \text{set} \rightarrow b \subseteq b \cup c)$

4. Попытка реализации антецедента. Теорема - простая импликация, позволяющая создать прием проверочного оператора. Выбирается существенный антецедент B. После отбрасывания его корневого отрицания, если оно есть, возникает утверждение с заголовком f. Находится теорема T без существенных антецедентов, консеквент которой (после отбрасывания корневого отрицания, если оно есть) тоже имеет заголовок f. Используются справочники поиска теорем "пример" и "свойства". Эта теорема используется для реализации антецедента

B. Результат упрощается, и после проверки неизбыточности регистрируется в списке вывода. (Прием спуск - 28).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acd}(c - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(a \cap d, c \setminus a))$

из теоремы

$\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ b \subseteq e \rightarrow \text{непересек}(b, c \setminus e))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow b \cap c \subseteq b)$

5. Попытка реализации существенного антецедента тождества общей стандартизации путем подбора примера. Аналогично предыдущему, но исходная теорема - тождество общей стандартизации. (Прием нормализация - 28).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ad}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow a \cup (a \cap d) = a)$

   из теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ b \subseteq c \rightarrow b \cup c = c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow b \cap c \subseteq b)$

6. Попытка реализации существенного антецедента тождества свертки путем подбора примера. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество сокращенной перезаписи. (Прием свертка - 35).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{b}(b - \text{целое} \rightarrow \text{дробнаячасть}(b) = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{an}(a - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ n \leq a \ \& \ a < n + 1 \rightarrow \text{дробнаячасть}(a) = a - n)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{a}(a - \text{число} \rightarrow a \leq a)$

7. Попытка извлечь из декомпозирующей эквивалентности простую импликацию для проверочного оператора путем реализации заменяемого утверждения. Теорема - эквивалентность вида $A \leftrightarrow B_1 \ \& \ \ldots \ \& \ B_n$, где A элементарно, а все B_i бесквантерные. Создается вспомогательная теорема T_1, полученная из исходной добавлением A к антецедентам и выбором в качестве консеквента некоторого B_j. После отбрасывания корневого отрицания антецедента A, если оно есть, возникает утверждение с заголовком f. Находится теорема T_2 без существенных антецедентов, консеквент которой (после отбрасывания корневого отрицания,

если оно есть) тоже имеет заголовок f. Теорема T_2 используется для реализации антецедента A теоремы T_1. Результат упрощается. (Прием и - 42).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a \leq \max(a, b))$

из теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a \leq c \ \& \ b \leq c \leftrightarrow \max(a, b) \leq c)$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a \leq a)$

8. Попытка реализации антецедента при помощи примера. Теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. Выбирается ее антецедент A с двумя корневмыи операндами. По заголовку f этого антецедента находится теорема без существенных антецедентов, консеквент которой тоже имеет заголовок f. Эта теорема используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 89).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abABF}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = A) \ \& \ \neg(a = F) \ \& \ \neg(b = F) \ \&$
   $neg(A = B) \ \& \ A \in \text{плоскость}(abF) \ \& \ B \in \text{прямая}(ab) \ \& \ a - \text{точка} \ \&$
   $b - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(aF) \ \&$
   $\text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{прямая}(aA) \perp \text{прямая}(bF) \rightarrow$
   $l(ab)l(aB) = l(aF)l(AB))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(\neg(D = F) \ \& \ \neg(E = F) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \&$
   $B - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \&$
   $A \in \text{плоскость}(DEF) \ \& \ B \in \text{прямая}(DE) \ \& \ C \in \text{прямая}(DE) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp$
   $\text{прямая}(DE) \ \& \ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(EF) \ \& \ \text{прямая}(DE) \perp \text{прямая}(DF) \rightarrow$
   $l(BC)l(DE) = l(AB)l(DF))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow A \in \text{прямая}(AB))$

9. Остаточная реализация антецедента. Теорема - простая импликация, позволяющая создать прием проверочного оператора. Выбирается существенный антецедент B с заголовком f. Находится теорема T без существенных антецедентов, консеквент которой (после отбрасывания корневого отрицания, если оно есть) тоже имеет заголовок f. Используются справочники поиска теорем "пример" и "свойства". Эта теорема используется для реализации антецедента B, причем при унификации переменные исходной теоремы переводятся в различные переменные. Результат упрощается. Проверяется, что все антецеденты новой теоремы - либо указатели типа, либо имеют заголовок "не". (Прием спуск - 57).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{cde}(\neg(c^2+e^2=0)\ \&\ \neg(d^2+e^2=0)\ \&\ c-$ целое $\&\ d-$ целое $\&\ e-$ целое $\rightarrow$ нод$(d,e)\mid$ нод$(e,cd))$

из теоремы

$\forall_{abcn}(n-$ целое $\&\ \neg(b^2c^2+n^2=0)\ \&$ нод$(a,b)\mid n\ \&\ a-$ целое $\&$ $\neg(a^2+b^2=0)\ \&\ b-$ целое $\&\ c-$ целое $\rightarrow$ нод$(a,b)\mid$ нод$(n,bc))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a-$ целое $\&\ \neg(a^2+b^2=0)\ \&\ b-$ целое $\rightarrow$ нод$(a,b)\mid b)$

Использование реализующей теоремы, сложность консеквента которой больше сложности антецедентов

1. Использование определения сложного антецедента. Консеквент теоремы - равенство двух атомарных выражений. Некоторый антецедент A имеет сложность, большую сложности консеквента. По заголовку P утверждения A находится определение $B_1 \leftrightarrow B_2$ отношения P. Проверяется, что B_2 не имеет связанных переменных, и данное определение используется для преобразования антецедента A. Результат упрощается. Конъюнктивные члены результата упрощения регистрируются в списке вывода. (Прием равны - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(c=d)\ \&\ \neg($прямая$(ab)=$ прямая$(cd))\ \&\ l(ab)=l(cd)\ \&$ $a-$ точка $\&\ b-$ точка $\&\ c-$ точка $\&\ d-$ точка $\&$ прямая$(ab)\parallel$ прямая$(cd)\ \&$ однасторона$(b,d,$ прямая$(ac))\rightarrow$ вектор$(ab)=$ вектор$(cd))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(l(AB)=l(CD)\ \&\ A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&\ D-$ точка $\&$ однонаправлены(вектор$(AB),$ вектор$(CD))\rightarrow$ вектор$(AB)=$ вектор$(CD))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCD}(A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&\ D-$ точка $\rightarrow$ однонаправлены(вектор$(AB),$ вектор$(CD))\leftrightarrow A=B\ \&\ C=D\ \vee$ $\neg(C=D)\ \&\ \neg(A=B)\ \&$ (прямая$(AB)\parallel$ прямая$(CD)\ \&$ $\neg($прямая$(AB)=$ прямая$(CD))\ \&$ однасторона$(B,D,$ прямая$(AC))\ \vee$ прямая$(AB)=$ прямая$(CD)\ \&$ (точкалуча$(A,B,D)\ \&\ C\in$ отрезок$(AD)\ \vee$ точкалуча$(C,D,B)\ \&\ A\in$ отрезок$(BC))))$

2. Попытка реализации обобщаемого антецедента. Теорема имеет своим консеквентом двуместное отношение, определяющее характерстику некоторой функции. Этот консеквент обобщает антецедента A с таким же заголовком. По заголовку f этого антецедента находится теорема, консеквент которой тоже имеет заголовок f, но антецеденты не имеют такого заголовка. Эта теорема используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием обобщподст - 1).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{bgh}(\neg(b=0)\ \&\ \neg(g=0)\ \&\ b-$число $\&\ g-$число $\&\ h-$число $\rightarrow$ первообразная$(\lambda_x(\sin(h+bx/g), x-$число$), \lambda_d(-g\cos(h+bd/g)/b, d-$число$)))$

из теоремы

$\forall_{abcgh}(\neg(b=0)\ \&\ \neg(g=0)\ \&\ b-$число $\&\ g-$число $\&\ h-$число $\&$ первообразная$(a, c) \rightarrow$ первообразная$(\lambda_x(a(h+bx/g), x-$число$), \lambda_d(gc(h+bd/g)/b, d-$число$)))$

и дополнительной теоремы

первообразная$(\lambda_x(\sin x, x-$число$), \lambda_b(-\cos b, b-$число$))$

3. Попытка реализации антецедента без ввода новых параметров. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема проверочного оператора, имеющего единственный непосредственно идентифицируемый антецедент. Выбирается существенный антецедент A, каждый параметр которого входит либо в консеквент, либо в другой существенный антецедент. Внутри A нет подтермов вида "$f(t)$", где f - переменная. После отбрасывания его корневого отрицания, если оно есть, возникает утверждение с заголовком P. Находится теорема T без существенных антецедентов, консеквент которой (после отбрасывания корневого отрицания, если оно есть) тоже имеет заголовок P. Используются справочники поиска теорем "пример" и "свойства". Кроме того, в качестве T берутся теоремы, корневое отношение P консеквента которых имеет наибольшую сложность среди всех ее подтермов. Здесь используется справочник поиска теорем "реализация". Теорема T используется для реализации антецедента A. Антецеденты упрощаются. Проверяется, что все параметры антецедентов встречаются в консеквенте, затем корневые операнды консеквента упрощаются. После проверки неизбыточности новой теоремы она регистрируется в списке вывода. (Прием легковидеть - 12).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a-$set $\&$ непересек$(a, b\triangle c)\ \&\ b-$set $\&\ \ c-$set $\rightarrow$ непересек$(a, b\setminus c))$

   из теоремы

   $\forall_{ade}(a-$set $\&\ d-$set $\&\ e-$set $\&\ d\subseteq e\ \&$ непересек$(a, e) \rightarrow$ непересек$(a, d))$

   $\forall_{ab}(a-$set $\&\ b-$set $\rightarrow a\setminus b\subseteq a\triangle b)$

4. Попытка реализации антецедента со вводом новых параметров. Вплоть до момента упрощения антецедентов действия приема те же, что в предыдущем пункте. Однако, обнаруживается, что антецеденты имеют параметры, не входящие в консеквент. Проверяется, что заголовок консеквента отличен от символа "не", и новая теорема упрощается как единое целое (т.е. оператором "нормтеорема"). (Прием легковидеть - 23).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcn}(c-$set $\&\ c\subseteq\mathbb{R}^n\ \&\ b\in c\ \&\ n-$натуральное $\rightarrow b\in$ замыкание$(c))$

   из теоремы

$\forall_{nxA}(n - $ натуральное & $A -$ set & $A \subseteq \mathbb{R}^n$ & точкаприкосн$(x, A) \rightarrow$
$x \in$ замыкание$(A))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{nxA}(n - $ натуральное & $A -$ set & $A \subseteq \mathbb{R}^n$ & $x \in A \rightarrow$ точкаприкосн$(x, A))$

5. Попытка реализации антецедента. Теорема - определение некоторого понятия. Выбирается существенный антецедент A, не используемый для сопровождения консеквента по о.д.з. После отбрасывания его корневого отрицания, если оно есть, возникает утверждение с заголовком P. Находится теорема T без существенных антецедентов, консеквент которой (после отбрасывания корневого отрицания, если оно есть) тоже имеет заголовок P. Используется справочник поиска теорем "пример". Кроме того, в качестве T береутмя теоремы, корневое отношение P консеквента которых имеет наибольшую сложность среди всех ее подтермов. Здесь используется справочник поиска теорем "реализация". Проверяется, что либо оценка сложности антецедента A больше 8, либо список параметров консеквента теоремы T короче списка параметров антецедента A. Теорема T используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. Регистрируются все конъюнктивные члены результата упрощения. Если после реализации антецедента возникает теорема с конъюнктивным консеквентом, то она упрощается альтернативным образом, с сохранением конъюнкции в консеквенте, и тоже регистрируется. (Прием определение - 88).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(b -$ целое $\rightarrow [b] = b)$

   из теоремы

   $\forall_{an}(a -$ число & $n -$ целое & $n \leq a$ & $a < n + 1 \rightarrow [a] = n)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a -$ число $\rightarrow a \leq a)$

6. Попытка реализации антецедента. Теорема - простая импликация, которая может представлять интерес для создания приема вывода. Выбирается ее существенный антецедент A. После отбрасывания его корневого отрицания, если оно есть, возникает утверждение с заголовком P. Находится теорема T без существенных антецедентов, консеквент которой (после отбрасывания корневого отрицания, если оно есть) тоже имеет заголовок P. Используются справочники поиска теорем "пример" и "свойства". Кроме того, в качестве T берутся теоремы, корневое отношение P консеквента которых имеет наибольшую сложность среди всех ее подтермов. Здесь используется справочник поиска теорем "реализация". Теорема T используется для реализации антецедента A. Результат упрощается, причем разрешается использовать теоремы, уже имеющиеся в списке вывода. (Прием вывод - 24).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bc}(\neg(c = \emptyset)$ & $c -$ set & $c \subseteq \mathbb{R}$ & $b -$ число & $\sup(c) \leq b$ & огрсверху$(c) \rightarrow$
   верхняягрань$(b, c))$

из теоремы

$\forall_{abe}(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{верхняягрань}(e, a)\ \&\ b - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ e \leq b \rightarrow \text{верхняягрань}(b, a))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{set}\ \&\ \neg(a = \emptyset)\ \&\ a \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{огрсверху}(a) \rightarrow \text{верхняягрань}(\sup(a), a))$

7. Попытка реализации антецедента. Теорема - эквивалентность вида $P(t_1 \ldots t_n) \leftrightarrow A$, определяющая значения части операндов t_i по значениям прочих t_j. Первые операнды называются "выходными", вторые - "входными". Выбирается существенный антецедент B с заголовком Q, и находится теорема T без существенных антецедентов, консеквент которой тоже имеет заголовок Q. Используется справочник поиска теорем "реализация". Теорема T используется для реализации антецедента B. Результат упрощается. Если консеквент новой теоремы имеет вид $P(r_1 \ldots r_n) \leftrightarrow C$, причем имеется антецедент с заголовком P и теми же самыми входными данными, регистрация результата отменяется. (Прием результзначение - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abdehiB}(e - \text{set}\ \&\ e \subseteq \text{Dom}(d)\ \&\ \text{образ}(d, e) \subseteq (2\pi i, 2\pi i + \pi)\ \&\ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ d\text{—функция}\ \&\ i\text{—целое}\ \&\ \text{Min}(d, e, B, h) \rightarrow \text{Max}(\lambda_g(\cos d(g), g \in \text{Dom}(d)), e, a, b) \leftrightarrow a = B\ \&\ b = \cos h)$

   из теоремы

   $\forall_{abdefhB}(e - \text{set}\ \&\ e \subseteq \text{Dom}(d)\ \&\ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{образ}(d, e) \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ d - \text{функция}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Min}(d, e, B, h)\ \&\ \text{убывает}(f, \text{образ}(d, e)) \rightarrow \text{Max}(\text{произведение}(f, d), e, a, b) \leftrightarrow a = B\ \&\ b = f(h))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ak}(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq (2\pi k, 2\pi k + pi)\ \&\ k - \text{целое} \rightarrow \text{убывает}(\lambda_b(\cos b, b - \text{число}), a))$

8. Стандартная реализация антецедента. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложную одноместную операцию A_1 ерез сложные одноместные операции, имеющие другую оценку сложности. Выбирается существенный антецедент B, и по заголовку f его максимально сложного подтерма находится теорема T, используемая для "стандартной" реализации антецедентов, содержащих f. Используется справочник "Станд". Теорема T используется для реализации B. Результат упрощается. (Прием варприем - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(0 < a\ \&\ 0 < \pi - a\ \&\ a - \text{число} \rightarrow \sin a = 1/\sqrt{1 + (\text{ctg}\, a)^2})$

   из теоремы

   $\forall_f(0 < \sin f\ \&\ f - \text{число} \rightarrow \sin f = 1/\sqrt{1 + (\text{ctg}\, f)^2})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число}\ \&\ 0 < a\ \&\ 0 < \pi - a \rightarrow 0 < \sin a)$

9. Стандартная реализация антецедента. Аналогично предыдущему, но тождество $A_1 = A_2$ варьирует сложный терм A_1 с сохранением оценки сложности. (Прием варьир - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(b - \text{число } \& \ 0 \le b \ \& \ 0 \le \pi - b \to \sin b = \sqrt{1 - (\cos b)^2})$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число } \& \ 0 \le \sin a \to \sin a = \sqrt{1 - (\cos a)^2})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{число } \& \ 0 \le \ \& \ 0 \le \pi - a \to 0 \le \sin a)$

10. Попытка реализации антецедента с бесповторным функциональным параметром. Теорема может быть использована для создания приема проверочного оператора, идентифицирующего некоторый антецедент с посылкой. Выбирается существенный антецедент A, каждый параметр которого встречается либо в консеквенте, либо в другом существенном антецеденте. В нем встречается подвыражение "значение(f, x)", причем переменная f имеет в A единственное вхождение. По заголовку P антецедента A находится теорема T без существенных антецедентов, консеквент которой тоже имеет заголовок P. Используются справочники поиска теорем "пример" и "свойства". Кроме того, в качестве T берутся теоремы, корневое отношение P консеквента которых имеет наибольшую сложность среди всех ее подтермов. Здесь используется справочник поиска теорем "реализация". Теорема T используется для реализации антецедента A, причем вместо переменной f подставляется определяемое теоремой T выражение "отображение$(\ldots)$". Результат упрощается. (Прием легковидеть - 27).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abe}(\forall_c(c - \text{натуральное } \& \ a \le c \to |b(c)| \le e^c) \ \& \ 0 < 1 - e \ \& \ e - \text{число } \&$
    $a - \text{натуральное } \& \ \text{последовательность}(b, \mathbb{R}) \to$
    $\text{сходится}(\lambda_d(\sum_{c=1}^{d} b(c), d - \text{натуральное})))$

    из теоремы

    $\forall_{abg}(\forall_c(c - \text{натуральное } \& \ a \le c \to |b(c)| \le g(c)) \ \& \ a - \text{натуральное } \&$
    $\text{сходится}(\lambda_d(\sum_{c=1}^{d} g(c), d - \text{натуральное})) \ \& \ \text{последовательность}(b, \mathbb{R}) \ \&$
    $\text{последовательность}(g, \mathbb{R}) \to \text{сходится}(\lambda_d(\sum_{c=1}^{d} b(c), d - \text{натуральное})))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_b(0 < b + 1 \ \& \ 0 < 1 - b \ \& \ b - \text{число} \to \text{сходится}(\lambda_n(\sum_{i=1}^{d} b^i, n - \text{натуральное})))$

11. Попытка реализации антецедента, содержащего операцию над семейством. Теорема имеет антецедент A, содержащий подтерм вида "$F(\lambda_x(f(x), B))$", где f - переменная, имеющая единственное вхождение в A. По символу F находится теорема T, в консеквенте которой встречается подтерм вида "$F(\lambda(\ldots))$" и которая может быть использована для создания приема проверочного оператор. Эта

теорема используется для реализации антецедента A, причем вместо переменной f подставляется определяемое теоремой T выражение "отображение(...)". Результат упрощается. (Прием отображ - 3).

Пример: вывод теоремы

$\forall_g(\lim(g) = 0$ & убывает$(g, \mathbb{N})$ & последовательность$(g, \mathbb{R}) \rightarrow$
сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} g(i)(-1)^i, n -$ натуральное$)))$

из теоремы

$\forall_{fg}($последовательность$(f, \mathbb{R})$ & последовательность$(g, \mathbb{R})$ &
ограничена$(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} f(i), n -$ натуральное$), \mathbb{N})$ & $\lim(g) = 0$ & убывает$(g, \mathbb{N}) \rightarrow$
сходится$(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n} f(i)g(i), n -$ натуральное$)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_k(k -$ целое $\rightarrow$ ограничена$(\lambda_n(\sum_{i=1}^{n}(-1)i + k, n -$ натуральное$), \mathbb{N}))$

12. Реализация сложного антецедента. Теорема - тождество, упрощающее выражение под корневой сложной операцией и не вводящее новых операций большей либо равной сложности. Выбирается самый сложный существенный антецедент A. Оценка его сложности больше 8. Проверяется, что самый сложный его подтерм - он сам. По заголовку P антецедента A находится теорема T, корневое отношение P консеквента которой имеет наибольшую сложность среди всех ее подтермоа. Используется справочник поиска теорем "реализация". Теорема T используется для реализации A. Результат упрощается. Проверяется, что все антецеденты новой теоремы элементарны. (Прием сокращ - 49).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(a =$ операция(b) & $c -$ целое & $0 \leq c$ & группа$(b) \rightarrow$
алгстепень(единица$(a), a, c) =$ единица$(a))$

из теоремы

$forall_{cdei}(i -$ set & $c -$ целое & ассоциативно(e) & $0 \leq c$ & Единица(d, e) &
бинарнооперация$(e, i) \rightarrow$ алгстепень$(d, e, c) = d)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a =$ операция(b) & группа$(b) \rightarrow$ Единица(единица$(a), a))$

13. Попытка реализации сложного антецедента. Теорема - кванторная импликация, которую можно использовать для создания приема проверочного оператора. Выбирается ее существенный антецедент A. После отбрасывания его корневого отрицания, если оно есть, возникает утверждение с заголовком P. Оценка его сложности больше 9. Находится теорема T, корневое отношение P консеквента которой имеет наибольшую сложность среди всех ее подтермов. Используется справочник поиска теорем "реализация". Теорема T используется для реализации A. Результат упрощается. Проверяется, что все антецеденты новой теоремы элементарны. (Прием спуск - 63).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ag}(\mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathbb{C}\ \&\ \mathrm{Val}(g) \subseteq \mathbb{C}\ \&\ a \in \mathrm{Dom}(g)\ \&\ g-$функция $\&$ Непрервывно$(g,a) \rightarrow$ Непрерывно$(\lambda_x(|g(x)|, x \in \mathrm{Dom}(g)), a))$

из теоремы

$\forall_{fga}(f-$функция $\&\ g-$функция $\&\ \mathrm{Dom}(f) \subseteq \mathbb{C}\ \&\ \mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathbb{C}\ \&\ \mathrm{Val}(f) \subseteq \mathbb{C}\ \&\ \mathrm{Val}(g) \subseteq \mathbb{C}\ \&\ a \in \mathrm{Dom}(g)\ \&$ Непрервывно$(g,a)\ \&$ Непрервывно$(f, g(a)) \rightarrow$ Непрерывно$(\lambda_x(f(g(x)), x \in \mathrm{Dom}(g)), a))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a -$ комплексное $\rightarrow$ Непрерывно$(\lambda_z(|z|, z -$ комплексное$), a))$

14. Реализация группы сложных антецедентов. Теорема - тождество, позволяющее представить значение операции над объектами, заданными в некотором стандартном виде, в таком же стандартном виде. Выбирается антецедент A, оценка сложности которого больше 7. По его заголовку P находится теорема T без существенных антецедентов, консеквент которой тоже имеет заголовок P. Используется справочник поиска теорем "пример". Кроме того, в качестве T берутся теоремы, корневое отношение P консеквента которых имеет наибольшую сложность среди всех ее подтермов. Здесь используетя справочник поиска теорем "реализация". Находятся все антецеденты $A_1, \ldots, A_n$ исходной теоремы, имеющие заголовок P. Проверяется, что их списки параметров не пересекаются. Теорема T используется для одновременной и независимой реализации всех антецедентов $A_1, \ldots, A_n$ (создаются n копий этой теоремы, получаемых из T переобозначением переменных на новые переменные). Результат упрощается. (Прием стандтерм - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cd}(\neg(\emptyset \in \mathrm{Val}(c))\ \&\ l(c) -$ натуральное $\&$ кортеж$(d, l(c), \mathbb{R})\ \&\ c -$ слово $\&$ семействомножеств$(c)\ \&$ несовместны$(c) \rightarrow -$таблица$(\{; \lambda_e($конст$(c(e), d(e)),$ $e \in \{1, \ldots, l(c)\})\}) =$ таблица$(\{; \lambda_g(-$конст$(c(g), d(g)), g \in \{1, \ldots, l(c)\})\}))$

из теоремы

$\forall_h($общзнач$(h) \subseteq \mathbb{R}\ \&$ кусочнфунк$(h) \rightarrow -$таблица$(h) =$ таблица$(\mathrm{set}_b(\exists_a(b = -$функчасть $\&\ a \in$ области$(h)))))$

и дополнительных теорем

$\forall_{abn}(a -$ слово $\&\ b -$ слово $\&\ l(a) = n\ \&\ l(b) = n\ \&\ n -$ натуральное $\&$ семействомножеств$(a)\ \&\ \neg(\emptyset \in \mathrm{Val}(a))\ \&$ несовместны$(a) \rightarrow$ кусочнфунк$(\{; \lambda_i($конст$(a(i), b(i)), i \in \{1, \ldots, n\})\}))$

15. Попытка реализации сложного антецедента. Теорема - тождество, обеспечивающее переход к термам с меньшей оценкой сложности. Выбирается антецедент A, оценка сложности которого больше 9. Проверяется, что самый сложный его подтерм - он сам. По заголовку P антецедента A находится теорема T, корневое отношение P консеквента которой имеет наибольшую сложность среди

всех ее подтермов. Используется споавочник поиска теорем "реализация". Теорема T используется для реализации A. Результат упрощается. Проверяется, что все антецеденты новой теоремы не имеют связанных переменных, а оценка сложности ее консеквента не меньше оценки сложности консеквента исходной теоремы. (Прием упрощение - 28).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cn}(c - \text{комплексное } \& \ n - \text{натуральное} \to \lim_{z \to c} z^n = c^n)$

из теоремы

$\forall_{af}(\text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{C} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{C} \ \& \ a \in \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \&$
$\text{Непрерывно}(f, a) \ \& \ \text{Предельныточка}(a, \text{Dom}(f)) \to \text{Предел}(f, 0, a) = f(a))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{nc}(n\text{—натуральное} \ \& \ c\text{—комплексное} \to \text{Непрерывно}(\lambda_z(z^n, z\text{—комплексное}), c))$

16. Усмотрение того, что в текущем контексте некоторый антецедент эквивалентнен ослабленному условию, с последующей реализацией ослабленной версии этого антецедента дополнительной теоремой. Теорема - тождество для числовых атомов. Она имеет единственный антецедент вида $A_1 = A_2$, содержащий все переменные теоремы, причем оба выражения A_1, A_2 имеют один и тот же заголовок P. Находится теорема T_1 с консеквентом вида $t_1 = t_2$, где оба выражения t_1, t_2 имеют один и тот же заголовок P. Проверяется, что единственный антецедент этой теоремы содержит все переменные консеквента, причем он имеет вид $Q(t_1, t_2)$. Теорема T_1 используется для реализации антецедента $A_1 = A_2$. Проверяется, что при этом лишь происодит замена указанного антецедента на некоторый антецедент $Q(r_1, r_2)$. Находится теорема T_2, корневое отношение Q консеквента которой имеет наибольшую сложность среди всех ее подтермов. Используется справочник поиска теорем "реализация". Теорема T_2 используется для реализации $Q(r_1, r_2)$. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 87).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(B = C) \ \&$
$\neg(D = E) \ \& \ C \in \text{прямая}(AE) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \&$
$C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(DE) \ \&$
$\text{прямая}(AE) \perp \text{прямая}(BC) \to l(AC)l(DE) = l(AD)l(BC))$

из теоремы

$\forall_{abcdef}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(d = e) \ \& \ \neg(d = f) \ \& \ \angle(abc) = \angle(def) \ \&$
$a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \&$
$\text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(ac) \ \& \ \text{прямая}(de) \perp \text{прямая}(df) \to l(ac)l(de) = l(ab)l(df))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \&$
$\neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ E \in \text{прямая}(AC) \ \&$
$\neg(A = D) \ \& \ \neg(A = E) \to \text{эквуглы}(\angle(DAE), \angle(BAC)))$

17. Попытка сведения антецедента, выражающего свойство функции, к равенству для некоторой характеристики той же функции, определяемой в текущей ячейке вывода. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель. Стартовая теорема цикла вывода - определение символа F, являющегося заголовком выражения A_1. Внутри A_1 присутствует выражение "значение(f, t)", где f - переменная, не встречающаяся в антецедентах - равенствах, содержащих F. В разделе символа F находится теорема T, заголовок Q консеквента которой служит также заголовком некоторого антецедента B исходной теоремы. Среди антецедентов теоремы T имеется равенство, содержащее F. Теорема T используется для реализации антецедента B. Результат упрощается. (Прием описатель - 42).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{cdefgj}(\text{предел}(g, j, c) = -\infty \ \&\ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \&\ g - \text{функция} \ \&\ \text{Локопред}(g, c, j) \ \&\ f - \text{функция} \ \&\ \text{Число}(c) \ \&\ e \subseteq \mathbb{R} \ \&\ d - \text{число} \ \&\ \text{Локопред}(f, c, j) \ \&\ \text{типпредела}(j) \ \&\ \text{Dom}(g) = e \ \&\ \text{Dom}(f) = e \ \&\ \text{предел}(f, j, c) = d \to \lim_{b \to c \setminus j}(g(b) + f(b)) = -\infty)$

    из теоремы

    $\forall_{aeghi}(\text{Dom}(g) = e \ \&\ \text{Dom}(h) = e \ \&\ \text{предел}(g, i, a) = -\infty \ \&\ e \subseteq \mathbb{R} \ \&$
    $\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \&\ \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \ \&\ g - \text{функция} \ \&\ h - \text{функция} \ \&\ \text{Число}(a) \ \&\ \text{типпредела}(i)$
    $\&\ \text{Локопред}(g, a, i) \ \&\ \text{Локопред}(h, a, i) \ \&\ \text{локогрсверху}(h, a, i) \to$
    $\lim_{b \to a \setminus i}(g(b) + h(b)) = -\infty)$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{abfi}(f - \text{функция} \ \&\ \text{Число}(a) \ \&\ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \&\ b - \text{число} \ \&\ \text{Локопред}(f, a, i) \ \&$
    $\text{типпредела}(i) \ \&\ \text{предел}(f, i, a) = b \to \text{локогрсверху}(f, a, i))$

18. Попытка реализации антецедента и вычисления значения заменяющей части. Теорема - определение $A_1 = A_2$ невырожденного числового атома A_1 через другие невырожденные атомы. Единственный антецедент B содержит все параметры определяющей части A_2. В разделе, к которому относится заголовок F атома A_1, находится теорема T, заголовок консеквента которой совпадает с заголовком антецедента B. Она имеет характеристику "реализация" либо "свойства". Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Усматривается подстановка S, переводящая B в консеквент теоремы T. Составляется список D антецедентов теоремы T и результатов применения S к антецедентам исходной теоремы, отличным от B. Выражение $S(A_2)$ упрощается относительно D и превращается в выражение r, не содержащее символа "вариант" и имеющее меньшую оценку сложности, чем до упрощения. Консеквентом новой теоремы становится равенство $S(A_1) = r$, антецедентами - D. Теорема упрощается. (Прием числзнач - 49).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_c(c - \text{натуральное} \to \text{четность}(\lambda_b(b, b \in \{1, \ldots, c\})) = 0)$

    из теоремы

    $\forall_{an}(n - \text{натуральное} \ \&\ \text{перестановка}(a, \{1, \ldots, n\}) \to \text{четность}(a) =$
    $\text{числоинверсий}(a) (\text{mod } 2))$

и дополнительной теоремы

$\forall_n(n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \rightarrow \text{перестановка}(\lambda_i(i, i \in \{1, \ldots, n\})))$

19. Попытка реализации антецедента с помощью дополнительной теоремы, определяющей характеристику константной функции. Теорема имеет консеквент вида $P(\lambda_x(A_2, A_1), A_3)$, определяющий характеристику A_3 некоторой функции (напрмер, первообразную). Проверяется, что для каждого встречающегося в консеквенте выражения "значение(t_1, t_2)" терм t_1 оказывается переменной, встречающейся в антецеденте вида $P(t_1, t_3)$. Выбирается антецедент вида $P(f, g)$, где f, g - переменные. В текущем списке вывода находится теорема T с консеквентом вида $P(\lambda_y(B_2, B_1), B_3)$, у которого B_2 не содержит y. Эта теорема используется для реализации антецедента $P(f, g)$. Результат упрощается и тестируется на неизбыточность. (Прием функперех - 9).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bf}(f - \text{set} \ \& \ f \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{квазиобласть}(f) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(b, x \in f), \lambda_c(bc, c \in f)))$

из теоремы

$\forall_{abd}(\text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{первообразная}(a, d) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(ba(x), x \in \text{Dom}(a)), \lambda_c(bd(c), c \in \text{Dom}(d))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_c(c - \text{set} \ \& \ c \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{квазиобласть}(c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(1, x \in c), \lambda_b(b, b \in c)))$

20. Попытка реализации единственного существенного антецедента с помощью другой теоремы того же списка вывода. Теорема - кванторная импликация, которую можно использовать для создания приема проверочного оператора. Единственный антецедент A содержит все параметры консеквента. Его заголовок P отличен от символа "не". Этот антецедент не используется для сопровождения по о.д.з. Остальные антецеденты либо используются для сопровождения по о.д.з., либо являются указателями типа объекта. В текущем списке вывода выбирается теорема T, имеющая характеристику "свойства" и выражающая свойство некоторого выражения, содержащего P. Она имеет лишь один антецедент, не имеющий заголовка "не" и не являющийся указателем типа объекта. Число его параметров меньше числа параметров консеквента. Теорема T используется для реализации A. Результат упрощается. (Прием спуск - 59).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cde}(\neg(d^2 + e^2 = 0) \ \& \ c - \text{натуральное} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \ \& \ \text{взаимнопросты}(d, e) \rightarrow \text{нод}(e, cd) = \text{нод}(c, e))$

из теоремы

$\forall_{abn}(n - \text{целое} \ \& \ \neg(b^2 + n^2 = 0) \ \& \ \text{нод}(a, b) \mid n \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ \neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ b - \text{целое} \rightarrow \text{нод}(a, b) \mid \text{нод}(b, n))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{gmn}(\neg(m^2+n^2=0)$ & $g-$ натуральное & $m-$ целое & $n-$ целое & взаимнопросты$(m,n) \to$ нод$(n,gm) \mid g)$

21. Попытка реадизации антецедента и варьирования ограничения на аргумент исходной функции. Теорема имеет консеквент вида $P(\lambda_x(A_2,A_1),A_3)$, определяющий характеристику A_3 некоторой функции (например, первообразную). Внутри A_2 выделяется подвыражение вида $f(g(x))$, где f,g - переменные, причем имеется антецедент B вида $P(f,t)$. В разделе символа P находится теорема с консеквентом вида $P(\lambda_y(C_2,C_1),C_3)$, не имеющая антецедента с заголовком P. Она используется для реализации антецедента $P(f,t)$. Возникает некоторая теорема T. Условие C_1 на область определения отображения, на которое была заменена переменная f при переходе к T, имеет своим конъюнктивным членом некоторое ограничение R_1, не обусловленное сопровождением по о.д.з. По заголовку Q утверждения R_1 находится еще одна дополнительная теорема - эквивалентность общей стандартизации, у которой заменяемая часть имеет заголовок Q. Она подсказывает функцию, которую следует выбрать в качестве g для получения альтернативного условия на область определения первого операнда консеквента теоремы T. Эта функция подставляется в T вместо g. После упрощения результата подстановки он регистрируется в списке вывода. (Прием функперех - 21).

Пример: вывод теоремы

первообразная$(\lambda_x(1/x, x<0$ & $x-$ число$), \lambda_d(\ln(-d), d<0$ & $d-$ число$))$

из теоремы

$\forall_{ace}(\forall_f(f \in \mathrm{Dom}(e) \to$ дифференцируема$(e,f))$ & $\mathrm{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(e) \subseteq \mathrm{Dom}(a)$ & $a-$ функция & $e-$ функция & первообразная$(a,c) \to$ первообразная$(\lambda_x(a(e(x))$производная$(e,x), x \in \mathrm{Dom}(e)), \lambda_d(c(e(d)), d \in \mathrm{Dom}(e))))$

и дополнительных теорем

первообразная$(\lambda_f(1/f, 0<f$ & $f-$ число$), \lambda_c(\ln c, c-$ число$))$

$\forall_a(a-$ число $\to 0<-a \leftrightarrow a<0)$

Использование реализующей теоремы, декомпозирующей сложный консеквент

1. Попытка использования тождества, выражающего координаты одного объекта через координаты других. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, выражающая утверждение A_1 через параметры координат. Имеется антецедент вида "коорд$(B,K)=(t_1,\ldots,t_n)$". Все параметры выражений $t_1,\ldots,t_n$ встречаются в консеквенте. Находится теорема с консеквентом вида "коорд$(C,K)=(r_1,\ldots,r_n)$", имеющая также антецеденты, выражающие координаты отдельных параметров выражения C. Она используется для реализации антецедента "коорд$(B,K)=(t_1,\ldots,t_n)$" исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием числопред - 9).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{defghpqrv}$(коорд$(g,h)=(d,e,f)$ & коорд$(v,h)=(p,q,r)$ & Вектор(g) & Вектор(v) & Трехмерн$(h) \to v=-g \leftrightarrow p=-d$ & $q=-e$ & $r=-f$)

из теоремы

$\forall_{abcpqruvK}$(Трехмерн(K) & Вектор(u) & Вектор(v) & коорд$(u,K)=(a,b,c)$ & коорд$(v,K)=(p,q,r) \to u=v \leftrightarrow a=p$ & $b=q$ & $c=r$)

и дополнительной теоремы

$\forall_{AabcK}$(Вектор(A) & систкоорд(K) & коорд$(A,K)=(a,b,c) \to$ коорд$(-A,K)=(-a,-b,-c)$)

2. Попытка реализации самого сложного антецедента с помощью ранее выведенных теорем данного цикла вывода. Теорема - тождество $A_1=A_2$, обеспечивающее исключение описателя. Выбирается самый сложный существенный антецедент D. Проверяется, что корневая связывающая приставка теоремы имеет переменные, не входящие в D. В списке вывода находится кванторная импликация T, обеспечивающая попытку обратного вывода с переходом к более простым понятиям. Она используется для реализации антецедента D, причем при унификации подстановка выполняется только вместо переменных импликации T. Результат упрощается. (Прием описатель - 23).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ag}(a-$число & $\lim(g)-$число & последовательность$(g,\mathbb{R}) \to$ $\lim(\lambda_c(ag(c),c-$натуральное$))=a\lim(g))$

   из теоремы

   $\forall_{abfg}$(последовательность$(f,\mathbb{R})$ & последовательность$(g,\mathbb{R})$ & $a-$число & $b-$число & $\lim(f)=a$ & $\lim(g)=b \to \lim(\lambda_c(f(c)g(c),c-$натуральное$))=ab)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a-$число & $b=\lambda_c(a,c-$натуральное$) \to \lim(b)=a)$

3. Попытка варьирования операции над семейством в проверяемом утверждении. Теорема - кванторная импликация с консеквентом вида $P(t_1 \ldots t_n)$, где некоторое t_i имеет вид "$\lambda_{x_1 \ldots x_k}(f(\lambda_{y_1 \ldots y_m}(A_3,A_2)),A_1)$". Эта теорема может быть использована для создания приема проверочного оператора. Она имеет антецедент D вида $P(t_1 \ldots t_{i-1} x t_{i+1} \ldots t_n)$, где x - переменная. В списке вывода находится теорема T с консеквентом вида $P(r_1 \ldots r_n)$, у которого r_i имеет вид "$\lambda_{z_1 \ldots z_k}(B_2,B_1)$", причем B_2 не имеет связанных переменных. Эта теорема имеет ту же характеристику "спуск", что и исходная теорема. Теорема T используется для реализации антецедента D. Результат упрощается. Проверяется, что консеквент новой теоремы не содержит символа f. (Прием спуск - 46).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdf}(\neg(\emptyset \in \mathrm{Val}(d))$ & $\mathrm{set}_{ab}(a \in \mathrm{Dom}(d)$ & $b \in d(a))=\mathrm{Dom}(f)$ & $\mathrm{Val}(f) \subseteq$ события(c) & $f-$функция & семействомножеств(d) & верпространство(c) &

незавсобытия(f, c) & конечные(Val(d)) $\to$ незавсобытия$(\lambda_a(\bigcup_{b,b\in d(a)} f(a,b),$ $a \in \mathrm{Dom}(d)), c))$

из теоремы

$\forall_{dAC}(\neg(\emptyset \in \mathrm{Val}(d))$ & $\mathrm{set}_{ab}(a \in \mathrm{Dom}(d)$ & $b \in d(a)) = \mathrm{Dom}(A)$ & $\mathrm{Val}(A) \subseteq$ события(C) & $A -$ функция & семействомножеств(d) & верпространство(C) & незавсобытия(A, C) & конечные(Val(d)) $\to$ незавсобытия$(\lambda_a(\bigcap_{b,b\in d(a)} A(a,b),$ $a \in \mathrm{Dom}(D)), C))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{cA}(\mathrm{Val}(A) \subseteq$ события(c) & $A -$ функция & верпространство(c) & незавсобытия$(A, c) \to$ незавсобытия$(\lambda_y($элемсобытия$(c) \setminus A(y), y \in \mathrm{Dom}(A)), c))$

4. Попытка варьирования заголовка общего члена семейства в проверяемом утверждении. Теорема - кванторная импликация с консеквентом вида $P(t_1 \ldots t_n)$, где некоторое t_i имеет вид "$\lambda_{x_1 \ldots x_k}(A_2, A_1)$". Эта теорема может быть использована для создания приема проверочного оператора. Выражение A_2 элементарно, не содержит символа "вариант", не имеет заголовка "значение" и имеет хотя бы два вхождения символа "значение". Максимально сложный подтерм консеквента - он сам. Имеется антецедент D с заголовком P. В списке вывода находится теорема T, консеквент которой и некоторый антецедент имеет заголовок P. Она имеет ту же характеристику "спуск", что и исходная теорема. Консеквент ее не содержит символа "вариант" и не имеет вложенных вхождений описателя "отображение". Теорема T используется для реализации антецедента D. Результат упрощается. Проверяется, что консеквент новой теоремы не содержит заголовка выражения A_2. (Прием спуск - 50).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abg}(\mathrm{Dom}(a) = \mathrm{Dom}(b)$ & $\mathrm{Val}(a) \subseteq$ события(g) & $\mathrm{Val}(b) \subseteq$ события(g) & $a -$ слово & $b -$ слово & верпространство(g) & незавсобытия$(b; a, g) \to$ незавсобытия$(\lambda_d(a(d) \cup b(d), d \in \mathrm{Dom}(b)), g))$

   из теоремы

   $\forall_{cef}(\mathrm{Dom}(c) = \mathrm{Dom}(e)$ & $\mathrm{Val}(c) \subseteq$ события(f) & $\mathrm{Val}(e) \subseteq$ события(f) & $c -$ слово & $e -$ слово & верпространство(f) & незавсобытия$(c; e, f) \to$ незавсобытия$(\lambda_d(e(d) \setminus c(d), d \in \mathrm{Dom}(e)), f))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(\mathrm{Val}(a) \subseteq$ события(c) & $\mathrm{Val}(b) \subseteq$ события(c) & $a -$ слово & $b -$ слово & верпространство(c) & незавсобытия$(b; a, c) \to$ незавсобытия$(b; \lambda_y($элемсобытия$(c) \setminus a(y), y \in \mathrm{Dom}(a)), c))$

5. Варьирование антецедента с помощью теоремы, имеющей характеристику "контрольвывода". Теорема имеет консеквент вида "$P(\lambda_x(A_2, A_1), A_3)$", позволяющий определить характеристику A_3 функции, заданной описателем "отображение". Кроме того, она имеет антецедент D вида $P(f, B)$, а A_2 обобщает переменную f (она возникает из A_2 при некоторых значениях его параметров). Фактически, прием ориентирован на работу с первообразными. В текущем списке

вывода находится другая теорема T с консеквентом вида $P(C_1, C_2)$. Она имеет характеристику "контрольвывода(y, t)", указывающую, что прием, создаваемый по теореме T, использует дополнительную идентификацию подтерма t внутри терма, идентифицированного с переменной y (обычной либо функциональной). Теорема T используется для реализации антецедента D. Чтобы отследить коррекцию характеристики "контрольвывода", она предварительно добавляется к антецедентам теоремы T. После реализации она исключается яиз антецедентов. Консеквент новой теоремы имеет вид "$P(\lambda_z(g(r), E_1), E_2)$", некоторый антецедент - вид "$P(\lambda_u(g(s), F_1), F_2)$". Решается задача на описание с условием $r = s$ и единственной неизвестной z. После получения ответа с конъюнктивным членом $z = q$ предпринимается замена в новой теореме вхождения "$\lambda_z(g(r), E_1)$" на "$\lambda_z(g(z), z -$ число)", а вхождения s - на q. Связанная переменная u заменяется на z. Регистрируется скорректированная характеристика "контрольвывода$(\ldots)$". (Прием обобщподст - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{befghj}(\neg(b = 0)\ \&\ \neg(g = 0)\ \&\ b -$ число $\&\ g -$ число $\&\ h -$ число $\&$
первообразная$(\lambda_x(e(g(-h + \operatorname{tg} x)/b)/(\cos x)^2, x -$ число$), f) \rightarrow$
первообразная$(\lambda_x(e(x), x -$ число$), \lambda_x(gf(\operatorname{arctg}(h + bx/g))/b, x -$ число$)))$

из теоремы

$\forall_{abcgh}(\neg(b = 0)\ \&\ \neg(g = 0)\ \&\ b -$ число $\&\ g -$ число $\&\ h -$ число $\&$
первообразная$(a, c) \rightarrow$ первообразная$(\lambda_x(a(h + bx/g), x -$ число$),$
$\lambda_d(gc(h + bd/g)/b, d -$ число$)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bc}($первообразная$(\lambda_x(b(\operatorname{tg} x)/(\cos x)^2, x -$ число$), c) \rightarrow$
первообразная$(b, \lambda_d(c(\operatorname{arctg} d), d -$ число$)))$

Использование усиливающей дополнительной теоремы

1. Усиление существенного антецедента с уникальной переменной. Теорема - тождество общей стандартизации. Некоторый существенный антецедент имеет вид "$P(t_1 \ldots t_n)$"; $n \geq 2$. Символ P отличен от равенства и неравенств. Находится теорема T вида $Q(x_1 \ldots x_n) \rightarrow P(x_1 \ldots x_n)$ (допускаются также несущественные антецеденты). Она используется для реализации антецедента $P(t_1 \ldots t_n)$. Результат упрощается. (Прием нормализация - 129).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acT}(c \in T\ \&$ неподв$(a, T)\ \&$ мточка$(a)\ \&$ Числотр$(T) \rightarrow$ Сила$(a, c) =$ вектор0$)$

   из теоремы

   $\forall_{bce}(c \in e\ \&$ мточка$(b)\ \&$ Равндвиж$(b, e)\ \&$ Числотр$(e) \rightarrow$ Сила$(b, c) =$ вектор0$)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{aT}($мточка$(a)\ \&$ Числотр$(T)\ \&$ неподв$(a, T) \rightarrow$ Равндвиж$(a, T))$

Контрапозиция дополнительной теоремы с дизъюнкцией в консеквенте позволяет реализовать антецедент исходной теоремы, после чего повторной контрапозицией эта же дизъюнкция возвращается в консеквент

1. Теорема A имеет своим консеквентом отличный от равенства нечисловой двуместный предикат A_1 с заголовком P. Среди антецедентов теоремы встречается утверждение вида "$\neg(t_1 \in t_2)$". В том разделе, к которому относится символ P, находится теорема B с консеквентом вида $B_1 \vee B_2$, причем заголовком B_1 служит символ P. Утверждение B_1 содержит все параметры консеквента теоремы B. Переменные теоремы B переобозначены и не встречаются в A. Находится подстановка C, переводящая B_1 в A_1. Определяется список S_1 антецедентов теоремы A, в котором "$\neg(t_1 \in t_2)$" заменено на "$t_1 \in t_2$", и список S_2 результатов применения подстановки C к антецедентам теоремы B. Проверяется, что в списке S_2 имеется утверждение "$t_1 \in t_2$". Проверяется, что существует подстановка вместо параметров списка S_2, не входящих в B_1, переводящая этот список в подсписок списка S_1. Антецедентами новой теоремы становятся отличные от "$\neg(t_1 \in t_2)$" антецеденты теоремы A, консеквентом - результат применения C к дизъюнкции "$B_1 \vee B_2$". (Прием отношение - 51).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abn}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R}^n \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ \text{точкаприкосн}(a, b) \rightarrow$
   $\text{предельнточка}(a, b) \vee \text{изолирточка}(a, b))$

   из теоремы

   $\forall_{abn}(\neg(a \in b) \ \& \ b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R}^n \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ \text{точкаприкосн}(a, b) \rightarrow$
   $\text{предельнточка}(a, b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{anA}(A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R}^n \ \& \ a \in A \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow \text{предельнточка}(a, A) \vee$
   $\text{изолирточка}(a, A))$

Реализация отношения принадлежности

1. Использование утверждения о принадлежности для реализации антецедента, имеющего вид принадлежности. Теорема - кванторная импликация с консеквентом вида "$x \in t$", где x - переменная, не встречающаяся в выражении t. Ее антецедент A имеет вид "$r_1 \in r_2$" и не используется для сопровождения по о.д.з. Заголовок выражения r_2 - логический символ s. Находится теорема с консеквентом вида "$y \in B$", где B - выражение с заголовком s, не содержащее переменной y. Эта теорема используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. Регистрируются конъюнктивные члены результата упрощения. Дополнительно проверяется непротиворечивость антецедентов. (Прием принадл - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDFP}(F \in \text{прямая}(AD) \ \& \ P \in \text{отрезок}(BC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \&$
   $C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ P - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AD) \perp \text{прямая}(FP) \ \&$
   $\text{трапеция}(ABCD) \rightarrow F \in \text{отрезок}(AD))$

из теоремы

$\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$F - \text{точка}\ \&\ \neg(E = F)\ \&\ \text{трапеция}(ABCD)\ \&\ E \in \text{фигура}(ABCD)\ \&$
$F \in \text{прямая}(AD)\ \&\ \text{прямая}(EF) \perp \text{прямая}(AD) \rightarrow F \in \text{отрезок}(AD))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{aniP}(n - \text{натуральное}\ \&\ 3 \leq n\ \&\ \text{кортеж}(a, n, \text{Точки})\ \&\ \text{планарно}(\{; a\})\ \&$
$i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ P \in \text{отрезок}(a(i)a(i(\text{mod}\ n) + 1)) \rightarrow P \in \text{фигура}(a))$

2. Попытка перехода к подмножеству в условии принадлежности. Консеквент теоремы - равенство двух атомарных выражений. Имеется антецедент A вида "$x \in t$", где x - переменная, не входящая в t. Заголовок t - логический символ f. Находится теорема T с консеквентом вида "$r_1 \subseteq r_2$", причем заголовок r_2 - символ f. Все переменные теоремы T входят в r_2. Определяется подстановка S, переводящая r_2 в t. Заголовок выражения r_1 - логический символ g, причем среди антецедентов исходной теоремы нет утверждений принадлежности, имеющих g заголовком второго операнда. Консеквент новой теоремы тот же, что у исходной. Антецеденты ее получаются заменой антецедента A на "$x \in S(r_1)$" и добавлением результатов применения S к антецедентам теоремы T. Результат упрощается. (Прием равны - 32).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abABCD}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ A \in \text{прямая}(CD)\ \&$
   $A \in \text{отрезок}(ab)\ \&\ B \in \text{прямая}(ab)\ \&\ B \in \text{отрезок}(CD)\ \&\ a - \text{точка}\ \&$
   $b - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \rightarrow$
   $\text{прямая}(CD) = \text{прямая}(ab))$

   из теоремы

   $\forall_{abABCD}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ A \in \text{прямая}(ab)\ \&\ A \in \text{прямая}(CD)$
   $\&\ B \in \text{прямая}(ab)\ \&\ B \in \text{прямая}(CD)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
   $B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(CD) = \text{прямая}(ab))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B) \rightarrow \text{отрезок}(AB) \subseteq \text{прямая}(AB))$

3. Реализация отношения принадлежности множеству, тип которого определяется одноместным предикатом в антецедентах. Теорема - тождество, консеквент которого содержит более одного нечислового атомарного выражения одного и того же типа. Она имеет антецеденты "$t \in x$", "$P(x)$", где x - переменная, P - указатель типа объекта. Среди теорем текущего списка вывода имеются такие, у которых количество утверждений принадлежности в антецедентах более одного. В разделе символа P находится теорема, консеквент которой имеет вид "$r \in y$", причем y - переменнеы, и имеется антецедент $P(y)$. Эта теорема используется для реализации антецедента "$t \in x$". Результат упрощается. (Прием Атомарное - 25).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{acdg}(g = [c, d]$ & $c-$число & $d-$число & неподв(a, g) & мточка(a) & Числотр$(g) \rightarrow$ Место$(a, c) =$ Место$(a, d))$

из теоремы

$\forall_{acdet}(e = [c, d]$ & $t \in e$ & $c -$ число & $d -$ число & неподв(a, e) & мточка(a) & Числотр$(e) \rightarrow$ Место$(a, t) =$ Место$(a, d))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{Tab}(a -$ число & $b -$ число & Числотр(T) & $T = [a, b] \rightarrow a \in T)$

Реализация равенства

1. Использование дополнительного тождества для реализации равенства наиболее сложных числовых атомов при унификации двух других равенств - антецедентоа. Консеквент теоремы - равенство двух атомарных выражений. Список Q антецедентов, представляющих собой равенства двух невырожденных числовых атомов, имеет не менее 2 элементов. Имеется единственное равенство $t_1 = t_2$ в списке Q, оценка сложности которого максимальна. Эта оценка сложности больше оценки сложности консеквента. Обе части данного равенства имеют один и тот же заголовок f. Находится теорема T, консеквент которой - равенство $r_1 = r_2$ двух невырожденных числовых атомов с заголовком f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Теорема T имеет антецедент $p_1 = p_2$, где p_1, p_2 - невырожденные числовые атомы с некоторым заголовком g. В списке Q имеется отличное от $t_1 = t_2$ равенство $q_1 = q_2$ двух невырожденных числовых атомов с заголовком g. Находится подстановка S, переводящая $t_1 = t_2$ в $r_1 = r_2$ и одновременно - $q_1 = q_2$ в $p_1 = p_2$. Учитывается возможность варьирования некоторых параметров, не изменяющего значений числовых атомов. При этом могут возникать утверждения, добавляемые к антецедентам новой теоремы. Помимо этого, антецедентами становятся антецеденты теоремы T и результат применения S к отличным от $t_1 = t_2, q_1 = q_2$ антецедентам исходной теоремы. Консеквент новой теоремы - результат применения S к консеквенту исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием равны - 17).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcCF}(\neg(a = c)$ & $\neg(a = C)$ & $\neg(a = F)$ & $l(ab) = l(bc)$ & $l(aC) = l(cF)$ & $a-$точка & $b-$точка & $c-$точка & $C-$точка & $F-$точка & точкалуча(a, c, C) & точкалуча$(c, a, F) \rightarrow l(bC) = l(bF))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка & $F -$ точка & $\neg(D = F)$ & $\neg(D = E)$ & $\neg(A = C)$ & $\neg(A = B)$ & $\angle(BAC) = \angle(EDF)$ & $l(AB) = l(DE)$ & $l(AC) = l(DF) \rightarrow l(BC) = l(EF))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABC}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $\neg(A = B)$ & $\neg(A = C)$ & $l(AB) = l(BC) \rightarrow \angle(BAC) = \angle(BCA))$

Реализация антецедента без привлечения дополнительной теоремы

1. Попытка унифицировать различные операнды двух симметричных двуместных отношений в антецедентах, имеющих одинаковый операнд. Теорема - тождество для числовых атомов. Имеются антецеденты $P(A,B)$ и $P(A,C)$, где P - отличное от равенства симметричное отношение. Существует подстановка S, переводящая B в C. Она представляет собой переобозначение переменных без отождествления их. Консеквентом новой теоремы становится результат применения S к консеквенту исходной теоремы, антецедентами - результаты применения S к отличным от $P(A,B)$ антецедентам исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ADEF}(\neg(A=D)\ \&\ \neg(A=E)\ \&\ \neg(D=E)\ \&\ \neg(D=F)\ \&\ \neg(E=F)\ \&$
   $D \in \text{прямая}(AF)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\ \&$
   $\text{прямая}(AE) \perp \text{прямая}(EF)\ \&\ \text{прямая}(AF) \perp \text{прямая}(DE) \rightarrow$
   $l(AE)l(DE) = l(AD)l(EF))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(D=E)\ \&\ \neg(D=F)\ \&$
   $\neg(E=F)\ \&\ D \in \text{плоскость}(ABC)\ \&\ E \in \text{плоскость}(ABC)\ \&$
   $F \in \text{плоскость}(ABC)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&$
   $E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC)\ \&$
   $\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(DE)\ \&\ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(EF)\ \&$
   $\text{прямая}(DE) \perp \text{прямая}(DF) \rightarrow l(AC)l(DE) = l(AB)l(EF))$

2. Переход от произвольной функции к набору, если указано число элементов области определения. Теорема - простая импликация с бесповторными антецедентами и консеквентом, у которой каждая переменная антецедентов встречается в консеквенте. Имеется антецедент A вида "$\text{card}(\text{Dom}(f)) = n$", где f - переменная, n - десятичное число; $0 < n < 9$. Новая теорема получается из исходной удалением антецедента A и подстановкой в оставшиеся антецедены и консеквент вместо f выражения "$(a_1, \ldots, a_n)$", где $a_1, \ldots, a_n$ - новые переменные. Результат упрощается. (Прием попыткаспуска - 23).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a-\text{set} \rightarrow \text{несовместны}((a)))$

   из теоремы

   $\forall_f(\text{card}(\text{Dom}(f)) = 1\ \&\ \text{семействомножеств}(f) \rightarrow \text{несовместны}(f))$

3. Реализация единственного равенства в антецеденте путем отождествления его соответствующих переменных. Теорема - равенство двух атомарных выражений. Имеется антецедент $B_1 = B_2$ - равенство двух невырожденных числовых атомов с одинаковых заголовком. Других равенств в антецедентах нет. Число переменных теоремы меньше 9. Консеквент имеет хотя бы два параметра, не входящих в антецедент $B_1 = B_2$. Рассматривается набор $x_1, \ldots, x_n$ корневых операндов атома B_1 и набор $y_1, \ldots, y_n$ корневых операндов атома B_2. Все эти

операнды - переменные. К антецедентам исходной теоремы добавляются равенства $x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$. Результат упрощается. (Прием равны - 27).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcABE}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = c)\ \&\ \neg(a = E)\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ \neg(b = E)\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
$a \in$ окружность$(AB)\ \&\ b \in$ окружность$(AB)\ \&\ c \in$ окружность$(AB)\ \&$
$E \in$ окружность$(AB)\ \&\ a -$ точка $\&\ b -$ точка $\&\ c -$ точка $\&\ A -$ точка $\&$
$B -$ точка $\&\ E -$ точка $\&$ разныестороны$(c, A,$ прямая$(ab))\ \&$
разныестороны$(E, A,$ прямая$(ab)) \to \angle(aEb) = \angle(acb))$

из теоремы

$\forall_{abcABCDE}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = c)\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&$
$\neg(C = E)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \angle(aAb) = \angle(CAD)\ \&\ a \in$ окружность$(AB)\ \&$
$b \in$ окружность$(AB)\ \&\ c \in$ окружность$(AB)\ \&\ C \in$ окружность$(AB)\ \&$
$D \in$ окружность$(AB)\ \&\ E \in$ окружность$(AB)\ \&\ a -$ точка $\&\ b -$ точка $\&$
$c -$ точка $\&\ A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&\ C -$ точка $\&\ D -$ точка $\&\ E -$ точка $\&$
разныестороны$(c, A,$ прямая$(ab))\ \&$ разныестороны$(E, A,$ прямая$(CD)) \to$
$\angle(CED) = \angle(acb))$

4. Реализация равенства коммутативных двуместных числовых атомов в антецедентах путем отождествления переменных. Теорема - равенство двух атомарных выражений. Имеется антецедент $B_1 = B_2$ - равенство двух невырожденных числовых атомов с одинаковым заголовком. Имеются и другие равенства в антецедентах, причем общее число таких равенств меньше 4. Заголовок атомов B_1, B_2 коммутативен. Корневые операнды B_1 суть переменные x_1, x_2; корневые операнды B_2 - переменные y_1, y_2. Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них к антецедентам исходной теоремы добавляются равенства $x_1 = y_1, x_2 = y_2$. Во втором - равенства $x_1 = y_2, x_2 = y_1$. Результаты упрощаются. (Прием равны - 29).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{CDEF}(\neg(C = D)\ \&\ \neg(C = E)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(E = F)\ \&\ l(CD) = l(DF)\ \&$
   $\angle(CDE) = \angle(EDF)\ \&\ C -$ точка $\&\ D -$ точка $\&\ E -$ точка $\&\ F -$ точка $\to$
   $\angle(CED) = \angle(DEF))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&\ C -$ точка $\&\ D -$ точка $\&\ E -$ точка $\&$
   $F -$ точка $\&\ \neg(D = F)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
   $\neg(B = C)\ \&\ \neg(E = F)\ \&\ \angle(BAC) = \angle(EDF)\ \&\ l(AB) = l(DE)\ \&$
   $l(AC) = l(DF) \to \angle(ABC) = \angle(DEF))$

5. Замена отношения включения численных промежутков на равенство. Теорема - тождество, выражающее один невырожденный числовой атом через другие. Оно имеет антецеденты "$a \subseteq b$", "Числотр(b)", "$a = [p, q]$". Антецедент "$a \subseteq b$" заменяется на $a = b$. Результат упрощается. (Прием числзнач - 33).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{acdg}(g = [c, d]$ & $c -$ число & $d -$ число & мточка(a) & равндвиж(a, g) & Числотр$(g) \to$ длина(Путь$(a, [c, d])) = (d - c)$скорость$(a, g))$

из теоремы

$\forall_{acdeg}(e = [c, d]$ & $e \subseteq g$ & $c -$ число & $d -$ число & мточка(a) & равндвиж(a, g) & Числотр(e) & Числотр$(g) \to$ длина(Путь$(a, [c, d])) = (d - c)$скорость$(a, g))$

6. Реализация подпромежутка путем выбора его конечной точки внутри другого промежутка. Теорема - тождество, выражающее один невырожденный числовой атом через другие. Оно имеет антецеденты "$a \subseteq b$", "Числотр(b)", "$a = [p, q]$", "Числотр(a)". Выбирается новая переменная r, антецеденты "$a \subseteq b$", "$a = [p, q]$" и "Числотр(a)" удаляются, и добавляются антецеденты "число(r)", "$b = [p, r]$", "$q \in b$". Результат упрощается. (Прием числзнач - 31).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdg}(g = [c, b]$ & $d \in g$ & $b -$ число & $c -$ число & мточка(a) & равндвиж(a, g) & Числотр$(g) \to$ длина(Путь$(a, [c, d])) = (d - c)$скорость$(a, g))$

   из теоремы

   $\forall_{acdeg}(e = [c, d]$ & $e \subseteq g$ & $c -$ число & $d -$ число & мточка(a) & равндвиж(a, g) & Числотр(e) & Числотр$(g) \to$ длина(Путь$(a, [c, d])) = (d - c)$скорость$(a, g))$

7. Реализация подпромежутка путем выбора двух внутренних точек промежутка. Теорема - тождество, выражающее один невырожденный числовой атом через другие. Оно имеет антецеденты "$a \subseteq b$", "Числотр(b)", "$a = [p, q]$", "Числотр(a)". Антецеденты "$a \subseteq b$", "$a = [p, q]$" и "Числотр(a)" удаляются, и добавляются антецеденты "$p \in b$", "$a \in b$", "$0 < q - p$". Результат упрощается. (Прием числзнач - 34).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acdg}(0 < d - c$ & $c \in g$ & $d \in g$ & мточка(a) & равндвиж(a, g) & Числотр$(g) \to$ длина(Путь$(a, [c, d])) = (d - c)$скорость$(a, g))$

   из теоремы

   $\forall_{acdeg}(e = [c, d]$ & $e \subseteq g$ & $c -$ число & $d -$ число & мточка(a) & равндвиж(a, g) & Числотр(e) & Числотр$(g) \to$ длина(Путь$(a, [c, d])) = (d - c)$скорость$(a, g))$

8. Подстановка минимальной константы. Теорема - тождество, уменьшающее оценку сложности. Имеется антецедент $a \leq n$, где a - целочисленная десятичная константа; n - переменная, для которой имеется антецедент "целое(n)" либо "натуральное(n)". К антецедентам добавляется равенство $n = a$. Результат упрощается. (Прием упрощение - 26).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{afA}(A -$ set & $a \in A$ & ассоциативно(f) & бинарнооперация$(f, A) \to$ алгстепень$(a, f, 2) = f(a, a))$

из теоремы

$\forall_{Aafn}(A - \text{set}$ & бинарнооперация(f, A) & ассоциативно(f) & $n -$ натуральное & $a \in A$ & $2 \le n \to$ алгстепень$(a, f, n) = f($констнабор$(a, n)))$

9. Попытка развязки равенства в антецедентах. Теорема имеет антецедент A - равенство с функциональными переменными f, причем каждая функциональная переменная входит в него только в виде "значение$(f \ldots)$". Выбирается некоторая такая переменная f. Она входит в консеквент как корневой операнд некоторого максимально сложного подвыражения t. В разделе заголовка P терма t находится теорема с консеквентом вида "$P(\ldots \lambda_x(q(g(x), h(x)), B_1)\ldots) = B_2$", где B_2 содержит переменные g и h внутри отдельных подтермов с заголовком P. Она используется для преобразования t в исходной теореме. Результат упрощается. Для полученной теоремы T_1 повторяется процедура, примененная к исходной теореме, однако дополнительная теорема теперь имеет консеквент вида "$P(\ldots \lambda_x(r(u, v(x)), C_1)\ldots) = C_2$", и u - переменная. Получается теорема T_2. Список ее антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих u, и подсписок S_2 остальных утверждений. Решается задача на описание с условиями S_1 и посылками S_2. Единственная неизвестная - u. Выбирается дизъюнктивный член ответа, имеющий вид $u = R$ & D. Консеквентом новой теоремы становится результат подстановки R вместо u в консеквент теоремы T_2, антецедентами - S_2 и результат подстановки в D выражения R место u. Результат упрощается. (Прием тождфунк - 2).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abhi}(\forall_c(c \in (a, b) \to \neg($производная$(i, c) = 0))$ & $\forall_c(c \in (a, b) \to$ дифференцируема$(h, c))$ & $\forall_c(c \in (a, b) \to$ дифференцируема$(i, c))$ & $\text{Dom}(h) = \text{Dom}(i)$ & $a < b$ & $\text{Dom}(i) \subseteq \mathbb{R}$ & $[a, b] \subseteq \text{Dom}(i)$ & $\text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R}$ & $\text{Val}(i) \subseteq \mathbb{R}$ & $h -$ функция & $i -$ функция & $a -$ число & $b -$ число & непрерывно$(h, [a, b])$ & непрерывно$(i, [a, b]) \to \exists_c($производная$(h, c)/$производная$(i, c) =$ $(h(a) - h(b))/(i(a) - i(b))$ & $c \in (a, b)))$

из теоремы

$\forall_{abf}(\forall_c(c \in (a, b) \to$ дифференцируема$(h, c))$ & $f(a) = f(b)$ & $a < b$ & $[a, b] \subseteq \text{Dom}(f)$ & $\text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $f -$ функция & $a -$ число & $b -$ число & непрерывно$(f, [a, b]) \to \exists_c($производная$(f, c) = 0)$ & $c \in (a, b))$

и дополнительных теорем

$\forall_{aeg}(\text{Dom}(e) = \text{Dom}(g)$ & $\text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R}$ & $\text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R}$ & $\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}$ & $a \in \text{Dom}(g)$ & $e -$ функция & $g -$ функция & дифференцируема(e, a) & дифференцируема$(g, a) \to$ производная$(\lambda_c(e(c) + g(c), c \in \text{Dom}(g)), a) =$ производная$(e, a) +$ производная$(g, a))$

$\forall_{abg}(\text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R}$ & $\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}$ & $a \in \text{Dom}(g)$ & $g -$ функция & $b -$ число & дифференцируема$(g, a) \to$ производная$(\lambda_c(bg(c), c \in \text{Dom}(g)), a) =$ $b \cdot$ производная$(g, a))$

Прием пытается вывести теорему Лагранжа из теоремы Ролля, подбирая подходящую функцию f. Идея вывода состоит в рассмотрении таких операций над

функциями, для которых производная просто выражается через производные операндов, причем возникает дополнительный численный параметр, подбор которого реализует равенство $f(a) = f(b)$ в антецеденте.

Использование эквивалентности для преобразования антецедента

1. Попытка реализовать неравенство для одного числового атома в антецедентах, используя эквивалентность равенства с этим атомом нечисловому предикату. Консеквент теоремы - отличный от равенства нечисловой двуместный предикат. Выбирается существенный антецедент A, представляющий собой строгое либо нестрогое неравенство с единственным невырожденным числовым атомом t. По заголовку f атома t находится теорема T, консеквент которой имеет вид "$B_1 = B_2 \leftrightarrow B_3$", где B_1 - невырожденный числовой атом с заголовком f, выражение B_2 не содержит невырожденных числовых атомов, а утверждение B_3 вообще не содержит числовых атомов. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка S, переводящая B_1 в t. Составляется список Q отличных от A антецедентов исходной теоремы и результатов применения S к антецедентам теоремы T. Проверяется, что результат замены всех вхождений t в A на $S(B_2)$ - следствие Q. Антецедентами новой теоремы становятся утверждения списка Q и $S(B_3)$. Консеквент тот же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием отношение - 28).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(B = D)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC)\ \&\ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(BD) \rightarrow D \in \text{интервал}(AC))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(A = C)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(B = D)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(BD)\ \&\ 0 \leq -\pi/2 + \angle(ABC) \rightarrow D \in \text{нтервал}(AC))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(A = B) \rightarrow \angle(ABC) = \pi/2 \leftrightarrow \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC))$

Реализация консеквента кванторного антецедента с помощью дополнительной теоремы

1. Попытка реализации кванторного антецедента, выражающего постоянство некоторой характеристики варьируемого объекта. Теорема - тождество, исключающее описатель. Имеется антецедент "$\forall_i(A_1 \rightarrow A_2 = A_3)$". Внутри выражения A_2 встречается подтерм "значение(f, i)", где f - переменная, имеющая единственное вхождение в A_2. Переменная i имеет единственное вхождение в A_2 и не входит в A_3. По заголовку F выражения A_2 находится теорема T с консеквентом вида $B_1 = B_2$, где заголовок B_1 равен F, причем все переменные этой теоремы встречаются в B_1 и имеется единственная переменная x, входящая в B_1 и не входящая в B_2. Теорема T - либо тождество общей стандартизации,

либо выражает сложный невырожденный числовой атом через более простые. В ее антецедентах нет отрицаний. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. После унификации A_2 с B_1 и одновременно A_3 с B_2 предпринимается попытка выбрать в качестве f функцию "$\lambda_x(B_1, x \in C)$", где C - новая переменная. Так как $f(i)$, определяемое по B_2, не зависит от i, квантор общности в антецедентах новой теоремы, после ее упрощения, пропадает. (Прием описатель - 57).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ce}(c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ e \subseteq c \ \& \ \text{конечное}(c) \to \text{card}(\text{set}_{ij}(i \in e \ \& \ j \in c \setminus \{i\})) = (-1 + \text{card}(c))\text{card}(e))$

из теоремы

$\forall_{abf}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{семействомножеств}(f) \ \& \ \text{конечные}(\text{Val}(f)) \ \& \ \text{card}(\text{Dom}(f)) = a \ \& \ \forall_i(i \in \text{Dom}(f) \to b = \text{card}f(i)) \to \text{card}(\text{set}_{ij}(i \in \text{Dom}(f) \ \& \ j \in f(i))) = ab)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c \in b \ \& \ \text{конечное}(b) \to \text{card}(b \setminus \{c\}) = -1 + \text{card}(b))$

10.2 Реализация антецедента дополнительной теоремы

Использование тождества

1. Реализация антецедента дополнительной теоремы, выводящей равенство двух числовых атомов. Теорема - равенство двух атомарных выражений с одним и тем же заголовком f. Имеется не более одного равенства в антецедентах. Отсутствуют сложные антецеденты, имеющие более 4 параметров. Находится теорема T, у которой некоторый антецедент A - равенство двух невырожденных числовых атомов с заголовком f, а консеквент - тоже равенство двух невырожденных числовых атомов. Либо теорема T имеет лишь одно равенство в антецедентах, либо консеквент исходной теоремы включается все ее переменные. Исходная теорема используется для реализации антецедента A. Получается некоторая теорема T_1. Решается задача на исследование, посылки которой суть антецеденты теоремы T_1. Неизвестные - все параметры посылок, имеются также цели "известно" и "контроль". Проверяется, что после решения не возникает посылка "ложь". После решения находятся всевозможные посылки вида "$x = t$", где x - переменная, не входящая в выражение t. Эти посылки добавляются к антецедентам теоремы T_1. Результат упрощается. (Прием равны - 9).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}(\neg(a = c) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ \neg(b \in \text{прямая}(ad)) \ \&$
   $\angle(adb) = \angle(adc) \ \& \ \text{биссектриса}(bacd) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \&$
   $d - \text{точка} \to l(bd) = l(cd))$

   из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(A=D)\ \&\ \text{биссектриса}(BACD)\ \&$
$A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\rightarrow\angle(CAD)=\angle(BAD))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDEF}(\neg(A=C)\ \&\ \neg(D=E)\ \&\ \neg(D=F)\ \&\ \neg(E=F)\ \&\ \neg(B\in\text{прямая}(AC))$
$\&\ l(AC)=l(DF)\ \&\ \angle(ACB)=\angle(DFE)\ \&\ \angle(BAC)=\angle(EDF)\ \&\ A-\text{точка}\ \&$
$B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\rightarrow l(AB)=l(DE))$

2. Реализация антецедента дополнительной теоремы, выводящей элементарное утверждение, не являющееся равенством либо отрицанием. Теорема - равенство двух атомарных выражений с одним и тем же заголовком f. Имеется не более одного равенства в антецедентах. Отсутствуют антецеденты, имеющие более 4 параметров. Находится теорема T, имеющая единственный антецедент A с заголовком "равно", и этот антецедент является равенством двух невырожденных числовых атомов с заголовком f. Консеквент - элементарное утверждение, не являющееся равенством либо отрицанием. Исходная теорема используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием равны - 21).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abdef}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(d=e)\ \&\ \neg(e=f)\ \&\ l(de)=l(ef)\ \&\ d\in\text{окружность}(ab)\ \&$
   $e\in\text{окружность}(ab)\ \&\ f\in\text{окружность}(ab)\ \&\ a-\text{точка}\ \&\ b-\text{точка}\ \&$
   $d-\text{точка}\ \&\ e-\text{точка}\ \&\ f-\text{точка}\ \&\ \text{разныестороны}(d,f,\text{прямая}(ae))\rightarrow$
   $\text{биссектриса}(defa))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(\neg(A=B)\ \&\ l(CD)=l(EF)\ \&\ C\in\text{окружность}(AB)\ \&$
   $D\in\text{окружность}(AB)\ \&\ E\in\text{окружность}(AB)\ \&\ F\in\text{окружность}(AB)\ \&$
   $A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\rightarrow$
   $\angle(ACD)=\angle(AEF))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(A=D)\ \&\ \angle(BAD)=\angle(CAD)\ \&$
   $0\leq\pi/2-\angle(CAD)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&$
   $\text{разныестороны}(B,C,\text{прямая}(AD))\rightarrow\text{биссектриса}(BACD))$

3. Поиск контекста, в котором связываемый отношением объект однозначно определяется по данному отношению. Теорема - канторная импликация, консеквент которой имеет вид $P(t_1,t_2)$, где P - отличный от равенства нечисловой двуместный предикат. По заголовку f выражения t_1 находится теорема с консеквентом $r_1=r_2$, где r_1,r_2 - нечисловые атомарные выражения с заголовком f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Дополнительная теорема имеет антецедент вида $P(s_1,s_2)$, Исходная теорема используется для реализации этого антецедента, причем унификация предпринимается одновременно для $P(t_1,t_2),P(s_1,s_2)$ и для t_1,r_1. Результат упрощается. (Прием отношение - 14).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{efABCDE}(\neg(e=f)$ & $\neg(A=B)$ & $\neg(C=D)$ & $E \in$ прямая(ef) & $E \in$ прямая(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $e-$точка & $f-$точка & $A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & $E-$точка & прямая$(ef) \perp$ прямая(CD) & прямая$(CD)-$касательная к окружность$(AB) \rightarrow A \in$ прямая$(ef))$

из теоремы

$\forall_{ABCDE}(\neg(A=B)$ & $\neg(C=D)$ & $E \in$ прямая(CD) & $E \in$ окружность(AB) & $A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & $E-$точка & прямая$(CD)-$касательная к окружность$(AB) \rightarrow$ прямая$(AE) \perp$ прямая$(CD))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDEFGPQR}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & $E-$точка & $F-$точка & $P-$точка & $Q-$точка & $R-$точка & $\neg(R \in$ прямая$(PQ))$ & $\neg(P=Q)$ & $\neg(E=F)$ & $\neg(C=D)$ & $\neg(A=B)$ & прямая$(AB) \perp$ прямая(CD) & прямая$(EF) \perp$ прямая(CD) & $G \in$ прямая(AB) & $G \in$ прямая(EF) & $E \in$ плоскость(PQR) & $F \in$ плоскость(PQR) & $D \in$ плоскость(PQR) & $C \in$ плоскость(PQR) & $A \in$ плоскость(PQR) & $B \in$ плоскость$(PQR) \rightarrow$ прямая$(AB) =$ прямая$(EF))$

4. Попытка использовать тождество для реализации сложного антецедента другого тождества для координат объекта. Теорема имеет консеквент вида "координ$(A,K) = (a_1,\ldots,a+n)$", причем существует антецедент $P(A)$, определяющий тип значения переменной A. В текущем списке вывода находится теорема с консеквентом вида "координ$(B,Q) = (b_1,\ldots,b_n)$" и антецедентом "координ$(C,Q) = (c_1,\ldots,c_n)$", где B - переменная, входящая в C и не имеющая типа P. Исходная теорема используется для реализации антецедента "координ$(C,Q) = (c_1,\ldots,c_n)$". Результат упрощается. (Прием равнозначны - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abdghijAB}(A-$точка & $B-$точка & координ$(A,j) = (a,b)$ & $i-$число & систкоорд(j) & координ$(d,j) = (g,h)$ & $\neg(i=0)$ & $d = i$вектор$(AB) \rightarrow$ координ$(B,j) = (a+g/i, b+h/i))$

   из теоремы

   $\forall_{abcdeK}(e-$число & систкоорд(K) & Вектор(a) & $b = ea$ & координ$(b,K) = (c,d)$ & $\neg(e=0) \rightarrow$ координ$(a,K) = (c/e, d/e))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abefABK}($систкоорд(K) & $A-$точка & $B-$точка & координ$(A,K) = (a,b)$ & координ$($вектор$(AB),K) = (e,f) \rightarrow$ координ$(B,K) = (a+e, b+f))$

Использование импликации, выражающей свойство сложного понятия

1. Переход от многоместного отношения в консеквенте к двуместному. Теорема - кванторная импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Ее консеквент имеет не менее 3 корневых операндов.

По его заголовку f находится теорема T, имеющая единственный антецедент A с более чем двумя корневыми операндами, причем заголовок A равен f. Исходная теорема используется для реализации A. Результат упрощается. (Прием вывод - 47).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{Eabcde}(E - \text{точка} \ \& \ \neg(d = e) \ \& \ E \in \text{прямая}(de) \ \& \ E \in \text{прямая}(ab) \ \& \ \neg(\text{прямая}(ab) = \text{прямая}(de)) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \text{разныестороны}(c, d, \text{прямая}(ab)) \ \& \ \text{однасторона}(c, e, \text{прямая}(ab)) \ \& \ \neg(c \in \text{прямая}(ab)) \rightarrow E \in \text{отрезок}(ed))$

из теоремы

$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{разныестороны}(C, D, \text{прямая}(AB)) \ \& \ \text{однасторона}(C, E, \text{прямая}(AB)) \ \& \ \neg(C \in \text{прямая}(AB)) \rightarrow \text{разныестороны}(E, D, \text{прямая}(AB)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ E \in \text{прямая}(CD) \ \& \ E \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD)) \ \& \ \text{разныестороны}(C, D, \text{прямая}(AB)) \rightarrow E \in \text{отрезок}(CD))$

2. Реализация антецедента дополнительной теоремы из того же самого цикла вывода. Теорема - простая импликация, выражающая свойства "сложного" объекта t. Выражение t - корневой операнд консеквента, имеющего заголовок f, отличный от символа "не". В текущем списке вывода находится теорема T, выражающая невырожденный числовой атом через численные параметры. Она имеет единственный антецедент A с заголовком f. Исходная теорема используется для реализации A. Результат упрощается. (Прием свойства - 18).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bc}(\text{перестановка}(c, \{1, \ldots, b\}) \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ 0 \leq b \rightarrow l(\text{обрфункция}(c)) = b)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(\text{перестановка}(b, \{1, \ldots, a\}) \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow \text{перестановка}(\text{обрфункция}(b), \{1, \ldots, a\}))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{an}(\text{перестановка}(a, \{1, \ldots, n\}) \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \rightarrow l(a) = n)$

3. Реализация антецедента теоремы, выводящей утверждения стандартного вида. Теорема - кванторная импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. В ее консеквенте выбирается неоднобуквенное подвыражение t. Определяется его заголовок f. Находится теорема T, консеквент которой определяет вид утверждений, часто используемых в качестве антецедентов теорем приемов. Некоторый ее антецедент A содержит символ

f. Исходная теорема используется для реализации A. Результат упрощается. (Прием вывод - 41).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcde}(\neg(a=c)\ \&\ \neg(a=b)\ \&\ \neg(d=e)\ \&\ \neg(\text{прямая}(bc)=\text{прямая}(de))\ \&$
$b-\text{точка}\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ d-\text{точка}\ \&\ e-\text{точка}\ \&\ \text{однасторона}(b,c,\text{прямая}(de))$
$\&\ a\in\text{прямая}(de)\ \&\ a\in\text{прямая}(bc)\ \&\ \neg(b=c)\to\neg(a\in\text{интервал}(bc)))$

из теоремы

$\forall_{ABCDa}(\neg(a=B)\ \&\ \neg(a=A)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB)=\text{прямая}(CD))\ \&$
$A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \text{однасторона}(A,B,\text{прямая}(CD))$
$\&\ a\in\text{прямая}(CD)\ \&\ a\in\text{прямая}(AB)\ \&\ \neg(A=B)\to\neg(a\in\text{отрезок}(AB)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ \neg(A\in\text{отрезок}(BC))\to\neg(A\in\text{интервал}(BC)))$

Смысл изменения консеквента заключается в том, что условие размещения точки на луче в посылках задач обычно переформулируется как условие непринадлежности вершины луча интервалу между двумя его точками.

4. Попытка реализации отрицания консеквента дополнительной теоремы. Теорема - кванторная импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задаси. Ее консеквент имеет вид "$\neg(A)$". По заголовку f утверждения A находится теорема T, консеквент B которой имеет заголовок f, причем этот консеквент - единственный максимально сложный подтерм теоремы. Создается теорема T_1, полученная из T контрапозицией консеквента с первым антецедентом. Исходная теорема используется для реализации антецедента "$\neg(B)$" теоремы T_1. Результат упрощается. (Прием вывод - 70).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(\text{орграф}(c)\ \&\ \text{ациклический}()\to\neg(\text{ведет}(a,b,b,c)))$

   из теоремы

   $\forall_{GM}(\text{орграф}(c)\ \&\ \text{ациклический}()\to\neg(\text{цикл}(M,G)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{acG}(\text{орграф}(G)\ \&\ \text{ведет}(a,c,c,G)\to\text{цикл}(((c,c),(a)),G))$

5. Реализация антецедента дополнительной теоремы при помощи теоремы, определяющей характеристику функции. Теорема имеет консеквент вида $P(t_1,\ldots,t_n)$, где некоторое t_i - выражение "$\lambda_x(A_2,A_1)$" и определяет характеристики данного отображения (например, первообразную). Отсутствует антецедент с заголовком P. Имеется антецедент, не используемый для сопровождения по о.д.з. и не являющийся следствием утверждений, обеспечивающих такое сопровождение. Находится теорема T, консеквент которой имеет вид "$P(r_1\ldots r_n)$", причем r_i имеет вид "$\lambda_y(g(f(p)),B)$". Имеется антецедент "$P(s_1\ldots\ s_n)$", у которого s_i - переменная f. Исходная теорема используется для реализации данного антецедента. У

результирующей теоремы упрощаются антецеденты, а также каждый корневой операнд консеквента. Предпринимается попытка переместить корневую операцию g выражения под описателем "отображение" в консеквенте вглубь этого выражения. (Прием функперех - 24).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bdf}(0 < f \ \& \ 0 < 4df - b^2 \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow$
$\text{первообразная}(\lambda_x(1/(-d - bx - fx^2), x - \text{число}),$
$\lambda_c(-2\,\text{arctg}((b + 2cf)/\sqrt{4fd - b^2})/\sqrt{4fd - b^2}, c - \text{число})))$

из теоремы

$\forall_{abc}(0 < c \ \& \ 0 < 4bc - a^2 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow$
$\text{первообразная}(\lambda_x(1/(b + ax + cx^2), x - \text{число}),$
$\lambda_d(2\,\text{arctg}((a + 2cd)/\sqrt{4bc - a^2})/\sqrt{4bc - a^2}, d - \text{число})))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ae}(\text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, e) \rightarrow$
$\text{первообразная}(\lambda_x(-a(x), x \in \text{Dom}(a)), \lambda_c(-e(c), c \in \text{Dom}(e))))$

Использование импликации для проверочного оператора

1. Попытка ослабления консеквента. Теорема - кванторная импликация, используемая для усмотрения истинности утверждения путем идентификации одного антецедента с посылками, а другого - обработкой проверочным оператором. По заголовку P ее консеквента находится теорема T вида "$P(x_1 \ldots x_n) \rightarrow Q(x_1 \ldots x_n)$". Прочие антецеденты несущественные. Все переменные этой теоремы - $x_1, \ldots, x_n$. Определяется подстановка S, переводящая $P(x_1 \ldots x_n)$ в консеквент исходной теоремы. Проверяется, что результаты применения S к несущественным антецедентам теоремы T суть антецеденты исходной теоремы. Новая теорема получается из исходной заменой ее консеквента на $S(Q(x_1 \ldots x_n))$ (Прием стандменьше - 4).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cde}(e < c \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e - d \rightarrow \neg(d = c))$

   из теоремы

   $\forall_{cde}(e < c \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e - d \rightarrow d < c)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \rightarrow \neg(a = b))$

2. Преобразование антецедента утверждения обобщенной транзитивности. Теорема - кванторная импликация, используемая для усмотрения истинности утверждения путем идентификации одного антецедента с посылками, а другого - обработкой проверочным оператором. Заголовок консеквента - отличный от отрицания символ P. Оценка сложности консеквента больше 6, причем самый сложный его подтерм - он сам. Заголовки антецедентов отличны от символов

"равно", P. Находится теорема T, имеющая вид обобщенной транзитивности: два бесповторных существенных антецедента и бесповторный консеквент, каждый не более чем с 2 переменными; переменные консеквента - симметрическая разность множеств переменных антецедентов. Она имеет единственный антецедент A с заголовком P. Исходная теорема используется для реализации A. Результат упрощается. (Прием легковидеть - 33).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdfK}(0 < \text{длина}(\text{Скорость}(c,d,f))\ \&\ f - \text{число}\ \&\ \text{движениепо}(c,d,f)\ \&$
$\text{влево}(\text{Скорость}(c,d,f),K)\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вправо}(\text{силатрения}(c,d,f),K))$

из теоремы

$\forall_{abtk}(\text{движениепо}(a,b,t)\ \&\ t - \text{число}\ \&\ 0 < \text{длина}(\text{Скорость}(a,b,t)) \rightarrow$
$\text{однонаправлены}(\text{силатрения}(a,b,t), -\text{Скорость}(a,b,t)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abK}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Вектор}(b)\ \&\ \text{однонаправлены}(a,b)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\ \&$
$\text{вправо}(a,K) \rightarrow \text{вправо}(b,K))$

3. Реализация единственного существенного антецедента дополнительной теоремы. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема проверочного оператора, причем все ее существенные антецеденты тоже обрабатываются проверочными операторами. Число ее переменных не более 2. Рассматривается символ f, являющийся (после отбрасывания корневого отрицания, если оно есть) заголовком консеквента. Находится теорема T с единственной переменной, некоторый антецедент A тоже имеет (после отбрасывания корневого отрицания, если оно есть) заголовок f. Как и исходная теорема, она имеет характеристику "спуск". Проверяется, что все понятия консеквента теоремы T входят в раздел символа f. Исходная теорема используется для реализации A. Результат упрощается, проверяется на непротиворечивость антецедентов и неизбыточность при создании приема проверочного оператора. (Прием спуск - 43).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(\neg(\text{конечное}(b))\ \&\ a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(a \cap b) \rightarrow \neg(b \setminus a = \emptyset))$

   из теоремы

   $\forall_{ce}(\neg(\text{конечное}(e))\ \&\ c - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(c \cap e) \rightarrow \neg(\text{конечное}(e \setminus c)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{c}(c - \text{set}\ \&\ \neg(\text{конечное}(c)) \rightarrow \neg(c = \emptyset))$

4. Попытка применения импликации обобщающего типа к антецеденту другой импликации, полученной в том же цикле вывода. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема проверочного оператора, имеющего единственный непосредственно идентифицируемый антецедент (т.е. ее характеристика - "легковидеть"). Ее консеквент получается из некоторого

антецедента подстановкой вместо переменной x выражения $f(x,y)$, имеющего единицу по новой переменной y. Среди максимально сложных подтермов консевкента выбирается подтерм, длина которого больше длины любого другого. Его заголовок - символ s. В текущем списке вывода находится теорема T с характеристикой "легковидеть". Ее консеквент и единственный антецедент A содержат символ s. Исходная теорема используется для реализации этого антецедента. Результат упрощается. (Прием легковидеть - 30).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{aeghiA}(a = \text{операция}(A)\ \&\ i < 0\ \&\ g \in \text{носитель}(A)\ \&$
$\text{алгстепень}(g,a,h) \in e\ \&\ h - \text{натуральное}\ \&\ i - \text{целое}\ \&\ \text{группа}(A)\ \&$
$\text{подгруппа}(e,A) \to \text{алгстепень}(g,a,hi) \in e)$

из теоремы

$\forall_{abcdeA}(b = \text{операция}(A)\ \&\ c \in \text{носитель}(A)\ \&\ \text{алгстепень}(c,b,d) \in a\ \&$
$d - \text{натуральное}\ \&\ e - \text{натуральное}\ \&\ \text{группа}(A)\ \&\ \text{подгруппа}(a,A) \to$
$\text{алгстепень}(c,b,de) \in a)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcdA}(d = \text{операция}(A)\ \&\ b \in \text{носитель}(A)\ \&\ \text{алгстепень}(b,d,c) \in a\ \&$
$c - \text{натуральное}\ \&\ \text{группа}(A)\ \&\ \text{подгруппа}(a,A) \to \text{алгстепень}(b,d,-c) \in a)$

Использование теоремы без существенных антецедентов

1. Попытка вывести из простой импликации без существенных антецедентов другую аналогичную импликацию, используя импликацию, исключающую параметр антецедента. Теорема - простая импликация без существенных антецедентов. Рассматривается символ f, являющийся (после отбрасывания корневого отрицания, если оно есть) заголовком консеквента. Находится теорема T с единственным существенным антецедентом A и консеквентом B, у которой A имеет две переменные, а B - одну. Заголовком A (после отбрасывания корневого отрицания, если оно есть) служит символ f. Исходная теорема используется для реализации A. Антецеденты результата упрощаются. Новая теорема проверяется на неизбыточность для создания приема проверочного оператор (Прием пример - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cd}(d - \text{слово} \to \neg(\{c;d\} = \emptyset))$

   из теоремы

   $\forall_{bc}(c - \text{слово} \to b \in \{b;c\})$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a \in b \to \neg(b = \emptyset))$

2. Варьирование антецедента дополнительной теоремы, если текущая терема - следствие определения. Теорема - кванторная импликация без существенных антецедентов, имеющая элементарный консеквент. Ее антецеденты имеют единственный параметр. Консеквент имеет вид $P(F(x))$, где P, F - логические символы. Его оценка сложности больше 2, причем максимально сложный подтерм - он сам. Стартовая теорема цикла вывода - определение понятия, отличного от P. Находится теорема T, представляющая собой тождество с характеристикой "нормализация" либо "усиление", причем имеющая единственный антецедент A с заголовком P. Исходная теорема используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием элементарно - 20).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(c = \text{операция}(a)\ \&\ \text{группа}(a) \to \text{правединица}(b, c) \leftrightarrow b = \text{единица}(c))$

   из теоремы

   $\forall_A(\text{группа}(A) \to \text{ассоциативно}(\text{операция}(A)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bcdA}(A - \text{set}\ \&\ \text{ассоциативно}(c)\ \&\ \text{обратимо}(c)\ \&\ \text{левединица}(d, c)\ \&$
   $\text{бинарнооперация}(c, A) \to \text{правединица}(b, c) \leftrightarrow b = d)$

Использование неравенства

1. Реализация антецедента условия транзитивности для развязки консеквента исходной теоремы. Теорема - простая импликация, консеквентом которой служит неравенство, содержащее единственный невырожденный числовой атом t. Его заголовок в антецедентах не встречается. Некоторая часть неравенства - сумма двух слагаемых с непустыми списками слагаемых. Находится теорема T - обобщенная транзитивность, некоторый антецедент A которой представляет собой неравенство с суммой в одной из частей. Исходная теорема используется для реализации A. Результат упрощается. (Прием числоценка - 16).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abefg}(0 < e - \text{евклрасст}(a, b)\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{натуральное}\ \&\ g - \text{натуральное}\ \&$
   $f \leq g\ \&\ \text{числнабор}(a, g)\ \&\ \text{числнабор}(b, g) \to 0 < e - |b(f) - a(f)|)$

   из теоремы

   $\forall_{abcn}(c - \text{натуральное}\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ c \leq n\ \&\ \text{числнабор}(a, n)\ \&$
   $\text{числнабор}(b, n) \to 0 \leq \text{евклрасст}(a, b) - |b(c) - a(c)|)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{cde}(0 < e - c\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ 0 \leq c + d \to 0 < d + e)$

2. Реализация дополнительной теоремы, устанавливающей свойство понятия, определяемого в данной ячейке вывода. Теорема - простая импликация, консеквентом которой служит неравенство A, содержащее не менее двух невырожденных числовых атомов. Стартовая теорема цикла вывода - определение понятия f,

входящего в некоторый антецедент как заголовок подтерма t. Каждое вхождение f в теорему - заголовок какого-либо вхождения подтерма t. В текущем списке вывода находится теорема T, у которой консеквент содержит символ f - как заголовок некоторого подтерма r. Эта теорема имеет антецедент B - неравенство с тем же заголовком, что у A. Все переменные теоремы T включаются в параметры термов B, r. Определяется подстановка S, переводящая B в A и одновременно r в t. Консеквентом новой теоремы становится результат применения S к консеквенту теоремы T, антецедентами - антецеденты исходной теоремы и результаты применения S к отличным от B антецедентам теоремы T. Результат упрощается. (Прием числоценка - 13).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdD}(\neg(b=c)\ \&\ a \in \text{окружность}(bc)\ \&\ d \in \text{окружность}(bc)\ \&$
$D \in \text{интервал}(ad)\ \&\ a-\text{точка}\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ d-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка} \rightarrow$
$\neg(D \in \text{окружность}(bc)))$

из теоремы

$\forall_{abcdD}(\neg(b=c)\ \&\ a \in \text{окружность}(bc)\ \&\ d \in \text{окружность}(bc)\ \&$
$D \in \text{интервал}(ad)\ \&\ a-\text{точка}\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ d-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка} \rightarrow$
$0 < -l(bD) + l(bc))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{aAB}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ 0 < -l(aA) + l(AB) \rightarrow \neg(a \in \text{окружность}(AB)))$

Использование параметрического описания

1. Использование параметрического описания координат точки множества для получения параметрического описания уравнения множества, определяемого при помощи данной точки. Среди антецедентов теоремы имеется равенство для координат множества объектов. Консеквент имеет вид "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(\text{коорд}(A,K) = (t_1,\ldots,t_n)\ \&\ B)$". Находится теорема T, консеквент которой имеет вид "$\text{коорд}(C,Q) = \text{set}_{y_1 \ldots y_n}(D)$". Подтерм C имеет единственное вхождение в теорему; D не содержит квантора существования. Имеется антецедент вида "$\text{коорд}(E,Q) = (r_1,\ldots,r_n)$". Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Все переменные теоремы T встречаются в ее консеквенте. Определяется подстановка S, переводящая антецедент "$\text{коорд}(E,Q) = (r_1,\ldots,r_n)$" в "$\text{коорд}(A,K) = (t_1,\ldots,t_n)$". Список результатов применения S к антецедентам теоремы T разбивается на подсписок M_1 утверждений, содержащих переменные $x_1,\ldots,x_k$, и подсписок M_2 остальных утверждений. Результат R применения S к консеквенту теоремы T содержит переменные $x_1,\ldots,x_k$. Консеквентом новой теоремы становится утверждения "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(B\ \&\ M_1\ \&\ R)$". Антецеденты - антецеденты исходной теоремы и M_2. Результат упрощается. (Прием уравндробь - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdehijklsBCK}(\neg(a=s)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \text{коорд}(s,K) = (b,d,e)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(BC)$
$,K) = \text{set}_{xyz}(x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((j,k,l),$
$(c+x, h+y, i+z)))\ \&\ a \in \text{прямая}(BC)\ \&\ c-\text{число}\ \&\ h-\text{число}\ \&\ i-\text{число}\ \&$

$j-$число & $k-$число & $l-$число & $a-$точка & $s-$точка & $B-$точка & $C-$точка & Трехмерн$(K) \to \exists_m$(коорд$(a,K) = (jm-c, km-h, lm-i)$ & коорд(прямая$(as), K) = \text{set}_{pqr}(p-$число & $q-$число & $r-$число & пропорцнаборы$((p-b, q-d, r-e), (jm-b-c, km-d-h, lm-e-i)))$ & $m-$число))

из теоремы

$\forall_{achijklBCK}(\neg(B = C)$ & коорд(прямая$(BC), K) = \text{set}_{xyz}(x-$число & $y-$число & $z-$число & пропорцнаборы$((j,k,l),(c+x, h+y, i+z)))$ & $a \in$ прямая(BC) & $c-$число & $h-$число & $i-$число & $j-$число & $k-$число & $l-$число & $B-$точка & $C-$точка & Трехмерн$(K) \to \exists_m$(коорд$(a,K) = (jm-c, km-h, lm-i)$ & $m-$число))

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABabcdefK}(A-$точка & $B-$точка & Трехмерн(K) & $\neg(A = B)$ & коорд$(A,K) = (a,b,c)$ & коорд$(B,K) = (d,e,f) \to$ коорд(прямая$(AB), K) = \text{set}_{xyz}$(пропорцнаборы$((x-a, y-b, z-c), (d-a, e-b, f-c))$ & $x-$число & $y-$число & $z-$число))

Использование импликации, самой сложное понятие которой содержится в антецедентах

1. Попытка проварьировать антецедент теоремы исключения кванторной импликации. Теорема - простая импликация, некоторый существенный антецедент которой содержит все переменные корневой кванторной приставки и имеет сложность, большую сложности элементарного консеквента A. Заголовок f утверждения A отличен от символов "равно", "не". Находится теорема T, некоторый антецедент B которой имеет заголовок f. Исходная теорема используется для реализации B. Результат упрощается. Проверяется, что при упрощении консеквент изменился. (Прием антецедент - 5).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdefg}(f-$set & $f \subseteq \text{Dom}(e)$ & $\text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R}$ & $e-$функция & $c-$число & $\text{Max}(e,f,g,d) \to \forall_a(a \in f \to e(a) \le c) \leftrightarrow d \le c)$

   из теоремы

   $\forall_{bfAB}(A-$set & $A \subseteq \text{Dom}(f)$ & $\text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ & $f-$функция & $\text{Max}(f,A,B,b) \to$ наибольший$(b,$образ$(f,A)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a-$set & $c-$число & $a \subseteq \mathbb{R}$ & наибольший$(b,a) \to \forall_x(x \in a \to x \le c) \leftrightarrow b \le c)$

10.3 Реализация антецедента с помощью задачи на описание

1. Попытка подбора примера, реализующего кванторные антецеденты. Теорема имеет своими антецедентами как элементарные утверждения, так и простые кванторные импликации. Консеквент - элементарное утверждение. В корневой кванторной приставке выбирается переменная f. Она входит в некоторый кванторный антецедент в виде $f(t)$. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих f, и подсписок S_2 остальных утверждений. В списке S_1 не более двух кванторных импликаций. Решается задача на описание с условиями S_1 и посылками S_2. Неизвестная - f. Имеются также цели "пример", "прямойответ", "нормантецеденты", "попыткаспуска", "теорвывод". Ответ R отличен от символа "отказ" и не имеет связанных переменных. Антецедентами новой теоремы служат S_2 и R. Консеквент тот же, что у исходной теоремы. (Пример выводится - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abn}(\mathrm{Val}(b) \subseteq (0,\infty)$ & $n-$ натуральное & числнабор(a,n) & числнабор$(b,n) \to a \in$ евклпрямокр$(a,b))$

   из теоремы

   $\forall_{abnx}(\forall_i(i\ \{1,\ldots,n\} \to a(i) - b(i) < x(i))$ & $\forall_i(i\ \{1,\ldots,n\} \to x(i) < a(i) + b(i))$ & $n-$натуральное & числнабор(a,n) & числнабор(b,n) & числнабор$(x,n) \to x \in$ евклпрямокр$(a,b))$

2. Исключение равенства в антецедентах путем разрешения относительно уникальной переменной, встречающейся в консеквенте. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, у которого A_1 - невырожденный числовой атом, A_2 содержит невырожденные числовые атомы и не является числовым атомом. Среди антецедентов выбирается равенство B Составляется список X его параметров, не входящих в прочие антецеденты. В списке X выбирается параметр x, входящий в консеквент. Проверяется, что прочие элементы X в консеквенте не встречаются. Решается задача на описание, условием которой служит B, посылками - отличные от B антецеденты. Неизвестные - X, причем отличные от x неизвестные несущественные. Имеются также цели "полный", "явное", "прямойответ". Ответ имеет вид $x = t$ & C. Консеквентом новой теоремы служит результат подстановки в консеквент исходной теоремы выражения t вместо x. Антецеденты - отличные от B антецеденты исходной теоремы и C. Результат упрощается. (Прием числзнач - 17).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{adK}$(Вектор(a) & Вектор(d) & прямкоорд(K) & вертикнапр(a,K) & Трехмерн$(K) \to$ скалумнож$(a,d) =$ крд$(a,K,3)$крд$(d,K,3))$

   из теоремы

   $\forall_{adefhK}$(коорд$(d,K) = (e,f,h)$ & Вектор(a) & Вектор(d) & прямкоорд(K) & вертикнапр$(a,K) \to$ скалумнож$(a,d) = h$крд$(a,K,3))$

3. Попытка исключить кванторную импликацию в антецедентах, имеющую параметры, не входящие в консеквент. Теорема - кванторная импликация, корневое отношение консеквента которой имеет наибольшую сложность среди всех ее подтермов. Некоторый антецедент A представляет собой простую импликацию. Список X ее параметров, не входящих в консеквент, непуст. Список антецедентов теоремы разбивается на подсписок S_1 тверждений, содержащих X, и подсписок S_2 остальных антецедентов. Решается задача на описание с условиями S_1 и посылками S_2. Неизвестные - X, причем все они несущественные. Имеются также цели "полный", "явное", "прямойответ", "теорвывод", "исключ". Ответ R не содержит кванторов и переменных X. Антецедентами новой теоремы становятся утверждения S_2 и R. Консеквент ее тот же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием реализация - 24).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_b(\overline{\lim}_{c\to\infty}(|b(c)|^{1/c}) < a$ & последовательность$(b,\mathbb{R}) \to$
   сходится$(\lambda_d(\sum_{c=1}^{d} b(c), d -$ натуральное$)))$

   из теоремы

   $\forall_{abe}(\forall_c(c -$ натуральное & $a \le c \to |b(c)| \le e^c)$ & $0 < 1 - e$ & $e -$ число &
   $a -$ натуральное & последовательность$(b,\mathbb{R}) \to$
   сходится$(\lambda_d(\sum_{c=1}^{d} b(c), d -$ натуральное$)))$

10.4 Упрощение антецедента

Исключение многоместного предиката в антецедентах

1. Использование определения для устранения многоместного предиката в антецедентах. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Некоторый антецедент A имеет более двух корневых операндов. Его заголовок f не является одним из "типичных" заголовков антецедентов. Находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$, представляющая собой определение отношения B_1 с заголовком f. B_2 - элементарное утверждение либо конъюнкция таких утверждений. Дополнительная эквивалентность используется для преобразования антецедента A. Результат упрощается. (Прием вывод - 50).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(B = C)$ & $\neg(D \in$ прямая$(BC))$ & $l(AB) = l(BC)$ & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(AD) \parallel$ прямая$(BC) \to$ ромб$(ABCD))$

   из теоремы

   $\forall_{abcd}(l(ab) = l(bc)$ & $a -$ точка & $b -$ точка & $c -$ точка & $d -$ точка & прямая$(ab) \parallel$ прямая(cd) & прямая$(ad) \parallel$ прямая(bc) & четырехугольник$(abcd) \to$ ромб$(abcd))$

   и теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \rightarrow$
$\text{четырехугольник}(ABCD) \leftrightarrow \neg(B = C)\ \&\ \neg(A \in \text{прямая}(BC))\ \&$
$\neg(D \in \text{прямая}(AB))\ \&\ \neg(D \in \text{прямая}(BC))\ \&\ \text{однасторона}(A, D, \text{прямая}(BC))$
$\&\ \text{однасторона}(C, D, \text{прямая}(AB)))$

2. Использование выведенной в том же цикле теоремы для устранения многоместного предиката в антецедентах. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Некоторый антецедент A имеет более двух корневых операндов. Его заголовок - символ f. Консеквент тоже имеет более двух корневых операндов. В текущем списке вывода находится простая импликация T с бесповтрными антецедентами и консеквентом, у которой каждая переменная антецедентов встречается в консеквенте. Ее консеквент имеет заголовок f; каждый антецедент имеет не более двух корневых операндов. Теорема T используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием вывод - 62).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \neg(B \in \text{прямая}(CD))\ \&\ c - \text{точка}\ \&$
   $A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD)\ \&$
   $\text{однасторона}(c, B, \text{прямая}(CD)) \rightarrow \text{однасторона}(c, A, \text{прямая}(CD)))$

   из теоремы

   $\forall_{abcde}(\neg(d = e)\ \&\ \neg(b \in \text{прямая}(de))\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&$
   $d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ \text{однасторона}(a, b, \text{прямая}(de))\ \&$
   $\text{однасторона}(b, c, \text{прямая}(de)) \rightarrow \text{однасторона}(a, c, \text{прямая}(de)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
   $D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \rightarrow \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)))$

3. Устранение более чем трехместного предиката в антецедентах с помощью дополнительной теоремы. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Некоторый антецедент A имеет более трех корневых операндов. Его заголовок - символ f. Консеквент - нечисловой двуместный предикат. Находится теорема T - простая импликация, консеквент которой имеет заголовок f. Любой ее антецедент имеет не более трех корневых операндов, причем внутри антецедента не встречаются операции с более чем двумя операндами. Все переменные теоремы T встречаются в ее консеквенте. Эта теорема используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием вывод - 63).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acdejkE}(\neg(a = d)\ \&\ \neg(a = k)\ \&\ \neg(c = k)\ \&\ \neg(d = e)\ \&\ \neg(d = k)\ \&$
   $\neg(e = k)\ \&\ \neg(j = k)\ \&\ l(ad) = l(de)\ \&\ \text{биссектриса}(jkcE)\ \&\ a - \text{точка}\ \&$
   $c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ j - \text{точка}\ \&\ k - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
   $\text{прямая}(ad) \perp \text{прямая}(jk)\ \&\ \text{прямая}(ck) \perp \text{прямая}(de)\ \&\ \text{точкалуча}(k, c, e)\ \&$
   $\text{точкалуча}(k, j, a)\ \&\ \text{разныестороны}(a, e, \text{прямая}(dk)) \rightarrow d \in \text{прямая}(kE))$

из теоремы

$\forall_{bcfghijE}(\neg(b=f)\ \&\ \neg(c=f)\ \&\ \neg(f=i)\ \&\ \neg(f=j)\ \&$ биссектриса$(ifbg)\ \&$ биссектриса$(jfcE)\ \&\ b-$точка $\&\ c-$точка $\&\ f-$точка $\&\ g-$точка $\&$ $h-$точка $\&\ i-$точка $\&\ j-$точка $\&\ E-$точка $\&$ точкалуча$(f,b,c)\ \&$ точкалуча$(f,g,h)\ \&$ точкалуча$(f,i,j)\rightarrow h\in$ прямая$(fE))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bdef}(\neg(b=d)\ \&\ \neg(b=f)\ \&\ \neg(d=e)\ \&\ \neg(d=f)\ \&\ \neg(e=f)\ \&$ $l(bd)=l(de)\ \&\ b-$точка $\&\ d-$точка $\&\ e-$точка $\&\ f-$точка $\&$ прямая$(bd)\perp$ прямая$(bf)\ \&$ прямая$(de)\perp$ прямая$(ef)\ \&$ разныестороны$(b,e,$ прямая$(df))\rightarrow$ биссектриса$(bfed))$

4. Попытка исключения многоместных предикатов в антецедентах. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приемы вывода в посылках задачи. Она имеет антецеденты с более чем двумя корневыми операндами. Консеквент тоже имеет более двух операндов. Для его заголовка предусмотрен проверочный оператор. При помощи дополнительных теоремы, имеющих более чем двуместное отношение в консеквенте и не более чем двуместные - в антецедентах, последовательно реализуются все более чем двуместные предикаты в антецедентах. Результат упрощается. Проверяется, что новая теорема имеет не большее количество переменных, чем старая. (Прием вывод - 49).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aefgj}(\neg(e=j)\ \&\ \neg(g\in$ прямая$(ej))\ \&\ e\in$ отрезок$(ag)\ \&\ j\in$ отрезок$(fg)\ \&$ $a-$точка $\&\ e-$точка $\&\ f-$точка $\&\ g-$точка $\&\ j-$точка $\rightarrow$ однасторона$(a,$ $f,$ прямая$(ej)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDE}(A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&\ E-$точка $\&$ $\neg(A=B)\ \&$ разныестороны$(C,E,$ прямая$(AB))\ \&$ разныестороны$(D,E,$ прямая$(AB))\ \&\ \neg(E\in$ прямая$(AB))\rightarrow$ однасторона$(C,D,$ прямая$(AB)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCDE}(\neg(C=D)\ \&\ E\in$ прямая$(CD)\ \&\ E\in$ отрезок$(AB)\ \&\ A-$точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&\ E-$точка $\rightarrow$ разныестороны$(A,B,$ прямая$(CD)))$

5. Попытка исключения многоместных предикатов в антецедентах. Консеквент теоремы - нечисловой двуместный предикат. Теорема имеет антецеденты с более чем двумя корневыми операндами. При помощи дополнительных теорем, имеющих более чем двуместное отношение в консеквенте и не более чем двуместные - в антецедентах, последовательно реализуются все более чем двуместные предикаты в антецедентах. Результат упрощается. Проверяется непротиворечивость антецедентов. (Прем отношение - 39).

   В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

   $\forall_{adgjkE}(\neg(c=j)\ \&\ \neg(d=g)\ \&\ \neg($прямая$(cj)=$ прямая$(dg))\ \&\ \neg(k\in$ прямая$(cj))\ \&$ $d\in$ отрезок$(ck)\ \&\ j\in$ отрезок$(gk)\ \&\ E\in$ прямая$(cj)\ \&\ E\in$ прямая$(dg)\ \&$

$c-$точка & $d-$точка & $g-$точка & $j-$точка & $k-$точка & $E-$точка $\rightarrow$ $E \in$ отрезок(dg))

из теоремы

$\forall_{avcdeE}(E-$точка & $\neg(d=e)$ & $E \in$ прямая(de) & $E \in$ прямая(ab) & $\neg($прямая$(ab)=$ прямая$(de))$ & $a-$точка & $b-$точка & $\neg(a=b)$ & $c-$точка & $d-$точка & $e-$точка & разныестороны$(c,d,$ прямая$(ab))$ & однасторона$(c,e,$ прямая$(ab))$ & $\neg(c \in$ прямая$(ab)) \rightarrow E \in$ отрезок$(de))$

и дополнительных теорем

$\forall_{ABCDE}(A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & $E-$точка & $\neg(A=B)$ & $C \in$ прямая(AB) & $D \in$ отрезок$(CE) \rightarrow$ однасторона$(E,D,$ прямая$(AB)))$

$\forall_{ABCDE}(\neg(C=D)$ & $E \in$ прямая(CD) & $E \in$ отрезок(AB) & $A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & $E-$точка $\rightarrow$ разныестороны$(A,B,$ прямая$(CD)))$

6. Использование определения для устранения многоместного предиката в антецедентах. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, у которого A_1 - невырожденный числовой атом, а правая часть A_2 не является числовым атомом, но содержит невырожденные числовые атомы. Имеется антецедент B, число корневых операндов которого больше 2. Для его заголовка f имеется определение $C_1 \leftrightarrow C_2$, где заголовком C_1 служит f, а конъюнктивные члены C_2 суть элементарные утверждения, внутри которых нет более чем двуместных отношений. Данное определение используется для преобразования B. Результат упрощается. (Прием числзнач - 23).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acC}(c-$set & $C-$set & $C \subseteq \mathrm{Dom}(a)$ & $\mathrm{Val}(a) \subseteq c$ & $a-$функция & конечное(c) & конечное$(C) \rightarrow \mathrm{card}(C) = \sum_{y,y \in c} \mathrm{card}($слой$($сужение$(a,C),y)))$

   из теоремы

   $\forall_{fABC}(C-$set & $C \subseteq A$ & конечное(B) & конечное(C) & Отображение$(f,A,B) \rightarrow \mathrm{card}(C) = \sum_{y,y \in B} \mathrm{card}($слой$($сужение$(f,C),y)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{fAB}($Отображение$(f,A,B) \leftrightarrow f-$функция & $\mathrm{Dom}(f)=A$ & $B-$set & $\mathrm{Val}(f) \subseteq B)$

7. Попытка сведения более чем двуместного отношения в антецедентах к более простым отношениям. Теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. Она имеет единственный антецедент A с более чем двумя корневыми операндами. По его заголовку f находится теорема, консеквент которой имеет заголовок f, а все антецеденты не более чем двуместные. Эта теорема используется для реализации A. Результат упрощается. Антецеденты проверяются на непротиворечивость. (Прием числовойатом - 76).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdeAB}(\neg(a=c)\ \&\ \neg(a=d)\ \&\ \neg(b=c)\ \&\ neg(b=d)\ \&\ \neg(c=d)\ \&$
$\neg(A=B)\ \&\ a \in \text{окружность}(AB)\ \&\ b \in \text{окружность}(AB)\ \&\ c \in \text{окружность}(AB)$
$\&\ d \in \text{окружность}(AB)\ \&\ e \in \text{прямая}(cd)\ \&\ e \in \text{отрезок}(ab)\ \&\ a - \text{точка}\ \&$
$b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \rightarrow$
$\angle(cad) + \angle(cbd) = \pi)$

из теоремы

$\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$F - \text{точка}\ \&\ \neg(D=F)\ \&\ \neg(C=F)\ \&\ \neg(D=E)\ \&\ \neg(C=E)\ \&\ \neg(C=D)\ \&$
$\neg(A=B)\ \&\ C \in \text{окружность}(AB)\ \&\ D \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ F \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$\text{разныестороны}(E, F, \text{прямая}()) \rightarrow \angle(CED) + \angle(CFD) = \pi)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDE}(\neg(C=D)\ \&\ E \in \text{прямая}(CD)\ \&\ E \in \text{отрезок}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
$B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка} \rightarrow$
$\text{разныестороны}(A, B, \text{прямая}(CD)))$

8. Устранение многоместного предиката в антецедентах с помощью справочника "множнабор". Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Некоторый антецедент A имеет более двух корневых операндов. Число корневых операндов консеквента меньше числа корневых операндов A. Находится теорема, консеквент которой имеет тот же заголовок, что A, причем все антецеденты не более чем двуместные. Эта теорема используется для реализации A. Результат упрощается. Проверяется, что оценка сложности консеквента новой теоремы не меньше, чем у исходной. (Прием вывод - 88).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{fiGM}(i \in \{1, \ldots, \text{мдлина}(M)\}\ \&\ \text{граф}(f)\ \&\ \text{маршрут}(M, G)\ \&\ \text{подграф}(G, f) \rightarrow$
   $\text{мребро}(M, i) \in \text{ребра}(f))$

   из теоремы

   $\forall_{cdefg}(\text{граф}(f)\ \&\ \text{ведет}(c, d, e, g)\ \&\ \text{подграф}(g, f) \rightarrow c \in \text{ребра}(f))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{iGM}(i \in \{1, \ldots, \text{мдлина}(M)\}\ \&\ \text{граф}(f)\ \&\ \text{маршрут}(M, G) \rightarrow$
   $\text{ведет}(\text{мребро}(M, i), \text{мверш}(M, i), \text{мверш}(M, i+1), G))$

9. Использование определения для устранения многоместного предиката в антецедентах. Консеквент теоремы - квантор существования. Имеется антецедент A с более чем двумя корневыми операндами. Его заголовок - символ f. Находится определение $B_1 \leftrightarrow B_2$ символа f. Все конъюнктивные члены определяющей части B_2 - элементарные утверждения. Это определение используется для преобразования антецедента A. Результат упрощается. (Прием допконтекст - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(B = C)\ \&\ \neg(D \in \text{прямая}(BC))\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&$
$C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD)\ \&$
$\text{прямая}(AD) \parallel \text{прямая}(BC) \to \exists_E(l(AE) = l(CE)\ \&\ l(BE) = l(DE)\ \&$
$E \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ E \in \text{отрезок}(BD)\ \&\ E - \text{точка}))$

из теоремы

$\forall_{abcd}(a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(cd)\ \&$
$\text{прямая}(ad) \parallel \text{прямая}(bc)\ \&\ \text{четырехугольник}(abcd) \to \exists_E(l(aE) = l(aE)\ \&$
$l(bE) = l(dE)\ \&\ E \in \text{отрезок}(ac)\ \&\ E \in \text{отрезок}(bd)\ \&\ E - \text{точка}))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \to$
$\text{четырехугольник}(ABCD) \leftrightarrow \neg(B = C)\ \&\ \neg(A \in \text{прямая}(BC))\ \&$
$\neg(D \in \text{прямая}(AB))\ \&\ \neg(D \in \text{прямая}(BC))\ \&\ \text{однасторона}(A, D, \text{прямая}(BC))$
$\&\ \text{однасторона}(C, D, \text{прямая}(AB)))$

Переход к антецедентам, имеющим меньшее число параметров

1. Попытка свести антецедент со многими параметрами к антецедентам с меньшим числом параметров. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Некоторый антецедент A имеет не менее 4 параметров. Его заголовок f отличен от символа "не", число корневых операндов равно 2. Эти операнды - атомарные выражения длины, большей 2. Антецедент A имеет единственный максимально сложный подтерм, и его заголовок - символ g. В разделе символа g находится теорема T, бесповторный консеквент которой имеет заголовок f и содержит символ g. Все переменные теоремы T встречаются в ее консеквенте. Среди антецедентов нет равенств или утверждений, имеющих хотя бы 4 параметра (кроме, быть может, утверждения о параллельности). Теорема T используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием вывод - 59).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abdeA}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(d = e)\ \&\ \neg(b \in \text{прямая}(de))\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&$
   $d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(de)\ \&$
   $\text{разныестороны}(A, b, \text{прямая}(de)) \to \text{разныестороны}(A, a, \text{прямая}(de)))$

   из теоремы

   $\forall_{cABCE}(\neg(c = E)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC))\ \&$
   $B \in \text{плоскость}(cCE)\ \&\ \text{непересек}(\text{прямая}(cE), \text{отрезок}(BC))\ \&\ c - \text{точка}\ \&$
   $A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
   $\text{разныестороны}(A, C, \text{прямая}(cE)) \to \text{разныестороны}(A, B, \text{прямая}(cE)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D)\ \&$
   $\neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD)\ \&\ \neg(B \in \text{прямая}(CD)) \to$
   $\text{непересек}(\text{отрезок}(AB), \text{прямая}(CD)))$

2. Попытка свести антецедент со многими параметрами к антецедентам с меньшим числом параметров. Теорема - кванторная импликация, корневое отношение консеквента которой имеет наибольшую сложность среди всех ее подтермов. Действия те же, что в предыдущем приеме. (Прием реализация - 20).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcde}(\neg(d = e)\ \&\ a \in \text{отрезок}(bc)\ \&\ c \in \text{прямая}(de)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка} \to \text{однасторона}(a, b, \text{прямая}(de)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(C = D)\ \&\ B \in \text{плоскость}(ACD)\ \&\ \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(AB))\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \to \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abBCD}(a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(a = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \neg(\text{прямая}(bB) = \text{прямая}(CD))\ \&\ a \in \text{отрезок}(bB)\ \&\ B \in \text{прямая}(CD) \to \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(ab)))$

3. Попытка декомпозиции антецедента, имеющего вид равенства. Теорема - тождество, выражающее невырожденный числовой атом через параметры координат. Некоторый антецедент A - равенство, имеющее единственный максимально сложный подтерм t. Его заголовок - символ f. В разделе символа f находится теорема $B_1 \leftrightarrow B_2$, декомпозирующая бесповторное равенство B_1 в конъюнкцию равенств. Максимально сложный подтерм терма B_1 имеет заголовок f. Данная теорема используется для преобразования антецедента A. Результат упрощается. (Прием значпарам - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{defhijklm}(k = \text{крд}(l, m, 3)\ \&\ j = \text{крд}(l, m, 2)\ \&\ \text{Вектор}(l)\ \&\ \text{Вектор}(d)\ \&\ \text{прямкоорд}(m)\ \&\ i = \text{крд}(l, m, 1)\ \&\ \text{коорд}(d, m) = (e, f, h) \to \text{скалумнож}(l, d) = ie + jf + kh)$

   из теоремы

   $\forall_{Kabcdefgh}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Вектор}(d)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{коорд}(a, K) = (b, c, g)\ \&\ \text{коорд}(d, K) = (e, f, h) \to \text{скалумнож}(a, d) = be + cf + gh)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{AKabc}(\text{Трехмерн}(K)\ \&\ \text{Вектор}(A) \to \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \leftrightarrow \text{крд}(A, K, 1) = a\ \&\ \text{крд}(A, K, 2) = b\ \&\ \text{крд}(A, K, 3) = c)$

4. Зануление члена уравнения множества объектов. Теорема - импликация, консеквент которой представляет собой конъюнкцию неравенств и отрицания равенств для параметров координат. Имеется антецедент A вида "коорд$(B_1, K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_n}(B_2)$". Некоторая переменная y консеквента является параметром правой части данного равенства и имеет в нем более одного вхождения. Рассматривается некоторой такое вхождение и его надвыражение t с заголовком f.

Находится теорема с консеквентом вида $f(x,a)=a$. Она используется для преобразования терма t. Результат упрощается. Проверяется, что новая теорема по-прежнему имеет своим антецедентом уравнение для множества объектов, некоторый кратный параметр которого входит в консеквент. (Прием Крд - 7).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcgijKP}(\text{коорд}(P,K)=\text{set}_{xyz}(x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((g+x,a+y,b+z),(0,ci,cj)))\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ g-\text{число}\ \&\ i-\text{число}\ \&\ j-\text{число}\ \&\ \text{Прямая}(P)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\rightarrow\neg(c=0))$

из теоремы

$\forall_{abcghijKP}(\text{коорд}(P,K)=\text{set}_{xyz}(x-\text{число}\ \&\ y-\text{число}\ \&\ z-\text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((g+x,a+y,b+z),(ch,ci,cj)))\ \&\ a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ c-\text{число}\ \&\ g-\text{число}\ \&\ h-\text{число}\ \&\ i-\text{число}\ \&\ j-\text{число}\ \&\ \text{Прямая}(P)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\rightarrow\neg(c=0))$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a-\text{число}\rightarrow a\cdot 0=0)$

5. Попытка исключить параметр, не входящий в заменяемое выражение - простейший случай. Теорема - тождество $A_1=A_2$, у которого A_1 - невырожденный числовой атом. Выбирается переменная x, входящая в A_2 и не входящая в A_1. Выбирается новая переменная y, и решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и равенство $y=A_2$. Неизвестные - параметры посылок. Имеются также цели "нормтеорема" и "исключ x". После решения находится посылка $y=t$, где выражение t не содержит x и отлично от A_1. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих x, и подсписок S_2 остальных утверждений. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что "$\exists_x(S_1)$" - следствие S_2. Консеквентом новой теоремы становится равенство - $A_1=t$, антецедентами - S_2. (Прием числатом - 23).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcC}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(c=C)\ \&\ a\in\text{отрезок}(bc)\ \&\ a-\text{точка}\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\rightarrow\text{уголмежду}(\text{вектор}(ab),\text{вектор}(cC))=\angle(bcC))$

из теоремы

$\forall_{abcdC}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(c=d)\ \&\ \neg(c=C)\ \&\ l(ab)=l(cd)\ \&\ a\in\text{прямая}(cd)\ \&\ a\in\text{отрезок}(bc)\ \&\ a-\text{точка}\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ d-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ \text{точкалуча}(c,d,b)\rightarrow\text{уголмежду}(\text{вектор}(ab),\text{вектор}(cC))=\angle(dcC))$

6. Попытка исключить параметр, не входящий в заменяемое выражение - дизъюнктивный случай. Теорема - тождество $A_1=A_2$, у которого A_1 - невырожденный числовой атом. Выбирается переменная x, входящая в A_2 и не входящая в A_1. Выбирается новая переменная y, и решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и равенство $y=A_2$. Неизвестные - параметры посылок. Имеются также цели "нормтеорема" и "исключ x". После решения

находится посылка с заголовком "или", каждый дизъюнктивный член которой имеет конъюнктивный член вида $y = t$, где t не содержит x. Для каждого дизъюнктивного члена "$y = t$ & B" решается задача на описание, условия которой - содержащие x антецеденты и содержащие x конъюнктивные члены B. Посылками служат остальные антецеденты и остальные конъюнктивные члены B. Неизвестная - x, причем она несущественная. Имеются также цели "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "исключ". Ответ R не содержит x. После обработки всех дизъюнктивных членов проверяется, что утверждения R несовместны. Для каждого из них создается новая теорема с консеквентом $y = t$. Антецеденты - исходные посылки соответствующей задачи на описание и утверждение R. Результаты упрощаются. (Прием числатом - 25).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acB}(\neg(a = B)\ \&\ \neg(c = B)\ \&\ B \in \text{отрезок}(ac)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(aB), \text{вектор}(cB)) = \pi)$

из теоремы

$\forall_{abcB}(\neg(a = B)\ \&\ \neg(c = B)\ \&\ l(ab) = l(cB)\ \&\ a \in \text{прямая}(cB)\ \&\ a \in \text{отрезок}(bc)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \text{точкалуча}(c, B, b) \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(aB), \text{вектор}(cB)) = \angle(baB))$

7. Попытка свести отрицание утверждения с несколькими параметрами к отрицанию утверждения с одним параметром. Теорема - простая импликация, выражающая свойства "сложного" объекта. Она имеет антецедент "$\neg(A)$", содержащий более одного параметра. По заголовку f утверждения A находится теорема T, консеквент которой - отрицание бесповторного элементарного утверждения с заголовком f, содержащего все переменные теоремы. Если у T имеются отрицания в антецедентах, то каждое из них содержит одну переменную. Теорема T используется для реализации $\neg(A)$. Результат упрощается. (Прием свойства - 16).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{df}(\neg(d = \emptyset)\ \&\ d - \text{set}\ \&\ d \subseteq \text{Val}(f)\ \&\ f - \text{функция} \rightarrow \neg(\text{прообраз}(f, d) = \emptyset))$

   из теоремы

   $\forall_{af}(a - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \neg(\text{непересек}(a, \text{Val}(f))) \rightarrow \neg(\text{прообраз}(f, a) = \emptyset))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ \neg(d = \emptyset)\ \&\ d \subseteq c \rightarrow \neg(\text{непересек}(c, d)))$

Исключение сложных понятий в антецедентах

1. Попытка расшифровки антецедентов для исключения сложных понятий. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Заголовок ее консеквента отличен от символов "не", "равно". Оценка N сложности антецедентов равна оценке сложности корневых операндов консеквента. Решается задача на описание, единственная посылка

которой - "истина", а условия - антецеденты теорем. Цели задачи - "явное", "редакция", "развертка", "прямойответ", "полный". Неизвестных нет. Фактически, эта задача предпринимает расшифровку антецедентов по определениям. Ответ R не имеет связанных переменных. Его оценка сложности меньше N. Новая теорема имеет антецеденты R. Консеквент ее тот же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием вывод - 33).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ l(AD)=l(CD)\ \&$
$l(BD)=l(CD)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\rightarrow$
$\text{окружность}(DA)\ \text{описана около фигура}(ABC))$

из теоремы

$\forall_{ABCDE}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(D=E)\ \&\ A\in\text{окружность}(DE)$
$\&\ B\in\text{окружность}(DE)\ \&\ C\in\text{окружность}(DE)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&$
$C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\rightarrow\text{окружность}(DE)\ \text{описана около фигура}($
$ABC))$

2. Конъюнктивная расшифровка по определению одного из антецедентов. Теорема - кванторная импликация с элементарными антецедентами и консеквентом, имеющим вид конъюнкции утверждений. Выбирается антецедент A и по его заголовку f находится теорема T вида $B_1\leftrightarrow B_2$ - определение утверждений с заголовком f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Все конъюнктивные члены определяющей части B_2 элементарны. Определяется подстановка S, переводящая B_1 в A. Антецедентами новой теоремы становятся отличные от A антецеденты исходной теоремы, а также результаты применения S к антецедентам теоремы T и к утверждению B_2. Консеквент тот же, что у исходной теоремы. Антецеденты новой теоремы упрощаются. (Прием конъюнкция - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCDEF}(\neg(\text{прямая}(AB)=\text{прямая}(AC))\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&$
$F-\text{точка}\ \&\ D\in\text{отрезок}(BC)\ \&\ l(CD)=l(BD)\ \&\ E\in\text{отрезок}(AC)\ \&$
$l(CE)=l(AE)\ \&\ F\in\text{прямая}(BE)\ \&\ F\in\text{прямая}(AD)\ \&\ A-\text{точка}\ \&$
$B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\rightarrow F\in\text{отрезок}(BE)\ \&$
$2l(FE)=l(BF))$

из теоремы

$\forall_{ABCDEF}(\triangle(ABC)\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ F-\text{точка}\ \&\ D\in\text{отрезок}(BC)$
$\&\ l(BD)=l(CD)\ \&\ E\in\text{отрезок}(AC)\ \&\ l(AE)=l(EC)\ \&\ F\in\text{прямая}(BE)\ \&$
$F\in\text{прямая}(AD)\rightarrow F\in\text{отрезок}(BE)\ \&\ 2l(FE)=l(BF))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\rightarrow\triangle(ABC)\leftrightarrow\neg(A=B)\ \&$
$\neg(C\in\text{прямая}(AB)))$

3. Попытка декомпозиции сложного подвыражения антецедента. Теорема - тождество общей стандартизации. Рассматривается содержащий не менее двух параметров существенный антецедент A, имеющий такое подвыражение t, которое включается все параметры A. Заголовок f утверждения A отличен от символа "не". Находится простая импликация T, консеквент которой имеет заголовок f. Он содержит подвыражение t_1, имеющее не менее двух параметров и включающее все параметры консеквента. Максимальные по включению подвыражения антецедентов образуют декомпозицию параметров консеквента. Теорема T используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием нормализация - 121).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cd}(c - \text{set}\ \&\ c \subseteq \text{Dom}(d)\ \&\ d - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(d) \rightarrow \text{card}(c) = \text{card}(\text{образ}(d, c)))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \text{Dom}(a)\ \&\ a - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(\text{сужение}(a, b)) \rightarrow \text{card}(b) = \text{card}(\text{образ}(a, b)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{af}(\text{взаимнооднозначно}(f)\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{взаимнооднозначно}(\text{сужение}(f, a)))$

4. Использование другого тождества для сведения вычисления операции над сложной функцией к ее подфункции. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, исключающее описатель "отображение", являющийся корневым операндом выражения A_1. Заголовок A_1 - символ f. Имеется антецедент $B_1 = B_2$, у которого заголовок B_1 равен f, причем некоторый корневой операнд имеет вид "$\lambda_{x_1 \ldots x_n}(C_2, C_1)$". Заголовком выражения C_2 служит логический символ g, отличный от "значение". При этом символ "значение" встречается в C_2. В текущем списке вывода находится тождество $D_1 = D_2$, исключающее описатель "отображение". Заголовком D_1 служит f; некоторый корневой операнд D_1 имеет вид "$\lambda_{y_1 \ldots y_n}(E_2, E_1)$", причем заголовок выражения E_2 - символ g. Это тождество используется для реализации антецедента $B_1 = B_2$. На период унификации функциональные переменные заменяются на обычные; затем восстанавливаются. Результат упрощается. (Прием описатель - 68).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{adghi}(\neg(\cos h = 0)\ \&\ \forall_e(e \in g \rightarrow \neg(\cos d(e) = 0))\ \&\ h = \text{предел}(d, i, a)\ \&\ \text{Dom}(d) = g\ \&\ g \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ d - \text{функция}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ \text{Число}(a)\ \&\ \text{типпредела}(i)\ \&\ \text{Локопред}(d, a, i) \rightarrow \lim_{e \rightarrow a \setminus i} \text{tg}\, d(e) = \text{tg}\, h)$

   из теоремы

   $\forall_{abcdgi}(\neg(c = 0)\ \&\ \forall_e(e \in g \rightarrow \neg(\cos d(e) = 0))\ \&\ b = \lim_{e \rightarrow a \setminus i} \sin d(e)\ \&\ c = \lim_{e \rightarrow a \setminus i} \cos d(e)\ \&\ \text{Dom}(d) = g\ \&\ g \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ d - \text{функция}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \text{Число}(a)\ \&\ \text{типпредела}(i)\ \&\ \text{Локопред}(d, a, i) \rightarrow \lim_{e \rightarrow a \setminus i} \text{tg}\, d(e) = b/c)$

   и дополнительной теоремы

$\forall abghi(\mathrm{Dom}(h) = g \;\&\; g \subseteq \mathbb{R} \;\&\; \mathrm{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \;\&\; h -$ функция $\&$ Число(a) $\&$ типпредела(i) $\&$ Локопред(h, a, i) $\&$ $b -$ число $\&$ предел$(h, i, a) = b \rightarrow \lim_{e \to a \setminus i} \sin h(e) = \sin b)$

5. Попытка свести неравенство для одного числового атома в антецедентах к неравенству для более простых числовых атомов. Консеквент теоремы - отличный от равенства двуместный нечисловой предикат. Некоторый антецедент - неравенство, содержащее единственный невырожденный числовой атом t. Он разрешается относительно этого атома и превращается в некоторое неравенство A. По заголовку f атома t находится теорема T, консеквент которой - неравенство, в одной из частей которого расположен атом B с заголовком f. Среди ее антецедентов имеется единственное неравенство. Если оно содержит невырожденные числовые атомы, то оценки сложности их меньше оценки атома B. Теорема T используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием отношение - 27).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \;\&\; \neg(C = D) \;\&\; D \in$ прямая$(AB) \;\&\; A -$ точка $\&$ $B -$ точка $\&$ $C -$ точка $\&$ $D -$ точка $\&$ прямая$(AB) \perp$ прямая$(CD) \;\&\; 0 \leq -l(AC) + l(AB) \;\&\; 0 \leq -l(BC) + l(AB) \rightarrow D \in$ интервал$(AB))$

   из теоремы

   $\forall_{abcD}(\neg(a = b) \;\&\; \neg(c = D) \;\&\; 0 \leq -2\angle(abc) + \pi \;\&\; D \in$ прямая$(ab) \;\&\; a -$ точка $\&$ $b -$ точка $\&$ $c -$ точка $\&$ $D -$ точка $\&$ прямая$(ab) \perp$ прямая$(cD) \;\&\; 0 \leq -l(bc) + l(ab) \rightarrow D \in$ интервал$(ab))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B) \;\&\; \neg(C \in$ прямая$(AB)) \;\&\; A -$ точка $\&$ $B -$ точка $\&$ $C -$ точка $\&$ $l(BC) \leq l(AB) \rightarrow \angle(BAC) < \pi/2)$

6. Попытка отбросить внешнюю одноместную операцию (антецедент). Теорема имеет консеквент вида $P(\lambda_x(A_2, A_1), A_3)$, определяющий характеристику A_3 некоторой функции (например, первообразную). Некоторый антецедент B имеет вид $P(\lambda_y(f(B_2), B_1), B_3)$, где f - одноместная операция, причем заголовок B_2 отличен от символа "значение". В текущем списке вывода находится теорема T, консеквент которой имеет вид $P(\lambda_z(f(g(z)), C_1), C_3)$. Здесь g - переменная. Эта теорема используется для реализации антецедента B. Результат упрощается. (Прием функперех - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acdeh}(\mathrm{Dom}(a) = \mathrm{Dom}(e) \;\&\; \mathrm{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \;\&\; a -$ функция $\&$ $e -$ функция $\&$ первообразная(a, c) $\&$ первообразная(e, d) $\&$ первообразная$(\lambda_x(c(x)e(x), x \in \mathrm{Dom}(e)), h) \rightarrow$ первообразная$(\lambda_k(a(k)d(k), k \in \mathrm{Dom}(e)), \lambda_g(c(g)d(g) - h(g), g \in \mathrm{Dom}(e))))$

   из теоремы

   $\forall_{acdei}(\mathrm{Dom}(a) = \mathrm{Dom}(e) \;\&\; \mathrm{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \;\&\; a -$ функция $\&$ $e -$ функция $\&$ первообразная(a, c) $\&$ первообразная(e, d) $\&$ первообразная$(\lambda_x(-c(x)e(x),$

$x \in \mathrm{Dom}(e)), i) \to$ первообразная$(\lambda_k(a(k)d(k), k \in \mathrm{Dom}(e)), \lambda_g(c(g)d(g) + i(g),$
$g \in \mathrm{Dom}(e))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ae}(\mathrm{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R}$ & $a -$ функция & первообразная$(a, e) \to$
первообразная$(\lambda_x(-a(x), x \in \mathrm{Dom}(a)), \lambda_c(-e(c), c \in \mathrm{Dom}(e))))$

7. Усмотрение явной выразимсоти параметров друг через друга. Теорема имеет консеквент вида $P(\lambda_x(A_2, A_1), A_3)$, определяющий характеристику A_3 некоторой функции (например, первообразную). Имеется антецедент B вида $P(t, f)$, где f - переменная, являющаяся параметром терма $\lambda_x(A_2, A_1)$. В текущем списке вывода находится теорема T с консеквентом вида $P(\lambda_y(C_2, C_1), g)$, где g - переменная, через которую выражен терм "$\lambda_y(C_2, C_1)$". Эта теорема не имеет антецедента с заголовком P. Она используется для реализации антецедента B. Результат упрощается. (Прием функперех - 6).

Пример: вывод теоремы

$\forall abch(\forall_f(f \in \mathrm{Dom}(b) \to$ дифференцируема$(b, f))$ & $\mathrm{Dom}(a) = \mathrm{Dom}(b)$ &
$\mathrm{Dom}(b) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(b) \subseteq \mathbb{R}$ & $a -$ функция & $b -$ функция & первообразная(a, c)
& первообразная$(\lambda_x(c(x)$производная$(b, x), x \in \mathrm{Dom}(b)), h) \to$
первообразная$(\lambda_k(a(k)b(k), k \in \mathrm{Dom}(b)), \lambda_g(b(g)c(g) - h(g), g \in \mathrm{Dom}(b))))$

из теоремы

$\forall_{acdeh}(\mathrm{Dom}(a) = \mathrm{Dom}(e)$ & $\mathrm{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R}$ & $a -$ функция & $e -$ функция &
первообразная(a, c) & первообразная(e, d) & первообразная$(\lambda_x(c(x)e(x),$
$x \in \mathrm{Dom}(e)), h) \to$ первообразная$(\lambda_k(a(k)d(k), k \in \mathrm{Dom}(a)), \lambda_g(c(g)d(g) - h(g),$
$g \in \mathrm{Dom}(e))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_g(\forall_x(x \in \mathrm{Dom}(g) \to$ дифференцируема$(g, x))$ & $\mathrm{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R}$ & $\mathrm{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}$ &
$g -$ функция $\to$ первообразная$(\lambda_x($производная$(g, x), x \in \mathrm{Dom}(g)), g))$

8. Усмотрение пары переменных, симметричных для всех антецедентов, кроме одного, и свертка дизъюнкции данного антецедента с результатом перестановки в нем данных переменных. Теорема - тождество, выражающее сложный числовой атом через более простые. Рассматриваются два таких существенных антецедента A_1, A_2, что A_2 получается из A_1 заменой некоторой переменной i на j. Рассматривается список S_1 результатов переобозначения в антецедентах переменных i, j друг на друга. Имеется единственный элемент B списка S_1, для которого не усматривается, что он является следствием антецедентов. Проверяется, что консеквент - следствие результата переобозначения в нем же переменных i, j и отличных от B элементов списка S_1. Находится тот антецедент B_1, из которого получилось утверждение B. Составляется список P параметров утверждений B, B_1, не входящих в консеквент и в отличные от B_1 существенные антецеденты. Определяется список S_2 отличных от B и содержащих параметры P элементов списка S_1. При помощи задачи на преобразование упрощается утверждение "$\exists_P((B \ \vee \ B_1)$ & $S_2)$". Оно превращается в утверждение R, не содержащее кванторов. Антецедентами новой теоремы становятся отличные от

B не входящие в S_2 утверждения списка S_1, а также R. Консеквент тот же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием числатом - 53).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{hijk}(\neg(i-h=0)\ \&\ h\in\{1,\ldots,j\}\ \&\ i\in\{1,\ldots,j\}\ \&\ \text{матр}(k,\mathbb{R},j,j)\ \&$
$\text{пропорц}(\lambda_e(k(h,e),e\in\{1,\ldots,j\}),\lambda_e(k(i,e),e\in\{1,\ldots,j\}))\to\det(k)=0)$

из теоремы

$\forall_{bhijk}(\neg(h-i=0)\ \&\ \forall_e(e\in\{1,\ldots,j\}\to k(h,e)=bk(i,e))\ \&\ h\in\{1,\ldots,j\}\ \&$
$i\in\{1,\ldots,j\}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ \text{матр}(k,\mathbb{R},j,j)\to\det(k)=0)$

9. Переформулировка существенного нечисленного антецедента через числовые атомы. Теорема - тождество $A_1=A_2$, выражающее невырожденный числовой атом A_1 через другие невырожденные числовые атомы. Выбирается существенный антецедент B с заголовком f, отличным от символа "не". Находится теорема T, консеквент которой имеет заголовок f и не содержит числовых атомов, а антецеденты содержат невырожденные числовые атомы и не имеют заголовка "равно". Все переменные теоремы T встречаются в ее консеквенте. Определяется подстановка S, переводящая консеквент теоремы T в антецедент B. Составляется непустой список Q_1 антецедентов исходной теоремы, отличных от B, а также список Q_2 результатов применения S к антецедентам теоремы T. Проверяется, что каждый элемент списка Q_2, содержащий невырожденные числовые атомы, имеет только атомы, входящие в A_2. При этом каждый другой элемент списка Q_2, имеющий более одного параметра, является следствием Q_1, и эти элементы исключаются из Q_2. Антецедентами новой теоремы становятся утверждения списков Q_1,Q_2. Консеквент ее тот же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием числзнач - 13).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(A=D)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&$
$C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ 0\le-\angle(BAC)-\angle(CAD)+\pi\ \&$
$\text{разныестороны}(B,D,\text{прямая}(AC))\to\angle(BAD)=\angle(BAC)+\angle(CAD))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \neg(A=D)\ \&$
$\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \text{разныестороны}(B,D,\text{прямая}(AC))\ \&$
$\text{однасторона}(B,C,\text{прямая}(AD))\ \&\ \text{составнугол}(A,D,C,B)\to$
$\angle(BAD)=\angle(BAC)+\angle(CAD))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \neg(A=D)\ \&$
$\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \text{разныестороны}(B,D,\text{прямая}(AC))\ \&$
$0\le\pi-\angle(BAC)-\angle(CAD)\to\text{однасторона}(B,C,\text{прямая}(AD)))$

10. Попытка замены самого сложного антецедента на более простые. Теорема - тождество $A_1=A_2$, выражающее невырожденный числовой атом A_1 через другие невырожденные числовые атомы. Выбирается антецедент B, оценка сложности которого больше оценок сложности других антецедентов. Самый сложный

подтерм этого антецедента - он сам. По заголовку f антецедента B находится теорема, консеквент которой имеет заголовок f, причем сложность консеквента больше сложности любого другого подтерма теоремы. Эта теорема используется для реализации B. Результат упрощается. (Прием числзнач - 22).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{fABC}(C-\text{set} \,\&\, C \subseteq A \,\&\, \text{конечное}(B) \,\&\, \text{конечное}(C) \,\&\, \text{Отображение}(f, A, B) \rightarrow \text{card}(C) = \sum_{y,y\in B} \text{card}(\text{слой}(\text{сужение}(f, C), y)))$

из теоремы

$\forall_{bc}(b-\text{set} \,\&\, \text{конечное}(c) \,\&\, \text{разбиение}(b, c) \,\&\, \text{конечные}(c) \,\&\, \text{классмножеств}(c) \rightarrow \text{card}(b) = \sum_{a,a\in c} \text{card}(a))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{fABC}(A - \text{set} \;\&\; B - \text{set} \;\&\; \text{Отображение}(f, A, B) \;\&\; C - \text{set} \;\&\; C \subseteq A \rightarrow \text{разбиение}(C, \text{set}_x(\exists_y(y \in B \;\&\; x = \text{слой}(\text{сужение}(f, C), y)))))$

11. Попытка переформулировки антецедента в более простых понятиях. Теорема - тождество для числовых атомов. Рассматривается некоторый антецедент A, для которого существует теорема T - эквивалентность общей стандартизации либо уменьшения сложности утверждений с тем же заголовком, что у A. Она применяется для преобразования A. Проверяется, что при унификации происходило лишь переобозначение переменных. Результат упрощается. Проверяется отсутствие антецедентов глубины, большей 3. (Прием числовойатом - 28).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcd}(\neg(a = b) \;\&\; \neg(c = d) \;\&\; a - \text{точка} \;\&\; b - \text{точка} \;\&\; c - \text{точка} \;\&\; d - \text{точка} \;\&\; \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(cd) \rightarrow \text{скалумнож}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(cd)) = 0)$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(D - \text{точка} \;\&\; C - \text{точка} \;\&\; B - \text{точка} \;\&\; A - \text{точка} \;\&\; \text{вектор}(AB) \perp \text{вектор}(CD) \rightarrow \text{скалумнож}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD)) = 0)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \,\&\, \neg(C = D) \,\&\, A-\text{точка} \,\&\, B-\text{точка} \,\&\, C-\text{точка} \,\&\, D-\text{точка} \rightarrow \text{вектор}(AB) \perp \text{вектор}(CD) \leftrightarrow \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD))$

12. Сведение равенства числовых атомов, более сложных, чем встречающиеся в консеквенте, к более простым числовым атомам. Консеквент теоремы - равенство двух невырожденных числовых атомов. Имеется антецедент A, предствляющий собой равенство двух невырожденных числовых атомов с одинаковым заголовком f. Его сложность больше сложности консеквента. Выбирается теорема T, консеквент которой - равенство двух невырожденных числовых атомов с заголовком f, содержащее все параметры антецедентов. Оценка сожности консеквента больше оценки сложности антецедентов. Теорема T используется для преобразования A. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 52).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcde}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(a=c)\ \&\ \neg(a=d)\ \&\ \neg(a=e)\ \&\ l(ab)=l(ae)\ \&$
$l(ac)=l(ad)\ \&\ a-$точка $\&\ b-$точка $\&\ c-$точка $\&\ d-$точка $\&\ e-$точка $\&$
точкалуча$(a,b,c)\ \&$ точкалуча$(a,d,e)\rightarrow l(bd)=l(ce))$

из теоремы

$\forall_{ABCDEF}(A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&\ E-$точка $\&$
$F-$точка $\&\ \neg(D=F)\ \&\ \neg(D=E)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(A=B)\ \&$
$\angle(BAC)=\angle(EDF)\ \&\ l(AB)=l(DE)\ \&\ l(AC)=l(DF)\rightarrow l(BC)=l(EF))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDE}(A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&\ E-$точка $\&$
$\neg(A=E)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ \neg(A=D)\ \&$ точкалуча$(A,B,C)\ \&$
точкалуча$(A,D,E)\rightarrow\angle(BAD)=\angle(CAE))$

13. Попытка расшифровки по определению сложного антецедента - случай элементарных утверждений. Теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. Выбирается антецедент A, имеющий либо более 4 параметров, либо более двух корневых операндов. Заголовок f утверждения A не является "типичным" для антецедентов теорем. Находится определение $B_1\leftrightarrow B_2$ утверждений с заголовком f. Каждый конъюнктивный член определяющей части B_2 - элементарное утверждение. Данное определение используется для преобразования антецедента A. Результат упрощается. Проверяется, что количество антецедентов с более чем двумя корневыми операндами не увеличилось. (Прием числовойатом - 65).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdef}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(a=c)\ \&\ \neg(d=e)\ \&\ \neg(d=f)\ \&\ \neg($прямая$(de)=$
прямая$(df))\ \&\ \angle(abc)=\angle(def)\ \&\ \angle(bac)=\angle(edf)\ \&\ a-$точка $\&\ b-$точка $\&$
$c-$точка $\&\ d-$точка $\&\ e-$точка $\&\ f-$точка $\rightarrow l(ac)l(de)=l(ab)l(df))$

из теоремы

$\forall_{ABCDEF}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(D=E)\ \&\ \neg(D=F)\ \&\ \neg($прямая$(AB)=$
прямая$(AC))\ \&\ \neg($прямая$(DE)=$ прямая$(DF))\ \&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&$
$C-$точка $\&\ D-$точка $\&\ E-$точка $\&\ F-$точка $\&\ (A,B,C)\sim(D,E,F)\rightarrow$
$l(AC)l(DE)=l(AB)l(DF))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDEF}(A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&\ E-$точка $\&$
$F-$точка $\&\ \triangle(ABC)\ \&\ \triangle(DEF)\rightarrow(A,B,C)\sim(D,E,F)\leftrightarrow$
$\angle(BAC)=\angle(EDF)\ \&\ \angle(ABC)=\angle(DEF))$

14. Попытка расшифровки по определению сложного антецедента - случай квантора существования. Теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. Выбирается антецедент A с двумя корневыми операндами, имеющий не менее

4 параметров. Оба корневые операнда - атомарные нечисловые выражения. Заголовок антецедента - символ f. Находится определение $B_1 \leftrightarrow B_2$ утверждений с заголовком f. Заголовок B_2 - квантор существования, причем каждый конъюнктивный член подкванторного утверждения является элементарным утверждением. Данное определение используется для преобразования антецедента A. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 83).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdeF}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(c=d)\ \&\ \neg(c=e)\ \&\ \neg(e=F)\ \&\ e \in \text{прямая}(cd)\ \&$
$e \in \text{окружность}(ab)\ \&\ F \in \text{окружность}(ab)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&$
$c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(ae) \perp \text{прямая}(cd)\ \&$
$0 \le \pi/2 - \angle(ceF) \rightarrow \angle(eaF) = 2\angle(ceF))$

из теоремы

$\forall_{ABCDEF}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(C=E)\ \&\ \neg(E=F)\ \&\ E \in \text{прямая}(CD)\ \&$
$E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ F \in \text{окружность}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&$
$C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&$
$\text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB)\ \&\ 0 \le \pi/2 - \angle(CEF) \rightarrow$
$\angle(EAF) = 2\angle(CEF))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(A=B)\ \&$
$\neg(C=D)\ \&\ \rightarrow \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \leftrightarrow$
$\exists_E(E - \text{точка}\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{прямая}(AE) \perp$
$\text{прямая}(CD)))$

15. Попытка использовать дополнительную импликацию для переходя к понятиям меньшей сложности. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема проверочного оператора. Выбирается антецедент A, содержащий самый сложный подтерм антецедентов t. Оценка его сложности больше 10. В разделе, к которому относится заголовок f выражения t, находится теорема T, заголовок бесповторного консеквента которой тот же, что у A, причем он содержит символ f. Эту теорему тоже можно использовать для создания приема проверочного оператора, причем оценка сложности ее консеквента больше оценок сложности антецедентов. Она используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. Проверяется, что антецеденты новой теоремы не содержат символа f. (Прием спуск - 26).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ac}(c - \text{set}\ \&\ c \subseteq \text{Val}(a)\ \&\ a - \text{функция}\ \&\ \text{конечное}(c) \rightarrow \text{card}(c) \le \text{card}(\text{Dom}(a)))$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{функция}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ b \le \text{card}(\text{Val}(a)) \rightarrow b \le \text{card}(\text{Dom}(a)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ a \subseteq b \rightarrow \text{card}(a) \le \text{card}(b))$

16. Попытка свести антецедент к утверждениям меньшей сложности. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Некоторый антецедент A является максимально сложным подтермом антецедентов. Его корневые операнды - атомарные выражения. Заголовок A - символ f. Находится определение $B_1 \leftrightarrow B_2$ утверждений с заголовком f. Заголовок B_2 - квантор существования. Данное определение используется для преобразования антецедента A. Результат упрощается. (Прием вывод - 68).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abcdeF}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(c = d)\ \&\ e \in \text{прямая}(cd)\ \&\ e \in \text{окружность}(ab)\ \&$
    $F \in \text{окружность}(ab)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&$
    $e - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(ae) \perp \text{прямая}(cd) \rightarrow$
    $\text{однасторона}(a, F, \text{прямая}(cd)))$

    из теоремы

    $\forall_{ABCDF}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&$
    $\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB)\ \&$
    $F \in \text{окружность}(AB) \rightarrow \text{однасторона}(A, F, \text{прямая}(CD)))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
    $\neg(C = D) \rightarrow \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \leftrightarrow$
    $\exists_E(E - \text{точка}\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{прямая}(AE) \perp$
    $\text{прямая}(CD)))$

17. Попытка упростить сложное подвыражение антецедента. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Некоторый антецедент A имеет не менее 3 параметров. Он содержит подвыражение t, оценка сложности которого больше 5. Заголовок t - символ f. Находится тождество T вида $B_1 = B_2$, у которого заголовок B_1 - символ f; оценка сложности B_2 меньше оценки сложности B_1, причем множество параметров B_2 - собственное подмножество параметров B_1. Оценка сложности антецедентов меньше оценки сложности консеквента. Теорема T используется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием вывод - 73).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{bdf}(0 < b\ \&\ b - \text{число}\ \&\ f - \text{натуральное}\ \&\ \text{числнабор}(d, f) \rightarrow d \in \text{евклокр}(d, b))$

    из теоремы

    $\forall_{abnx}(\text{евклрасст}(a, x) < b\ \&\ b - \text{число}\ \&\ n - \text{натуральное}\ \&\ \text{числнабор}(a, n)\ \&$
    $\text{числнабор}(x, n) \rightarrow x \in \text{евклокр}(a, b))$

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{df}(f - \text{натуральное}\ \&\ \text{числнабор}(d, f) \rightarrow \text{евклрасст}(d, d) = 0)$

18. Реализация равенства в антецедентах при помощи дополнительного тождества. Консеквент теоремы - равенство двух атомарных выражений. Имеется единственный антецедент A с заголовком "равно". Обе части этого равенства имеют один и тот же заголовок f. Находится тождество общей стандартизации T, консеквент которого - равенство двух выражений с заголовком f, причем каждое из этих выражений - максимально сложный подтерм самого себя. Теорема T используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. Проверяется, что новая теорема не имеет равенств в антецедентах. (Прием равны - 38).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{cd}$(перестановка$(c, \{1, \ldots, d\})$ & $d-$натуральное $\rightarrow$ четность(обрфункция(c)) = четность(c))

    из теоремы

    $\forall_{abn}$(перестановка$(a, \{1, \ldots, n\})$ & перестановка$(b, \{1, \ldots, n\})$ & числоинверсий(a) = числоинверсий(b) & n – натуральное $\rightarrow$ четность(a) = четность(b))

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{an}$(перестановка$(a, \{1, \ldots, n\})$ & n – целое & $0 \leq n \rightarrow$ числоинверсий(обрфункция(a)) = числоинверсий(a))

19. Попытка перейти к антецедентам с меньшей сложностью. Теорема имеет вид обобщенной транзитивности: два бесповторных существенных антецедента и бесповторный консеквент, каждый не более чем с двумя переменными; переменные консеквента - симметрическая разность множеств переменных антецедентов. Выбирается тот существенный антецедент A, оценка сложности N которого не меньше оценки сложности другого. Проверяется, что эта оценка болтше 8. По заголовку f утверждения A находится теорема T, консеквент которой тоже имеет заголовок f. Его оценка сложности не меньше N. Все антецеденты элементарны, причем оценки сложности их подтермов, имеющих более одного корневого операнда, меньше N. Отсутствует антецедент, включающий все параметры консеквента. Теорема T используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием транзитоперанд - 17).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_{abdG}$(a – натуральное & b – натуральное & $a \leq b$ & $b \leq$ мдлина$(d) + 1$ & оргpаф(G) & цепь$(d, G) \rightarrow$ цепь(отрмарш$(d, a, b), G)$)

    из теоремы

    $\forall_{GMN}$(оргpаф(G) & цепь(N, G) & подмаршрут$(M, N) \rightarrow$ цепь(M, G))

    и дополнительной теоремы

    $\forall_{mnGM}$(оргpаф(G) & m – натуральное & n – натуральное & $m \leq n$ & $n \leq$ мдлина$(M) + 1$ & маршрут$(M, G) \rightarrow$ подмаршрут(отрмарш$(M, n, n), M)$)

20. Попытка упрощения сложного подтерма антецедента. Теорема - тождество, упрощающее либо исключающее описатель. Выбирается антецедент A с максимальной оценкой сложности. В нем находится подтерм t, оценка сложности которого больше 9. Заголовок этого подтерма - символ f. Находится квантор-ное тождество T, преобразующее выражение с заголовком f в выражение с меньшей оценкой сложности. Оно используется для преобразования выражения t. Результат упрощается. Проверяется, что все антецеденты новой теоремы элементарны. (Прием описатель - 110).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_c(c - \text{комплексное} \to \lim_{z\to c}\exp(z) = \exp(c))$

    из теоремы

    $\forall_{abfAB}(f - \text{функция } \&\ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{C}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{C}\ \&\ A - \text{число } \&\ a - \text{число } \&$
    $B - \text{число } \&\ b - \text{число } \&\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} \text{вещчастьфунк}(f)(x,y) = A\ \&$
    $\lim_{(x,y)\to(a,b)} \text{мнимчастьфунк}(f)(x,y) = B \to \lim_{z\to a+bi} f(z) = A + Bi)$

    и дополнительной теоремы

    $\text{вещчастьфунк}(\lambda_z(\exp(z), z - \text{комплексное})) = \lambda_{xy}(\exp(x)\cos(y), x - \text{число } \&$
    $y - \text{число})$

21. Попытка упрощения сложного подтерма антецедента. Аналогично предыдущему, но теорема - простая импликация для приема проверочного оператора. (Прием спуск - 61).

    Пример: вывод теоремы

    $\forall_a(a - \text{комплексное} \to \text{Непрерывно}(\lambda_z(\exp(z), z - \text{комплексное}), a))$

    из теоремы

    $\forall_{af}(f - \text{функция } \&\ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{C}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{C}\ \&\ \text{Предельныточка}(a, \text{Dom}(f))\ \&$
    $a \in \text{Dom}(f)\ \&\ \text{непрерывно}(\text{вещчастьфунк}(f), \text{вещформа}(a))\ \&$
    $\text{непрерывно}(\text{мнимчастьфунк}(f), \text{вещформа}(a)) \to \text{Непрерывно}(f, a))$

    и дополнительной теоремы

    $\text{вещчастьфунк}(\lambda_z(\exp(z), z - \text{комплексное})) = \lambda_{xy}(\exp(x)\cos(y), x - \text{число } \&$
    $y - \text{число})$

Переход к сложному антецеденту с более простыми операндами

1. Попытка упростить подтерм сложного антецедента. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Некоторый ее антецедент A имеет оценку сложности N, большую 5. Консеквент не включает все параметры этого антецедента, причем его оценка сложности больше N. Максимально сложный подтерм антецедента A - он сам. Заголовок A - символ f. В разделе символа f находится теорема T, консеквент B_1 и некоторый антецедент B_2 которой имеют заголовок f. При этом B_2 получается из B_1 отбрасыванием части операндов некоторых своих подтермов.

Теорема T используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием вывод - 79).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcd}(a \in \text{вершины}(d)$ & $\text{граф}(d)$ & $c \in \text{компсвязн}(d, a)$ & $\text{смежны}(b, c, d) \rightarrow$
$b \in \text{компсвязн}(d, a))$

из теоремы

$\forall_{abzG}(\text{граф}(G)$ & $\text{вершмаршрут}(z, G)$ & $a = \text{начало}(z)$ & $b = \text{конец}(z) \rightarrow$
$b \in \text{компсвязн}(G, a))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{aGM}(\text{граф}(G)$ & $\text{смежны}(a, \text{конец}(M), G)$ & $\text{вершмаршрут}(M, G) \rightarrow$
$\text{вершмаршрут}(\text{суффикс}(M, a), G))$

Уменьшение глубины антецедента

1. Попытка свести неодноуровневый антецедент к одноуровневым. Теорема - простая импликация, выражающая свойства "сложного" объекта. Некоторый антецедент A имеет отличный от символа "не" заголовок. Его собственный неоднобуквенный подтерм t имеет заголовок f. Глубина всех остальных антецедентов, не имеющих заголовка "не", равна 1. Находится теорема T с консеквентом вида $B = a$, где B - выражение с заголовком f, a - переменная, не входящая в B. Глубина любого антецедента этой теоремы равна 1. Подтерм t антецедента A преобразуется при помощи теоремы T. Результат упрощается. (Прием свойства - 17).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abd}(\neg(d = \emptyset)$ & $\text{перестановка}(a, b)$ & $b - \text{set}$ & $d - \text{set}$ & $d \subseteq b$ & $\text{конечное}(b) \rightarrow$
   $\neg(\text{прообраз}(a, d) = \emptyset))$

   из теоремы

   $\forall_{df}(\neg(d = \emptyset)$ & $d - \text{set}$ & $d \subseteq \text{Val}(f)$ & $f - \text{функция} \rightarrow \neg(\text{прообраз}(f, d) = \emptyset))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{fA}(\text{перестановка}(f, A)$ & $A - \text{set}$ & $\text{конечное}(A) \rightarrow \text{Val}(f) = A)$

10.5 Усиление антецедента

1. Попытка усилить и переформулировать условие непересечения в антецедентах. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Она имеет антецедент A вида "непересек(A_1, A_2)". Терм A_1 - максимально сложный подтерм A. Он имеет заголовок f. В разделе символа f находится теорема T без существенных антецедентов с элементарным консеквентом вида "$B_1 \subseteq B_2$", где B_1 имеет заголовок f. Все переменные теоремы T встречаются в B_1. Находится подстановка S, переводящая B_1 в A_1.

Результат замены в A выражения A_1 на $S(B_2)$ упрощается и превращается в утверждение R, не содержащее символа "непересек". Антецедентами новой теоремы становятся отличные от A антецеденты исходной теоремы, утверждение R и результаты применения S к антецедентам теоремы T. Консеквент тот же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием вывод - 56).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \neg(A \in \text{прямая}(CD))\ \&\ A - \text{точка}\ \&$
$B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \rightarrow$
$\text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(C = D)\ \&\ B \in \text{плоскость}(ACD)\ \&\ \text{непересек}(\text{прямая}(CD),$
$\text{отрезок}(AB))\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \rightarrow$
$\text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B) \rightarrow \text{отрезок}(AB) \subseteq \text{прямая}(AB))$

2. Усиление антецедента: переход от "длялюбого существует" к "существует длялюбого". Теорема имеет антецедент A вида $\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n \rightarrow \exists_{y_1 \ldots y_p}(B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_m))$". Список $B_1, \ldots, B_m$ разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих переменные $x_1, \ldots, x_k$, и подсписок S_2 остальных утверждений. Создается список Q, образованный отличными от A антецедентами исходной теоремы, а также утверждениями S_2. Антецедентами новой теоремы становятся утверждения Q, а также результат упрощения относительно Q утверждения $\forall_{x_1 \ldots x_k}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n \rightarrow S_1)$. Консеквент тот же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием существант - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{anA}(\forall_b(b \in \{1, \ldots, n\} \rightarrow A(b, a) = 0)\ \&\ a \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \rightarrow \det(A) = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{nA}(\forall_p(\text{перестановка}(p, \{1, \ldots, n\}) \rightarrow \exists_a(A(p(a), a) = 0\ \&\ a \in \{1, \ldots, n\}))\ \&$
   $\text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \rightarrow \det(A) = 0)$

3. Усиление антецедентов дополнительной теоремы с помощью текущей эквивалентности. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2\ \&\ A_3$, выполняющее общую стандартизацию при переходе справа налево. Параметры любого из A_1, A_2, A_3 охватывают все переменные теоремы. Оценки сложности A_2 и A_3 равны. В разделах, определяемых заголовками A_1 и A_2, находится теорема T с характеристикой "спуск" либо "вывод". Некоторые ее антецедентах C преобразуются с помощью исходной теоремы: усматривается подстановка S, переводящая A_2 либо A_3 в C, после чего C заменяется на $S(A_1)$, и добавляются результаты применения S к антецедентам исходной теоремы. После этих преобразований теоремы T результат упрощается и регистрируется в списке вывода. (Прием общнорм - 98).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{afxA}(A - \text{set} \ \& \ x \in A \ \& \ \text{Единица}(a, f) \ \& \ \text{бинарнооперация}(f, A) \to f(x, a) = x)$

из теоремы

$\forall_{af}(\text{левединица}(a, f) \ \& \ \text{правединица}(a, f) \to \text{Единица}(a, f))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{afxA}(A - \text{set} \ \& \ \text{бинарнооперация}(f, A) \ \& \ x \in A \ \& \ \text{правединица}(a, f) \to f(x, a) = x)$

4. Переход от одностороннего отношения в антецедентах дополнительной теоремы к двустороннему. Теорема - определение вида $A_1 \leftrightarrow A_2 \ \& \ A_3$, где A_2, A_3 элементарны и имеют тот же список параметров, что и A_1. Этот список включает все параметры теоремы. Каждое из A_2, A_3 - максимально сложный подтерм заменяющей части, и других максимально сложных подтермов нет. Заголовки утверждений A_2, A_3 относятся к одному и тому же разделу. В этом разделе находится эквивалентность либо равенство T упрощающего либо разрешающего типа, имеющая антецедент B с тем же заголовком, что A_2. Определяется подстановка S, переводящая A_2 в B. Новая теорема получается из T заменой B на $S(A_1)$. Проверяется, что результаты применения S к антецедентам исходной теоремы содержатся среди антецедентов новой теоремы. (Прием определение - 258).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{afxyzA}(A - \text{set} \ \& \ \text{ассоциативно}(f) \ \& \ \text{бинарнооперация}(f, A) \ \& \ \text{левединица}(a, f) \ \& \ \text{обратимо}(f) \ \& \ x \in A \ \& \ y \in A \ \& \ z \in A \to f(x, y) = f(x, z) \leftrightarrow y = z)$

из теоремы

$\forall_f(\text{левобратимо}(f) \ \& \ \text{правобратимо}(f) \leftrightarrow \text{обратимо}(f))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{afxyzA}(A - \text{set} \ \& \ \text{ассоциативно}(f) \ \& \ \text{бинарнооперация}(f, A) \ \& \ \text{левединица}(a, f) \ \& \ \text{левобратимо}(f) \ \& \ x \in A \ \& \ y \in A \ \& \ z \in A \to f(x, y) = f(x, z) \leftrightarrow y = z)$

5. Попытка усиления кванторного антецедента для перехода к элементарному утверждению. Теорема - тождество, упрощающее выражение под корневой сложной операцией. Она имеет антецедент A вида $\forall_{x_1 \ldots x_n}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_k \to A_0)$. Оценка сложности утверждения A_0 больше 8. Наиболее сложный подтерм t утверждения A_0 имеет заголовок f. В разделе символа f находится простая импликация T, консеквент которой имеет тот же заголовок, что и A_0, причем он содержит символ f. Антецеденты и консеквент бесповторны, причем каждая переменная встречается в консеквенте. Определяется подстановка S, переводящая консеквент теоремы T в A_0. Список результатов применения S к антецедентам теоремы T разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих переменные $x_1, \ldots, x_n$, и подсписок S_2 остальных утверждений. Кванторная импликация $\forall_{x_1 \ldots x_n}(A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_k \to S_1)$ упрощается и превращается

в элементарное утверждение R. Антецедентами новой теоремы становятся отличные от A антецеденты исходной теоремы и R. Консеквент ее тот же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием сокращ - 42).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abd}(b - \text{функция}\ \&\ a - \text{число}\ \&\ \text{непрерывно}(\text{плотнраспред}(b,d),\mathbb{R})\ \&$
$\text{верпространство}(d)\ \&\ \text{непрвеличина}(b,d) \rightarrow$
$\text{плотнраспред}(\lambda_c(a + b(c), c \in \text{элемсобытия}(d)), d) =$
$\lambda_x(\text{плотнраспред}(b,d)(x - a), x - \text{число}))$

из теоремы

$\forall_{abd}(\forall_x(x - \text{число} \rightarrow \text{дифференцируема}(\text{функраспред}(b,d),x))\ \&\ a - \text{число}\ \&$
$\text{верпространство}(d)\ \&\ \text{непрвеличина}(b,d) \rightarrow$
$\text{плотнраспред}(\lambda_c(a + b(c), c \in \text{элемсобытия}(d)), d) =$
$\lambda_x(\text{плотнраспред}(b,d)(x - a), x - \text{число}))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{fxP}(f - \text{функция}\ \&\ x - \text{число}\ \&\ \text{верпространство}(P)\ \&\ \text{непрвеличина}(f,P)\ \&$
$\text{непрерывно}(\text{плотнраспред}(f,P),x) \rightarrow \text{дифференцируема}(\text{функраспред}(f,P),x))$

6. Переход от произвольной функции к набору. Теорема - кванторная импликация без существенных антецедентов, имеющая элементарный консеквент. Она имеет единственный антецедент вида "$f -$функция". В теореме встречается подвыражение "$\text{card}(\text{Dom}(f))$". Антецедент "$f -$ функция" заменяется на "$f -$ слово". Результат упрощается. (Прием элементарно - 19).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_a(a - \text{слово} \rightarrow \text{card}(\text{Val}(a)) \leq l(a))$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{функция} \rightarrow \text{card}(\text{Val}(a)) \leq \text{card}(\text{Dom}(a)))$

7. Переформулировка антецедентов в терминах временного промежутка и отнесение консеквента к точке этого промежутка. Теорема - кванторная импликация, которая может быть использована для создания приема вывода в посылках задачи. Имеется антецедент "$t -$ число", причем из антецедентов усматривается, что t играет роль "текущего" момента времени. Выбирается новая переменная T; каждый антецедент A, содержащий t, заменяется на "$\forall_t(t \in T \rightarrow A)$", и добавляются антецеденты "$\text{Числотр}(T)$", "$t \in T$". Результат упрощается. Проверяется, что все антецеденты новой теоремы элементарны. (Прием вывод - 92).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{acdfK}(f \in \text{внутренность}(a)\ \&\ \text{движвлево}(c,K,a)\ \&\ \text{неподв}(d,a)\ \&$
   $\text{движениепо}(c,d,a)\ \&\ \text{движется}(c,d,a)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\ \&\ \text{Числотр}(a) \rightarrow$
   $\text{вправо}(\text{силатрения}(c,d,f),K))$

   из теоремы

$\forall_{cdfK}(0 <$ длина(Скорость$(c,d,f))$ & $f -$ число & движениепо(c,d,f) & влево(Скорость$(c,d,f),K)$ & Трехмерн$(K) \rightarrow$ вправо(силатрения$(c,d,f),K))$

8. Переформулировка антецедентов в терминах временного промежутка и отнесение консеквента к точке этого промежутка. Аналогично предыдущему, но теорема - соотношение для числовых атомов. (Прием числовойатом - 92).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abct}(t \in$ внутренность(c) & движениепо(a,b,c) & движется(a,b,c) & Числотр$(c) \rightarrow$ длина(силатрения$(a,b,t)) =$ длина(нормреакция$(a,b,t))$коэффтрения$(a,b))$

   из теоремы

   $\forall_{abt}($движениепо(a,b,t) & $t -$ число & $0 <$ длина(Скорость$(a,b,t)) \rightarrow$ длина(силатрения$(a,b,t)) =$ коэффтрения(a,b)длина(нормреакция$(a,b,t)))$

9. Попытка применить определение характеристики множества точек к уравнению для координат множества специального вида. Теорема - эквивалентность "$P(E) \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}($коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{y_1 \ldots y_n}(B_1)$ & $B_2)$", определяющая общий вид уравнения для координат точек множества E типа P. Переменная E не входит в B_2. Все переменные $x_1, \ldots, x_k$ - параметры выражения "$\mathrm{set}_{y_1 \ldots y_n}(B_1)$". Находится теорема T, имеющая антецедент C вида "коорд$(M,Q) = \mathrm{set}_{z_1 \ldots z_n} F(z_1 \ldots z_n)$", где F - переменная. Консеквент этой теоремы - эквивалентность $C_1 \leftrightarrow C_2$, где C_1 - еометрическая характеризация множества M, C_2 - переформулировка свойства C_1 через параметр F. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Находится подстановка S, переводящая "коорд(M,Q)" в "коорд(E,K)". Составляется список D_1 результатов применения S к отличным от C антецедентам теоремы T. Проверяется, что утверждения этого списка не содержат F. Составляется список D_2, полученный добавлением к D_1 антецедентов исходной теоремы, а также утверждений $P(E)$, "невырожд(E)", "коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{y_1 \ldots y_n}(B_1)$" и B_2. Определяется результат применения S к $C_1 \leftrightarrow C_2$. В этом результате вхождения вида $F(t_1 \ldots t_n)$ заменяются на результаты подстановки $t_1, \ldots, t_n$ вместо $y_1, \ldots, y_n$ в B_1. Получается эквивалентность $G_1 \leftrightarrow G_2$. Составляется список X, полученный добавлением к $x_1, \ldots, x_k$ переменных для опорных точек системы координат, если таковые имеются. Решается задача на исследование, посылки которой - утверждения D_2 и G_2. Неизвестные - X. Имеются также цели "известно", "теорвывод", "исключ Y", где Y - все параметры посылок, не входящие в X. Возможен разбор случаев. Из частичных ответов выделяются фрагменты, составленные из утверждений, содержащих только неизвестные и не имеющие заголовка "актив". Избыточные члены удаляются. Составляется дизъюнкция таких фрагментов. Она упрощается и превращается в утверждение R. Проверяется, что G_2 - следствие D_2 и R. Консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $G_1 \leftrightarrow R$. Антецеденты - D_2. Результат упрощается. (Прием уравнкрив - 15).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdefABCEK}(K = (A,B,C)$ & коорд$(E,K) = \mathrm{set}_{xy}(f + ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey =$ 0 & $x -$ число & $y -$ число) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & прямкоорд(K) &

линвторпорядка(E) & невырожд(E) $\rightarrow$ осьсимметрии(прямая(AC), E) $\leftrightarrow$
$b = 0$ & $d = 0$)

из теоремы

$\forall_E(E - \text{set}$ & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & прямкоорд(K) &
$K = (A, B, C)$ & $E \subseteq$ плокость(ABC) $\rightarrow$ линвторпорядка(E) $\leftrightarrow$
$\exists_{abcdef}(a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число &
$f -$ число & коорд(E, K) $= \text{set}_{xy}(f + ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0$ &
$x -$ число &
$y -$ число) & $\neg$(Нуль($\{a, b, c\}$))))

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCFKM}(M \subseteq$ Точки & прямкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ &
коорд(M, K) $= \text{set}_{xy}(F(x, y)) \rightarrow$ осьсимметрии(прямая(AC), M) $\leftrightarrow$
коорд(M, K) $= \text{set}_{xy}(x -$ число & $F(-x, y)))$

10.6 Сужение теоремы путем добавления антецедента, упрощающего идентификацию

1. Добавление антецедента, являющегося связующим звеном с параметром выводимого утверждения. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Выбирается параметр a консеквента, встречающийся в единственном антецеденте A. Консеквент и A не имеют других общих параметров. Решается задача на исследование, посылки которой суть антецеденты и отрицание консеквента. Неизвестные - параметры посылок. Имеются также цели "известно", "следствие". После решения выбирается посылка B, не имеющая заголовка "актив", содержащая переменную a и еще какую-либо переменную консеквента. Параметры этой посылки включаются в параметры антецедентов. Новая теорема получается добавлением B к антецедентам теоремы. (Прием вывод - 40).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDa}(\neg(a = B)$ & $\neg(a = A)$ & $\neg(C = D)$ & $\neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD))$ &
   $A-$точка & $B-$точка & $C-$точка & $D-$точка & однасторона($A, B,$ прямая(CD))
   & $a \in$ прямая(CD) & $a \in$ прямая(AB) & $\neg(A = B) \rightarrow \neg(a \in$ отрезок(AB)))

   из теоремы

   $\forall_{ABCDa}(\neg(C = D)$ & $\neg(A \in$ прямая(CD)) & $\neg(B \in$ прямая(CD)) & $A -$ точка &
   $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & однасторона($A, B,$ прямая(CD)) &
   $a \in$ прямая(CD) $\rightarrow \neg(a \in$ отрезок(AB)))

10.7 Варьирование сложного антецедента

Попытка свести одно равенство к другому

1. Попытка сведения равенства двух числовых атомов в антецедентах к другим равенствам. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для

создания приема вывода в посылках задачи. Консеквент имеет сложность, большую сложности антецедентов, и содержит все их параметры. Его заголовок отличен от символов "равно", "меньше", "меньшеилиравно". Выбирается антецедент A, представляющий собой равенство двух невырожденных числовых атомов с одним и тем же заголовком f. Нет другого антецедента - равенства двух термов с заголовком f. Находится теорема T, консеквент которой - равенство двух атомов с заголовком f. Она имеет равенство среди антецедентов. Все параметры антецедентов входят в консеквент. Теорема T используется для преобразования антецедента A. При помощи задачи на исследование проверяется непротиворечивость антецедентов новой теоремы. Результат упрощается. (Прием вывод - 37).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcd}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(a=c)\ \&\ \neg(b=c)\ \&\ \neg(b=d)\ \&\ \neg(c=d)\ \&\ l(ab)=l(bd)\ \&$
$a-$точка $\&\ b-$точка $\&\ c-$точка $\&\ d-$точка $\&$ прямая$(ab)\perp$ прямая$(ac)\ \&$
прямая$(bd)\perp$ прямая$(cd)\ \&$ разныестороны$(d,a,$прямая$(bc))\rightarrow$
биссектриса$(dcab))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(A=D)\ \&\ \angle(BAD)=\angle(CAD)\ \&$
$A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&\ 0\leq-\angle(CAD)+\pi/2\ \&$
разныестороны$(B,C,$прямая$(AD))\rightarrow$ биссектриса$(BACD))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCabc}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(a=c)\ \&\ \neg(b=c)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&$
$\neg(B=C)\ \&\ l(ab)=l(AB)\ \&\ l(bc)=l(BC)\ \&\ a-$точка $\&\ b-$точка $\&$
$c-$точка $\&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&$ прямая$(ab)\perp$ прямая$(ac)\ \&$
прямая$(AB)\perp$ прямая$(AC)\rightarrow\angle(ACB)=\angle(acb))$

2. Попытка варьирования равенства числовых атомов в антецедентах. Консеквент теоремы - равенство двух атомарных выражений. Некоторый антецедент A - равенство двух выражений с заголовком f. Находится теорема T, консеквент которой - равенство двух невырожденных числовых атомов с заголовком f, причем среди антецедентов тоже имеется равенство двух невырожденных числовых атомов с одинаковым заголовком (возможно, отличным от f). Параметры этого антецедента включаются в параметры консеквента. Теорема T используется для преобразования антецедента A. Результат упрощается. Проверяется, что число переменнхы теоремы не увеличилось по сравнению с исходной теоремой. (Прием равны - 26).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcdef}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(e=f)\ \&\ l(cd)=l(ef)\ \&\ c\in$ окружность$(ab)\ \&$
   $d\in$ окружность$(ab)\ \&\ e\in$ окружность$(ab)\ \&\ f\in$ окружность$(ab)\ \&$
   $a-$точка $\&\ b-$точка $\&\ c-$точка $\&\ d-$точка $\&\ e-$точка $\&$
   $f-$точка $\rightarrow\angle(acd)=\angle(aef))$

   из теоремы

$\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$F - \text{точка}\ \&\ \neg(D = F)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
$\neg(B = C)\ \&\ \neg(E = F)\ \&\ \angle(BAC) = \angle(EDF)\ \&\ l(AB) = l(DE)\ \&$
$l(AC) = l(DF) \to \angle(ABC) = \angle(DEF))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&$
$F - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ C \in \text{окружность}(AB)\ \&\ D \in \text{окружность}(AB)\ \&$
$E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ F \in \text{окружность}(AB)\ \&\ l(CD) = l(EF) \to$
$\angle(CAD) = \angle(EAF))$

3. Попытка свести равенство двух числовых атомов в антецедентах к равенству двух других числовых атомов. Консеквент теоремы - равенство двух атомарных выражений. Имеется антецедент $A_1 = A_2$, представляющий собой равенство двух невырожденных числовых атомов. Других равенств в антецедентах нет. Выбирается новая переменная a, и решается задача на исследование, посылки которой - антецеденты и утверждения "$A_1 = a$", "число(a)". Неизвестные - параметры антецедентов. Имеется цель "известно". После решения выбираются две различные посылки $B_1 = t, B_2 = t$, где B_1, B_2 - невырожденные числовые атомы, t - выражение, содержащее a. Составляется список S, полученный заменой в списке антецедентов утверждения $A_1 = A_2$ на $B_1 = B_2$. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что консеквент исходной теоремы - следствие S. Новая теорема получается из исходной заменой списка антецедентов на S. Результат упрощается. (Прием равны - 19).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(\angle(ABC) = \angle(BCD)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
   $D - \text{точка}\ \&\ \text{трапеция}(ABCD) \to l(AB) = l(CD))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(\angle(ADC) = \angle(BAD)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&$
   $D - \text{точка}\ \&\ \text{трапеция}(ABCD) \to l(AB) = l(CD))$

4. Варьирование равенства числовых атомов в антецедентах. Теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. Имеется антецедент A вида $A_1 = A_2$, где A_1, A_2 - невырожденные числовые атомы с одним и тем же заголовком f. Отсутствуют другие равенства в антецедентах. Находится теореа T - тождество $B_1 = B_2$, выражающее невырожденный атом B_1 с заголовком f через другой невырожденный атом C той же сложности. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется результат T_1 переобозначения в T переменных на новые переменные, не входящие ни в T, ни в исходную теорему. Консеквент теоремы T_1 - равенство $D_1 = D_2$; атом C превратился в атом C_1. пределяется подстановка S, унифицирующая A_1 с B_1 и одновременно A_2 с D_1. Консеквентом новой теоремы становится результат применения S к консеквенту исходной теоремы. Антецеденты - результаты применения S к отличным от A антецедентам исходной теоремы и к антецедентам теорем T, T_1. Кроме того, антецедентом является равенство $S(C) = S(C_1)$. Результат упрощается. (Прием числовойатом - 37).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cefgh}(\neg(c=h)\ \&\ \neg(e=f)\ \&\ \neg(e=h)\ \&\ \neg(f=g)\ \&\ \neg(f=h)\ \&$
$\neg(\text{прямая}(eg)=\text{прямая}(fh))\ \&\ \angle(chf)=\angle(gfh)\ \&\ f\in\text{отрезок}(eg)\ \&$
$h\in\text{отрезок}(ce)\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ e-\text{точка}\ \&\ f-\text{точка}\ \&\ g-\text{точка}\ \&\ h-\text{точка}\rightarrow$
$l(ef)=l(eh))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AB)=\text{прямая}(AC))\ \&\ \angle(ACB)=$
$\angle(BAC)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\rightarrow l(AB)=l(BC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \neg(B=C)\ \&$
$\neg(B=D)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ B\in\text{отрезок}(AC)\rightarrow\angle(ABD)=\pi-\angle(CBD))$

5. Попытка варьирования числового атома в антецедентах при помощи дополнительного тождества. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Все параметры антецедентов входят в консеквент. Заголовок консеквента отличен от символов "равно", "меньше", "меньшеилиравно". Имеется единственный A с заголовком "равно". Он содержит невырожденный числовой атом A_1. Этот атом не имеет других вхождений в теорему. Его заголовок - символ f. Находится теорема T, консеквент которой - равенство двух невырожденных числовы атомов с заголовком f. Все параметры антецедентов этой теоремы встречаются в ее консеквенте. Среди антецедентов нет равенства. Оценка сложности антецедентов теоремы T не превосходит оценки сложности ее консеквента, а также оценки сложности антецедентов исходной теоремы. Теорема T используется для преобразования атома A_1. Результат упрощается. (Прием вывод - 36).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{Cabcde}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(a=c)\ \&\ \neg(a=d)\ \&\ \neg(a=e)\ \&\ \neg(a=C)\ \&$
$\angle(caC)=\angle(dae)\ \&\ a\in\text{отрезок}(be)\ \&\ a\in\text{отрезок}(cd)\ \&\ a-\text{точка}\ \&$
$b-\text{точка}\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ d-\text{точка}\ \&\ e-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&$
$0\leq-\angle(dae)+\pi/2\ \&\ \text{разныестороны}(b,C,\text{прямая}(cd))\rightarrow\text{биссектриса}(baCc))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(A=D)\ \&\ \angle(BAD)=\angle(CAD)\ \&$
$A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ 0\leq-\angle(CAD)+\pi/2\ \&$
$\text{разныестороны}(B,C,\text{прямая}(AD))\rightarrow\text{биссектриса}(BACD))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDE}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&$
$\neg(A=E)\ \&\ \neg(A=D)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ A\in\text{отрезок}(BE)\ \&$
$A\in\text{отрезок}(CD)\rightarrow\angle(BAC)=\angle(DAE))$

6. Использование аддитивности числовых атомов для варьирования соотношения пропорциональности в антецедентах. Теорема выводит отличный от равенства нечисловой двуместный предикат. Она имеет антецедент A вида $A_1 \cdot A_2 = B_1 \cdot B_2$, где A, A_2, B_1, B_2 - невырожденные числовые атомы с заголовком f. Находится теорема T с консеквентом вида $C_1 = C_2 + C_3$, где C_1, C_2, C_3 - невырожденные числовые атомы с заголовком f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Все переменные теоремы T встречаются в атомах C_2, C_3. Находится подстановка S_1, переводящая C_1 в B_2 и одновременно C_2 в A_1. Кроме того, находится подстановка S_2, переводящая C_1 в A_2 и одновременно C_2 в B_1. Антецедент A заменяется на $A_1 \cdot S_2(C_3) = B_1 \cdot S_1(C_3)$. Добавляются результаты применения S_1 и S_2 к антецедентам теоремы T. Результат упрощается. (Прием отношение - 17).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDE}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ \neg(B = D)\ \&\ \neg(C = E)\ \&\ l(AB)l(DE) = l(AD)l(BC)\ \&\ B \in \text{отрезок}(AC)\ \&\ D \in \text{отрезок}(AE)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(BD) \parallel \text{прямая}(CE))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDE}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \neg(C = E)\ \&\ \neg(B = D)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ E \in \text{прямая}(AD)\ \&\ C \in \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{точкалуча}(A, D, E)\ \&\ \text{точкалуча}(A, B, C)\ \&\ l(AE)l(AB) = l(AD)l(AC) \rightarrow \text{прямая}(BD) \parallel \text{прямая}(CE))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ B \in \text{отрезок}(AC) \rightarrow l(AC) = l(AB) + l(BC))$

7. Попытка варьирования антецедента с помощью утверждения существования для соотношения между несколькими числовыми атомами. Теорема - равенство двух атомарных выражений. Она имеет единственный антецедент A вида $A_1 = A_2$. При этом A_1, A_2 - невырожденные числовые атомы. Заголовок атома A_1 - символ f. Находится теорема T, консеквент которой имеет вид "$\exists_x(B_1 = B_2\ \&\ B_3)$, где $B_1 = B_2$ - равенство, содержащее невырожденные числовые атомы, ровно один из которых - некоторый атом C - содержит x. Это равенство однозначно разрешимо относительно атома C. Он имеет единственное вхождение в $B_1 = B_2$. Утверждение B_3 не содержит равенств для числовых атомов. Заголовком C служит символ f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Находится подстановка S, переводящая список конъюнктивных членов B_3, к которому добавлен терм "фикс(C)", в подсписок Q списка антецедентов исходной теоремы, к которому добавлен терм "фикс(A_1)". При этом переменная x переводится в некоторую переменную y. Список содержащих y антецедентов исходной теоремы, отличных от A, включается в Q. Антецедентами новой теоремы становятся отличные от A антецеденты исходной теоремы, результаты применения S к антецедентам теоремы T, а также результат замены в равенстве $B_1 = B_2$ подтерма C на A_2 с одновременным применением подстановки S к той его части, которая расположена вне C. Консеквент ее тот же, что у исходной теоремы. (Прием равны - 23).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdjABCDE}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(c=d)\ \&\ \neg(c=j)\ \&\ \neg(d=j)\ \&\ \neg(A=B)\ \&$
$neg(C=D)\ \&\ \neg(C=E)\ \&\ \neg(D=E)\ \&\ \angle(cjd)+\angle(CED)=\pi\ \&$
$c\in$ окружность$(ab)\ \&\ d\in$ окружность$(ab)\ \&\ j\in$ окружность$(ab)\ \&$
$C\in$ окружность$(AB)\ \&\ D\in$ окружность$(AB)\ \&\ E\in$ окружность$(AB)\ \&$
$a-$точка $\&\ b-$точка $\&\ c-$точка $\&\ d-$точка $\&\ j-$точка $\&\ A-$точка $\&$
$B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&\ E-$точка $\rightarrow\angle(CAD)=\angle(cad))$

из теоремы

$\forall_{abcdeABCDE}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(c=d)\ \&\ \neg(c=e)\ \&\ \neg(d=e)\ \&\ \neg(A=B)\ \&$
$neg(C=D)\ \&\ \neg(C=E)\ \&\ \neg(D=E)\ \&\ \angle(ced)=\angle(CED)\ \&$
$c\in$ окружность$(ab)\ \&\ d\in$ окружность$(ab)\ \&\ e\in$ окружность$(ab)\ \&$
$C\in$ окружность$(AB)\ \&\ D\in$ окружность$(AB)\ \&\ E\in$ окружность$(AB)\ \&$
$a-$точка $\&\ b-$точка $\&\ c-$точка $\&\ d-$точка $\&\ e-$точка $\&\ A-$точка $\&$
$B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&\ E-$точка $\rightarrow\angle(CAD)=\angle(cad))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDEF}(A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ D-$точка $\&\ E-$точка $\&$
$\neg(A=B)\ \&\ C\in$ окружность$(AB)\ \&\ D\in$ окружность$(AB)\ \&$
$E\in$ окружность$(AB)\ \&\ \neg(C=E)\ \&\ \neg(D=E)\rightarrow\exists_F(F\in$ окружность$(AB)\ \&$
$F-$точка $\&\ \neg(F=C)\ \&\ \neg(F=D)\ \&\ \angle(CED)+\angle(CFD)=\pi))$

8. Попытка исключения не входящего в консеквент параметра числового равенства в антецедентах. Теорема - равенство двух атомарных выражений. Выбирается антецедент $A_1=A_2$, у которого обе части имеют заголовок f. Он имеет единственную переменную x, не входящую в консеквент. Обратно, консеквент имеет единственную переменную, не входящую в данный антецедент. Находится теорема T, у которой некоторый антецедент B имеет вид равенства двух невырожденных числовых атомов с одинаковым заголовком, а консеквент тоже имеет вид равенства двух невырожденных числовых атомов $D_1=D_2$, причем обе его части имеют заголовок f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Консеквент имеет единственную переменную y, не входящую в B. Определяется подстановка S, переводящая $D_1=D_2$ в $A_1=A_2$. Она переводит переменную y в x. Составляется список Q отличных от $A_1=A_2$ антецедентов исходной теоремы и результатов применения S к антецедентам теоремы T. Он разбивается на подсписок Q_1 утверждений, содержащих x, и подсписок Q_2 остальных утверждений. Решается задача на описание, условия которой суть Q_1, а посылки - Q_2. Единственная неизвестная - x, причем она несущественная. Имеются также цели "явное", "прямойответ", "исключ". Ответ R не содержит x. Антецедентами новой теоремы становятся Q_2 и R. Консеквент тот же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием равны - 33).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bABD}(\neg(b=D)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ \neg(b\in$ прямая$(AB))\ \&\ \neg(D\in$ прямая$(AB))\ \&$
$l(bA)=l(bB)\ \&\ b-$точка $\&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ D-$точка $\&$ прямая$(bD)\perp$
прямая$(AB)\ \&$ общаяплоскость(прямая(AB), прямая$(bD))\rightarrow l(AD)=l(BD))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - $точка & $B - $точка & $C - $точка & $D - $точка & $\neg(A = B)$ & $\neg(C = D)$ & прямая$(CD) \perp$ прямая(AB) & $l(AC) = l(BC)$ & $C \in$ прямая$(AB) \to l(AD) = l(BD))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(A - $точка & $B - $точка & $C - $точка & $D - $точка & $\neg(A = C)$ & $\neg(B = D)$ & $l(AB) = l(BC)$ & прямая$(BD) \perp$ прямая(AC) & $D \in$ прямая$(AC) \to l(AD) = l(DC))$

9. Варьирование числовых атомов соотношения пропорциональности в антецедентах. Теорема имеет антецедент вида $p \cdot A_1 = q \cdot A_2$ - соотношение пропорциональности для невырожденных числовых атомов A_1 и A_2. Решается задача на исследование, посылки которой суть антецеденты. Неизвестные - параметры посылок. Имеются также цели "известно", "теорема". После решения выбирается равенство B в посылках, не входившее в исходный список посылок. Оно содержит ровно три невырожденных числовых атома - A_1, A_2 и A_3. При помощи задачи на описание равенство B разрешается относительно A_1. Полученный ответ преобразуется к виду д.н.ф. Рассматривается дизъюнктивный член этой д.н.ф., который упрощается при помощи задачи на преобразование и приобретает вид "$A_1 = B_1$ & B_2". Составляется список S результатов замены в антецедентах исходной теоремы подтермов A_1 на B_1. Новая теорема имеет своими антецедентами утверждения S и $A_1 = B_1, B_2$. Консеквент тот же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием смпропорц - 1).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdepABCK}(\neg(A = B)$ & координ$(A, K) = (a, b)$ & координ$(B, K) = (c, d)$ & $C \in$ отрезок(AB) & $p - $число & $A - $точка & $B - $точка & $C - $точка & систкоорд$(K)$ & $el(AC) = pl(BC)$ & $e - $число & $\neg(e + p = 0) \to$ координ$(C, K) = ((ae + cp)/(e + p), (be + dp)/(e + p)))$

из теоремы

$\forall_{ABCKabcdpq}(p - $число & $q - $число & $A - $точка & $B - $точка & $C - $точка & систкоорд$(K)$ & координ$(A, K) = (a, b)$ & координ$(B, K) = (c, d)$ & точкалуча(A, B, C) & $pl(AB) = ql(AC)$ & $\neg(q = 0) \to$ координ$(C, K) = (a + (c - a)p/q, b + (d - b)p/q))$

10. Усиление антецедентов для перехода к соотношению пропорциональности в антецедентах между другими атомами. Теорема имеет антецедент вида $p \cdot A_1 = q \cdot A_2$ - соотношение пропорциональности для невырожденных числовых атомов A_1 и A_2, причем p, q - переменные. Решается задача на исследование, посылки которой - все антецеденты, параметры которых включаются в список параметров атомов A_1 и A_2, а также утверждения "актив(A_1)" и "актив(A_2)". Неизвестные - параметры посылок. Имеются также цели "имп" и "известно". Первая цель разрешает ввод дополнительных посылок. При этом в комментарии (имп B_1 B_2) усматривается одна из таких посылок B_1 и следствие B_2 из нее, представляющее собой соотношение для числовых атомов A_1, A_2 и A_3. Оно разрешается относительно A_1. Получается равенство $A_1 = C$, где каждый из атомов A_2, A_3 входит в C только внутри операций "плюс", "умножение",

"минус". Это равенство используется для исключения A_1 в исходной теореме. Добавляется антецедент B_1. Результат упрощается. (Прием смпропорц - 10).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abABCDE}(\neg(A = E)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(DE))\ \&\ al(AB) = bl(BD)\ \&\ B \in \text{отрезок}(AD)\ \&\ C \in \text{прямая}(AE)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(DE) \rightarrow (a + b)l(BC) = bl(DE))$

из теоремы

$\forall_{abABCDE}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ \neg(A = E)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ B \in \text{прямая}(AD)\ \&\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC)\ \&\ C \in \text{прямая}(AE)\ \&\ \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(AD))\ \&\ al(AB) = bl(AD) \rightarrow al(BC) = bl(DE))$

Варьирование антецедента дополнительной теоремы

1. Варьирование антецедента дополнительной теоремы. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Консеквент имеет заголовок f, оценка сложности которого больше 4. При этом единственный максимально сложный подтерм консеквента является его корневым операндом. В разделе символа f находится теорема T - тождество, содержащее отдельные разряды координат либо выражающее сложный числовой атом через более простые. Оно имеет единственный антецедент A с заголовком f. Среди антецедентов его нет равенства. Исходная теорема используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием вывод - 57).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcdef}(b \in \{2, 3\}\ \&\ d \in f\ \&\ \text{мточка}(c)\ \&\ \text{одномерндвиж}(c, e, f)\ \&\ \text{Трехмерн}(e)\ \&\ \text{Числотр}(f) \rightarrow \text{крд}(\text{Ускорение}(c, e, d), e, b) = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{atKT}(t \in T\ \&\ \text{мточка}(a)\ \&\ \text{одномерндвиж}(a, K, T)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\ \&\ \text{Числотр}(T) \rightarrow \text{одномерный}(\text{Ускорение}(a, K, t), K))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abK}(\text{Вектор}(a)\ \&\ \text{одномерный}(a, K)\ \&\ \text{Трехмерн}(K)\ \&\ b \in \{2, 3\} \rightarrow \text{крд}(a, K, b) = 0)$

2. Варьирование антецедента дополнительной теоремы, если текущая теорема - следствие определения (длина консеквента 2). Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Консеквент имеет вид $P(x)$, где x - переменная. Оценка сложности его больше 2. Стартовая теорема цикла вывода - определение отличного от P символа f. Не более двух переменных корневой связывающей приставки отличны от x. Имеется единственный существенный антецедент. В разделе символа P находится

теорема T с характеристикой "вывод", не содержащая символа f, некоторый антецедент A которой имеет заголовок P. Исходная теорема используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. Проверяется, что если заголовок результата - равенство, то обе его части бесповторны. (Прием вывод - 67).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cGH}(\text{граф}(G)\ \&\ \text{цепь}(c,H)\ \&\ \text{остовндерево}(G,H) \rightarrow \text{простаяцепь}(c,H))$

из теоремы

$\forall_{GH}(\text{граф}(G)\ \&\ \text{остовндерево}(G,H) \rightarrow \text{ациклический}(H))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{cd}(\text{граф}(d)\ \&\ \text{цепь}(c,d)\ \&\ \text{ациклический}(d) \rightarrow \text{простаяцепь}(c,d))$

3. Варьирование антецедента дополнительной теоремы, если текущая теорема - следствие определения (длина консеквента 3). Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Длина консеквента 3. Оценка сложности его больше 2, причем наиболее сложный его подтерм - он сам. Антецеденты имеют единственный параметр. Существенный антецедент единственный. Заголовок консеквента - символ f. В разделе символа f находится теорема T с характеристикой "усиление", имеющая единственный антецедент A с заголовком f. Исходная теорема используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием вывод - 77).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{aG}(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \text{вершины}(G)\ \&\ \text{оргграф}(G)\ \&\ \text{конечнграф}(G) \rightarrow$
   $\text{card}(\text{вершины}(G)) = \text{card}(a) \leftrightarrow a = \text{вершины}(G))$

   из теоремы

   $\forall_{G}(\text{оргграф}(G)\ \&\ \text{конечнграф}(G) \rightarrow \text{конечное}(\text{вершины}(G)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ a \subseteq b\ \&\ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a) = \text{card}(b) \leftrightarrow a = b)$

4. Использование тождества для преобразования других тождеств к системе координат нового типа. Теорема имеет консеквент вида "коорд$(A,K) = (a_1 \ldots a_n)$". Правая часть равенства не содержит невырожденных числовых атомов. Имеется антецедент вида "$P(B,Q) = (b_1 \ldots b_n)$", где тип P системы координат отличен от "коорд". Находится теорема T - тождество, связывающее невырожденные числовые атомы с параметрами координат. Она имеет антецеденты "коорд$(C_1,D) = (c_1 \ldots c_n), \ldots,$ коорд$(C_m,D) = (d_1 \ldots d_n)$". Других вхождений символа "коорд" она не имеет. Консеквент теоремы T имеет единственный невырожденный числовой атом. Исходная теорема используется для одновременного преобразования левых частей указанных антецедентов теоремы T. Результат упрощается. (Прием систкоорд - 29).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdjklmnABK}(\neg(l = A)\ \&\ \neg(l = B)\ \&\ K = (l, m, n)\ \&$ полкоорд$(A, K) = (c, d)\ \&$ полкоорд$(B, K) = (j, k)\ \&\ A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&$ прямкоорд$(K) \rightarrow l(AB) = \sqrt{-2cj\cos(d-k) + c^2 + j^2})$

из теоремы

$\forall_{abABCDK}(\neg(A = D)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&$ полкоорд$(D, K) = (a, b)\ \&\ D -$ точка $\&$ прямкоорд$(K) \rightarrow$ коорд$(D, K) = (a\cos b, a\sin b))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABabpqK}(A -$ точка $\&\ B -$ точка $\&$ прямкоорд$(K)\ \&$ коорд$(A, K) = (a, b)\ \&$ коорд$(B, K) = (p, q) \rightarrow l(AB) = \sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2})$

5. Варьирование антецедента дополнительной теоремы, имеющего вид условия принадлежности. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Консеквент имеет вид "$A_1 \in A_2$", где A_1 - бесповторное атомарное выражение, длина которого не менее 3. A_2 - неконстантное выражение с заголовком f. Находится теорема T - равенство, содержащее отдельные разряды координат либо тождество, выражающее сложный числовой атом через более простые. Она имеет единственный антецедент B с заголовком "принадлежит" и не имеет равенств в антецедентах. Исходная теорема используется для реализации антецедента B. (Прием вывод - 58).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcde}(a \in \{2, 3\}\ \&\ c \in e\ \&$ мточка$(b)\ \&$ одномерндвиж$(b, d, e)\ \&$ Трехмерн$(d)\ \&$ Числотр$(e) \rightarrow$ крд(Место$(b, c), d, a) = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{atKT}(t \in T\ \&$ мточка$(a)\ \&$ одномерндвиж$(a, K, T)\ \&$ Трехмерн$(K)\ \&$ Числотр$(T) \rightarrow$ Место$(a, t) \in$ осьабсцисс$(K))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{aAK}(A \in$ осьабсцисс$(K)\ \&\ A -$ точка $\&$ Трехмерн$(K)\ \&\ a \in \{2, 3\} \rightarrow$ крд$(A, K, a) = 0)$

6. Варьирование двух антецедентов дополнительной теоремы, имеющих вид условия принадлежности одному и тому же множеству. Начало такое же, как выше, но теорема T имеет ровно два антецедента с заголовком "принадлежит". Они имеют вид "$x \in t, y \in t$", где x, y - две различные переменные, не входящие в t. Выражение A_1 из консеквента исходной теоремы имеет ровно одну переменную a, для которой исходная теорема имеет антецедент вида "$a \in r$". Рассматривается копия исходной теоремы, в которой a заменено на новую переменную b. Затем исходная теорема используется для реализации антецедента $x \in t$, а ее копия - для реализации антецедента $y \in t$. Результат упрощается. (Прием вывод - 60).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcde}(a \in e \ \&\ c \in e \ \&\ \text{мточка}(b) \ \&\ \text{одномерндвиж}(b,d,e) \ \&\ \text{Трехмерн}(d) \ \&\ \text{Числотр}(e) \to l(\text{Место}(b,a)\text{Место}(b,c)) = |\text{крд}(\text{Место}(b,c),d,1) - \text{крд}(\text{Место}(b,a),d,1)|)$

из теоремы

$\forall_{atKT}(t \in T \ \&\ \text{мточка}(a) \ \&\ \text{одномерндвиж}(a,K,T) \ \&\ \text{Трехмерн}(K) \ \&\ \text{Числотр}(T) \to \text{Место}(a,t) \in \text{осьабсцисс}(K))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABK}(A - \text{точка} \ \&\ B - \text{точка} \ \&\ \text{Трехмерн}(K) \ \&\ A \in \text{осьабсцисс}(K) \ \&\ B \in \text{осьабсцисс}(K) \to l(AB) = |\text{крд}(A,K,1) - \text{крд}(B,K,1)|)$

7. Варьирование антецедента дополнительной теоремы. Теорема - тождество $A_1 = f(A_2, A_3)$, где A_1 - нечисловое атомарное выражение без связанных переменных. Находится теорема T, у которой некоторый антецедент B - бесповторное утверждение с двумя переменными, заключенными в некотором корневом операнде t с заголовком f. Консеквент - бесповторное двуместное отношение с теми же переменными, но находящимися в различных корневых операндах. Прочие антецеденты содержат лишь по одной переменной. Исходная теорема используется для преобразования подтерма t дополнительной теоремы (направление - справа налево). Результат упрощается. (Прием Атомарное - 17).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cdef}(\text{Сила}(c,f) = \text{вектор0} \ \&\ f - \text{число} \ \&\ \text{Силы}(c,\{d,e\},f) \ \&\ \text{мточка}(c) \to \text{длина}(\text{сила}(c,d,f)) = \text{длина}(\text{сила}(c,e,f)))$

   из теоремы

   $\forall_{acdt}(t - \text{число} \ \&\ \text{Силы}(a,\{c,d\},t) \ \&\ \text{мточка}(a) \to \text{Сила}(a,t) = \text{сила}(a,c,t) + \text{сила}(a,d,t))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ab}(\text{Вектор}(a) \ \&\ \text{Вектор}(b) \ \&\ a + b = \text{вектор0} \to \text{длина}(a) = \text{длина}(b))$

8. Попытка наложить ограничение на значения одного из числовых атомов для вывода нечислового отношения. Теорема - тождество $A_1 = A_2 + A_3$ для невырожденных числовых атомов. A_2 - один из таких атомов, причем имеющий единственное вхождение в консеквент. Его заголовок - символ f. Находится теорема T, консеквент которой - нечисловой предикат без невырожденных числовых атомов, причем антецеденты содержат единственный нечисловой атом t с заголовком f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Выбирается некоторый содержащий t антецедент B. Определяется подстановка S, переводящая t в A_2. Консеквентом новой теоремы становится результат применения S к консеквенту теоремы T. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы, результаты применения S к отличным от B антецедентам теоремы T и результат применения S к результату замены в B подтерма t на "$A_1 - A_3$". Результат упрощается. (Прием числовойатом - 23).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABC}(\neg(A=B)\ \&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \angle(ACB)+\angle(BAC)=\pi/2\ \&$
$A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\rightarrow$ прямая$(AB)\perp$ прямая$(BC))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ \neg(A=C)\ \&\ \neg(B=C)\ \&$
$\neg(A=B)\rightarrow\angle(ABC)+\angle(BCA)+\angle(BAC)=\pi)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(A=B)\ \&$
$\angle(ABC)=\pi/2\rightarrow$ прямая$(AB)\perp$ прямая$(BC))$

9. Варьирование антецедента дополнительной теоремы. Консеквент теоремы - отличный от равенства двуместный нечисловой предикат. Все параметры антецедентов встречаются в консеквенте. Имеется единственный существенный антецедент A. Он элементарный и имеет те же параметры, что и консеквент. Его максимально сложный подтерм единственный и имеет заголовок f. Максимально сложный подтерм консеквента имеет другой заголовок g. В разделе символа g находится теорема T - простая импликация с характеристикой "отношение" либо "числзнач", имеющая единственный антецедент B, содержащий символ g. Ее консеквент не содержит g. Исходная теорема используется для реализации B. Результат упрощается. (Прием отношение - 33).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a\in$ интервал$(bc)\ \&\ a-$точка $\&\ b-$точка $\&\ c-$точка $\rightarrow l(bc)=l(ab)+l(ac))$

   из теоремы

   $\forall_{aAB}(a\in$ интервал$(AB)\ \&\ A-$точка $\&\ B-$точка $\rightarrow a\in$ отрезок$(AB))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABC}(A-$точка $\&\ B-$точка $\&\ C-$точка $\&\ B\in$ отрезок$(AC)\rightarrow$
   $l(AC)=l(AB)+l(BC))$

10. Использование определения для свертки антецедентов. Теорема была выведена для переформулировки антецедентов других теорем. Составляется список S заголовков неоднобуквенных подтермов консеквента. В разделах символов S находится теорема T, имеющая элементарный консеквент и не более 5 переменных. Среди характеристик теоремы имеется хотя бы один из символов "вывод", "спуск", "числзнач", "числоценка", "равны", "отношение". Число антецедентов с тем же заголовком, что у консеквента исходной теоремы, не более 2. Выбирается некоторый такой антецедент A. Проверяестя, что он включает все символы списка S и не имеет связанных переменных. Исходная теорема используется для реализации антецедента A. Проверяется непротиворечивость антецедентов. Результат упрощается. (Прием опрнапр - 1).

    Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcdD}(\neg(b=c)\ \&\ \neg(b=D)\ \&\ a\in$ окружность$(bc)\ \&\ d\in$ окружность$(bc)\ \&$ биссектриса$(dbaD)\ \&\ a-$точка $\&\ b-$точка $\&\ c-$точка $\&\ d-$точка $\&\ D-$точка $\rightarrow l(dD)=l(aD))$

из теоремы

$\forall_{aABC}(\neg(A=B)\ \&\ a\in$ окружность$(AB)\ \&\ C\in$ окружность$(AB)\ \&\ A-$точка $\&$ $B-$ точка $\rightarrow l(AC)=l(aA))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(A-$ точка $\&\ B-$ точка $\&\ C-$ точка $\&\ D-$ точка $\&\ \neg(A=D)\ \&$ $\neg(A=C)\ \&$ биссектриса$(BACD)\ \&\ l(AB)=l(AC)\rightarrow l(BD)=l(CD))$

11. Использование теоремы для варьирования антецедента дополнительной теоремы и исключения параметра. Консеквент теоремы имеет вид $A_0\leftrightarrow\exists_x(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n)$. Единственное утверждение A_i содержит переменную x внутри неоднобуквенного подвыражения. Единственный максимально сложный подтерм терма A_i - он сам. Заголовок A_i - символ f. В разделе символа f находится теорема T с элементарным консеквентом B, представляющим собой тождество либо неравенство для невырожденных числовых атомов. У этой теоремы нет равенств в антецедентах, но имеется единственный антецедент C с заголовком f. Он включает все переменные теоремы. Переменные теоремы T переобозначены и не входят в исходную теорему. Находится подстановка S, переводящая утверждение A_i в C. Она переводит переменную x в некоторую переменную y. Составляется список Q_1 тех результатов применения S к утверждениям $A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_n$, параметры которых включаются в C. Проверяется, что Q_1 - подсписок антецедентов теоремы T. Список антецедентов теоремы T разбивается на подсписок Q_2 утверждений, содержащих y, и подсписок Q_3 остальных утверждений. Проверяется, что каждое утверждение списка Q_2, не входящее в Q_1 и отличное от C, является следствием списка Q_4 результатов применения S к антецедентам исходной теоремы и к утверждениям $A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_n$. Список $r_1,\ldots,r_m$ невырожденных числовых атомов утверждения B, содержащих y, непуст. Переменная y входит в консеквент только внутри таких атомов. Выбираются новые переменные $z_1,\ldots,z_m$, и решается задача на исследование, посылки которой суть антецеденты теоремы T, утверждения Q_4, равенства $r_1=z_1,\ldots,r_m=z_m$ и "z_1- число, $\ldots,z_m-$ число". Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "исключ y". После решения в посылках находятся равенства "$z_1=t_1,\ldots,z_m=t_m$", где выражения $t_1,\ldots,t_m$ не содержат y. Консеквентом новой теоремы становится результат замены в B атомов $r_1,\ldots,r_m$ на $t_1,\ldots,t_m$. Антецеденты - результаты применения S к антецедентам исходной теоремы, утверждения Q_3 и $S(A_0)$. Результат упрощается. (Прием развертка - 56).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcB}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(c=B)\ \&\ a-$ точка $\&\ b-$ точка $\&\ c-$ точка $\&$ $B-$ точка $\&$ прямая$(ab)-$ касательная к окружность$(cB)\rightarrow 0\leq -l(cB)+l(ac))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
$\neg(C = D) \to \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \leftrightarrow \exists_E(E - \text{точка}\ \&$
$E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ E \in \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{прямая}(AE) \perp \text{прямая}(CD)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D)\ \&$
$\neg(A = B)\ \&\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD)\ \&\ D \in \text{прямая}(AB) \to$
$0 \le l(AC) - l(CD))$

Варьирование подвыражения антецедента

1. Варьирование самого сложного подвыражения антецедентов. Наиболее сложный терм антецедентов - выражение A, причем он единственный и имеет единственное вхождение. Глубина этого вхождения больше 1, а оценка сложности больше 4. Заголовок A - символ f. Находится тождество $B_1 = B_2$, выражающее невырожденнй числовой атом B_1 с заголовком f через другой невырожденный числовой атом той же сложности. Это тождество используется для преобразования подвыражения A. Результат упрощается. (Прием главнчлен - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abce}(e(c) = \inf(\text{образ}(e,(a,b)))\ \&\ 0 < b - c\ \&\ 0 < c - a\ \&\ (a,b) \subseteq \text{Dom}(e)\ \&$
   $\text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ e - \text{функция}\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \text{дифференцируема}(e,c) \to$
   $\text{производная}(e,c) = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{abcf}(f - \text{функция}\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ (a,b) \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&$
   $0 < c - a\ \&\ 0 < b - c\ \&\ f(c) = \sup(\text{образ}(f,(a,b)))\ \&\ \text{дифференцируема}(f,c) \to$
   $\text{производная}(f,c) = 0)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{af}(a - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ \text{огрснизу}(\text{образ}(f,a))\ \&$
   $\text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \sup(\text{образ}(\lambda_x(-f(x), x \in \text{Dom}(f)), a)) = -\inf(\text{образ}(f,a)))$

2. Попытка исключения подвыражения антецедента, имеющего более одного параметра. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема проверочного оператора, имеющего единственный непосредственно идентифицируемый антецедент. Выбирается антецедент A, имеющий подвыражение t с не менее чем 2 параметрами. Находится теорема T - тождество $B_1 = B_2$, имеющее повторный заменяемый терм B_1 и бесповторный заменяющий. Множество переменных заменяющего терма - собственное подмножество переменных заменяемого. Число существенных антецедентов не более 2, число переменных не более 3. Заголовки B_1 и t совпадают. Тождество T используется для преобразования t. Результат упрощается. (Прием легковидеть - 19).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ c - \text{set}\ \&\ c \subseteq b\ \&\ \text{конечное}(b \setminus a) \to \text{конечное}(c \setminus a))$

   из теоремы

$\forall_{cde}(c - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&\ c \subseteq d \cup e\ \&\ \text{конечное}(e) \to \text{конечное}(c \setminus d))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ce}(c - \text{set}\ \&\ e - \text{set} \to (c \cap e) \cup (e \setminus c) = e)$

3. Переход от обычного задания класса к параметрическому. Теорема имеет антецедент вида "коорд$(A, K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_n}(B)$". Антецедент такого вида единственный. Заголовок B отличен от символа "существует". Имеется также антецедент $P(A)$. Находится тождество $C_1 = C_2$, преобразующее обычное уравнение C_1 (описатель "класс") для координат множества точек объекта типа P в параметрическое. Оно используется для преобразования описателя "set$x_1 \ldots x_n(B)$". Результат упрощается. (Прием уравндробь - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{defghpqBK}(\neg(e^2 + g^2 = 0)\ \&\ \text{коорд}(d, K) = \text{set}_{jk}(\exists_i(j = f + ei\ \&\ k = h + gi\ \&\ i - \text{число}))\ \&\ \text{коорд}(B, K) = (p, q)\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ g - \text{число}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ \text{Прямая}(d)\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \text{Вектор}(B) \to d \parallel B \leftrightarrow gp - eq = 0)$

   из теоремы

   $\forall_{abcdpqBK}(\text{коорд}(d, K) = \text{set}_{xy}(c{+}ax{+}by = 0\ \&\ x{-}\text{число}\ \&\ y{-}\text{число})\text{коорд}(B, K) = (p, q)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ \text{Прямая}(d)\ \&\ \text{систкоорд}(K)\ \&\ \text{Вектор}(B) \to d \parallel B \leftrightarrow ap + bq = 0)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcd}(a{-}\text{число}\ \&\ b{-}\text{число}\ \&\ c{-}\text{число}\ \&\ d{-}\text{число}\ \&\ \neg(a^2{+}c^2 = 0) \to \text{set}_{xy}(\exists_t(x = at{+}b\ \&\ y = ct{+}d\ \&\ t{-}\text{число})) = \text{set}_{xy}(cx{-}ay{+}ad{-}bc = 0\ \&\ x{-}\text{число}\ \&\ y{-}\text{число}))$

4. Попытка определения уравнения для координат множества точек, рассматриваемых в антецедентах. Теорема - эквивалентность, выражающая утверждение через параметры координат. Она имеет антецедент A вида "коорд$(A, K) = \text{set}_{x_1 \ldots x_n}(B)$". Заголовок выражения A - логический символ f. Находится тождество T вида "коорд$(C, Q) = \text{set}_{y_1 \ldots y_n}(D)$", где заголовок C - символ f. Оно используется для преобразования подтерма "коорд(A, K)". Полученная теорема R_1 имеет, после переобозначения связанных переменных, антецедент F вида "$\text{set}_{X_1 \ldots X_n}(G) = \text{set}_{X_1 \ldots X_n}(H)$". Определяются параметры P данного антецедента, и список прочих антецедентов теоремы R разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих P, и подсписок S_2 остальных утверждений. Решается задача на описание с условиями $S_1, \forall_{X_1 \ldots X_n}(G \to H), \forall_{X_1 \ldots X_n}(H \to G)$ и посылками S_2. Неизвестные - P; имеются также цели "полный", "явное", "прямойответ", "упростить". Новая теорема получается из теоремы R заменой антецедента F на ответ задачи. Результат упрощается. (Прием числопред - 6).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{defklmnB}(n = (k, l, m)\ \&\ \text{коорд}(B, n) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0\ \&\ u - \text{число}\ \&\ v - \text{число})\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ f - \text{число}\ \&\ \text{Прямая}(B)\ \&\ \text{систкоорд}(n) \to B \parallel \text{прямая}(kl) \leftrightarrow d = 0)$

   из теоремы

$\forall_{abcdefhiBK}(\neg(h = i)$ & координ$(B, K) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0$ & $u -$ число & $v -$ число) & координ(прямая$(hi), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0$ & $x -$ число & $y -$ число) & $a -$ число & $b -$ число & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $f -$ число & Прямая(B) & $h -$ точка & $i -$ точка & систкоорд$(K) \rightarrow$ $B \parallel$ прямая$(hi) \leftrightarrow ae - bd = 0)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCK}($систкоорд(K) & $K = (A, B, C) \rightarrow$ координ(прямая$(AB), K) =$ $\text{set}_{xy}(y = 0$ & $x -$ число$))$

5. Попытка исключить описатель "класс" в антецедентах. Антецедент A имеет вхождене подтерма t вида "$\text{set}_{x_1 \ldots x_n}(A_1$ & $\ldots$ & $A_m)$". Внутри A_i выбирается неоднобуквенный подтерм r, содержащий все параметры утверждений $A_1, \ldots, A_m$. По его заголовку f находится тождество свертки T вида $B_1 = B_2$, где заголовки обеих частей равны f. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка S, переводящая r в B_1. Находится список $y_1, \ldots, y_n$ переменных, в которые эта подстановка переводит переменные $x_1, \ldots, x_n$. Список антецедентов теоремы T разбивается на подсписок Q_1 утверждений, содержащих $y_1, \ldots, y_n$, и подсписок Q_2 остальных утверждений. Определяются список Q_3 результатов применения S к утверждениям $A_1, \ldots, A_m$ и список Q_4 результатов применения S к отличным от A антецедентам исходной теоремы. Проверяется, что Q_1 - следствие утверждений Q_2, Q_3, Q_4. Определяется результат R замены в A_i подтерма r на B_2 и одновременного применения подстановки S к остальной части A_i. Решается задача на описание, условиями которой служат R и $S(A_1), \ldots, S(A_{i-1}), S(A_{i+1}), \ldots, S(A_m)$. Посылки - утверждения Q_2, Q_4. Неизвестные - $y_1, \ldots, y_n$. Имеются также цели "полный", "явное", "прямойответ". После того, как получен ответ D, определяется результат H замены вхождения t в A на "$\text{set}_{y_1 \ldots y_n}(D)$" и одновременного применения подстановки S к остальной части A. Консеквентом новой теоремы становится результат применения S к консеквенту исходной теоремы, антецедентами - Q_2, Q_4 и H. Результат упрощается. (Прием главнчлен - 4).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcA}(c =$ операция(A) & $a \in$ носитель(A) & $b -$ натуральное & группа$(A) \rightarrow$ порядокэлемента(алгстепень$(a, c, b), A) =$ (порядокэлемента$(A, a)/$нод$(b,$ порядокэлемента$(a, A))$ при порядокэлемента$(a, A) -$ натуральное, иначе $\emptyset))$

из теоремы

$\forall_{AxfP}($группа(A) & $x \in$ носитель(A) & $f =$ операция(A) & $\text{set}_n($алгстепень$(x, f, n) =$ единица(f) & $n -$ натуральное$) = P \rightarrow$ порядокэлемента$(x, A) = (\infty$ при $P = \emptyset,$ иначе $\inf(P)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bcdfA}(A -$set & $b \in A$ & $c -$натуральное & $d -$натуральное & ассоциативно(f) & бинарнооперация$(f, A) \rightarrow$ алгстепень$(b, f, cd) =$ алгстепень(алгстепень$(b, f, c), f, d))$

6. Использование упрощающего тождества для варьирования функциональной переменной в антецеденте. Имеется единственный антецедент A, содержащий описатель "отображение". Вхождение этого описателя единственное. Он имеет вид "$\lambda_x(A_2, A_1)$". Внутри A_2 выбирается подвыражение $f(t_1, t_2)$, такое, что x входит как в t_1, так и в t_2. Это подвыражение имеет единственный подтерм с заголовком "значение". Он имеет вид "значение(g, x)", где g - переменная, не имеющая других вхождений в A_2. Находится тождество $B_1 = B_2$, у которого заголовок левой части - f. Оно предназначено для развязки вхождений варьируемой переменной. Внутри B_2 выделяется подтерм Q, полученный из B_1 отбрасыванием части операндов. Переменные Q - собственное подмножество переменных B_1. Это тождество применяется для преобразования $f(t_1, t_2)$. В результат "значение(g, x)" преобразуется в некоторый терм, содержащий как функциональную переменную. "значение(h, x)", так и новые переменные. Результат упрощается. (Прием отображ - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{af}(|a|\overline{\lim}_{c\to\infty}(|f(c)|^{1/c}) < 1$ & $a -$ число & последовательность$(f, \mathbb{R}) \to$
   сходится$(\lambda_d(\sum_{c=1}^{d} f(c)a^c, d -$ натуральное$)))$

   из теоремы

   $\forall_b(\overline{\lim}_{c\to\infty}(|b(c)|^{1/c}) < 1$ & последовательность$(b, \mathbb{R}) \to$
   сходится$(\lambda_d(\sum_{c=1}^{d} b(c), d -$ натуральное$)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(a -$число & $c -$число & $b -$rational & $\neg(b = 0)$ & $\neg($знаменатель$(b) -$even$) \to$
   $|ca^b|^{1/b} = |c|^{1/b}|a|)$

7. Попытка проварьировать один из числовых атомов равенства в антецедентах с помощью другого тождества. Консеквент теоремы C - равенство двух атомарных выражений. Некоторый антецедент $A_1 = A_2$ - равенство двух выражений с заголовком f. Находится теорема T, консеквент которой - равенство $B_1 = B_2$ двух невырожденных числовых атомов с заголовком f, причем все параметры антецедентов входят в консеквент. Среди антецедентов теоремы T нет равенств. Все переменные исходной теоремы встречаются в A_1. Определяется подстановка S, переводящая A_1 в B_1. Консеквентом новой теоремы становится $S(C)$, антецедентами - результаты применения S к отличным от $A_1 = A_2$ антецедентам исходной теоремы, антецеденты теоремы T и равенство $S(A_2) = B_2$. Результат упрощается. (Прием равны - 40).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{BDEF}(\neg(B = E)$ & $\neg(D = F)$ & $\neg($прямая$(BE) =$ прямая$(BF))$ &
   $\neg($прямая$(BE) =$ прямая$(DF))$ & $\angle(DFE) = \angle(EBF)$ & $B -$ точка &
   $E -$ точка & $F -$ точка & прямая$(BE) \parallel$ прямая(DF) &
   разныестороны$(B, D,$ прямая$(EF)) \to l(BF) = l(EF))$

   из теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A = B)$ & $\neg(A = C)$ & $\neg($прямая$(AB) =$ прямая$(AC))$ &
   $\angle(ACB) = \angle(BAC)$ & $A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка $\to l(AB) = l(BC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{BDEF}(B - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \neg(D = F)\ \&\ \neg(B = E)\ \&\ \text{прямая}(BE) \parallel \text{прямая}(FD)\ \&\ \neg(\text{прямая}(BE) = \text{прямая}(FD))\ \&\ \text{разныестороны}(B, D, \text{прямая}(EF)) \rightarrow \angle(EFD) = \angle(BEF))$

Переформулировка антецедента через координаты объектов

1. Попытка ввести в антецеденты уравнение для координат нового множества объектов. Консеквент теоремы имеет вид "$\exists_{x_1 \ldots x_n}(\text{коорд}(A_1, K) = \text{set}_{y_1 \ldots y_m}(A_2)\ \&\ A_3)$". Выбирается элементарный антецедент B_1, параметры которого пересекаются с параметрами консеквента, но не включаются в них. Его заголовок f отличен от символов "равно", "меньше", "меньшеилиравно". Выбирается также антецедент B_2 вида "$\text{коорд}(C, K) = (t_1, \ldots, t_m)$". Параметры C не включаются в параметры A_1. Находится теорема T, у которой антецедент задает уравнение для координат множества объектов, а элементарный консеквент D_1 с заголовком f содержит часть параметров этого уравнения. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Теорема T имеет антецедент F вида "$\text{коорд}(E, Q) = (r_1, \ldots, r_m)$", параметры которого переспекаются с параметрами консеквента. Определяется подстановка S, унифицирующая B_2 с F и одновременно B_1 с D_1. Консеквентом новой теоремы становится результат применения S к консеквенту исходной теоремы, антецедентами - результаты применения S к отличным от B_1 антецедентам исходной теоремы и отличным от F антецедентам теоремы T. Результат упрощается. (Прием координаты - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{djklmnpqABF}(\neg(d = m)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(dm), F) = \text{set}_{vwE}(v - \text{число}\ \&\ w - \text{число}\ \&\ E - \text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((j, k, l), (n + v, p + w, q + E)))\ \&\ j - \text{число}\ \&\ k - \text{число}\ \&\ l - \text{число}\ \&\ n - \text{число}\ \&\ p - \text{число}\ \&\ q - \text{число}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ m - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(dm) \parallel \text{прямая}(AB)\ \&\ \text{Трехмерн}(F) \rightarrow \exists_{abc}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), F) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((j, k, l), (a + x, b + y, c + z)))\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}))$

   из теоремы

   $\forall_{ghijklABCDK}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \neg(j^2 + k^2 + l^2 = 0)\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(CD), K) = (g, h, i)\ \&\ j - \text{число}\ \&\ k - \text{число}\ \&\ l - \text{число}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD)\ \&\ \text{пропорцнаборы}((g, h, i), (j, k, l))\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \exists_{abc}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((j, k, l), (a + x, b + y, c + z)))\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcghijkpqrK}(\neg(a = g)\ \&\ \text{коорд}(\text{прямая}(ag), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число}\ \&\ y - \text{число}\ \&\ z - \text{число}\ \&\ \text{пропорцнаборы}((p, q, r), (x + h, y + i, z + j)))\ \&\ \text{коорд}(\text{вектор}(ga), K) = (b, c, k)\ \&\ p - \text{число}\ \&\ q - \text{число}\ \&\ r - \text{число}\ \&\ h - \text{число}\ \&\ i - \text{число}\ \&\ j - \text{число}\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ g - \text{точка}\ \&\ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{пропорцнабор}((b, c, k), (p, q, r)))$

2. Попытка перейти к заданию сопровождающего объекта уравнением для координат его множества точек. Консеквент теоремы имеет вид "$\exists_{x_1 \ldots x_n}$(коорд$(A_1, K) = \text{set}_{y_1 \ldots y_m}(A_2)$ & A_3)". A_1 и K - переменные. Имеется антецедент B, не содержащий символа "коорд", но содержащий переменную A_1. В нем выбирается неоднобуквенный атомарный подтерм C, не содержащий A. Проверяется, что его значением служит множество. Этот подтерм не имеет других вхождений в антецеденты. Антецеденты, содержащие символ "коорд", не имеют общих параметров с термом C. Выбирается новая переменная a, и решается задача на описание, единственное условие которой - "$a =$ коорд(C, K)". Посылки - отличные от B антецеденты. Единственная неизвестная - a. Имеются также цели "полный", явное", "прямойответ", "точки", "известно P", где P - все параметры посылок, отличные от K. Ответ задачи имеет вид "$a = R$", где R - описатель "класс". Определяется результат C_1 переобозначения переменных атома C на новые переменные. Антецедентами новой теоремы становятся отличные от B антецеденты исходной теоремы, результат замены в утверждении B атома C на C_1, равенство "коорд$(C_1, K) = R$" и утверждения, необходимые для сопровождения последнего равенства по о.д.з. Консеквент тот же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием координаты - 21).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abpq}(\neg(a = b)$ & коорд(прямая$(ab), q) = \text{set}_{de}(d = 0$ & $e -$ число) &
   $p \subseteq$ плоскоорд(q) & $a-$точка & $b-$точка & прямкоорд(q) & линвторпорядка(p) &
   осьсимметрии(прямая$(ab), p)$ & Двумерн(q) & невырожд$(p) \rightarrow \exists_{gikl}$(коорд$(p, q) =$
   $\text{set}_{mn}(l + gm^2 + in^2 + kn = 0$ & $m -$ число & $n -$ число) & $g -$ число & $i -$ число &
   $k -$ число & $l -$ число))

   из теоремы

   $\forall_{pqABC}(p \subseteq$ плоскость(ABC) & $q = (A, B, C)$ & $A -$ точка & $B -$ точка &
   $C -$ точка & прямкоорд(q) & линвторпорядка(p) & невырожд(p) &
   осьсимметрии(прямая$(AC), p) \rightarrow \exists_{gikl}$(коорд$(p, q) =$
   $\text{set}_{mn}(l + gm^2 + in^2 + kn = 0$ & $m -$ число & $n -$ число) & $g -$ число &
   $i -$ число & $k -$ число & $l -$ число))

Варьирование антецедента эквивалентностью перегруппировочного типа

1. Варьирование антецедента теоремы с последующим упрощением заменяемой части. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, используемая для перехода к более простым выражениям с неизвестными. Все ее переменные встречаются в A_1. Выбирается антецедент B, не используемый для сопровождения по о.д.з. заменяемой части и прочих антецедентов. Его заголовок - символ f. Находится эквивалентность T_1 общей стандартизации $C_1 \leftrightarrow C_2$, у которой заголовок C_1 - символ f. Она используется для преобразования B. Результат обрабатывается нормализаторами общей стандартизации и превращается в некоторую теорему R_1. Ее консевкент имеет вид $D_1 \leftrightarrow D_2$, причем в заменяемой части D_1 расположен неоднобуквенный подтерм t вида $g(r)$. Находится перегруппировочная эквивалентность T_2 вида $E_1 \leftrightarrow E_2$, у которой все переменные части E_1 - операнды одноместной операции g, а в другой части символ g отсутствует. Эта эквивалентность используется для преобразования D_1. Результат упрощается

и превращается в теорему R_2. Усматривается, что ее заменяемая часть получается из A_1 переобозначением переменных. Это переобозначение выполняется, и получается новая эквивалентность, заменяемая часть которой - A_1. Она и регистрируется в списке вывода. (Прием неизвоценка - 12).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{kcij}(k < 0\ \&\ 0 < i\ \&\ k -$ число $\&\ c -$ число $\&\ i -$ число $\&\ j -$ число $\rightarrow$
$\neg(i - 1 = 0)\ \&\ j + \log_i(-k) = \log_i(-c)\ \&\ c < 0\ \vee\ k = c\ \&\ i - 1 = 0 \leftrightarrow c = ki^j)$

из теоремы

$\forall_{cijk}(0 < i\ \&\ 0 < k\ \&\ i -$ число $\&\ j -$ число $\&\ k -$ число $\rightarrow \neg(i - 1 = 0)\ \&$
$j + \log_i k = \log_i c\ \&\ 0 < c\ \&\ c -$ число $\vee\ c = k\ \&\ i - 1 = 0 \leftrightarrow c = ki^j)$

и дополнительных теорем

$\forall_a(a -$ число $\rightarrow 0 < -a \leftrightarrow a < 0)$

$\forall_{ab}(a -$ число $\&\ b -$ число $\rightarrow -b = -a \leftrightarrow b = a)$

2. Попытка использовать в обратном направлении перегруппировочную эквивалентность общей стандартизации для варьирования антецедента. Теорема - тождество общей стандартизации. Выбирается существенный антецедент A. Его заголовок - символ f. Находится эквивалентность $B_1 \leftrightarrow B_2$ общей стандартизации, имеющая перегруппировочный тип. Заголовок B_2 - символ f. Эта эквивалентность применяется в направлении справа налево для преобразования A. Антецеденты упрощаются, причем антецедент, полученный из B_1, не затрагивается. Проверяется, что нормализаторы общей стандартизации не изменяют консеквента новой теоремы. (Прием нормализация - 116).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a -$ set $\&\ b -$ set $\&\ c -$ set $\&\ a \setminus b \subseteq c \rightarrow a \setminus (b \cup c) = \emptyset)$

   из теоремы

   $\forall_{de}(d -$ set $\&\ e -$ set $\&\ d \subseteq e \rightarrow d \setminus e = \emptyset)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bce}(b -$ set $\&\ c -$ set $\&\ e -$ set $\rightarrow b \subseteq c \cup e \leftrightarrow b \setminus c \subseteq e)$

3. Перенесение общего свойства надтипа определяемого типа на этот тип. Теорема - определение "$f(t_1 \ldots t_n) \leftrightarrow g(t_1 \ldots t_n)\ \&\ A$". Все ее переменные входят в $t_1, \ldots, t_n$. Находится теорема T - кванторная импликация с единственным существенным антецедентом $g(r_1 \ldots r_n)$. Определяется подстановка S, переводящая $g(t_1 \ldots t_n)$ в $g(r_1 \ldots r_n)$. Результаты применения S к антецедентам исходной теоремы суть антецеденты теоремы T. Антецедентами новой теоремы становятся антецеденты теоремы T, в которых вместо $g(r_1 \ldots r_n)$ берется $f(r_1 \ldots r_n)$. Консеквент тот же, что у теоремы T. (Прием определение - 63).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка &
параллелограмм$(ABCD) \to \forall_E(E -$ точка & $E \in$ отрезок(BD) &
$E \in$ отрезок$(AC)))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка $\to$
параллелограмм$(ABCD) \leftrightarrow$ четырехугольник$(ABCD)$ &
прямая$(AB) \parallel$ прямая(CD) & прямая$(BC) \parallel$ прямая$(AD))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка &
четырехугольник$(ABCD) \to \forall_E(E -$ точка & $E \in$ отрезок(BD) &
$E \in$ отрезок$(AC)))$

Обработка антецедента упрощающей эквивалентностью

1. Попытка обработать существенный антецедент сокращающей эквивалентностью. Теорема - тождество общей стандартизации, число переменных которого не более 3. Оно имеет единственный существенный антецедент A - некоторое элементарное утверждение с заголовком f. Находится эквивалентность T общей стандартизации $B_1 \leftrightarrow B_2$, у которой заменяемая часть с заголовком f имеет единственную небесповторную переменну, а заменяющая часть B_2 бесповторна. Проверяется, что оценка сложности теоремы T не больше, чем у исходной теоремы и что она не содержит понятий новых разделов. Теорема T используется для преобразования антецедента A. Результат упрощается. Проверяется, что все переменные новой теоремы - параметры ее консеквента. (Прием нормализация - 50).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{cde}(0 < e$ & $c -$ число & $d -$ число & $e -$ число & $0 \le c - d \to \max(ce, de) = ce)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a -$ число & $b -$ число & $a \le b \to \max(a, b) = b)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abd}(0 < d$ & $a -$ число & $b -$ число & $d -$ число $\to b \le a \leftrightarrow bd \le ad)$

Попытка свести одно неравенство к другим

1. Попытка свести неравенство для одного числового атома в антецедентах к неравенству для других числовых атомов. Консеквент теоремы - нечисловое двуместное отношение. Некоторый существенный антецедент A - неравенство для единственного невырожденного числового атома t. Оно разрешается относительно t и приобретает (с точностью до знака и ориентации) вид $t < a$. Находится теорема T, консеквент которой - неравенство для более чем одного невырожденного числового атома. В ее антецедентах неравенств нет. Некоторый числовой атом r консеквента теоремы T содержит все переменные этой

теоремы. Некоторая подстановка S переводит его в t. Данная подстановка применяется к теореме T, после чего консеквент разрешается относительно t. Получается неравенство вида $t < b$ (с точностью до знака), ориентированное так же, как неравенство $t < a$. Антецедент $t < a$ исходной теоремы заменяется на $b < a$ (если неравенство $t < a$ строгое, а $t < b$ - нет, то берется $b < a$). Добавляются антецеденты теоремы T. Результат упрощается. (Прием отношение - 25).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = C)\ \&\ \neg(B = D)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(BD)\ \&\ 0 \leq -\pi/2 + \angle(ABC) \rightarrow D \in \text{интервал}(AC))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(B = D)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ 0 < \pi/2 - \angle(ABC)\ \&\ 0 < \pi/2 - \angle(BCA)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{прямая}(BD) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow D \in \text{интервал}(AC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(c \in \text{прямая}(ab))\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка} \rightarrow 0 < -\angle(acb) - \angle(bac) + \pi)$

2. Попытка преобразовать неравенство для одного числового атома в антецедентах с помощью дополнительного соотношения монотонности. Консеквент теоремы - нечисловое двуместное отношение. Некоторый существенный антецедент A - неравенство для единственного числового атома t. Оно разрешается относительно t и приобретает (с точностью до знака и ориентации) вид $t < a$. Находится теорема T, консеквент которой - неравенство $0 < r_1 - r_2$, причем r_1, r_2 - числовые атомы с тем же заголовком, что у t. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Находится перестановка S, переводящая r_2 в t. Антецедентами новой теоремы становятся отличные от A антецеденты исходной, результаты применения S к антецедентам теоремы T, а также неравенство $S(r_1) \leq a$ (если нереавенство теоремы T нестрогое, а антецедента A - строгое, то берется $S(r_1) < a$). Консеквент тот же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием отношение - 36).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bABCD}(\neg(b = A)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(B = D)\ \&\ 0 < -\angle(bAC) + \pi/2\ \&\ 0 < -\angle(bCA) + \pi/2\ \&\ B \in \text{отрезок}(bC)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(BD) \rightarrow D \in \text{интервал}(AC))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(B = D)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ 0 < \pi/2 - \angle(BAC)\ \&\ 0 < \pi/2 - \angle(BCA)\ \&\ D \in \text{прямая}(AC)\ \&\ \text{прямая}(BD) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow D \in \text{интервал}(AC))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(A = D)\ \&\ \neg(A = C)\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ D \in \text{отрезок}(BC) \to 0 \leq \angle(BAC) - \angle(DAC))$

Попытка вывести аналогичное утверждение из альтернативного антецедента

1. Попытка исследовать альтернативную версию одного из антецедентов. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, где A_1 - невырожденный числовой атом, а A_2 содержит невырожденные числовые атомы, но не является таким атомом. Рассматривается антецедент B с заголовком f, для которого существует теорема T - эквивалентность общей стандартизации без существенных антецедентов, с консеквентом вида $C_1 \vee C_2 \leftrightarrow C_3$, у которой каждое из утверждений C_1, C_2 содержит все ее переменные. Заголовок C_1 - символ f. Такой антецедент B единственный. Находится подстановка S, переводящая C_1 в B. Проверяется, что результаты применения S к антецедентам теоремы T - следствия антецедентов исходной теоремы. Составляется список Q, полученный заменой в списке антецедентов исходной теоремы антецедента B на $S(C_2)$. Определяется список $t_1, \ldots, t_n$ невырожденных числовых атомов терма A_2. Решается задача на описание с целью выразить атом A_1 через атомы $t_1, \ldots, t_n$ относительно посылок Q. Ответ имеет вид $A_1 = R$. Этот ответ становится консеквентом новой теоремы, а утверждения списка Q - ее антецедентами. (Прием числзнач - 41).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \neg(E = F)\ \&\ \neg(C = E)\ \&\ E \in \text{прямая}(CD)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ F \in \text{окружность}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB)\ \&\ \text{однасторона}(A, C, \text{прямая}(EF)) \to \angle(EAF) = 2(\pi - \angle(CEF)))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDEF}(\neg(A = B)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ \neg(E = F)\ \&\ \neg(C = E)\ \&\ E \in \text{прямая}(CD)\ \&\ E \in \text{окружность}(AB)\ \&\ F \in \text{окружность}(AB)\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ E - \text{точка}\ \&\ F - \text{точка}\ \&\ \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB)\ \&\ \text{разныестороны}(A, C, \text{прямая}(EF)) \to \angle(EAF) = 2\angle(CEF))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(C = D) \to \text{разныестороны}(A, B, \text{прямая}(CD))\ \vee\ \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \leftrightarrow \text{общплоск}(\{A, B, C, D\}))$

Варьирование антецедента, возникающего после контрапозиции импликации

1. Контрапозиция и реализация неравенства. Теорема - простая импликация, консеквент которой представляет собой неравенство A для невырожденных числовых атомов. Имеется единственный бесповторный параметр x консеквента,

встречающийся ровно в одном существенном антецеденте B. Создается теорема R, полученная контрапозицией для антецедента B: его отрицание становится консеквентом, а результат A_1 упрощения отрицания A - антецедентом. Проверяется, что A_1 имеет ровно два невырожденных числовых атомв, причем заголовок каждого - символ f. Находится теорема T, консеквент которой - неравенство $0 < r_1 - r_2$, причем r_1, r_2 - числовые атомы с заголовком f. Она применяется для реализации антецедента A_1 теоремы R. Результат упрощается. (Прием числоценка - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{adefhD}(\neg(e = f)\ \&\ \neg(h = D)\ \&\ a \in \text{окружность}(ef)\ \&\ d \in \text{окружность}(ef)\ \&$
$a - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&\ e - \text{точка}\ \&\ f - \text{точка}\ \&\ h - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&$
$\text{прямая}(hD) - \text{касательная к окружность}(ef) \to \neg(D \in \text{интервал}(ad)))$

из теоремы

$\forall_{abcdD}(\neg(b = c)\ \&\ a \in \text{окружность}(bc)\ \&\ d \in \text{окружность}(bc)\ \&$
$D \in \text{интервал}(ad)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ d - \text{точка}\ \&$
$D - \text{точка} \to 0 < -l(bD) + l(bc))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&$
$\neg(C = D)\ \&\ \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \to$
$0 \leq l(AC) - l(AB))$

Попытка свести антецедент к тому же отношению, что и у консеквента

1. Попытка воспользоваться дополнительной теоремой для получения антецедента с тем же заголовком, что и консеквент. Теорема - простая импликация с бесповторными антецедентами и консеквентом, у которого каждая переменная антецедентов встречается в консеквенте. Имеется антецедент A, параметры которого - те же, что у консеквента, причем их число более одного. Заголовок f антецедента A отличен от заголовка g консеквента. Находится теорема T - простая импликация, выражающая свойства "сложного" объекта. Заголовок ее консеквента равен f, причем имеется антецедент с заголовком g. Теорема T используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием попыткаспуска - 24).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_c(c - \text{set}\ \&\ c \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \inf(c) \in c\ \&\ \text{огрснизу}(c) \to \text{наименьший}(\inf(c), c))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(b - \text{set}\ \&\ b \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \neg(\text{наименьший}(a, b))\ \&\ \text{нижняягрань}(a, b) \to \neg(a \in b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_a(a - \text{set}\ \&\ \text{огрснизу}(a)\ \&\ \neg(a = \emptyset)\ \&\ a \subseteq \mathbb{R} \to \text{нижняягрань}(\inf(a), a))$

Использование обобщающей импликации

1. Попытка преобразовать антецедент при помощи обобщающей импликации из текущего списка вывода. Теорема - эквивалентность $A_1 \leftrightarrow A_2$, у которой сложности заменяемой и заменяющей частей одинаковы, причем обе эти части элементарны. При переходе к заменяющей части уменьшается максимальная сложность собственных подтермов термов максимальной сложности. Выбирается параметр x утверждения A_1, не входящий в A_2. Он имеет единственное вхождение в A_1 - как операнд некоторой операции f. Выбирается антецедент B, содержащий x и имеющий не менее двух параметров. Его единственный максимально сложный подтерм имеет заголовок g. В текущем списке вывода находится теорема T, консеквент которой содержит g и получается из некоторого антецедента подстановкой вместо переменной a выраженяи вида $h(a,b)$, имеющего единицу по новой переменной b. При этом операции f,h различны. Теорема T используется для реализации антецедента B. Результат упрощается. (Прием упрощплюс - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{adfhijA}(a = \text{операция}(A)\ \&\ h \in \text{носитель}(A)\ \&\ \text{алгстепень}(h,a,i) \in f\ \&$
   $i-\text{натуральное}\ \&\ j-\text{натуральное}\ \&\ d-\text{целое}\ \&\ \text{группа}(A)\ \&\ \text{подгруппа}(f,A) \rightarrow$
   $\text{алгстепень}(h,a,d) \in f \leftrightarrow \text{алгстепень}(h,a,d+ij) \in f)$

   из теоремы

   $\forall_{abcdeA}(b = \text{операция}(A)\ \&\ a - \text{set}\ \&\ c \in \text{носитель}(A)\ \&$
   $\text{алгстепень}(c,b,e) \in a\ \&\ d-\text{целое}\ \&\ e-\text{целое}\ \&\ \text{группа}(A)\ \&\ \text{подгруппа}(a,A) \rightarrow$
   $\text{алгстепень}(c,b,d) \in a \leftrightarrow \text{алгстепень}(c,b,d+e) \in a)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcdeA}(b = \text{операция}(A)\ \&\ c \in \text{носитель}(A)\ \&\ \text{алгстепень}(c,b,d) \in a\ \&$
   $d - \text{натуральное}\ \&\ e - \text{натуральное}\ \&\ \text{группа}(A)\ \&\ \text{подгруппа}(a,A) \rightarrow$
   $\text{алгстепень}(c,b,de) \in a)$

Использование импликации проверочного оператора

1. Попытка варьирования антецедента с помощью другой теоремы того же цикла вывода. Теорема - простая импликация, используемая для создания приема проверочного оператора. Число существенных антецедентов меньше 3. Выбирается существенный антецедент A, не используемый для сопровождения по о.д.з. и имеющий не менее двух параметров. Его заголовок f отличен от символов "равно", "не". Оценка сложности этого антецедента больше 5. В текущем списке вывода выбирается другая теорема T - простая импликация, используемая для создания приема проверочного оператора. Заголовок ее консеквента B равен f. Все переменные теоремы T встречаются в ее консеквенте. Среди антецедентов ее нет равенства; глубина антецедентов не больше глубины A. Оценка сложности A не меньше оценки сложности антецедентов теоремы T. Определяется подстановка S, переводящая B в A. Эта подстановка - переобозначение переменных без их отождествления. Антецедентами новой теоремы становятся

отличные от A антецеденты исходной теоремы, а также результаты применения S к антецедентам теоремы T. Консеквент тот же, что у исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием спуск - 32).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abc}(a \in \text{смежнверш}(b,c)\ \&\ b \in \text{вершины}(c)\ \&\ \text{граф}(c) \to b \in \text{компсвязн}(c,a))$

из теоремы

$\forall_{abc}(b \in \text{вершины}(c)\ \&\ a \in \text{компсвязн}(c,b)\ \&\ \text{граф}(c) \to b \in \text{компсвязн}(c,a))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ace}(c \in \text{смежнверш}(a,e)\ \&\ \text{граф}(e) \to c \in \text{компсвязн}(e,a))$

10.8 Развязка параметров антецедента с помощью дополнительной теоремы

Развязка двух антецедентов, имеющих общие параметры

1. Развязка параметров антецедента. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Выбирается существенный антецедент A. По его заголовку f находится теорема T, консеквент B которой имеет заголовок f и которая обеспечивает развязку переменных X, входящих в консеквент. Определяется подстановка S, переводящая B в A. Проверяется, что она лишь переобозначает переменные X, переводя их список в список переменных Y. Проверяется наличие отличного от A антецедента A_1 исходной теоремы, содержащего переменные Y, заголовок которого не встречается среди содержащих переменные X заголовков антецедентов исходной теоремы. Теорема T используется для реализации антецедента A. Результат упрощается и регистрируется как обобщение исходной теоремы. (Прием вывод - 64).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcfghijE}(\neg(b=f)\ \&\ \neg(c=f)\ \&\ \neg(f=h)\ \&\ \neg(f=i)\ \&\ \neg(f=j)\ \&$
   $\text{биссектриса}(ifbg)\ \&\ \text{биссектриса}(jfcE)\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ f-\text{точка}\ \&$
   $g-\text{точка}\ \&\ h-\text{точка}\ \&\ i-\text{точка}\ \&\ j-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&\ \text{точкалуча}(f,b,c)\ \&$
   $\text{точкалуча}(f,g,h)\ \&\ \text{точкалуча}(f,i,j) \to h \in \text{прямая}(fE))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCDE}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ E-\text{точка}\ \&$
   $\neg(B=E)\ \&\ \neg(B=D)\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ \text{биссектриса}(ABCD)\ \&$
   $\text{биссектриса}(ABCE) \to D \in \text{прямая}(BE))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{bcfghij}(\neg(b=f)\ \&\ \neg(c=f)\ \&\ \neg(f=g)\ \&\ \neg(f=h)\ \&\ \neg(f=i)\ \&$
   $\neg(f=j)\ \&\ \text{биссектриса}(ifbg)\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ f-\text{точка}\ \&\ g-\text{точка}\ \&$
   $h-\text{точка}\ \&\ i-\text{точка}\ \&\ j-\text{точка}\ \&\ \text{точкалуча}(f,b,c)\ \&\ \text{точкалуча}(f,g,h)\ \&$
   $\text{точкалуча}(f,i,j) \to \text{биссектриса}(jfch))$

2. Попытка развязки двух антецедентов, содержащих самые сложные подтермы. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема вывода в посылках задачи. Имеется ровно два максимально сложных подтерма антецедентов. Оценка их сложности совпадает с оценкой сложности консеквента. Каждый из них встречается в антецедентах однократно. Эти подтермы t_1, t_2 входят в антецеденты A_1 и A_2. Пересечение не входящих в t_1, t_2 параметров антецедентов A_1, A_2 одноэлементно. В текущем списке вывода выбирается теоремы T с характеристикой "вывод". Заголовок f терма t_1 встречается в ее консеквенте и в каком-либо из антецедентов. Теорема T используется для реализации антецедента A_1. Результат упрощается. Проверяется, что новая теорема имеет ровно два максимально сложных подтерма r_1, r_2 антецедентов, причем каждый из них входит в антецеденты лишь однократно, а пересечение параметров содержащих данные подтермы антецедентов, не входящих в r_1, r_2, пусто. (Прием вывод - 81).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcegh}(b \in \text{вершины}(h)\ \&\ c \in \text{вершины}(h)\ \&\ e \in \text{компсвязн}(h,b)\ \&$
   $g \in \text{компсвязн}(h,c)\ \&\ \text{граф}(h)\ \&\ \text{смежны}(e,g,h) \to \text{компсвязн}(h,c) =$
   $\text{компсвязн}(h,b))$

   из теоремы

   $\forall_{abdf}(a \in \text{вершины}(d)\ \&\ b \in \text{вершины}(d)\ \&\ f \in \text{компсвязн}(d,a)\ \&$
   $f \in \text{компсвязн}(d,b)\ \&\ \text{граф}(d) \to \text{компсвязн}(d,a) = \text{компсвязн}(d,b))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcd}(a \in \text{вершины}(d)\ \&\ \text{граф}(d)\ \&\ c \in \text{компсвязн}(d,a)\ \&\ \text{смежны}(b,c,d) \to$
   $b \in \text{компсвязн}(d,a))$

Развязка подвыражения антецедента

1. Развязка по транзитивности антецедента простой импликации, используемой в проверочном операторе. Теорема - простяа импликация, которую можно использовать для создания приема проверочного оператора, имеющего единственный непосредственно идентифицируемый антецедент. Отсутствует антецедент, имеющий более 3 параметров. Выбирается антецедент A, параметры которого не включаются в параметры консеквента, причем пересечение списков их параметров не менее чем двухэлементное. По заголовку f антецедента A (с отброшенным корневым отрицание, если оно есть) находится теорема T - кванторная импликация, имеющая вид обобщенной транзитивности: два бесповторных существенных антецедента и бесповторный консеквент, каждый не более чем с 2 переменными; переменные консеквента - симметрическая разность множеств переменных антецедентов. Заголовок консеквента - f (с отброшенным корневым отрицанием, если оно есть). Теорема T используется для реализации антецедента A. Результат упрощается и проверяется на неизбыточность для создания приема проверочного оператора. (Прием легковидеть - 10).

   Пример: вывод теоремы

$\forall_{acefy}(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ y \in a\ \&\ c - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&$ образ$(f, a) \subseteq e\ \&$ непересек$(c, e) \to \neg(f(y) \in c))$

из теоремы

$\forall_{abfy}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&$ непересек$(b, \text{образ}(f, a))$ $\&\ y \in a \to \neg(f(y) \in b))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ade}(a - \text{set}\ \&\ d - \text{set}\ \&\ e - \text{set}\ \&\ d \subseteq e\ \&$ непересек$(a, e) \to$ непересек$(a, d))$

Развязка антецедента, имеющего общий параметр с консеквентом

1. Развязка переменной антецедента, необходимого для сопровождения по о.д.з. консеквента, но не антецедентов, и вывод дизъюнкции. Консеквент теоремы - отличный от равенства двуместный нечисловой предикат. Рассматривается антецедент A вида $\neg(t_1 = t_2)$. Он не используется для сопровождения по о.д.з. других антецедентов, но используется для сопровождения по о.д.з. консеквента. В консеквенте выделяется неоднобуквенное подвыражение r, сопровождение по о.д.з. которого использует антецедент A. Заголовок этого подвыражения - символ f. Находится теорема T, консеквент которой - равенство $B_1 = B_2$ двух атомарных нечисловых выражений с заголовком f, причем B_2 отличается от B_1 переобозначением единственной переменной. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Определяется подстановка S, переводящая B_1 в r. Формируется результат R замены в консеквенте исходной теоремы подвыражения r на $S(B_2)$. Проверяется, что он содержит не все параметры антецедента A. Антецедентами новой теоремы становятся отличные от A антецеденты исходной теоремы и результат применения S к антецедентам теоремы T. Консеквент ее - $t_1 = t_2\ \vee\ R$. Результат упрощается. (Прием отношение - 50).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcCD}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ \neg(C = D)\ \&\ l(bD) = l(cD)\ \&\ a \in \text{прямая}(CD)\ \&$ $c \in \text{окружность}(ab)\ \&\ D \in \text{прямая}(bc)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&$ $C - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \to a = D\ \vee\ \text{прямая}(bc) \perp \text{прямая}(CD))$

   из теоремы

   $\forall_{abcD}(\neg(a = b)\ \&\ \neg(a = D)\ \&\ \neg(b = c)\ \&\ l(bD) = l(cD)\ \&\ c \in \text{окружность}(ab)\ \&$ $D \in \text{прямая}(bc)\ \&\ a - \text{точка}\ \&\ b - \text{точка}\ \&\ c - \text{точка}\ \&\ D - \text{точка} \to \text{прямая}(aD) \perp$ прямая$(bc))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABC}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ C - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B)\ \&\ \neg(B = C)\ \&$ $A \in \text{прямая}(BC) \to \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC))$

2. Развязка по транзитивности консеквента с антецедентом, если оба имеют одинаковый сложный заголовок. Теорема - простая импликация, позводяющая создать прием проверочного оператора. Консеквент имеет заголовок f, отличный

от символа "не". Имеется также антецедент A с заголовком f. Консеквент получается из этого антецедента заменой единственного вхождения переменной x на неоднобуквенное выражение t, содержащее x. Антецедент A не используется для сопровождения по о.д.з. Оценка консеквента больше 8. Единственный максимально сложный подтерм консеквента - он сам. Выражение t не имеет связанных переменных. Находится теорема T - кванторная импликация, имеющая вид обобщенной транзитивности: два бесповторных существенных антецедента и бесповторный консеквент, каждый не более чем с 2 переменными; переменные консеквента - симметрическая разность множеств переменных антецедентов. Заголовок некоторого антецедента B теоремы T равен f. Исходная теорема используется для реализации антецедента B. Результат упрощается. (Прием спуск - 48).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_{acd}(\text{включается}(a,c)\ \&\ \text{Val}(c) \subseteq \text{события}(d)\ \&\ c - \text{функция}\ \&\ \text{верпространство}(d)\ \&\ \text{незавсобытия}(c,d) \to \text{незавсобытия}(a,d))$$

из теоремы

$$\forall_{aAC}(a - \text{set}\ \&\ a \subseteq \text{Dom}(A)\ \&\ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C)\ \&\ A - \text{функция}\ \&\ \text{верпространство}(C)\ \&\ \text{незавсобытия}(A,C) \to \text{незавсобытия}(\text{сужение}(A,a),C))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{aAC}(\text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C)\ \&\ A - \text{функция}\ \&\ \text{верпространство}(C)\ \&\ \text{незавсобытия}(A,C)\ \&\ \text{эквсемейства}(a,A) \to \text{незавсобытия}(a,C))$$

3. Последовательная развязка двух переменных. Теорема - кванторная импликация, выполняющая развязку переменной x своего консеквента: эта переменная встречается лишь в таких антецедентах, которые не содержат прочих переменных консеквента. В текущем списке вывода находится другая теорема T, выполняющая развязку некоторой переменной y своего консеквента. Длины консевкентом обеих теорем совпадают. Существует подстановка S_1, переводящая консеквент исходной теоремы в консеквент теоремы T. Она переводит переменную x в переменную, отличную от y. Исходная теорема имеет антецедент A, длина которого равна длине консеквента, причем существует подстановка S_2, переводящая консеквент исходной теоремы в этот антецедент. Теорема T используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием развтеор - 2).

Пример: вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(e \in \{c,\ldots,d\}\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{целое}\ \&\ c - \text{целое}\ \&\ d - \text{целое}\ \&\ a \le c\ \&\ d \le b \to e \in \{a,\ldots,b\})$$

из теоремы

$$\forall_{amnx}(x \in \{m,\ldots,n\}\ \&\ a - \text{число}\ \&\ m - \text{целое}\ \&\ n - \text{целое}\ \&\ a \le m \to x \in \{a,\ldots,n\})$$

и дополнительной теоремы

$\forall_{cmnx}(x \in \{m, \ldots, n\}$ & $c -$ число & $m -$ целое & $n -$ целое & $n \le c \rightarrow$
$x \in \{m, \ldots, c\})$

4. Переход к условию на множество значений параметра. Рассматривается антецедент A. По его заголовку f находится теорема T, имеющая консеквент K и антецедент B с заголовками, равными f. Символ f отличен от равенства и отрицания. Утверждение K получается из утверждения B заменой переменной x на переменную y, причем имеется антецедент "$y \in x$". Теорема T используется для реализации антецедента A. Результат упрощается. (Прием констсила - 1).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{bcef}(e \in f$ & Силы$(b, \{c\}, f)$ & мточка(b) & Числотр$(f) \rightarrow$ Сила$(b, e) =$
   сила$(b, c, e))$

   из теоремы

   $\forall_{act}(t -$ число & Силы$(a, \{c\}, t)$ & мточка$(a) \rightarrow$ Сила$(a, t) =$ сила$(a, c, t))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abtT}(t \in T$ & Силы(a, b, T) & мточка(a) & Числотр$(T) \rightarrow$ Силы$(a, b, t))$

5. Развязка общего параметра антецедента и консеквента. Консеквент теоремы - нечисловое двуместное отношение. Теорема имеет не менее двух существенных антецедентов. Консеквент ее имеет вид $P(x, y)$, где x, y - переменные. Некоторый антецедент имеет вид $Q(x, y)$, причем в других антецедентах переменные x, y вместе не встречаются. Находится теорема T, консеквент K которой имеет заголовок Q. Некоторый ее антецедент B тоже имеет заголовок Q, причем B получается из K отбрасыванием части операндов некоторых операций. Теорема T спользуется для реализации антецедента $Q(x, y)$. Результат упрощается. (Прием отношение - 45).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abcd}($мверш$(c, a) =$ верш(c, b) & $0 < b - a$ & $a -$ натуральное & $b -$ натуральное &
   $b \le$ мдлина$(c) + 1$ & оргграф(d) & цепь$(c, d) \rightarrow$ цикл(отрмарш$(c, a, b), d))$

   из теоремы

   $\forall_{GM}($исхвершина$(M) =$ послвершина(M) & $0 <$ мдлина(M) & оргграф(G) &
   цепь$(M, G) \rightarrow$ цикл$(M, G))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abdG}(a -$ натуральное & $b -$ натуральное & $a \le b$ & $b \le$ мдлина$(d) + 1$ &
   оргграф(G) & цепь$(d, G) \rightarrow$ цепь(отрмарш$(d, a, b), G))$

Развязка подвыражения консеквента

1. Развязка по транзитивности операндов небесповторного консеквента простой импликации. Теорема - простая импликация, позволяющая создать прием проверочного оператора. Ее консеквент небесповторен. Заголовок консеквента (после отбрасывания корневого отрицания, если оно есть) - символ f. Находится теорема T - кванторная импликация, имеющая вид обобщенной транзитивности: два бесповторных существенных антецедента и бесповторный консеквент, каждый не более чем с 2 переменными; переменные консеквента - симметрическая разность множеств переменных антецедентов. Заголовок некоторого антецедента B теоремы T (после отбрасывания корневого отрицания, если оно есть) равен f. Исходная теорема используется для реализации антецедента B теоремы T. Результат упрощается. Проверяется, что консеквент новой теоремы бесповторен. (Прием спуск - 27).

   Пример: вывод теоремы

   $$\forall_{bAB}(\neg(A = B)\ \&\ b - \text{set}\ \&\ \text{прямая}(AB) \subseteq b\ \&\ A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка} \rightarrow A \in b)$$

   из теоремы

   $$\forall_{AB}(A - \text{точка}\ \&\ B - \text{точка}\ \&\ \neg(A = B) \rightarrow A \in \text{прямая}(AB))$$

   и дополнительной теоремы

   $$\forall_{abc}(a - \text{set}\ \&\ b - \text{set}\ \&\ a \subseteq b\ \&\ c \in a \rightarrow c \in b)$$

10.9 Группировка нескольких антецедентов в один

Группировка антецедентов исходной теоремы

1. Попытка сгруппировать несколько антецедентов, хотя бы один из которых - равенство, в определяемое понятие. Теорема - тождество, выражающее невырожденный числовой атом через параметры координат. Имеется не менее двух антецедентов. Среди них выбирается равенство, имеющее единственный максимально сложный подтерм. Символ f - заголовок этого подтерма. Находится теорема T - определение вида $A_0 \leftrightarrow A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n$, где $n \geq 2$, все $A_1, \ldots, A_n$ элементарны, причем f - наиболее сложный символ определяющей части. Составляется список $s_1, \ldots, s_n$ заголовков наиболее сложных подтермов термов $A_1, \ldots, A_n$. Составляется список $B_1, \ldots, B_n$ различных антецедентов исходной теоремы, таких, что B_i содержит символ s_i. Затем создается вспомогательная импликация T_1, полученная из исходной теоремы заменой ее антецедентов на единственный антецедент - конъюнкцию исходных антецедентов. Теорема T применяется в направлении справа налево для преобразования антецедента теоремы T_1. Результат упрощается. (Прием значпарам - 7).

   Пример: вывод теоремы

   $$\forall_{adefhK}(\text{коорд}(d, K) = (e, f, h)\ \&\ \text{Вектор}(a)\ \&\ \text{Вектор}(d)\ \&\ \text{прямкоорд}(K)\ \&\ \text{вертикнапр}(a, K) \rightarrow \text{скалумнож}(a, d) = h\text{крд}(a, K, 3))$$

   из теоремы

$\forall_{defhijklm}(k = \text{крд}(l, m, 3)\ \&\ j = \text{крд}(l, m, 2)\ \&\ \text{Вектор}(l)\ \&\ \text{Вектор}(d)\ \&$
$\text{прямкоорд}(m)\ \&\ i = \text{крд}(l, m, 1)\ \&\ \text{коорд}(d, m) = (e, f, h) \rightarrow \text{скалумнож}(l, d) =$
$ie + jf + kh)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{aK}(\text{Трехмерн}(K)\ \&\ \text{Вектор}(a) \rightarrow \text{вертикнапр}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 1) = 0\ \&$
$\text{крд}(a, K, 2) = 0)$

2. Попытка свернуть часть антецедентов с помощью ранее выведенной эквивалентности кванторной развертки. Теорема - простая импликация, у которой консеквент содержит не все параметры антецедентов, но каждый параметр консеквента встречается в антецедентах. В текущем списке вывода находится теорема T вида $A_1 \leftrightarrow \exists_{x_1 \ldots x_k}(A_2)\ \&\ A_3$. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Утверждение A_1 элементарно, A_3 - конъюнкция элементарных утверждений. Существует подстановка S, переводящая A_3 в подмножество M_1 антецедентов исходной теоремы. Остальные антецеденты исходной теоремы образуют подмножество M_2. Составляется список $y_1, \ldots, y_n$ параметров утверждений M_2, не входящих в термы, подставляемые подстановкой S. Составляется подсписок M_3 списка M_2, образованный утверждениями, содержащими переменные списка $y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_k$. Решается задача на описание, условия которой суть M_3 и $S(A_2)$. Посылки - антецеденты исходной теоремы, не вошедшие в список M_3. Неизвестные - переменные $y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_k$. Имеются также цели "полный", "явное", "прямойответ", "смтеор", "упростить", "равно". Ответ имеет вид $y_1 = t_1\ \&\ \ldots\ \&\ y_n = t_n\ \&\ x_1 = r_1\ \&\ \ldots\ \&\ x_k = r_k\ \&\ B$. Консеквентом новой теоремы становится результат подстановки $t_1, \ldots, t_n$ вместо $y_1, \ldots, y_n$ в консеквент исходной теоремы. Антецедентами становятся не вошедшие в M_3 утверждения списка M_2, результаты применения S к антецедентам теоремы T, результат упрощения B и $S(A_1)$. Результат упрощается. При упрощении B в качестве посылок используются утверждения M_1, а также результат подстановки $t_1, \ldots, t_n, r_1, \ldots, r_k$ вместо $y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_k$ в $S(A_2)$. (Прием исключ - 5).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ab}(\text{перестановка}(b, \{1, \ldots, a\})\ \&\ a - \text{целое}\ \&\ 0 \leq a \rightarrow$
$\text{перестановка}(\text{обрфункция}(b), \{1, \ldots, a\}))$

из теоремы

$\forall_{Aab}(\text{Dom}(b) = A\ \&\ \{1, \ldots, a\} = \text{Val}(b)\ \&\ b - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(b)\ \&$
$a - \text{целое}\ \&\ 0 \leq a \rightarrow \text{перестановка}(\text{обрфункция}(b), A))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{Af}(A - \text{set}\ \&\ \text{конечное}(A) \rightarrow \text{перестановка}(f, A) \leftrightarrow \exists_a(\text{Dom}(f) = \{1, \ldots, a\}\ \&$
$a - \text{целое}\ \&\ 0 \leq a)\ \&\ A = \text{Val}(f)\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{взаимнооднозначно}(f))$

Группировка антецедентов дополнительной теоремы

1. Попытка использовать конъюнктивное определение для свертки группы антецедентов другой теоремы. Теорема - определение $A_1 \leftrightarrow A_2$, где A_2 - конъюнкция элементарных утверждений. Она представляется в виде A_3 & A_4, где A_3 - конъюнкция всех утверждения, имеющих максимальную сложность. Их число не менее 2, причем все переменные теоремы встречаются в A_3. Утверждение A_3 имеет единственное подвыражение t максимальной сложности, входящее в каждый его конъюнктивный член. Заголовок t - символ f. В разделе символа f находится теорема T, консеквент которой - нечисловое двуместное отношение. Составляется список M ее антецедентов, содержащих f. Его длина равна числу конъюнктивных членов утверждения A_3. Определяется подстановка S, переводящая конъюнктивные члены A_3 в утверждения M. Проверяется, что результаты применения S к антецедентам исходной теоремы и к A_4 - следствия антецедентов теоремы T. Антецедентами новой теоремы становятся антецеденты теоремы T, не вошедшие в M, а также $S(A_1)$. Консеквент тот же, что у теоремы T. (Прием определение - 74).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCDE}$(окружность(AB) описана около фигура(CDE) & $A -$ точка &
   $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка & $\neg(D = E)$ &
   $\neg(A = B)$ & прямая$(CE) \perp$ прямая(DE) & $\neg(C = E) \rightarrow A \in$ отрезок(CD))

   из теоремы

   $\forall_{ABCDE}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка &
   $\neg(D = E) \rightarrow$ окружность(DE) описана около фигура$(ABC) \leftrightarrow \triangle(ABC)$ &
   $A \in$ окружность(DE) & $B \in$ окружность(DE) & $C \in$ окружность(DE))

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABCDE}(A -$ точка & $B -$ точка & $C -$ точка & $D -$ точка & $E -$ точка &
   $\neg(D = E)$ & $\neg(A = B)$ & $C \in$ окружность(AB) & $D \in$ окружность(AB) &
   $E \in$ окружность(AB) & прямая$(CE) \perp$ прямая(DE) & $\neg(C = E) \rightarrow$
   $A \in$ прямая(CD))

10.10 Одновременное ослабление антецедентов и консеквента

Переход к ослабленным отношениям

1. Попытка одновременного ослабления антецедента и консеквента. Теорема - простая импликация, которую можно использовать для создания приема проверочного оператора, имеющего единственный непосредственно идентифицируемый антецедент. Консеквент имеет вид $f(t_1 \ldots t_n)$, некоторый антецедент - вид $f(r_1 \ldots r_n)$. Находится теорема T с единственным сущственным антецедентом $f(x_1 \ldots x_n)$ и консеквентом $g(x_1 \ldots x_n)$. При помощи задачи на доказательство

устанавливается, что $g(t_1 \dots t_n)$ - следствие антецедентов с отброшенным утверждением $f(r_1 \dots r_n)$ и добавленными утвердениями $g(r_1 \dots r_n), \neg f(r_1 \dots r_n))$. Консеквентом новой теоремы становится $g(t_1 \dots t_n)$, антецеденты получены из антецедентов исходной теоремы заменой $f(r_1 \dots r_n)$ на $g(r_1 \dots r_n)$. Результат упрощается. (Прием легковидеть - 9).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{afxy}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ x \in a \ \&$
$y \in a \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ 0 \leq x - y \ \& \ \text{возрастает}(f, a) \rightarrow 0 \leq f(x) - f(y))$

из теоремы

$\forall_{afxy}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \&$
$\text{возрастает}(f, a) \ \& \ x \in a \ \& \ y \in a \ \& \ 0 < x - y \rightarrow 0 < f(x) - f(y))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \rightarrow a \leq b)$

2. Попытка отбросить отрицание равенства в антецедентах и перейти от строгого неравенства в консеквенте к нестрогому. Консеквент теоремы - неравенство $A_1 < A_2$, где A_1 и A_2 - выражения с невырожденными числовыми атомами. Рассматривается антецедент $\neg(t_1 = t_2)$, не используемый для сопровождения по о.д.з. консеквента и других антецедентов и не являющийся следствием условий на их о.д.з. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что $A_1 \leq A_2$ - следствие антецедентов теоремы, в которых $\neg(t_1 = t_2)$ заменено на $t_1 = t_2$. Консеквентом новой теоремы становится $A_1 \leq A_2$ антецедентами - антецеденты исходной теоремы, из которых удалено утверждение $\neg(t_1 = t_2)$. (Прием числоценка - 10).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \&$
$\neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \rightarrow$
$0 \leq l(AC) - l(CD))$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \&$
$\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \rightarrow$
$0 < l(AC) - l(CD))$

Перенесение антецедента под квантор существования в консеквент

1. Развязка параметра антецедентов, приводящая к ослаблению теоремы. Консеквент теоремы имеет вид $\exists_{x_1 \dots x_k}(\forall_{y_1 \dots y_n}(A_1 \ \& \ \dots \ \& \ A_n \rightarrow A_0) \ \& \ B)$, где все A_i элементарны, B - конъюнкция элементарных утверждений. Выбирается параметр антецедентов z. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих z, и подсписок S_2 остальных утверждений. Проверяется, что $\exists_z(S_1)$ - следствие S_2. Проверяется, что в S_1 существует утверждение с более чем одним параметром и что все утверждения списка S_1 элементарны.

Список S_3 утверждений списка S_1, имеющих ровно один параметр, непуст. Создается утверждение R вида $\exists_{x_1 \ldots x_k z}(S_3\ \&\ \forall_{y_1 \ldots y_n}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n \to A_0)\ \&\ B)$. Проверяется, что в S_2 имеется утверждение более чем с одним параметром и что R не является следствием тех утверждений списка S_2, которые имеют ровно один параметр. Консеквентом новой теоремы становится R, антецедентами - утверждения S_2. (Прием локхаракт - 14).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abfi}(\text{предел}(f,i,a) = b\ \&\ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ f - \text{функция}\ \&$
$b - \text{число}\ \&\ \text{Число}(a)\ \&\ \text{типпредела}(i)\ \&\ \text{Локопред}(f,a,i) \to \exists_{de}(e - \text{число}\ \&$
$\forall_x(x \in \text{Окрестн}(a,d,i)\ \&\ x - \text{число} \to e < f(x))\ \&\ 0 < d\ \&\ d - \text{число}))$

из теоремы

$\forall_{abefi}(\text{предел}(f,i,a) = b\ \&\ e < b\ \&\ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ f - \text{функция}\ \&$
$b - \text{число}\ \&\ e - \text{число}\ \&\ \text{Число}(a)\ \&\ \text{типпредела}(i)\ \&\ \text{Локопред}(f,a,i) \to$
$\exists_d(\forall_x(x \in \text{Окрестн}(a,d,i)\ \&\ x - \text{число} \to e < f(x))\ \&\ 0 < d\ \&\ d - \text{число}))$

2. Развязка параметра антецедента при ограничении на другой параметр, приводящая к ослаблению теоремы. Консеквент теоремы имеет вид "$\exists_{x_1 \ldots x_k}(\forall_{y_1 \ldots y_n}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n \to A_0)\ \&\ B)$", где все A_i элементарны, B - конъюнкция элементарных утверждений. Выбирается параметр антецедентов z. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих z, и подсписок S_2 остальных утверждений. Выбирается утверждение C списка S_1, имеющее ровно два параметра - z и некоторый параметр u. Проверяется, что все другие утверждения списка S_1 имеют ровно один параметр. Список S_2 разбивается на подсписок S_3 утверждений, содержащих u, и подсписок S_4 остальных утверждений. Определяется непустой подсписок S_5 списка S_3, образованный всеми утверждениями с единственным параметром u. Решается задача на описание Z_1, условия которой суть $\forall_u(S_5 \to C)$ и отличные от C утверждения списка S_1. Посылки - S_4. Единственная неизвестная - z, имеются также цели "полный", "явное", "прямойответ", "упростить". Получается некоторый ответ R_1. Далее решается задача на описание Z_2, условия которой - $\exists_z(\neg(R_1)\ \&\ S_1)$ и S_5. Посылки - S_4. Единственная неизвестная - u, имеются также цели "полный", "явное", "прямойответ", "упростить". Получается ответ R_2. Решается задача на описание Z_3, условия которой - $\forall_u(R_2 \to C)$ и отличные от C утверждения списка S_1. Посылки - S_4. Единственная неизвестная - z, имеются также цели "полный", "явное", "прямойответ", "упростить". Получается ответ R_3. При помощи задачи на доказательство проверяется, что $\exists_z(\neg(R_3)\ \&\ S_1)$ - следствие S_2 и R_2. Определяется список Q, состоящий из утверждений списка S_1, отличных от C, утверждения $\neg(R_3)$ и утверждений $\forall_{y_1 \ldots y_n}(A_1\ \&\ \ldots\ \&\ A_n \to A_0), B$. Консеквентом новой теоремы становится $\exists_{x_1 \ldots x_k}(Q)$. Антецеденты - S_2 и R_2. Результат упрощается. (Прием локхаракт - 15).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abfi}(\neg(b = 0)\ \&\ \text{предел}(f,i,a) = b\ \&\ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}\ \&$
$f - \text{функция}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ \text{Число}(a)\ \&\ \text{типпредела}(i)\ \&\ \text{Локопред}(f,a,i) \to$
$\exists_{de}(\forall_x(x \in \text{Окрестн}(a,d,i)\ \&\ x - \text{число} \to e < |f(x)|)\ \&\ 0 < d\ \&\ 0 < e\ \&$
$d - \text{число}\ \&\ e - \text{число}))$

из теоремы

$\forall_{abefi}(\text{предел}(f,i,a)=b\ \&\ e<|b|\ \&\ \text{Dom}(f)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ \text{Val}(f)\subseteq\mathbb{R}\ \&\ f-\text{функция}\ \&\ b-\text{число}\ \&\ e-\text{число}\ \&\ \text{Число}(a)\ \&\ \text{типпредела}(i)\ \&\ \text{Локопред}(f,a,i)\rightarrow\exists_d(\forall_x(x\in\text{Окрестн}(a,d,i)\ \&\ x-\text{число}\rightarrow e<|f(x)|)\ \&\ 0<d\ \&\ d-\text{число}))$

Поглощение антецедента более общим понятием и преобразование консеквента в дизъюнкцию, учитывающую альтернативные случаи нового антецедента

1. Вывод дизъюнкции, определяющей разбор случаев при выражении одного числового атома через другой. Теорема - тождество $A_1=A_2$, где A_1 - невырожденный числовой атом, а A_2 содержит единственный невырожденный числовой атом A_3, но не является таким атомом. Все параметры антецедентов встречаются в консеквенте. Выбирается некоторый существенный антецедент B. Решается задача на исследование Z_1, посылки которой - антецеденты теоремы. Неизвестными являются параметры посылок; имеются также цели "известно" и "следствие". После решения выбираются некоторый существенный антецедент B и посылка задачи C, имеющая те же параметры, что и B, причем не входящая в список антецедентов. При выводе посылки C использовался антецедент B. Проверяется, что B не является следствием списка S отличных от B антецедентов, утверждения C и необходимых для сопровождения C по о.д.з. утверждений. Выбираются новые переменные a,x, и решается задача на описание, условие которой - $x=A_1$. Посылки - утверждения $S,\neg(B)$ и $A_3=a$. Единственная неизвестная - x. Имеются также цели "известно a", "полный", "явное", "прямойответ". Получается ответ $x=t$. После подстановки A_1,A_3 вместо переменных x,a он преобразуется к виду $A_1=A_4$. Утверждение $\neg(B)$ упрощается относительно S и превращается в некоторое утверждение R. Консеквентом новой теоремы становится $(B\ \&\ A_1=A_2\vee R\ \&\ A_1=A_4)$. Антецеденты - S. Антецеденты упрощаются. (Прием числзнач - 10).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ABCD}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(B=D)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ B\in\text{прямая}(AC)\ \&\ \neg(A=C)\rightarrow B\in\text{отрезок}(AC)\ \&\ \angle(ABD)=-\angle(CBD)+\pi\ \vee\ \text{точкалуча}(B,A,C)\ \&\ \angle(ABD)=\angle(CBD))$

   из теоремы

   $\forall_{ABCD}(A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \neg(B=C)\ \&\ \neg(B=D)\ \&\ \neg(A=B)\ \&\ B\in\text{отрезок}(AC)\rightarrow\angle(ABD)=-\angle(CBD)+\pi)$

10.11 Перенесение фрагмента консеквента в антецеденты и реализация нового антецедента

1. Перенесение конъюнктивных членов квантора существования в антецеденты и реализация самого сложного из них - поиск дополнительной теоремы в разделе антецедента. Теорема имеет вид $A_1\leftrightarrow\exists_{x_1\ldots x_k}(A_2)$. Оценка сложности правой части больше, чем левой. Один из максимально сложных подтермов правой части

- конъюнктивный член B утверждения A_2. Создается вспомогательная теорема T_1, полученная из исходной добавлением конъюнктивных членов A_2 к антецедентам и заменой консеквента на A_1. По заголовку f утверждения B находится теорема T_2, заголовок консеквента которой - символ f. Она используется для реализации антецедента B теоремы T_1. Результат упрощается. В списке вывода регистрируются конъюнктивные члены полученного утверждения, представляющие собой кванторные импликации с элементарными антецедентами либо константные утверждения. (Прием развертка - 71).

  Пример: вывод теоремы

  $\forall_{cd}(d - \text{set} \ \& \ d \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{наибольший}(c, d) \rightarrow \text{огрсверху}(d))$

  из теоремы

  $\forall_a(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{огрсверху}(a) \leftrightarrow \exists_b(\text{верхняягрань}(b, a)))$

  и дополнительной теоремы

  $\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{наибольший}(a, b) \rightarrow \text{верхняягрань}(a, b))$

2. Перенесение конъюнктивных членов квантора существования в антецеденты и реализация самого сложного из них - использование справочника поиска теорем "реализация". Аналогичног предыдущему, но дополнительная теорема находится с помощью справочника поиска теорем. (Прием развертка - 156).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ce}(\neg(c = 0) \ \& \ e - \text{set} \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \text{card}(e) =$
   $\text{card}(\text{set}_a(a/c \in e \ \& \ a - \text{число})))$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \text{card}(a) = \text{card}(b) \leftrightarrow \exists_f(f - \text{функция} \ \&$
   $\text{Dom}(f) = a \ \& \ \text{Val}(f) = b \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f)))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{Aa}(A - \text{set} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ \neg(a = 0) \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow$
   $\text{взаимнооднозначно}(\lambda_x(xa, x \in A)))$

3. Перенесение заменяемого терма в антецеденты и развязка его по транзитивности для получения простой импликации, используемой в проверочном операторе. Теорема - эквивалентность вида $A_0 \leftrightarrow A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n$; $n \geq 2$. Утверждение A_0 элементарное; утверждения $A_1, \ldots, A_n$ бесквантерные. Выбирается некоторое A_i, и создается вспомогательная теорема T_1, полученная из исходной добавлением к антецедентам утверждения A_0 и заменой консеквента на A_i. Рассматривается заголовок f утверждения A_0 (корневое отрицание, если оно есть, игнорируется). Находится теорема T_2 - кванторная импликация, имеющая вид обобщенной транзитивности: два бесповторных существенных антецедента и бесповторный консеквент, каждый не более чем с 2 переменными; переменные консеквента - симметрическая разность множеств переменных антецедентов. Заголовок консеквента - f (с отброшеннмы корневым отрицанием, если

оно есть). Теорема T_2 используется для реализации антецедента A_0 теоремы T_1. Результат упрощается и проверяется на неизбыточность для создания приема проверочного оператора. Проверяется отсутствие антецедентов глубины большей 3. (Прием и - 32).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abcde}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ e \subseteq a \times b \ \& \ (c,d) \in e \to c \in a)$

из теоремы

$\forall_{abcd}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \to (c,d) \in a \times b \leftrightarrow c \in a \ \& \ d \in b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq b \ \& \ c \in a \to c \in b)$

10.12 Усиление антецедента для варьирования консеквента

1. Усиление антецедентов для перехода к соотношению пропорциональности в консеквенте между другими атомами. Консеквент теоремы - соотношение пропорциональности $a \cdot A_1 = b \cdot A_2$, где a, b - переменные; A_1, A_2 - невырожденные числовые атомы. Имеется единственное равенство в антецедентах - тоже некоторое соотношение пропорциональностидля невырожденных числовых атомов. Составляется список X параметров атомов A_1, A_2. Определяется подсписок Q антецедентов, параметры которых включаются в X. Решается задача на исследование, посылки которой - утверждения Q и "актив(A_1)", "актив(A_2)". Неизвестные - параметры посылок; имеются также цели "известно", "имп". Последняя цель указывает, что задача решается для выявления дополнительных условий на параметры X, при которых атомы A_1, A_2 оказываются связаны новым соотношением. Результаты фиксируются в комментариях (имп B_1 B_2), где B_1 - дополнительное условие, B_2 - новое соотношение. После решения выбирается некоторый такой комментарий. Проверяется, что B_2 содержит ровно 3 невырожденных числовых атомв - атомы A_1, A_2, а также некоторый новый атом A_3. Соотношение B_2 разрешается при помощи задачи на описание относительно атома A_1. Получается равенство $A_1 = C$. Каждый из атомов A_2, A_3 входит в C, причем только под операциями "плюс", "умножение", "минус". Консеквентом новой теоремы становится равенство нулю результата упрощения выражения $aC - bA_2$. Антецеденты - антецеденты исходной теоремы и B_1. Результат упрощается. (Прием смпропорц - 11).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abABCDE}(\neg(A = D) \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AE)) \ \& \ al(DE) = bl(BC) \ \& \ C \in \text{прямая}(AE) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(DE) \to bl(BD) = (a - b)l(AD))$

из теоремы

$\forall_{abABCDE}(a - $ число $\&\ b - $ число $\&\ A - $ точка $\&\ B - $ точка $\&\ C - $ точка $\&$
$D - $ точка $\&\ E - $ точка $\&\ \neg(A = E)\ \&\ \neg(B = C)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ \neg(A = D)\ \&$
$B \in$ прямая$(AD)\ \&$ прямая$(DE) \parallel$ прямая$(BC)\ \&\ C \in$ прямая$(AE)\ \&$
$\neg($прямая$(AE) =$ прямая$(AD))\ \&\ al(DE) = bl(BC) \to al(AD) = bl(AB))$

2. Попытка исключить один из операндов для выделения новой двуместной операции. Консеквент теоремы имеет вид $P(\lambda_x(A_2, A_1), A_3)$ и определяет характеристику A_3 некоторой функции. Выражение A_2 имеет вид $F(G(f(t_1), g(t_2)), t_3)$, где операция F ассоциативна и коммутативна; f, g - переменные. В текущем списке вывода находится теорема T, консеквент которой имеет вид $P(\lambda_y(F(p(y), q(y)),$ $B_1), B_2)$. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Здесь p, q - различные переменные. Выбирается новая переменная z, и при помощи задачи на описание уравнение $F(G(f(t_1), g(t_2)), t_3, z) = G(f(t_1), g(t_2))$ разрешается относительно z. Посылками служат антецеденты исходной теоремы и A_1. Получается ответ $z = r$. Теорема T имеет антецедент Q вида $P(p, s)$, где s - переменная, отличная от p, q. Рассматривается подстановка S, переводящая переменные p, q, s в термы "$\lambda_x(A_2, A_1)$", "$\lambda_x(r, A_1)$" и A_3 соответственно. Консеквентом новой теоремы становится результат применения S к консеквенту теоремы T, антецедентами - антецеденты исходной теоремы и результаты применения S к отличным от Q антецедентам теоремы T. Результат упрощается. (Прием функперех - 7).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{acdei}(\mathrm{Dom}(a) = \mathrm{Dom}(e)\ \&\ \mathrm{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ a -$ функция $\&\ e -$ функция $\&$
первообразная$(a, c)\ \&$ первообразная$(e, d)\ \&$ первообразная$(\lambda_x(-c(x)e(x),$
$x \in \mathrm{Dom}(e)), i) \to$ первообразная$(\lambda_k(a(k)d(k), k \in \mathrm{Dom}(a)), \lambda_g(c(g)d(g) + i(g),$
$g \in \mathrm{Dom}(e))))$

из теоремы

$\forall_{acde}(\mathrm{Dom}(a) = \mathrm{Dom}(e)\ \&\ \mathrm{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ a -$ функция $\&\ e -$ функция $\&$
первообразная$(a, c)\ \&$ первообразная$(e, d) \to$
первообразная$(\lambda_x(a(x)d(x) + c(x)e(x), x \in \mathrm{Dom}(e)), \lambda_b(c(b)d(b), b \in \mathrm{Dom}(e))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{acde}(\mathrm{Dom}(a) = \mathrm{Dom}(e)\ \&\ \mathrm{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R}\ \&\ a -$ функция $\&\ e -$ функция $\&$
первообразная$(a, c)\ \&$ первообразная$(e, d) \to$
первообразная$(\lambda_x(a(x) + e(x), x \in \mathrm{Dom}(e)), \lambda_b(c(b) + d(b), b \in \mathrm{Dom}(e))))$

3. Переход от доопределения функции в одной точке к вставке элемента в набор. Теорема - простая импликация, позволяющая создать прием проверочного оператора. В консеквенте встречается подтерм "доопределение$(f, \{a\}, b)$". Имеются антецеденты "$f -$ функция", "$\neg(a \in \mathrm{Dom}(f))$". Истинность любого другого содержащего f антецедента не изменяется при переходе от f к любому эквивалентному семейству (т.е. отличающемуся от f только переобозначением "индексов"). Выражение "доопределение$(f, \{a\}, b)$" заменяется в консеквенте на "Вставка(f, a, b)". Вместо антецедентов "$f -$ функция", "$\neg(a \in \mathrm{Dom}(f))$" вводятся антецеденты "слово(f)", "$a \in \{1, \ldots, l(f) + 1\}$". Результат упрощается. (Прием спуск - 55).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{abf}(b - \text{set}\ \&\ a \in \{1, \ldots, l(f)+1\}\ \&\ f - \text{слово}\ \&\ \text{семействомножеств}(f)\ \&$ $\text{несовместны}(f)\ \&\ \text{Непересек}(b, f) \to \text{несовместны}(\text{Вставка}(f, a, b)))$

из теоремы

$\forall_{abf}(\neg(a \in \text{Dom}(f))\ \&\ b - \text{set}\ \&\ f - \text{функция}\ \&\ \text{семействомножеств}(f)\ \&$ $\text{несовместны}(f)\ \&\ \text{Непересек}(b, f) \to \text{несовместны}(\text{доопределение}(f, \{a\}, b)))$

4. Попытка усиления антецедента, переводящая его в равенство, фиксирующее значение переменной. Теорема - тождество $f(t) = A$, где f - переменная. Выбирается антецедент B, заголовок f которого отличен от символов "не", "равно", и находится теорема T вида $f(x_1 \ldots x_n) \leftrightarrow x_i = r$, у которой выражение r не содержит переменной x_i. Эта теорема используется для преобразования антецедента B. Результат упрощается. (Прием значперем - 3).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abfAB}(a = \text{операция}(B)\ \&\ b = \text{операция}(A)\ \&\ \text{гомоморфизм}(f, A, B)\ \&$ $\text{группа}(A)\ \&\ \text{группа}(B) \to \text{единица}(a) = f(\text{единица}(b)))$

   из теоремы

   $\forall_{abcfAB}(b = \text{операция}(B)\ \&\ c = \text{операция}(A)\ \&\ a \in \text{носитель}(A)\ \&$ $\text{левединица}(a, c)\ \&\ \text{гомоморфизм}(f, A, B)\ \&\ \text{группоид}(A)\ \&\ \text{группа}(B) \to$ $\text{единица}(b) = f(a))$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abc}(c = \text{операция}(b)\ \&\ \text{группа}(b) \to \text{левединица}(a, c) \leftrightarrow a = \text{единица}(c))$

10.13 Исключение кванторного антецедента и ввод условного выражения

1. Исключение кванторной импликации в антецедентах при помощи условного выражения. Теорема - тождество $A_1 = A_2$, выражающее сложный числовой атом A_1 ерез более простые либо исключающее невырожденные числовые атомы. Выбирается антецедент B вида $\forall_{x_1 \ldots x_k}(B_1\ \&\ \ldots\ \&\ B_n \to f(t_1 \ldots t_m = r))$, где $m \geq 2$, причем все t_i, кроме некоторого t_j, суть переменные списка $x_1, \ldots, x_k$. Выражение t_j не содержит этих переменных. Выбирается новая переменная y, и формируется выражение F вида $\lambda_{t_1 \ldots t_{j-1} y t_{j+1} \ldots t_m}((r \text{ при} y = t_j,\ \text{иначе}\ f(t_1 \ldots t_{j-1} y t_{j+1} \ldots t_m)), (t_1 \ldots t_{j-1} y t_{j+1} \ldots t_m) \in \text{Dom}(f))$. Консеквентом новой теоремы становится результат подстановки F вместо f в консеквент теоремы, антецедентами - результаты применения такой подстановки к отличным от B антецедентам исходной теоремы. Результат упрощается. (Прием числатом - 52).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ijnA}(\neg(i - j = 0)\ \&\ i \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ j \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \to$ $\det(\lambda_{ab}((A(a, j) \text{ при } b = i,\ \text{иначе}\ A(a, b)), a \in \{1, \ldots, n\}\ \&\ b \in \{1, \ldots, n\})) = 0)$

из теоремы

$\forall_{ijnA}(\neg(i-j=0)\ \&\ \forall_a(a\in\{1,\ldots,n\}\to A(a,i)=A(a,j))\ \&\ i\in\{1,\ldots,n\}\ \&$
$j\in\{1,\ldots,n\}\ \&\ \text{матр}(A,\mathbb{R},n,n)\to\det(A)=0)$

10.14 Использование дополнительной теоремы для опровержения антецедента

1. Использование дополнительной теоремы для опровержения антецедента и последующей свертки квантора общности. Теорема имеет консеквент вида $a=b$, где a,b - переменные. Выбирается существенный антецедент A, содержащий a и не содержащий b. Заголовок этого антецедента отличен от символа "не". Создается утверждение B - отрицание результата подстановки в A переменной b вместо a. Это утверждение имеет единственный максимально сложный подтерм; его заголовок - f. Находится теорема T, консеквент C которой - отрицание некоторого бесповторного элементарного утверждения, содержащего все переменные теоремы. Этот консеквент имеет единственный максимально сложный подтерм, и его заголовок равен f. Определяется подстановка S, переводящая C в B. Объединение списка отличных от A антецедентов исходной теоремы и списка результатов применения S к антецедентам теоремы T разбивается на подсписок Q_1 утверждений, содержащих a, и подсписок Q_2 остальных утверждений. Утверждение "$\forall_a(Q_1\to\neg(A))$" упрощается задаче йна преобразование относительно посылок Q_2 и превращается в элементарное утверждение, которое и становится консеквентом новой теоремы. Антецеденты ее - утверждения Q_2. Результат упрощается. (Прием равно - 93).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abBCD}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(a=B)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(\text{прямая}(bB)=\text{прямая}(CD))\ \&$
   $a\in\text{отрезок}(bB)\ \&\ B\in\text{прямая}(CD)\ \&\ a-\text{точка}\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&$
   $C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\to\text{непересек}(\text{прямая}(CD),\text{отрезок}(ab)))$

   из теоремы

   $\forall_{abABCD}(\neg(a=b)\ \&\ \neg(C=D)\ \&\ \neg(\text{прямая}(ab)=\text{прямая}(CD))\ \&$
   $A\in\text{прямая}(CD)\ \&\ A\in\text{отрезок}(ab)\ \&\ B\in\text{прямая}(ab)\ \&\ B\in\text{прямая}(CD)\ \&$
   $a-\text{точка}\ \&\ b-\text{точка}\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\to$
   $A=B)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{ABC}(\neg(A=C)\ \&\ A\in\text{отрезок}(BC)\ \&\ A-\text{точка}\ \&\ B-\text{точка}\ \&\ C-\text{точка}\to$
   $\neg(C\in\text{отрезок}(AB)))$

10.15 Ослабление антецедента путем ввода дополнительных антецедентов

1. Попытка ослабления нижней оценки на целочисленную переменную с помощью определения для частного случая. Теорема - тождество, обеспечивающее переход к сокращенной записи. Выбирается антецедент B вида "$a-$ натуральное"

либо "a – целое", где a - переменная. Если имеется антецедент "$n \leq a$", где n - целочисленная десятичная константа, то полагается $N = n$; одновременно формируется список D, образованный антецедентом B и указанным неравенством. Если B имеет заголовок "натуральное", а неравенства указанного вида в антецедентах нет, полагается $N = 1$, а список D составляется из единственного элемента B. Проверяется, что N удалось определить и что D не используется для сопровождения по о.д.з. консеквента и оставшихся антецедентов. Проверяется, что стартовые теоремы списка вывода дают определение символа f. В списке вывода находится одна из стартовых теорем, консеквент которой имеет вид $C_1 = C_2$, причем f - заголовок C_1. Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Выражение C_1 содержит десятичную запись M числа $N - 1$. Находится результат K подстановки M вместо a в консеквент исходной теоремы. Внутри K выделяется вхождение подтерма r с заголовком f. Определяется подстановка S, переводящая C_1 в r. Составляется объединенный список Q не вошедших в D антецедентов исходной теоремы и результатов применения S к антецедентам теоремы T. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что результат замены в K подтерма r на $S(C_2)$ - следствие Q. Антецедентами новой теоремы становятся утверждения Q и утверждения "a – целое", "$M \leq a$" (если $M = 1$, то вместо этого берется "a – натуральное". Консеквент ее совпадает с консеквентом исходной теоремы. (Прием свертка - 91).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{bcdefh}(h - \text{set} \ \& \ b \in h \ \& \ d - \text{натуральное} \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ \text{ассоциативно}(f) \ \& \ 0 \leq c \ \& \ \text{Единица}(e, f) \ \& \ \text{бинарнооперация}(f, h) \rightarrow \text{алгстепень}(b, f, c + d) = f(\text{алгстепень}(b, f, c), \text{алгстепень}(b, f, d)))$

из теоремы

$\forall_{bcdfA}(A - \text{set} \ \& \ b \in A \ \& \ c - \text{натуральное} \ \& \ d - \text{натуральное} \ \& \ \text{ассоциативно}(f) \ \& \ \text{бинарнооперация}(f, A) \rightarrow \text{алгстепень}(b, f, c + d) = f(\text{алгстепень}(b, f, c), \text{алгстепень}(b, f, d)))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{Aabf}(A - \text{set} \ \& \ \text{бинарнооперация}(f, A) \ \& \ a \in A \ \& \ \text{Единица}(b, f) \rightarrow \text{алгстепень}(a, f, 0) = b)$

Глава 11

Вывод вспомогательных теорем

11.1 Теорема приема, подготавливающего срабатывание других приемов

1. Варьирование эквивалентности для решения уравнения с несколькими вхождениями неизвестной. Теорема - тождество $f(A\ldots) = B$, где $f(x\ldots)$ встречается в эквивалентностях для разрешения относительно x утверждений с более чем одним вхождением неизвестной. Операция f некоммутативна. Подвыражение A имеет наибольшую оценку сложности в заменяемой части. Оно не входит в заменяющую часть, причем оценки сложности обеих частей равны. Находится теорема T вида $C_1 \leftrightarrow C_2$, позволяющая разрешать относительно неизвестной y утверждение C_1 с более чем одним вхождением y. Символ f - заголовок операции D, под которой y стречается в C_1. Усматривается, что подстановка вместо y выражения A переводит D в $f(A\ldots)$. Новая теорема представляет собой эквивалентность двух версий утверждения C_1: в одной из них y заменено на A, в другой - вместо D берется B, причем результат упрощается. Теорема снабжается характеристикой, указывающей, что она создана для приема, усматривающего возможность преобразовать "вторую" версию C_1 в первую - для дальнейшего применения приема, основанного на теореме T. (Прием вартеор - 2).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abce}(b - \text{число}\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow a\sin b - c(\cos b)^2 = e - c \leftrightarrow e = a\sin b + c(\sin b)^2)$

   из теоремы

   $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow (\sin a)^2 = -(\cos a)^2 + 1)$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{acde}(a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ d - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow e = ad + cd^2 \leftrightarrow \neg(c = 0)\ \&\ (d = -(a+\sqrt{4ce + a^2})/(2c) \vee d = (-a+\sqrt{4ce + a^2})/(2c))\ \&\ 0 \leq 4ce+a^2 \vee c = 0\ \&\ e = ad)$.

   Сразу заметим, что выводимая теорема - лишь промежуточный результат, обобщаемый другими приемами до эквивалентности

$\forall_{abde}(b - \text{число}\ \&\ a - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ e - \text{число} \rightarrow a\sin b + e(\cos b)^2 = d \leftrightarrow a\sin b - e(\sin b)^2 = d - e)$.

11.2 Получение дополнительной теоремы программирующего вывода

1. Попытка решения задачи на описание для получения тождества, возвращающего исходное значение и используемого в качестве дополнительной теоремы при выводе теорем. Теорема - тождество общей стандартизации перегруппировочного типа $A = f(t_1, t_2)$, где операция f некоммутативна и имеет единицу e по операнду t_2. Выражение t_1 - либо переменная x, либо имеет вид $g(x)$, где g - логический символ, не входящий в A. Число переменных выражения t_2 не менее двух. Выбирается некоторая такая переменная a, и список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих a, и подсписок S_2 остальных утверждений. Решается задача на описание, условия которой - утверждения S_1 и $t_2 = e$. Посылки - S_2. Ответ имеет вид $a = r\ \&\ B$. Антецедентами новой теоремы становятся утверждения S_2 и B. Проверяется, что среди них нет равенства. Консеквентом становится равенство результата подстановки в A выражения r вместо a выражению t_1. Теорема снабжается единственной характеристикой "нормализация". В дальнейших выводах она не участвует. (Прием нормализация - 126).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ac}(a - \text{число}\ \&\ c - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even})\ \&$
   $\neg(\text{числитель}(c) - \text{even})\ \&\ \neg(c = 0) \rightarrow (a^{1/c})^c = a)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{rational}\ \&\ c - \text{rational}\ \&\ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even})\ \&$
   $\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow (a^b)^c = a^{bc})$

2. Подстановка единицы в нормализующее тождество перестановочного типа для вывода перестановочного тождества с атомарной операцией в заменяющей части. Теорема - тождество общей стандартизации перестановочного типа $f(t_1, t_2) = A$. Каждая часть имеет одни и те же параметры; число их равно 3. Внутри A выделяется некорневое вхождение подтерма $g(r, x)$, причем операция g имеет единицу e по переменной x. Консеквентом новой теоремы становится равенство результата подстановки e вместо x в выражение $f(t_1, t_2)$ результату замены в A подтерма $g(r, x)$ на r. Антецеденты ее - результаты подстановки e вместо x в антецеденты исходной теоремы. Антецеденты упрощаются; предпринимается слабое упрощение консеквента, не нарушающее его структуры, необходимой для вывода теорем. (Прием нормализация - 110).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{ab}(\neg(a = 0)\ \&\ \neg(b = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число} \rightarrow 1/(a/b) = b/a)$

   из теоремы

   $\forall_{abd}(\neg(a = 0)\ \&\ \neg(b = 0)\ \&\ a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ d - \text{число} \rightarrow d/(a/b) = bd/a)$

3. Подстановка единицы в сокращающее тождество с двумя переменными. Теорема - тождество общей стандартизации $A = x$, где x - переменная, имеющая единственное вхождение в A. Число переменных выражения A равно 2. Рассматривается подтерм $f(t, x)$ выражения A, имеющий единицу e по переменной x. Консеквент и антецеденты новой теоремы получаются подстановкой в старую теорему e вместо x. Результат упрощается и сопровождается характеристиками "смтеорема", "нормализация". Первая из них указывает, что теорема выведена только для порождения приемов справочников поиска теорем. (Прием нормализация - 112).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_f(\neg(f = 0)\ \&\ f - \text{число} \rightarrow f/f = 1)$

   из теоремы

   $\forall_{df}(\neg(f = 0)\ \&\ d - \text{число}\ \&\ f - \text{число} \rightarrow df/f = d)$

4. Вывод теоремы для создания приема справочника поиска теорем "Сокращение". Теорема - тождество общей стандартизации $f(A_1, A_2) = A_3$, выполняющее группировку сложных операций. Выражение A_3 бесповторно. Операция f ассоциативная и коммутативная. Выражения A_1, A_2 дают декомпозицию выражения A_3 по его параметрам. Оценки сложности их равны и больше 3. Выражение A_3 имеет вид $f(\ldots t \ldots)$, причем операция f некоммутативна и обладает единицей e по операнду t. Этот операнд имеет не менее двух параметров, причем каждое из выражений A_1, A_2 имеет общий параметр с t. Результат обработки нормализаторами общей стандартизации результата замены в A_3 операнда t на e - некоторая переменная x. Консеквентом новой теоремы становится равенство $f(A_1, A_2) = x$, антецедентами - антецеденты исходной теоремы и равенство $t = e$. Теорема сопровождается единственной характеистикой "сокращгрупп(второйтерм)", указывающей, что она создана для приема справочника поиска теорем "Сокращение". (Прием группмножитель - 8).

   Пример: вывод теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 < a\ \&\ b + c = 1 \rightarrow a^b a^c = a)$

   из теоремы

   $\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 < a \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$

11.3 Извлечение теоремы из протокола

Непосредственное извлечение теоремы приема из протокола

1. Непосредственная декомпозиция утверждения с неизвестными. Теорема - шаблон утверждений $P(f(t_1, t_2), t_3)$, допускающих декомпозицию относительно неизвестных. Характеристики его уточняют контекст, в котором такая декомпозиция предпринимается. Предполагается, что t_1, t_2 содержат неизвестные; t_3 идентифицируется с константным выражением. Справочник "вычисл" указывает на возможность перечисления всевозможных x, y, таких, что $P(f(x, y), C)$, где C

- константа определенного типа. Теорема приема имеет вид $P(f(t_1,t_2),t_3) \leftrightarrow \exists_{xy}(P(f(x,y),t_3)\ \&\ t_1 = x\ \&\ t_2 = y)$. По ней будет создаваться прием, обращающийся к указанной справочником "вычисл" процедуре для перечисления значений x, y и формирующий дизъюнкцию утверждений $t_1 = x\ \&\ t_2 = y$. При наличии нескольких возможностей срабатывания предпостение будет отдаваться "минимальному"C. (Прием декомпозиции - 8).

Пример: вывод теоремы приема

$\forall_{nxy}(n - \text{целое}\ \&\ x - \text{целое}\ \&\ y - \text{целое}\ \&\ \neg(n = 0) \rightarrow xy = n \leftrightarrow \exists_{ab}(ab = n\ \&\ x = a\ \&\ y = b))$

из шаблона

$xy = n$

Этот шаблон имеет характеристики "декомпозиции", "см(контекст(обл(x4)заголовок(x4 целое натуральное)первыйсимвол(x4 x5) неизвестная(x5)входит(x5 корень)) не(известно(x)) не(известно(y)) целое(n) не(заголовок(n 0))легковидеть(целое(x)) легковидеть(целое(y)))". Он указывает на возможность декомпозиции уравнения с произведением неизвестных множителей в левой части и целочисленной константой в другой.

2. Использование нормализатора приведения к заданным заголовкам для подготовки декомпозиции утверждения с неизвестными (при наличии характеристики "минимум"). Теорема - шаблон утверждений $P(t,a)$, допускающих декомпозицию относительно неизвестных. Характеристики его уточняют контекст, в котором такая декомпозиция предпринимается. Предполагается, что t содержит неизвестные; a - переменная. t - неоднобуквенное выражение, все неоднобуквенные подтермы которого (включая его самого) имеют заголовки, к которым преобразует некоторый нормализатор N приведения к заданным заголовкам. Выбираются новые переменные b, c, и создается новая теорема с единственным антецедентом $b = c$ и консеквентом $P(b,a) \leftrightarrow P(c,a)$. Она используется для приема, использующего нормализатор N для преобразования выражения с неизвестными b к виду c, имеющему требуемый заголовок и позволяющему декомпозировать уравнение (см. предыдущий прием). (Прием декомпозиции - 5).

Пример: вывод теоремы приема

$\forall_{abn}(b = a \rightarrow a = n \leftrightarrow b = n)$

из шаблона

$xy = n$

Этот шаблон уже встречался выше. Он имеет характеристики "декомпозиции", "см(контекст(обл(x4)заголовок(x4 целое натуральное)первыйсимвол(x4 x5) неизвестная(x5)входит(x5 корень)) не(известно(x)) не(известно(y)) целое(n) не(заголовок(n 0))легковидеть(целое(x)) легковидеть(целое(y)))", "минимум(n)", "Тип(целое)". Шаблон указывает на возможность декомпозиции уравнения с

произведением неизвестных множителей в левой части и целочисленной константой в другой. Характеристика "минимум(n)" указывает на предпочтительность варианта срабатывания с наименьшим возможным значением модуля целочисленного параметра n. Характеристика "Тип(целое)" указывает, что шаблон декомпозиции относится только к ситуациям, когда все переменные и все промежуточные выражения уравнения имеют тип "целое". Прием, для которого строится теорема, предпринимает попытку разложения на множители левой (неконстантной) части уравнения для последующего перечисления вариантов значений множителей.

3. Использование нормализатора приведения к заданным заголовкам для подготовки декомпозиции консеквента кванторной импликации. Теорема - дизъюнкция шаблонов $P(t,a)$ утверждений, допускающих декомпозицию относительно неизвестных. Характеристики ее уточняют контекст, в котором такая декомпозиция предпринимается. У каждого шаблона t - неоднобуквенное выражение с неизвестными, все неоднобуквенные подтермы которого (включая его самого) имеют заголовки, к которым преобразует некоторый нормализатор N риведения к заданным заголовкам; a - логический символ. Нормализатор N и символ a одни и те же для всех шаблонов. Выбираются новые переменные f,g,h,z. Новая теорема имеет единственный антецедент $g(z)=h(z)$ и консеквент $\forall_z(f(z) \to P(g(z),a) \leftrightarrow \forall_z(f(z) \to P(h(z),a))$. Она используется для создания приема, преобразующего нормализатором N подвыражение $g(z)$, содержащее неизвестные задачи, к виду $h(z)$, имеющему заголоовк, допускающий дальнейшую декомпозицию консеквента. Уточняющие контекст характеристики формируются на основе характеристик исходной теоремы. (Прием декомпозиции - 6).

   Пример: вывод теоремы приема

   $$\forall_{deg}(d(f)=g(f) \to \forall_f(e(f) \to d(f)=0) \leftrightarrow \forall_f(e(f) \to g(f)=0))$$

   из шаблона

   $$axy/b=0 \ \vee \ ax^c/b=0$$

   Прием, для которого выводится теорема, предпринимает попытку разложить на множители левую часть консеквента кванторной импликации для его последующей декомпозиции относительно варьируемой переменной.

Использование дополнительной эквивалентности для извлечения теоремы приема из протокола

1. Использование нормализатора приведения к заданным заголовкам для подготовки декомпозиции утверждения с неизвестными (при отсутствиии характеристики "минимум"). Теорема - дизъюнкция шаблонов $P(t,a)$ утверждений, допускающих декомпозицию относительно неизвестных. Характеристики ее уточняют контекст, в котором такая декомпозиция предпринимается. У каждого шаблона t - неоднобуквенное выражение с неизвестными, все неоднобуквенные подтермы которого (включая его самого) имеют заголовки, к которым преобразует некоторый нормализатор N риведения к заданным заголовкам; a - логический символ. Нормализатор N и символ a одни и те же для всех шаблонов.

Находится теорема T - эквивалентность, позволяющая группировать в одной части бинарного отношения две переменные, ранее расположенные в разных частях. Ее консеквент имеет вид $P(x,y) \leftrightarrow P(r,a)$, где x, y - переменные. Выбирается новая переменная z, и формируется новая теорема, полученная из T добавлением антецедента $z = r$ и заменой консеквента на $P(x,y) \leftrightarrow P(z,a)$. Она используется для создания приема решения уравнения $P(x,y)$ путем применения нормализатора N к выражению r (например, разложению на множители разности частей уравнения $x = y$) и проверки, что результат z удовлетворяет условиям, связанным с одним из исходных шаблонов. Уточняющие контекст характеристики формруются на основе характеристик исходной теоремы. (Прием декомпозиции - 1).

Пример: вывод теоремы приема

$\forall_{abc}(a = c - b \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow b = c \leftrightarrow a = 0)$

из шаблона

$axy/b = 0 \ \vee \ ax^c/b = 0$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow b = c \leftrightarrow c - b = 0)$.

Рассматриваемый шаблон имеет характеристики "декомпозиции", "см(не(известно(x)) не(известно(y)))", "указатель(единица(1 a b) заменазнака(минус a))". Результирующая теорема имеет характеристику "Заголовки(видумножение второйтерм)", означающую, что она создана для приема, декомпозирующего условие задачи на описание при помощи нормализатора "видумножение". Эта характеристика дополняется характеристикой "см(или(контекст(вид(a дробь(умножение(x4 x7 x8)x5)) не(известно(x7)) не(известно(x8)) единица(1 x4 x5) заменазнака(минус x4)) контекст(вид(a дробь(умножение(x4 степень(x7 x6)) x5)) не(известно(x7)) единица(1 x4 x5) заменазнака(минус x4))))". Прием будет выписывать разность частей уравнения, обрабатывать ее нормализатором "видумножение" и проверять, что результат a - произведение либо степень с неизвестными, равенство которой нулю декомпозируется в более простые уравнения.

2. Группировка условий и применение нормализатора приведения к заданным заголовкам для подготовки декомпозиции утверждения с неизвестными. Аналогично предыдущему, но в качестве теоремы T берется эквивалентность, преобразующая одно утверждение с помощью другого таким образом, что новое утверждение содержит параметры обоих исходных утверждений. Консеквент ее по-прежнему имеет вид $P(x,y) \leftrightarrow P(r,a)$, где x, y - переменные. (Прием декомпозиции - 2).

   Пример: вывод теоремы приема

   $\forall_{abcde}(e = a + c - b - d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a = b \rightarrow c = d \leftrightarrow e = 0)$

   из шаблона

$axy/b = 0 \ \vee \ ax^c/b = 0$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a = b \to c = d \leftrightarrow a + c - b - d = 0)$

Прием, для которого выводится теорема, предпринимает попытку вычесть два уравнения, сгруппировав в левой части все ненулевые члены, и разложить эту левую часть на множители для последующей декомпозиции.

Использование дополнительного тождества для извлечения теоремы приема из протокола

1. Использование тождества приведения к заданным заголовкам и перегруппировки констант между частями двуместного отношения. Теорема - шаблон утверждений $f(x, y) = a$, допускающих декомпозицию относительно неизвестных. a, x, y - переменные. Характеристики шаблона уточняют контекст, в котором такая декомпозиция предпринимается. В частности, они уточняют, что должны рассматриваться только значения переменных и промежуточных выражений, имеющие некоторый тип Q (например, "целое"). Предполагается, что x, y идентифицируются с выражениями, содержащими неизвестные; a известно. Имеется нормализатор N приведения к заголовку f. В разделе символа f находится тождество T вида $g(t_1 \dots t_n) = f(r_1 \dots r_m)$. Операция g допускает перегруппировку своих членов в противоположную часть равенства с изменением их знака. Проверяется, что операции f, g сохраняют тип Q. Выбирается новая переменная z, и консеквентом новой теоремы становится эквивалентность $g(t_2 \dots t_n) = z \leftrightarrow f(r_1 \dots r_m) = g(z, t_1)$. Антецеденты - антецеденты теоремы T и указатели типа Q для всех параметров консеквента. (Прием декомпозиции - 7).

   Пример: вывод теоремы приема

   $\forall_{abcde}(a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \to e = ad + bc + bd \leftrightarrow (a + b)(c + d) = e + ac)$

   из шаблона

   $xy = n$

   и дополнительной теоремы

   $\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \to (a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd)$

11.4 Создание теоремы, вводящей новые объекты

1. Импликация для одновременного ввода нового объекта и определения его координат. Теорема - тождество вида "координ$(A, K) = (t_1, \dots, t_n)$", где A - переменная. Список антецедентов разбивается на подсписок S_1 утверждений, содержащих A, и подсписок S_2 остальных утверждений. Проверяется, что у каждого

утверждения списка S_1 переменная A встречается только как операнд отношения. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что $\exists_A(S_1)$ - следствие S_2. Консеквентом новой теоремы становится конъюнкция утверждений списка S_1 и консеквента исходной теоремы. Антецеденты ее - утверждения списка S_2. Теорема сопровождается единственной характеристикой, указывающей, что она создана для приема, вводящего в рассмотрение объект A и определяющего его координаты. (Прием систкоорд - 21).

Пример: вывод теоремы

$\forall_{cdefghijABCDK}(\neg(c=f)\ \&\ \neg(g=h)\ \&\ K=(A,B,C)\ \&\ \text{коорд}(c,K)=(d,e)\ \&$
$\text{коорд}(h,K)=(i,j)\ \&\ c-\text{точка}\ \&\ f-\text{точка}\ \&\ g-\text{точка}\ \&\ h-\text{точка}\ \&\ \text{прямая}(cf)\parallel$
$\text{прямая}(AB)\ \&\ \text{прямая}(gh)\parallel\text{прямая}(AC)\ \&\ \text{систкоорд}(K)\rightarrow D\in\text{прямая}(cf)\ \&$
$D\in\text{прямая}(gh)\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \text{коорд}(D,K)=(i,e))$

из теоремы

$\forall_{cdefghijABCDK}(\neg(c=f)\ \&\ \neg(g=h)\ \&\ K=(A,B,C)\ \&\ \text{коорд}(c,K)=(d,e)\ \&$
$\text{коорд}(h,K)=(i,j)\ \&\ D\in\text{прямая}(cf)\ \&\ D\in\text{прямая}(gh)\ \&\ c-\text{точка}\ \&$
$f-\text{точка}\ \&\ g-\text{точка}\ \&\ h-\text{точка}\ \&\ D-\text{точка}\ \&\ \text{прямая}(cf)\parallel\text{прямая}(AB)\ \&$
$\text{прямая}(gh)\parallel\text{прямая}(AC)\ \&\ \text{систкоорд}(K)\rightarrow\text{коорд}(D,K)=(i,e))$

11.5 Создание квазипротокола

1. Стандартизация операнда с помощью нормализатора стандартной формы. Теорема - тождество $f(g(x,y)\ldots)=A$, выполняющее декомпозицию сложной операции f. Операция g ассоциативна и коммутативна. Выражение A имеет не менее двух подтермов максимальной сложности, причем ни один из них не содержит одновременно x и y. Проверяется отсутствие аналогичного тождества для f (общей стандартизации либо декомпозиции) с другой операцией g. Находится стандартная форма F с корневой операцией g. В разделе символа g находится протокола - шаблон B для указания вида термов, обеспечивающего невырожденные преобразования к стандартной форме F. Выбирается новая переменная z, и создается квазипротокол - кванторная импликация с антецедентомв $z=B$ и консеквентом $f(B,\ldots)=f(z,\ldots)$. Он сопровождается характеристиками, указывающими, что по нему должен быть создан прием, обрабатывающий нормализатором стандартной формы соответствующий аргумент операции f, если он имеет вид B. (Прием декомпозиция - 11).

   Пример: получение квазипротокола

   $\forall_{abcdefn}(f=(a+b)^nc/d+e\rightarrow\sin((a+b)^nc/d+e)=\sin f)$

   из теоремы

   $\forall_{ab}(a-\text{число}\ \&\ b-\text{число}\rightarrow\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b)$

   Данный квазипротокол указывает, что аргумент синуса следует стандартизировать с помощью нормализатора стандартной формы "стандплюс", выполняющего раскрывание скобок. Это объясняется наличием декомпозирующего тождества для синуса суммы и отсутствием его аналогов для операций умножения

и деления. Хотя данное решение относится к предметной области "в целом", его принятие в данном случае инициируется одной конкретной теоремой.

2. Стандартизация операнда с помощью нормализатора стандартной формы. Аналогично предыдущему, но теорема - тождество общей стандартизации вида $A = f(g(x, y), \ldots)$. (Прием нормализация - 113).

   Пример: создание квазипротокола

   $\forall_{abcdefgn}(g = (a+b)^n c/d + e \rightarrow f^{(a+b)^n c/d+e} = f^g)$

   по теореме

   $\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ b - \text{rational } \& \ c - \text{rational } \&$
   $\neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$

   Рассматриваемый квазипротокол создает прием, выполняющий раскрывание скобок в показателе степени.

3. Обращение к нормализатору приведения к заданным заголовкам для декомпозиции сложного выражения. Теорема - тождество общей стандартизации $A_1 = A_2$. Оценки сложности обеих частей равны. Левая часть бесповторна. В ней выделяется подвыражение $f(x, y)$, где x и y - переменные. Правая часть имеет ровно два подтерма максимальной сложности, причем один из них содержит x и не содержит y, а другой - содержит y и не содержит x. Оба эти подтерма бесповторны. Существует нормализатор N приведения к заголовку f. Находится протокол T базы теорем, определяющий шаблон B выражений, для которых "обычно" имеет смысл предпринимать попытку использования нормализатора N (например, $a + b$ в случае разложения на множители). Переменные переобозначены и не входят в исходную теорему. Создается квазипротокол - кванторная импликация с антецедентом $x = B$ и консеквентом $C = A_1$, где C - результат замены в A подвыражения $f(x, y)$ на $f(B, y)$. К антецедентам добавляется условие на о.д.з. выражения C. Квазипротокол сопровождается характеристиками, указывающими, что он создан для приема, обрабатывающего правую часть антецедента нормализатором N. (Прием нормализация - 103).

   Пример: создание квазипротокола

   $\forall_{abcde}(b = d + e \ \& \ 0 < (d+e)c \rightarrow \log_a((d+e)c) = \log_a(bc))$

   по теореме

   $\forall_{abc}(a - \text{число } \& \ b - \text{число } \& \ c - \text{число } \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \&$
   $0 < c \rightarrow \log_a(bc) = \log_a b + log_a c)$

   Рассматриваемый квазипротокол создает прием, выполняющий попытку разложения на множители суммы $d + e$ - сомножителя выражения под логарифмом.

4. Ввод в актив стандартных нечисловых объектов посылок определения текущего объекта. Теорема - тождество либо эквивалентность, определяющая некоторый терм A. Составляется список X параметров терма A. Он пополняется за счет антецедентов вида $x = t$, где x уже принадлежит X, добавлением параметров

выражений t. Одновременно создается список S таких равенств $x = t$. Для каждого выражения R, встречающегося в антецедентах, имеющего своим заголовком один из символов "прямая", "окружность", "Окружность", "плоскость", "вектор", и содержащего только переменные списка X, создается квазипротокол с антецедентами S и консеквентом "актив(R)". Он сопровождается единственной характеристикой "актив(контрольвывода(A))". (Прием определение - 131).

Пример: создание квазипротокола

$\forall_{ABCK}(K = (A, B, C) \rightarrow$ актив(прямая(AB)))

по теореме

$\forall_{ABCDEFK}(D -$ точка $\&\ E -$ точка $\&\ F -$ точка $\&$ систкоорд(K) $\&$
$\neg(D = F)\ \&\ \neg(D = E)\ \&\ K = (A, B, C)\ \&\ E \in$ прямая(AB) $\&$ точкалуча(A, B, E) $\&$
прямая(DE) $\parallel$ прямая(AC) $\&\ F \in$ прямая(AC) $\&$ точкалуча(A, C, F) $\&$
прямая(DF) $\parallel$ прямая(AB) $\rightarrow$ коорд(D, K) $= (l(AE)/l(AB), l(AF)/l(AC)))$

Квазипротокол снабжается характеристикой "актив(контрольвывода(
коорд(D, K)))".

5. Ввод в актив невырожденных числовых атомов определяющей части определения текущего объекта. Теорема - тождество либо эквивалентность, определяющая некоторый терм A. Составляется список X параметров терма A. Он пополняется за счет антецедентов вида $x = t$, где x уже принадлежит X, добавлением параметров выражений t. Одновременно создается список S таких равенств $x = t$. Рассматривается невырожденный числовой атом R, входящий в определяющую часть, имеющий своим заголовком один из символов "расстояние", "угол", "площадь", "длина", "расстмежду", "объем". Проверяется, что его параметры включаются в X, причем хотя бы один параметр входит в A. Квазипротокол имеет своими антецедентами все антецеденты исходной теоремы, параметры которых включаются в X. Его консеквент - "актив(R)". Он сопровождается единственной характеристикой "актив(контрольвывода(A))". (Прием определение - 132).

   Пример: создание квазипротокола

   $\forall_{ABCDK}($систкоорд(K) $\&\ K = (A, B, C)\ \&\ D \in$ прямая(AC) $\&$
   точкалуча(A, C, D) $\rightarrow$ актив($l(AD)$)$)$

   по теореме

   $\forall_{ABCDK}($систкоорд(K) $\&\ K = (A, B, C)\ \&\ D \in$ прямая(AC) $\&$
   точкалуча(A, C, D) $\rightarrow$ коорд(D, K) $= (0, l(AD)/l(AC)))$

6. Ввод в рассмотрение пары новых числовых атомов при доказательстве равенства другой пары числовых атомов. Теорема - равенство $A_1 = A_2$ двух атомарных выражений A_1, A_2 Каждый существенный антецедент, не имеющий заголовка "не", - равенство двух невырожденных числовых атомов. Выбирается некоторое такое равенство $B_1 = B_2$ и соствляется список S остальных равенств. Проверяется, что каждый параметр выбранного равенства входит в некоторый

невырожденный числовой атом списка S, причем не допускается варьирование данного параметра с сохранением значения атома. Квазипротокол имеет антецеденты S и консеквент "и(актив(B_1)актив(B_2))". Он снабжается характеристиками "теоремаприема", "актив", "равныетермы(A_1 A_2)". (Прием равны - 13).

Пример: создание квазипротокола

$\forall_{ABCDK}$(систкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AC) & точкалуча(A, C, D) $\rightarrow$ актив($l(AD)$))

по теореме

$\forall_{ABCDK}$(систкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AC) & точкалуча(A, C, D) $\rightarrow$ коорд(D, K) $= (0, l(AD)/l(AC))$)

7. Вывод дизъюнкции для разбора случаев, позволяющего выписать соотношение для заданных числовых атомов. Теорема - тождество для невырожденных числовых атомов. В текущем списке вывода находится другое такое тождество T. Оба тождества имеют одинаковые корневые связывающие приставки. Их списки антецедентов, после удаления общей части S, оказываются одноэлементными и состоят из утверждений A_1, A_2. Консеквенты исходной теоремы и теоремы T различаются, но имеют одни и те же невырожденные числовые атомы $B_1, \ldots, B_n$. Дизъюнкция $A_1 \vee A_2$ упрощается относительно S и превращается в конъюнкцию K элементарных утверждений. Антецедентами квазипротокола теоремы становятся S, K и "актив(B_1)", ..., "актив(B_n)". Консеквент - $A_1 \vee A_2$. Квазипротокол снабжается характеристиками "дизъюнкция", "теоремаприема". (Прием числовойатом - 64).

Пример: создание квазипротокола

$\forall_{abAC}$(актив($l(bA)$) & актив($l(aC)$) & актив($l(ab)$) & актив($l(AC)$) & $\neg(a = b)$ & $\neg(a = C)$ & $\neg(b = A)$ & $a -$ точка & $b -$ точка & $A -$ точка & $C -$ точка & прямая(ab) $\perp$ прямая(aC) & прямая(aC) $\parallel$ прямая(bA) $\rightarrow$ разныестороны($A, C,$ прямая(ab)) $\vee$ однасторона($A, C,$ прямая(ab)))

из теоремы

$\forall_{abAC}(\neg(a = b)$ & $\neg(a = C)$ & $\neg(b = A)$ & $a -$ точка & $b -$ точка & $A -$ точка & $C -$ точка & прямая(ab) $\perp$ прямая(aC) & прямая(aC) $\parallel$ прямая(bA) & однасторона($A, C,$ прямая(ab)) $\rightarrow (-l(bA) + l(aC))^2 + l(ab)^2 = l(AC)^2)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abAC}(\neg(a = b)$ & $\neg(a = C)$ & $\neg(b = A)$ & $a -$ точка & $b -$ точка & $A -$ точка & $C -$ точка & прямая(ab) $\perp$ прямая(aC) & прямая(aC) $\parallel$ прямая(bA) & разныестороны($A, C,$ прямая(ab)) $\rightarrow (l(bA) + l(aC))^2 + l(ab)^2 = l(AC)^2)$

8. Вывод квазипротокола для разбора случаев с целью исключения сложного выражения. Теорема - тождество вида "$A_1 = (C_1$ при $B,$ иначе $C_2)$". Выражение A_1 бесповторно. Утверждения B и $\neg(B)$ упрощаются относительно антецедентов и превращаются в некоторый утверждения B_1, B_2. Квазипротокол не имеет

антецедентов. Его консеквентом служит $B_1 \vee B_2$. Он снабжается единственной характеристикой "Случай(A_1)". (Прием варианты - 9).

Пример: вывод квазипротокола

$\forall_a(a - \text{even} \ \vee \ \neg(a - \text{even}))$

из теоремы

$\forall_a(a - \text{целое} \rightarrow a(\text{mod } 2) = (0 \text{ при } a - \text{even}, \text{ иначе } 1))$

11.6 Создание протокола

1. Создание оператора преобразования к заданным заголовкам. Теорема - эквивалентность $A_0 \leftrightarrow A_1 \ \& \ \ldots \ \& \ A_n$ конъюнктивной декомпозиции элементарного утверждения A_0. Внутри A_0 выбирается подвыражение $f(x, y)$, где x, y - переменные, не встречающиеся одновременно ни в одном из элементарных подутверждений правой части. Обе они имеют лишь однократное вхождение в левую часть. Создается шаблон R, полученный заменой в A_0 подтерма $f(x, y)$ на символ "фикс". Составляется список S символов, в который заносится f и все символы, определяемые аналогичным образом теоремами раздела символа f, выполняющими конъюнктивную либо дизъюнктивную декомпозицию либо общую стандартизаци, причем в ситуациях, когда шаблон совпадает с R. Проверяется отсутствие существенных антецедентов. Составляется списк Q компонент связности для символов списка S, группируемых по принципу существования тождества общей стандартизации без существенных антецедентов, переводящего выражение с заголовком из S в выражение с другим заголовком из S. Выбирается компоненты S_1, содержащая символ f. Еще раз просматривается раздел символа f, и в списке S_1 сохраняются только те символы, для которых обнаруживается тождество свертки, не являющееся ни тождеством общей стандартизации, ни тождеством уменьшения оценки сложности, у которого заголовком одной из частей служит данный символ. Учитываются только тождества без существенных антецедентов. Если для группы символов S_1 уже имеется нормализатор приведения к таким заголовкам, то определяется его название F. Иначе в качестве F берется терм "Название(нормзаголовок S_1)". Наконец, регистрируется протокол "нормзаголовок(S_1 F)". (Прием и - 69).

   Пример: создание протокола

   "нормзаголовок(объединение видобъединение)"

   при рассмотрении теоремы

   $\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow b \cup c \subseteq e \leftrightarrow b \subseteq e \ \& \ c \subseteq e)$

2. Создание оператора преобразования к заданным заголовкам. Аналогично предыдущему, но исходная теорема - эквивалентность "$A_0 \leftrightarrow A_1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ A_n$" дизъюнктивной декомпозиции элементарного утверждения A_0. (Прием или - 81).

   Пример: создание протокола

   "нормзаголовок(умножение дробь степень видумножение)"

при рассмотрении теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \rightarrow ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0)$

3. Создание протокола обращения к оператору приведения к заданным заголовкам с целью конъюнктивной декомпозиции. Теорема - эквивалентность $A_0 \leftrightarrow A_1 \ \vee \ldots \ \vee \ A_n$ дизъюнктивной декомпозиции элементарного бесповторного утверждения A_0. Это утверждение имеет ровно два параметра a, b, причем в нем выделяется подвыражение $f(a, b)$. Существует оператор N приведения к заголовку f. Формируется результат B замены в A_0 подвыражения $f(a, b)$ на новую переменную c. Проверяется, что утверждение $\neg(B)$ не упрощается в о.д.з. Затем создается протокол "нормразделение($\neg(B), c, N$)". (Прием или - 85).

   Пример: создание протокола

   "нормразделение(не(равно(c 0)) c видумножение)"

   при рассмотрении теоремы

   $\forall_{ab}(a - \text{число } \& \ b - \text{число} \rightarrow ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0)$

4. Создание протокола "схемаоперандов". Теорема - определение $f(x_1 \ldots x_n) \leftrightarrow A$, где $n \geq 3$. Если для переменных x_i, x_j имеет место симметрия: антецеденты и определяющее утверждение A при перестановке этих переменных не изменяются (что проверяется при помощи задачи на доказательство), то создается протокол "схемаоперандов(...)", указывающий на такую симметрию. Более сложные случаи симметрии по части переменных данным приемом не рассматриваются. (Прием определение - 39).

   Пример: создание протокола

   "схемаоперандов(биссектриса набор(0 2 4 набор(1 1 3)))"

   при рассмотрении теоремы

   $\forall_{ABCD}(A - \text{точка } \& \ B - \text{точка } \& \ C - \text{точка } \& \ D - \text{точка } \& \ \neg(A = B) \ \&$
   $\neg(A = D) \ \& \ \neg(A = C) \rightarrow \text{биссектриса}(BACD) \leftrightarrow \angle(CAD) = \angle(DAB) \ \&$
   $\text{разныестороны}(B, C, \text{прямая}(AD)) \ \& \ \angle(CAD) \leq \pi/2)$

   Данный протокол указывает, что перестановка 2-го и 4-го операндов терма "биссектриса($ABCD$)" недопустима, а 1-го и 3-го - допустима, причем последние два операнда нельзя переставлять с 2-м и 4-м. Он учитывается при компиляции приемов ГЕНОЛОГА, идентифицирующих биссектрису.

5. Усмотрение стандартизируемого операнда. Теорема - тождество $f(x, t) = A$, упрощающее выражение под корневой некоммутативной сложной операцией f. Здесь x - переменная (номер операнда a может быть не 1, а 2). Внутри A имеется ровно два подтерма с заголовком f - $f(x, t_1)$ и $f(x, t_2)$. Применение тождества справа налево не является преобразованием общей стандартизации. В разделе базы теорем, к которому относится левая часть тождества, просматриваются другие тождества аналогичного вида с той же самой операцией f. Проверяется, что среди них нет такого тождества, у которого номер операнда x другой,

причем применение его справа налево является преобразованием общей стандартизации. Тогда создается протокол "стандподст(a $f(a,b)$ истина)", где a, b - переменные с номерами 1 и 2. При этом номер операнда a тот же, что номер операнда x в исходном тождестве. (Прием сокращ - 34).

Пример: создание протокола

"стандподст(x1 логарифм(x1 x2) истина)"

по теореме

$\forall_{abc}(a - \text{число}\ \&\ b - \text{число}\ \&\ c - \text{число}\ \&\ 0 < a\ \&\ \neg(a - 1 = 0)\ \&\ 0 < b\ \&$
$0 < c \to \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c)$

6. Создание протокола для разбора случаев при упрощении сложного числового атома. Тождество $A_1 = A_2$ выражеет сложный числовой атом A_1 с заголовком f через другой атом t с заголовком f, более короткий. Имеется элементарный существенный антецедент B. Предпринимается попытка упростить атом A_1 относительно измененного списка антецедентов, в котором вместо B берется $\neg(B)$. Если при этом оценка сложности не уменьшается, то результат по-прежнему имеет максимально сложный атом с заголовком f, более короткий, чем A_1. Тогда создается протокол "подслучаи(упрощение(A_1), $\neg(B)\ \vee\ B$)". (Прием числатом - 19).

   Пример: получение протокола

   "подслучаи(упрощение(card$\{d;c\}$), $d \in \{;c\}\ \vee\ \neg(d \in \{;c\})$)"

   из теоремы

   $\forall_{cd}(\neg(d \in \{;c\})\ \&\ c - \text{слово} \to \text{card}\{d;c\} = 1 + \text{card}\{;c\})$

   Напомним, что протокол "подслучаи($A_1A_2A_3$)" определяет разбор случаев по дизъюнкции A_2 для достижения цели A_1. A_3 - список фильтров, уточняющих контекст. В качестве A_1 в нашем примере используется терм вида "упрощение(T)", задающий цель упрощения выражения T.

Список литературы

1. А.Черч. Введение в математическую логику. Том 1. М.: ИЛ, 1960, с.484.
2. С.К.Клини. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957. 526с.
3. С.К.Клини. Математическая логика. М.: Мир, 1973, 480с.
4. Д. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975, 463с.
5. Д. Пойа. Математическое открытие. М.: Наука, 1976, 448с.
6. Подколзин А.С. Об организации баз знаний, ориентированных на автоматическое решение задач. "Дискретная математика", 1990, т.2., вып.1., с. 13-30.
7. Подколзин А.С. Система автоматического решения задач по элементарной алгебре. "Дискретная математика", 1994, т.6., вып.4., с. 35-57.

8. Подколзин А.С. Компьютерный решатель математических задач. ДАН РФ, 1994, т.335, № 4.

9. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование процессов решения математических задач. Изд-во ЦПИ при мех.-мат. факультете МГУ, 2001. 235 с.

10. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 1. Архитектура и языки решателя задач. М., "Физматлит", 2008. 1022 с.

11. Подколзин А.С. О самообучении интеллектуальной системы. "Интеллектуальные системы", 2014, том 18, выпуск 2, с. 197 - 266.

12. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 2. Опыт обучения компьютерного решателя задач: логические приемы, алгебра множеств, комбинаторика и элементарная алгебра. МГУ. - М., 2015. 1153 с. Деп. в ВИНИТИ РАН 09.11.2015, № 184-В2015.

13. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 3. Опыт обучения компьютерного решателя задач: математический анализ, дифференциальные уравнения и элементарная геометрия. МГУ. - М., 2015. 1320 с. Деп. в ВИНИТИ РАН 09.11.2015, № 185-В2015.

14. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 4. Опыт обучения компьютерного решателя задач: аналитическая геометрия, линейная алгебра, теория вероятностей, комплексный анализ и другие разделы. МГУ. - М., 2017. 969с. Деп. в ВИНИТИ РАН 27.02.2017, № 18-В2017.

15. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 5. Опыт обучения компьютерного решателя задач: Элементарные физика и химия, шахматы. МГУ. - М., 2019. 939с. Деп. в ВИНИТИ РАН 12.08.2019, № 66-В2019.

16. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 6. Опыт обучения компьютерного решателя задач: Понимание естественного языка и анализ рисунков. МГУ. - М., 2019. 758с. Деп. в ВИНИТИ РАН 12.08.2019, № 67-В2019.

17. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 7. Автоматическое создание приемов логической системы: классификация приемов решателя; логический ассемблер; компилятор спецификаций; создание тестовых примеров и доводка приемов. МГУ. - М., 2021. 739с. Деп. в ВИНИТИ РАН 06.12.2021, № 65-В2021.

18. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 8. Автоматическое создание приемов логической системы: база теорем, характеризация теорем, создание спецификаций приемов. МГУ. - М., 2021. 518с. Деп. в ВИНИТИ РАН 06.12.2021, № 66-В2021.

19. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 9. Автоматическое создание приемов логической системы: логический вывод в базе теорем. МГУ. - М., 2022. 1500с. Деп. в ВИНИТИ РАН 24.10.2022, № 33-В2022.