

А.С.Подколзин

Компьютерное моделирование логических процессов

Том 9. Автоматическое создание приемов
логической системы

Логический вывод в базе теорем

2022 г.

Введение

Этот том завершает описание системы автоматического создания приемов компьютерного решателя задач, начатое в двух предыдущих томах монографии.

Напомним содержание предшествующих томов. В первом томе монографии была описана организация компьютерного решателя задач и подробно рассмотрены языки, на которых предпринималось обучение решателя. Язык верхнего уровня, ГЕНОЛОГ, представлял собой коллекцию элементов алгоритмизирующей разметки теоремы, позволявших компилятору создавать прием решателя непосредственно по этой теореме. Обучение решателя на ГЕНОЛОГе предпринималось в самых различных областях: элементарная алгебра, элементарная геометрия, математический анализ, аналитическая геометрия, линейная алгебра, дифференциальные и интегральные уравнения, комплексный анализ, теория вероятностей, элементарные физика и химия, шахматы, текстовый анализ, анализ рисунков и ряд других. Было проработано более 50000 задач и создано свыше 13000 приемов. Описанию этих разделов посвящены 2 - 6 тома монографии.

Классификация приемов решателя позволила приступить к автоматизации их синтеза. Был создан язык еще более высокого уровня, чем ГЕНОЛОГ, на котором прием задавался лишь указанием своего типа, теоремы и небольшого числа данных, уточняющих цель применения теоремы. Язык получил название логического ассемблера и был описан в 7 томе монографии. В этом же томе рассматривался компилятор, преобразующий задание приема на логическом ассемблере в его задание на ГЕНОЛОГе, а также процедура создания тестовых примеров, проверяющих избыточность нового приема, и процедура оптимизации приема путем прогонки по задачику решателя.

Чтобы обеспечить появление новых теорем приемов, была создана база теорем решателя и предпринята привязка его приемов к элементам данной базы. Организация базы теорем описана в 8 томе монографии. Там же приведены процедура сопровождения теорем характеристиками, указывающими на возможные цели применения теоремы, а также процедура, создающая описания приемов на логическом ассемблере, создаваемых по этим характеристикам. Все процедуры в 7 и 8 томах имеют исключительно эмпирический характер и извлекались из примеров, предоставленных решателем задач. Фактически, это концентрат примеров.

Вся цепочка создания приема по теореме была рассмотрена в 7 и 8 томах, начиная с теоремы приема ГЕНОЛОГа. Однако, в процессе обучения решателя оказалось, что теоремы приемов редко совпадают с теоремами из учебников. Обычно они либо получаются из последних вводом множества обобщающих параметров, либо представляют собой разнообразные вариации и несложные комбинации исходных "фундаментальных" теорем. Для перехода от фундаментальных теорем к теоремам приемов оказался необходим определенный логический вывод, и база теорем приемов в сочетании с фундаментальными теоремами предоставила в наше распоряжение

задачник на такой "программирующий" логический вывод. Этот вывод является последним звеном в цепочке шагов, ведущих от приемов решателя к породившим их теоремам из учебников. Он завершает схему алгоритмизации теорем, изучению которой и посвящена данная монография.

В данном томе представлено описание системы приемов программирующего логического вывода, полученных при освоении указанного задачника. Целью развития аппарата программирующего логического вывода является не доказательство теоремы, а объяснение того, как она могла бы быть открыта на основе знания некоторых других теорем. Знания доказательств из учебников здесь оказалось недостаточно - нужна была такая их переработка, чтобы каждый шаг в логическом выводе был хорошо мотивирован и теорема "открывалась" без слепого перебора, как можно более естественным путем. Рассмотрение очередного примера теоремы приема, которую нужно было "открыть", начиналась с планирования цепочки возможно более целенаправленных переходов, начинающейся с некоторой исходной теоремы, и для каждого из этих переходов создавался свой прием вывода.

Следует заметить, что подобная попытка детальной переработки доказательств в математике и смежных науках, ориентированная на восстановление логики открытий, является достаточно новой, а объем работы настолько велик, что пока можно говорить лишь о начале такой работы. Важно то, что созданный аппарат компьютерного моделирования логических процессов позволяет эту работу начать выполнять систематически.

В процессе работы было обнаружено, что объяснение "открытия" теорем приемов из фундаментальных теорем принципиально мало чем отличается от объяснения "открытия" фундаментальных теорем - из аксиом, определений и других фундаментальных теорем. Это позволило пополнить коллекцию приемами, объясняющими способы "открытия" многих известных теорем из самых разных разделов элементарной математики, математического анализа, аналитической геометрии и др. Найденные здесь приемы, как правило, являются общелогическими и не связанными ни с какими конкретными понятиями соответствующих разделов, хотя и используют возможности решателя задач. Эта часть приемов относится уже не к программирующему, а к исследовательскому логическому выводу.

Общее количество приемов вывода теорем в логической системе на сегодня составляет свыше 1700. В процессе написания книги работа по развитию аппарата вывода продолжалась, так что ниже представлена лишь часть приемов. Созданный аппарат логического вывода уже сейчас демонстрирует неплохие результаты, "открывая" по многим из предлагаемых ему теорем десятки вполне пригодных для дальнейшего использования решателем следствий.

В 7 томе приводились примеры приемов, автоматически сгенерированных системой с использованием процедуры вывода теорем и включенных в базу решателя. При первой же прогонке генератора приемов по базе теорем число таких приемов превысило 2000, что свидетельствует об эффективности развиваемого аппарата. Хотя приемы, создаваемые автоматически, несложны, но именно такие приемы и являются наиболее ценными, так как срабатывают чаще. Для получения более интересных результатов обучение генератора приемов нужно продолжать. Впрочем, уже сейчас его можно использовать как помощника в ручном развитии решателя, постепенно переходя от обучения по задачкам к обучению по учебникам.

Частота срабатывания различных приемов вывода теорем неодинакова. Некоторые из них работают достаточно часто. Другие, несмотря на то, что выглядят необходимыми и совершенно естественными для своих примеров, оказываются одноразовыми. Как правило, это приемы исследовательского вывода. Возможно, такие приемы принципиально одноразовые, и система должна научиться создавать их автоматически. Как это сделать - подскажут уже найденные приемы исследовательского вывода.

Чтобы навести порядок в огромном перечне приемов вывода теорем, нужна какая-то классификация этих приемов. В конце данного тома приведена попытка такой классификации. Она заведомо несовершенна, но хоть как-то позволяет окинуть взглядом все многообразие имеющихся приемов. Скорее всего, какие-то разделы этой классификации можно будет довести до насыщения приемами вручную, а другие - потребуют автоматизации создания новых приемов.

Изучение логических процессов с помощью компьютерного моделирования лишь начато. Когда спрашивают "может ли эта система доказать гипотезу Римана о нулях дзета-функции", вероятно, совершенно не представляют себе всей сложности проблемы автоматизации творческой деятельности. Еще С.Лем замечал, что "то, чем мы думаем, гораздо сложнее, чем то, о чем мы думаем". Начинать приходится с относительно простых вещей, но заставить компьютер их делать - уже совсем непросто. Однако, другого пути создать систему, способную доказать или опровергнуть указанную выше гипотезу, кроме как пытаться объяснять способы открытия уже известных фактов, пока не видится. Предстоит очень большая работа, и для ее проведения пока созданы лишь необходимые технические предпосылки. Например, ЛОС, ГЕНОЛОГ, Логический Ассемблер и прототип генератора приемов.

В последнее время искусственный интеллект понимается исключительно как искусственная нейросеть. Но нейросеть - всего лишь вычислительное устройство, созданное природой, чтобы живые существа могли приспособливаться к окружающей среде. Известно, что неосознанного приспособления к законам природы оказалось недостаточно - появился человеческий разум, который начал создавать науки, явно формулирующие эти законы. Лишь тогда сформировался интеллект "с большой буквы" - способность решать задачи, развивать теории и технологии. Эта способность возникла благодаря приспособлению нейросети к миру логических процессов. Но сам по себе этот мир никак не связан с нейросетями. У него свои законы. Здесь повторяется ситуация, имевшая место с любой другой наукой. Чтобы по-настоящему овладеть этим миром, нужно не слепое приспособление к нему, а создание науки о логических процессах. Мощные логические системы, которые в результате появятся, по-видимому, и станут настоящим искусственным интеллектом будущего. Подобно тому, как арифметический процессор справляется с обычными вычислениями лучше любой нейросети, так и для логических вычислений нужен свой, специальный логический процессор. Нейросети здесь ни при чем. Природу не всегда нужно копировать. Автомобиль быстрее лошади.

Напомним, что последнюю версию логической системы можно получить по адресу "www.intsys.msu.ru/invest/solver/logsyst.zip".

Автор глубоко благодарен В.Б.Кудрявцеву, поддержка которого сделала возможным проведение данного исследования.

Оглавление

1	Общая схема логического вывода в базе теорем	6
1.1	Интерфейс логического вывода в базе теорем	8
1.2	Программы, запускающие цикл вывода теорем	16
1.3	Вспомогательные процедуры, используемые приемами вывода теорем	23
2	Справочники поиска теорем	61
2.0.1	Предварительные сведения о справочниках поиска теорем	61
2.0.2	Общий случай кванторных импликаций	63
2.0.3	Тождества	63
2.0.4	Эквивалентности	68
2.0.5	Кванторные импликации - не тождества и не эквивалентности	71
2.0.6	Константные утверждения	74
2.0.7	Квазипротоколы	74
2.0.8	Протоколы	74
3	Приемы вывода теорем, относящиеся к справочнику "прогрвывод"	75
3.1	Характеристика "актив"	76
3.2	Характеристика "альтернатива"	76
3.3	Характеристика "альтзначения"	78
3.4	Характеристика "Атомарное"	79
3.5	Характеристика "биекция"	84
3.6	Характеристика "варианты"	88
3.7	Характеристика "вартеор"	90
3.8	Характеристика "видобъекта"	91
3.9	Характеристика "внешзнак"	93
3.10	Характеристика "вспомобъекты"	93
3.11	Характеристика "вспомописание"	95
3.12	Характеристика "вспомпараметр"	96
3.13	Характеристика "вывод"	98
3.14	Характеристика "Выч"	114
3.15	Характеристика "вычпрог"	116
3.16	Характеристика "главнчлен"	117
3.17	Характеристика "глуб"	120
3.18	Характеристика "глубина"	144
3.19	Характеристика "группировка"	147
3.20	Характеристика "группировки"	149
3.21	Характеристика "группмножитель"	153
3.22	Характеристика "декомпозиции"	160
3.23	Характеристика "декомпозиция"	171

3.24	Характеристика "дизъюнкция"	178
3.25	Характеристика "дизъюнкция всех"	183
3.26	Характеристика "дистрибразвертка"	185
3.27	Характеристика "дистрибутивно"	192
3.28	Характеристика "допконтекст"	193
3.29	Характеристика "единствущ"	198
3.30	Характеристика "значение переменной"	200
3.31	Характеристика "значпарам"	202
3.32	Характеристика "и"	208
3.33	Характеристика "или"	234
3.34	Характеристика "исключ"	242
3.35	Характеристика "исключнеизв"	245
3.36	Характеристика "квантимплик"	253
3.37	Характеристика "кванторная свертка"	254
3.38	Характеристика "коммутатор"	269
3.39	Характеристика "конечное"	269
3.40	Характеристика "конст"	270
3.41	Характеристика "конъюнкция"	270
3.42	Характеристика "коорд"	278
3.43	Характеристика "координаты"	288
3.44	Характеристика "крд"	295
3.45	Характеристика "Крд"	295
3.46	Характеристика "легковидеть"	300
3.47	Характеристика "неизвестная"	306
3.48	Характеристика "неизвестные"	310
3.49	Характеристика "неизвоценка"	313
3.50	Характеристика "неизвпарам"	325
3.51	Характеристика "неизвтермы"	330
3.52	Характеристика "неравенства"	333
3.53	Характеристика "норм"	334
3.54	Характеристика "нормализация"	335
3.55	Характеристика "нормзаголовок"	406
3.56	Характеристика "нормкрд"	414
3.57	Характеристика "нормотр"	419
3.58	Характеристика "обобщподст"	420
3.59	Характеристика "общнорм"	423
3.60	Характеристика "описатель"	470
3.61	Характеристика "опр"	522
3.62	Характеристика "опратом"	523
3.63	Характеристика "определение"	525
3.64	Характеристика "опредзначение"	740
3.65	Характеристика "опрзнач"	743
3.66	Характеристика "опрнапр"	748
3.67	Характеристика "отношение"	749
3.68	Характеристика "отображ"	778
3.69	Характеристика "отображение"	780
3.70	Характеристика "отр"	790
3.71	Характеристика "параметризация"	790
3.72	Характеристика "парамописание"	809

3.73	Характеристика	"перестановка"	810
3.74	Характеристика	"перечисл"	812
3.75	Характеристика	"планиметрия"	813
3.76	Характеристика	"подмнож"	813
3.77	Характеристика	"подмножества"	814
3.78	Характеристика	"подстзамена"	815
3.79	Характеристика	"попыткаспуска"	816
3.80	Характеристика	"предвумножение"	821
3.81	Характеристика	"префикснаярекурсия"	822
3.82	Характеристика	"пример"	824
3.83	Характеристика	"принадл"	829
3.84	Характеристика	"принадлежит"	830
3.85	Характеристика	"пропорция"	836
3.86	Характеристика	"равно"	854
3.87	Характеристика	"равнозначны"	855
3.88	Характеристика	"равны"	858
3.89	Характеристика	"развертка"	879
3.90	Характеристика	"развтеор"	918
3.91	Характеристика	"развязка"	919
3.92	Характеристика	"разделение"	921
3.93	Характеристика	"раздпарам"	922
3.94	Характеристика	"реализация"	922
3.95	Характеристика	"родобъекта"	925
3.96	Характеристика	"сборка"	926
3.97	Характеристика	"свертка"	934
3.98	Характеристика	"свойства"	983
3.99	Характеристика	"связка"	988
3.100	Характеристика	"связпарам"	994
3.101	Характеристика	"семействоэлементов"	995
3.102	Характеристика	"систкоорд"	995
3.103	Характеристика	"склейка"	1015
3.104	Характеристика	"склейкаоперандов"	1020
3.105	Характеристика	"смнеизв"	1022
3.106	Характеристика	"смпропорц"	1024
3.107	Характеристика	"смуравн"	1034
3.108	Характеристика	"сокращ"	1035
3.109	Характеристика	"сокращгрупп"	1058
3.110	Характеристика	"сокращнеизв"	1060
3.111	Характеристика	"спуск"	1062
3.112	Характеристика	"станд"	1076
3.113	Характеристика	"Стандкомпл"	1078
3.114	Характеристика	"стандлогарифм"	1080
3.115	Характеристика	"стандменьше"	1082
3.116	Характеристика	"стандформа"	1082
3.117	Характеристика	"существант"	1084
3.118	Характеристика	"тождфунк"	1086
3.119	Характеристика	"транзитоперанд"	1089
3.120	Характеристика	"тригаргумент"	1093
3.121	Характеристика	"уменьшение"	1093

3.122	Характеристика "уменьшсложн"	1104
3.123	Характеристика "упрощение"	1106
3.124	Характеристика "упрощэкв"	1115
3.125	Характеристика "уравнварант"	1116
3.126	Характеристика "уравндробь"	1119
3.127	Характеристика "уравнквив"	1133
3.128	Характеристика "уравнмножество"	1149
3.129	Характеристика "усиление"	1164
3.130	Характеристика "усмгруппа"	1166
3.131	Характеристика "факторизация"	1167
3.132	Характеристика "функ"	1169
3.133	Характеристика "функперех"	1172
3.134	Характеристика "функполе"	1214
3.135	Характеристика "функции"	1216
3.136	Характеристика "числатом"	1217
3.137	Характеристика "числатомы"	1255
3.138	Характеристика "числвыраз"	1257
3.139	Характеристика "Числвыраз"	1261
3.140	Характеристика "числзнач"	1263
3.141	Характеристика "Числзнач"	1291
3.142	Характеристика "числитель"	1292
3.143	Характеристика "числкоэфф"	1293
3.144	Характеристика "числовойатом"	1307
3.145	Характеристика "числопред"	1371
3.146	Характеристика "числоценка"	1380
3.147	Характеристика "числсвязь"	1388
3.148	Характеристика "экуглы"	1395
3.149	Характеристика "элементарно"	1395
4	Приемы вывода теорем, относящиеся к справочнику "теоремы"	1404
4.1	Протокол "раздел"	1405
4.2	Протокол "логсимвол"	1406
4.3	Протокол "стандартизация"	1409
4.4	Протокол "развертка"	1410
4.5	Протокол "функции"	1421
4.6	Протокол "стандформа"	1422
4.7	Протокол "факторизация"	1424
4.8	Протокол "родобъекта"	1425
4.9	Протокол "Линреш"	1425
4.10	Протокол "числатом"	1428
4.11	Протокол "линкомб"	1429
5	Приемы вывода теорем, не связанные с характеристиками	1431
6	Попытка классификации приемов вывода теорем	1435
6.1	Простейшие следствия теоремы	1437
6.2	Склейка нескольких теорем	1454
6.3	Использование теоремы для варьирования дополнительной теоремы	1457

6.4	Использование дополнительной теоремы для варьирования текущей теоремы	1459
6.5	Обобщение теоремы	1465
6.6	Использование задачи на описание для вывода следствий теоремы . .	1468
6.7	Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы	1471
6.8	Использование задачи на преобразование для вывода следствий теоремы	1473
6.9	Использование задачи на доказательство для вывода следствий теоремы	1474
6.10	Варьирование антецедентов теоремы	1475
6.11	Теорема, подготавливающая срабатывание других приемов	1478
6.12	Получение дополнительной теоремы программирующего вывода . . .	1478
6.13	Извлечение теоремы из протокола	1479
6.14	Создание теоремы, вводящей новые объекты	1479
6.15	Создание квазипротокола	1479
6.16	Создание протокола	1479
7	Примеры цепочек вывода теорем	1480

Глава 1

Общая схема логического вывода в базе теорем

Источник приема часто представляет собой теорему, полученную из "обычной" теоремы цепочкой модификаций и обобщений, направленных на расширение области применимости приема. Рассмотрим простой пример. Среди базисных теорем тригонометрии имеется тождество, связывающее между собой значения синуса и косинуса:

$$\forall_a((\sin a)^2 + (\cos a)^2 = 1)$$

Это тождество подсказывает прием общей стандартизации, применяемый слева направо. Чтобы такой прием срабатывал в ситуациях, когда перед квадратами находятся одинаковые коэффициенты, тождество следует несколько обобщить:

$$\forall_{ab}(b(\sin a)^2 + b(\cos a)^2 = b)$$

Следующий шаг обобщения - учет случаев, когда коэффициент b имеет сомножителями некоторые степени синуса и косинуса a :

$$\forall_{abcdef}(c - d = 2 \ \& \ e - b = 2 \rightarrow f(\cos a)^c(\sin a)^b + f(\cos a)^d(\sin a)^e = f(\sin a)^b(\cos a)^d)$$

Заметим, что прием обеспечивает усмотрение вырожденных нулевых значений показателей степени b, e . Наконец, если коэффициенты при слагаемых различны, но "подобны", т.е. имеют вид pK и qK , где p, q - десятичные константы одинакового знака, то можно так обобщить тождество, чтобы оно применялось к слагаемому с меньшим по модулю численным коэффициентом p и части другого слагаемого, имеющей такой же численный коэффициент. В результате получаем окончательную версию теоремы, являющуюся источником приема решателя:

$$\forall_{abcdefghijk}(a - b = 2 \ \& \ c - d = 2 \ \& \ (0 < e \ \& \ 0 < f \ \& \ g = \min(e, f) \ \vee \ e < 0 \ \& \ f < 0 \ \& \ g = \max(e, f)) \ \& \ h = e - g \ \& \ i = f - g \rightarrow ej(\cos k)^c(\sin k)^b + fj(\cos k)^d(\sin k)^a = hj(\cos k)^c(\sin k)^b + ij(\cos k)^d(\sin k)^a + gj(\cos k)^d(\sin k)^b)$$

Этот пример показывает типичную ситуацию: хотя источник приема и является логически корректным истинным утверждением, он может сильно отличаться от базисной теоремы предметной области за счет ввода большого числа обобщающих "технических" параметров. Иногда таких параметров нет, а источник приема представляет собой просто результат варьирования базисной теоремы с помощью некоторых других ранее освоенных теорем.

Переход от базисных теорем к теоремам, являющимся источниками приемов, проиллюстрированный на приведенном выше примере, будем называть программирующим

логическим выводом. Этот вывод является первым звеном в цепочке алгоритмизации знаний. Базисные теоремы берутся из учебных пособий и прежде всего должны быть адаптированы к последующему созданию приемов. Так как решатель задач, описанию которого были посвящены тома данной монографии начиная со второго по шестой, дает огромное количество теорем приемов, он фактически оказывается задачником на программирующий логический вывод. Для каждой теоремы приемов должна быть прослежена цепочка переходов, выводящая ее из некоторых базисных теорем, и предложены приемы программирующего вывода, обеспечивающие реализацию данной цепочки. Это напоминает ситуацию, наблюдавшуюся при обучении решателя по стандартным задачникам.

Помимо программирующего логического вывода, база теорем требует также логического вывода, приводящего к обнаружению новых базисных теорем. Этот логический вывод можно назвать исследовательским. Его алгоритмизация означает поиск объяснений того, как можно было бы открыть уже известные основополагающие факты предметной области, и создание соответствующих приемов. Первоначально предполагалось, что обучение логической системы каждому из этих двух типов логического вывода будет происходить по отдельности. Однако, в процессе работы обнаружилось, что граница между ними весьма условная, и удобнее объединить обе группы приемов логического вывода в одну. Приемы исследовательского вывода, приводящие к открытию формулы корней квадратного уравнения либо формулы Кардано, либо к открытию теоремы Пифагора, не сильно отличаются по своей трудоемкости и своим принципам от типичных приемов программирующего вывода. Объединение их в рамках общей процедуры упрощает ее тестирование по мере обучения.

Как уже говорилось в предыдущем томе, база теорем разбита на так называемые ячейки логического вывода. Каждая ячейка представляет собой концевой раздел оглавления базы теорем, в первом пункте которого собраны теоремы, из которых должны быть выведены теоремы остальных пунктов данного раздела. При выводе могут быть использованы любые другие теоремы базы теорем. В процессе обучения системы логического вывода и тестирования ее при необходимости вручную создаются блокировки, не разрешающие при выводе теоремы использовать ее саму. Если система выводит новые теоремы, то такие блокировки не нужны.

База теорем первоначально не была разбита на ячейки логического вывода. Эти ячейки стали создаваться постепенно, в процессе развития приемов программирующего вывода. В настоящее время часть теорем погружена в эти ячейки, а часть остается вне них. Предполагается, что в конечном счете все теоремы окажутся только внутри ячеек логического вывода.

Процедура логического вывода получает в качестве своего входного данного ссылку на ячейку логического вывода. Она представляет собой базу приемов, реализованных на ЛОСе. Прием может искать в базе теорем дополнительные теоремы, необходимые для вывода, двумя способами.

Во-первых, имеется огромное количество справочников поиска теорем. Справочнику сообщается некоторый логический символ, и он выдает набор ссылок на теоремы заданного типа, связанные с этим символом. Все приемы справочников поиска теорем реализованы на ГЕНОЛОГе. Они создаются автоматически по характеристикам теоремы. Новые справочники поиска теорем создаются при обучении системы по мере надобности. Обычно сначала вводятся один-два приема нового справочника, необходимые для проработки текущего примера вывода теоремы. Чрезмерное пополнение

запаса этих приемов может сильно активизировать действия процедуры вывода и создать лавину дополнительных следствий. Поэтому подключение новых приемов поиска теорем целесообразно сопровождать эвристическими ограничениями активности приемов вывода теорем. Многообразие справочников поиска теорем образует систему быстрого поиска в базе теорем.

Во-вторых, для поиска нужных теорем можно использовать оглавление базы теорем и просматривать все теоремы выбранных разделов подряд, отбирая из них нужные. В первую очередь, при этом используются характеристики теорем. Это - система медленного поиска. Однако, она удобна тем, что не требует заблаговременного создания специальных приемов. В действительности, данный поиск не очень сильно замедляет работу процедуры вывода теорем, но лишь из-за того, что к нему прибегает малая доля приемов.

Процедура логического вывода работает со списком теорем, в который изначально заносятся стартовые теоремы ячейки логического вывода. Эта процедура представляет собой базу приемов. Каждый прием имеет свой уровень срабатывания, а теоремы списка сопровождаются весами. Работает простейшая схема сканирования теорем списка: выбирается теорема, вес которой равен текущему уровню сканирования, и к ней применяются все приемы с данным уровнем срабатывания. После этого вес теоремы увеличивается на единицу. Новые теоремы заносятся в конец списка и получают вес 0. Таким образом, сканирование списка теорем происходит "из конца в начало". Приемы сопровождаются эвристическими фильтрами, ограничивающими определенные последовательности их применений. Это приводит к тому, что вывод следствий обрывается за конечное число шагов. При появлении слишком длинных циклов вывода вводятся новые эвристические фильтры. Если представляют интерес следствия какой-либо теоремы, полученной в цикле вывода, то для ее копии создается независимая ячейка вывода.

Каждый прием вывода теорем связан с какой-то конкретной характеристикой теоремы, так что вывод следствий теоремы происходит при сканировании списка ее характеристик.

Теоремы, полученные процедурой вывода, сохраняются в оперативной памяти и поначалу не регистрируются в файлах. Это упрощает отладку процедуры. Отбор и сохранение теорем выполняются другими процедурами.

1.1 Интерфейс логического вывода в базе теорем

Оглавление приемов вывода теорем

Приемы вывода теорем реализованы на ЛОСе, и оглавление этих приемов представляет собой ветвь оглавления программ. Чтобы попасть в корень данной ветви, нужно пройти из корня оглавления программ по пути "База теорем" - "Программирующий вывод" / - "Приемы вывода теорем".

Для последнего перехода в действительности имеются три возможности: "Приемы вывода теорем (справочник ПРОГРВЫВОД)", "Приемы вывода теорем (справочник ТЕОРЕМЫ)" и "Приемы вывода теорем (процедура БЛОКВЫВОДА)". В первом из этих трех пунктов собрана основная часть приемов вывода. Они активируются при рассмотрении характеристики теоремы либо квазипротокола. Во втором пункте

представлены приемы, активируемые заголовками протоколов базы теорем. Наконец, в последнем пункте - совсем немного приемов, активируемых при рассмотрении любой теоремы безотносительно к ее характеристикам.

При переходе в пункт "Приемы вывода теорем (справочник ПРОГРВЫВОД)" появляется меню, заголовки пунктов которого суть названия характеристик теорем. В ветви каждого такого пункта сгруппированы приемы вывода теорем, активируемые рассмотрением соответствующей характеристики. Концевые пункты этой ветви позволяют обычным образом (клавиша "курсор вправо") перейти к просмотру программы приема вывода. Обычно контрольная точка "прием(N)", появляющаяся при этом, расположена в конце программы приема - вблизи точки регистрации выведенной им теоремы в списке результатов вывода. Чтобы найти начало программы, нужно найти предшествующую точке "прием(N)" точку "ктл(N)". Иногда несколько операторов "ктл", относящихся к разным приемам, склеены в одну дизъюнкцию. Для нужд отладки в программы приемов вывода теорем вставляются также контрольные точки "ктд(x_i)". Они располагаются сразу после того, как переменной x_i присваивается дополнительная теорема, участвующая в выводе.

Контрольные точки "ктл" и "ктд" нужны для отсечения ненужных попыток процедуры вывода, если требуется воспроизвести лишь вывод какой-то конкретной теоремы. Программы этих операторов проверяют наличие "ключей" - комментариев, ограничивающих вывод, и блокируют дальнейшие действия, если номер контрольной точки либо ее теорема не совпадают с указанными в ключе.

Концевая точка оглавления приемов вывода соответствует единственному приему вывода. Можно посмотреть список всех теорем базы теорем, для вывода которых (на последнем либо одном из промежуточных шагов) данный прием необходим. Для этого на концевом пункте оглавления нажимается клавиша "л". Список теорем появляется после некоторой паузы. Клавишами "курсор вверх" - "курсор вниз" можно менять выделенную теорему списка. Ее номер перекрашивается в синий цвет.

Если нужно посмотреть сохраненное в архиве базы теорем дерево вывода этой теоремы, нажимается клавиша "курсор вправо". Дальнейшие действия для этого случая описаны ниже в подразделе "Работа с архивом базы теорем". Чтобы вернуться из просмотра дерева вывода в список теорем, нажимается Esc.

Если нужно выяснить, не утерялся ли вывод каких-либо теорем списка, нажимается "Ctrl-t". Тестирование может занять сравнительно много времени. По его завершении после номера теоремы, чей вывод по-прежнему достигается, ставится знак "плюс", в противном случае - знак "минус".

Если нужно перейти от выделенной теоремы в первый пункт той ячейки вывода, где она зарегистрирована, нажимается "Ctrl-курсор вправо".

Наконец, для возвращения в оглавление приемов вывода нажимается Esc.

Запуск логического вывода в ячейке вывода

Чтобы запустить логический вывод в ячейке логического вывода, нужно зайти в просмотр любой теоремы первого пункта этой ячейки и нажать "л". Процесс вывода на экране не отображается. В некоторых случаях он может занимать достаточно много времени.

Чтобы проконтролировать текущее состояние вывода, нужно нажать "Break" и выйти в отладчик ЛОСа. Поднявшись по цепочке стековых кадров до программы символа "прогрвывод", можно просмотреть значение переменной х5 - списка четверок, представляющих теоремы, полученные на текущий момент. Если нужно посмотреть текущую обрабатываемую теорему (из нее выводятся следствия), следует выйти на просмотр программы, к которой обратилась программа "прогрвывод". В кадре этой программы переменная х2 имеет своим значением текущую теорему, а переменная х5 - пару, первым элементом которой служит указанный выше список четверок.

По завершении цикла вывода теорем на экран выводится их список. После номера той теоремы, которая уже имелась в базе теорем (не обязательно в данной ячейке вывода) ставится знак "плюс". Клавишами "курсор вверх - курсор вниз" можно выделять теорему данного списка. Номер выделенной теоремы перекрашивается в синий цвет. Для выхода из просмотра списка достаточно нажать "курсор влево". Так как при этом все результаты цикла вывода будут утеряны, нажимать на клавиши курсора следует осторожно.

Чтобы посмотреть историю вывода выделенной теоремы, нажимается "курсор вправо". После этого появляется кадр, в котором выделенная теорема перерисована сверху. Под ней (отделенный горизонтальной чертой) изображен список характеристик, предложенный процедурой вывода. Под списком характеристик располагается название примененного приема вывода, получившего теорему. В качестве такого названия фигурирует текст того пункта оглавления приемов вывода теорем (ветви оглавления программ), который ссылается на программу приема. Наконец, в самом низу приводятся одна либо несколько теорем, являющихся источниками рассматриваемой теоремы. Верхняя из них - основная, остальные - дополнительные.

Основная теорема либо ранее получена в данном цикле вывода, либо является одной из исходных теорем ячейки. Дополнительная теорема может быть взята из любого места базы теорем либо тоже являться ранее полученной теоремой цикла вывода.

Чтобы посмотреть, как была получена основная теорема, снова нажимается "курсор вправо", и т.д. вплоть до источника вывода. На каждом шаге схема прорисовки такая же, как вначале. Для возвращения в предыдущий кадр нажимается "курсор влево". При выходе в общий список теорем нужна осторожность, чтобы следующим нажатием "курсор влево" не потерять результаты вывода.

Если нужно подробнее проанализировать, как работал прием вывода, можно из просмотра его кадра вывода нажать "п". Тогда весь цикл вывода в данной ячейке вывода будет повторен, вплоть до срабатывания данного приема при выводе им рассматриваемой теоремы. В этот момент будет осуществлен выход в отладчик ЛОСа, причем на момент выполнения программы "ктв". Эта аббревиатура расшифровывается как "контрольная точка вывода". Нажатием "Page Up" выходим в программу "регтеор", регистрирующую полученную теорему в списке вывода. Еще одним нажатием "Page Up" попадаем в программу приема вывода на момент регистрации им с помощью процедуры "регтеор" выведенной теоремы. Просматривая в этом кадре отладчика ЛОСа значения программных переменных, можно получить определенную информацию о срабатывании приема вывода. Обычно описанная возможность используется при отладке.

Если после просмотра срабатывания приема через отладчик ЛОСа нужно вернуться к просмотру общего списка выведенных теорем, следует нажать "0" и "Enter". Тогда

прерванный цикл вывода будет продолжен, а по его завершении снова окажется прорисован тот кадр, где было нажато "п".

Можно сохранить в буфере базы теорем все полученные в цикле вывода новые теоремы, т.е. теоремы, которые пока отсутствуют в базе теорем. Для этого из просмотра списка выведенных теорем достаточно нажать "б". Автоматически произойдет переход в просмотр буфера базы теорем: появится пункт оглавления, расположенный внутри буфера и имеющий заголовок "Вывод теорем". Можно выбрать те из теорем буфера, которые представляют интерес, и перенести их в один из концевых пунктов той ячейки логического вывода, где теоремы были выведены. Перенесение выполняется обычными средствами: из просмотра теоремы нажимается Insert, затем находится нужный концевой пункт в ячейке вывода, и на нем снова нажимается Insert. Следует зарегистрировать хэш новых теорем, иначе система не будет их видеть на посоедующих циклах вывода. Для регистрации выбирается любой подраздел ячейки вывода (включая пункт оглавления, через который непосредственно эта ячейка достигается) и нажимается "Ш".

Чтобы быстрее найти нужные теоремы в буфере базы теорем, можно из ветви "Вывод теорем" нажать "т". Появится полный список теорем этой ветви. Непосредственно через данный список отобрать теорему и перенести ее не удастся, но по номеру теоремы в списке легко найти ее в ветви буфера.

Для расчистки буфера базы теорем, достаточно нажать "О" (кир.) из любой точки оглавления базы теорем.

Чтобы выявить теоремы ячейки логического вывода, которые не были выведены, достаточно из просмотра списка выведенных теорем нажать "к". Появится список всех теорем ячейки, причем после номера выведенных теорем будет стоять "плюс", а после номера невыведенных - "минус". Клавиша "курсор влево" вернет в просмотр списка выведенных теорем.

После запуска цикла вывода в ячейке логического вывода могут оказаться утеряны выводы каких-либо теорем этой ячейки либо, наоборот, ранее не выводившиеся теоремы будут выведены. Чтобы распознавать эти события, служит окраска нижней горизонтальной линии под характеристиками теоремы. Если теорема ни разу ранее не выводилась и не выводится сейчас, то цвет этой линии - черный. Если теорема сейчас была выведена, то цвет - зеленый. Если вывод теоремы был утерян в точности на последнем запуске цикла вывода, цвет нижней линии становится синим. Наконец, если вывод утерян уже давно, цвет линии - красный.

Так как пролистывание всех теорем ячейки вывода может оказаться слишком долгим, создан другой способ контроля выводимости теорем. Если из оглавления базы теорем нажать клавишу "л", появляется табло, на котором отображается общая информация о выводе теорем во всех разделах базы теорем. Здесь имеются следующие пункты:

1. Число утерянных на последнем цикле вывода теорем.
2. Общее число теорем, ранее выводившихся, но с утратой выводимости на текущий момент (включая только что утерянные).
3. Число теорем, вывод которых был восстановлен на последнем цикле.
4. Число теорем, которые только что стали выводимыми системой.

5. Число прерванных выводов. Обычно вывод прерывается, если он становится в разы более трудоемким, чем на предыдущем цикле. Иногда прерывание связано с какой-то ошибкой программы, вызывающей выход в отладчик ЛОСа при ее выполнении.
6. Контроль прерванных выводов. При выборе этого пункта система пытается повторно запустить вывод в тех ячейках, где он был прерван. После такого запуска есть шанс, что число прерванных выводов будет меньше, либо их вовсе не останется. Это объясняется тем, что система при серийной многопоточной обработке выводов в базе теорем иногда дает сбои неизвестной природы, которые при повторном запуске отсутствуют.
7. Наибольшие трудоемкости. Приведены пять самых больших величин трудоемкости вывода в ячейках.
8. Наибольшие замедления. Приведены пять самых больших увеличений трудоемкости на последнем цикле серийного вывода (см. ниже).
9. Наибольшие ускорения. Приведены пять самых больших уменьшений трудоемкости на последнем цикле серийного вывода (см. ниже).
10. Наибольшие серии. Приведены пять самых больших длин списков выведенных теорем по всем ячейкам базы теорем.
11. Увеличение серий. Приведены пять самых больших увеличений длин списков выведенных теорем на последнем цикле серийного вывода.
12. Уменьшение серий. Приведены пять самых больших уменьшений длин списков выведенных теорем на последнем цикле серийного вывода.

Чтобы перейти к просмотру теорем либо ячеек вывода, упомянутых в перечисленных пунктах (кроме пункта "контроль прерванных выводов"), достаточно нажать клавишу для буквы, указанной после соответствующего пункта в скобках. Например, для пункта "прерванные выводы" - "п". Чтобы перейти к следующему элементу просматриваемого списка, нужно нажать клавишу "ш". Выйдя на нужную теорему либо ячейку, далее можно проводить необходимый анализ дефекта и его устранение.

Работа с архивом базы теорем

Можно сохранить в архиве базы теорем дерева вывода тех теорем ячейки вывода, которые система уже умеет получать. Это помогает при отладке, если система перестает выводить теорему, ранее ею выводившуюся. Для сохранения нужно запустить цикл вывода теорем в ячейке при помощи клавиши "Л".

Чтобы выйти на дерево вывода теоремы, нужно из просмотра ее в базе теорем нажать "д". Здесь не придется ждать так долго, как при запуске цикла вывода. Кадр, отображающий корневую вершину дерева вывода, будет прорисован сразу. В верхней части экрана расположится запись теоремы, выводимой в данной точке дерева, под ней - список характеристик, еще ниже - ссылка на примененный прием вывода, после которой идет текст того пункта оглавления приемов вывода, где расположен этот прием. Наконец, в самом низу располагаются теоремы, из которых была выведена верхняя теорема кадра. Первая из них - основная, прочие - дополнительные. Всем

этим теоремам соответствуют другие вершины дерева вывода. Клавишами "курсор вверх" - "курсор вниз" можно выбрать одну из нижних теорем (выбранная теорема выделяется синим цветом). Для перехода в ее вершину дерева вывода нажимается "курсор вправо". Возвращение - по "курсор влево". В корне дерева вывода клавиша "курсор влево" заблокирована. Чтобы вернуться в просмотр теоремы, придется нажать Esc. Заметим, что указанным образом можно посмотреть вывод не только теорем, относящихся к данной ячейке вывода, но и любых дополнительных теорем, если их выводы уже были зарегистрированы в архиве базы теорем.

В качестве ссылки на прием вывода, прорисовываемой в кадре просмотра вершины дерева вывода, используется тройка A, m, n . Здесь A - тот логический символ (характеристика теоремы), в программе которого расположен прием. n - номер контрольной точки "прием(n)", выделяющей конец программы приема. m - уровень срабатывания приема.

В дереве вывода теоремы можно выделить главный путь - последовательность основных теорем, прослеживаемых от корня дерева до одной из исходных теорем ячейки вывода. Предусмотрена возможность выхода в отладчик ЛОСа для просмотра подробностей вывода теорем главного пути, а также некоторых дополнительных теорем - тех, которые получены в цикле вывода для данной ячейки вывода. Находясь в вершине дерева вывода, где получается одна из таких теорем T , для выхода в отладчик ЛОСа можно нажать одну из клавиш "ш", "щ", "ъ".

В первом случае произойдет прерывание внутри программы оператора "ктл(N)", соответствующего точке входа в программу приема вывода перед получением теоремы T . Из нее нужно выйти наружу в программу приема вывода. Значением переменной x_2 здесь станет основной источник теоремы T .

После нажатия "щ" произойдет прерывание внутри программы оператора "ктд(x_i)", соответствующего той точке программы приема вывода, получившего теорему T , где уже выбрана теорема - дополнительный источник вывода. Выйдя наружу из программы оператора "ктд", окажемся в программе приема вывода, а дополнительная теорема будет значением переменной x_i .

Наконец, после нажатия "ъ" произойдет прерывание внутри программы оператора "ктв", соответствующего тому месту программы приема вывода, где теорема T уже получена и регистрируется. Обычно внешняя по отношению к программе "ктд" программа - программа оператора "регтеор", выполняющего регистрацию теоремы T в списке результатов вывода. Выйдя из нее наружу, окажемся в программе приема вывода.

Клавиша "ъ" обычно нажимается для проверки того, что теорема по-прежнему выводится. Если выхода в отладчик ЛОСа не произошло, то способность выводить эту теорему утрачена. Для уточнения причин можно нажать "щ" и проследить дальнейшие действия программы. Если даже до момента выбора дополнительной теоремы дело не доходит, можно нажать "ш" и проследить работу приема с самого начала. В совсем затруднительных случаях следует вставить контрольную точку "трассировка(стоп 0)" в программу приема вывода и вести отладку при повторных запусках вывода в ячейке.

Если выход в отладчик ЛОСа состоялся и нужно вернуться в просмотр дерева вывода, нажимаются клавиши "0" и затем - "Enter".

Серийный запуск логического вывода в базе теорем

По мере того, как появляются новые приемы вывода теорем или изменяются старые, может происходить существенное замедление вывода в отдельных ячейках или утрачиваться ранее имевшиеся выводы. Даже изменение приемов основного решателя может давать тот же эффект, если эти приемы срабатывают или перестают срабатывать во вспомогательных задачах приемов вывода теорем. Не стоит слишком откладывать устранение таких аварий, чтобы не утратить контроль за ситуацией. Однако, для этого необходимо своевременно их обнаруживать. Для такого обнаружения созданы различные виды серийной прокрутки логического вывода, тестирующие вывод во всех ячейках базы теорем или в заданной их части.

Простейшая серийная прокрутка - последовательная. Если нужно протестировать лишь часть базы теорем, то предварительно с помощью "Ctrl-1" выделяется начальный пункт тестирования в оглавлении базы теорем, с помощью "Ctrl-2" - последний пункт. Оба эти пункта должны располагаться в одном и том же меню. Они могут совпадать. Для полной прокрутки ничего предварительно нажимать не надо. Запуск прокрутки осуществляется нажатием клавиши "Ctrl-л" из любого места оглавления базы теорем.

В процессе последовательной прокрутки на экране будут появляться стартовые теоремы ячеек вывода. Эта смена особой информации не несет и показывает лишь, что система не зависла. При зависании можно либо устраивать внутренний перезапуск программы нажатием клавиши "Esc", либо, если программа вообще была прервана операционной системой, запускать ее заново. В обоих случаях цикл будет продолжен с повторной попытки вывода в той же ячейке. Чтобы оборвать цикл вывода, нужно выйти в отладчик ЛОСа нажатием "Break", после чего нажать "Ctrl-з" и "Esc". По завершении цикла можно посмотреть результаты, нажав "л" из оглавления базы теорем. Появится табло результатов вывода, рассмотренное выше.

Последовательная прокрутка выводов теорем чрезвычайно трудоемка. Поэтому она практически не используется, а вместо нее применяется параллельная прокрутка.

Чтобы пользоваться параллельной прокруткой, необходимо предварительно подготовить директорию, в которой расположены основные папки *GEN*, *INF*, *LOS*, *TCH*, *TER*, *TXT* логической системы и ее исполняемый файл *logsyst.exe*. В зависимости от числа m потоков, которые может выполнять процессор, нужно создать в этой директории папки *EX1*, *EX2*, ..., *EXm*. В любом случае, параметр m не должен превосходить 8. В каждую из этих папок нужно скопировать указанные выше шесть папок логической системы и исполняемый файл, которой нужно переименовать. Вместо *logsyst.exe* в папку *EXi* помещается его копия *logsysi.exe*.

Чтобы автоматически пересылать исполняемый файл системы по указанным папкам после каждого его изменения, создан AUTOIT - скрипт "copir". Если работа ведется одновременно на двух системных блоках - основном ("R") и дополнительном ("L"), то этот скрипт выполняет пересылку и на дополнительный блок.

Создан еще один полезный AUTOIT - скрипт "fenix". Он немедленно запускает любой из параллельных процессов, как только операционная система останавливает его и выдает сообщение об ошибке. При перезапуске система пропускает ту ячейку логического вывода, на которой произошел сбой, но запоминает эту точку и впоследствии укажет на нее в табло результатов. При отсутствии скрипта можно выполнять перезапуск вручную.

После того, как указанная подготовка директории системы проведена, следует в главном меню системы зайти в пункт "Ресурсы и установки" и установить в окне "Распараллеливание" нужное число потоков m . Еще раз напоминаем, что оно не должно превосходить 8. Для входа в редактирование числа потоков нужно нажать на него левой кнопкой мыши, затем нажать нужную цифровую клавишу и Enter.

Теперь можно запускать параллельную прокрутку. Это выполняется из любого места оглавления базы теорем нажатием "Ctrl-p". После небольшой паузы экран системы исчезнет, а вместо него в правой части экрана появятся m небольших окон - по числу параллельных потоков. Пауза означает копирование всей текущей версии системы (указанные выше 6 папок) в каждую из папок EXi . Исполняемый файл при этом не копируется (он открыт в текущем потоке). Работа распределяется между потоками примерно поровну, с учетом имеющихся данных о трудоемкости предыдущих выводов в ячейках.

В окне параллельного потока при прокрутке будут прорисованы: в левой части - трудоемкость вывода в текущей ячейке вывода, в правой части - название потока EXi . Главный поток расположен сверху и обозначен $EX0$. Трудоемкости меняются в окне по ходу работы, и таким образом можно проверять, что поток не завис.

По мере выполнения работы, дополнительные потоки исчезают. Когда работу завершает основной поток, он перекрашивается в зеленый цвет. Возвращение в обычный формат его экрана произойдет автоматически после завершения работы всех потоков. Если при этом система обнаружит, что какие-то выводы были прерваны, она прежде всего попытается их повторить, так что в итоговом табло будут отображены лишь те прерванные выводы, которые при повторной попытке снова были прерваны. Обычно это означает резко возросшую трудоемкость вывода в ячейке и требует специального анализа.

Если потоки остановлены через диспетчер задач, то для восстановления работоспособности системы нужно запустить главный поток - logsyst.exe и сразу же нажать "Break", "Ctrl-z", "Esc", "z", "Ctrl-y". Затем закрыть программу и снова зайти в нее.

По мере обучения системы выводу теорем, трудоемкость полного цикла тестирования увеличивается. Время прокрутки становится значительным, даже с использованием восьмипоточного распараллеливания. С другой стороны, отказ от полного тестирования чреват потерей ранее проработанного обучающего материала. При подключении нового приема вывода теорем легко спровоцировать неограниченный либо чрезмерно длительный вывод в отдельных ячейках, либо пустить процесс вывода в ячейке по другому руслу и за счет этого потерять теоремы. Оба явления подсказывают коррекции приемов и являются важным фактором обучения системы. Поэтому пока приходится мириться с длительными прокрутками. Возможно, в конце концов придется разбить все многообразие приемов вывода на различные группы и в каждой группе тестировать их независимо. Трудность заключается в том, что часто для получения теоремы нужна последовательная работа нескольких приемов вывода, и их всех нужно будет относить к одной группе.

Пока для ускорения тестирования и облегчения отладки был создан архив базы теорем. Он позволяет существенно ускорить хотя бы проверку того, что ранее выводившиеся теоремы не утеряны. Ускорение обеспечивается отсечением всех ветвей вывода, не приводящих к теоремам ячейки. Впрочем, это дает не слишком много: основная часть доработки приема вывода приходится на устранение резких замед-

лений в ячейках из-за спровоцированной им гиперактивности. Для обнаружения таких замедлений необходима полная прокрутка.

Выше уже говорилось, что для регистрации в архиве базы теорем результатов вывода в отдельной ячейке достаточно запустить вывод в ней клавишей "Л". Чтобы зарегистрировать выводы во всех ячейках, предусмотрена возможность запуска последовательной прокрутки клавишей "Ctrl-a (кир.)". При параллельной прокрутке регистрация результатов в архиве базы теорем не предусмотрена.

Сокращенное последовательное тестирование логического вывода в базе теорем, использующее архив базы теорем, запускается нажатием "Ctrl-n". Сокращенное параллельное тестирование запускается нажатием "Ctrl-y (кир.)". Оба вида тестирования на порядок быстрее, чем без использования архива. Однако, точки резкого замедления не отслеживаются.

Для просмотра данных о результатах сокращенного тестирования нужно из оглавления базы теорем нажать "Л". Появится табло, на котором будет указано количество невыведенных теорем и потерянных выводов. Также будут указаны пять наибольших замедлений в режиме сокращенного вывода.

На практике сокращенное тестирование оказалось невостребованным. При этом сохраненные в архиве базы теорем деревья вывода весьма полезны при анализе причин потери вывода теоремы.

1.2 Программы, запускающие цикл вывода теорем

Выйти в точку обработки команд, запускающих логический вывод по текущей теореме, можно через пункт "База теорем" - "Программирующий вывод" - "Запуск программирующего вывода по текущей теореме" оглавления программ. После расчистки комментариев к исходной задаче и установке на счетчике шагов интерпретатора ЛОСа значения 1 происходит обращение к процедуре "прогрвывод", которой передается ссылка на текущий концевой терминал оглавления базы теорем. Этот терминал представляет собой первый пункт некоторой ячейки вывода. Вся основная работа по выводу теорем выполняется процедурой "прогрвывод", реализующей цикл обращений к справочнику "прогрвывод". В программах данного справочника и сгруппированы приемы вывода теорем.

Остановимся на процедуре "прогрвывод" несколько подробнее. Обращение к ней имеет вид "прогрвывод(x1 x2 x3)", где x1 - ссылка на концевой терминал оглавления базы теорем, x2 - набор установок на вывод. Процедура реализует цикл логического вывода для теорем терминала x1. Выходной переменной x3 присваивается набор троек (новая теорема - список ее характеристик - блок вывода) для полученных результатов. Блок вывода представляет собой набор информационных элементов, указывающих способ получения теоремы и ранее предпринимавшиеся шаги вывода следствий из нее.

В процессе работы процедуры "прогрвывод" полученные теоремы представляются не тройками, как указано выше, а четверками: (вес - теорема - список характеристик - блок вывода). Вес используется при сканировании. Список этих четверок ниже будем называть списком вывода.

В блоке вывода используются элементы следующих типов:

1. (источник $A_1 A_2$). A_1 представляет собой левый край той четверки списка вывода, из которой была получена текущая четверка. A_2 - набор $(B_1 \dots B_n)$ либо логический символ B_1 , характеризующий способ получения. B_1 - логический символ, являющийся ссылкой на примененный прием вывода. B_2, \dots, B_n - дополнительные теоремы, использованные приемом. Для одного и того же символа характеристики, по которому происходит обращение к справочнику "прогрвывод", различные приемы должны иметь различные символы B_1 . Для приемов, относящихся к различным характеристикам, возможны совпадения этих символов.
2. (следствие A). A есть левый край некоторой четверки списка вывода, полученной из данной четверки.
3. (обобщение $A_1 A_2$). Имел место вывод следствия из текущей теоремы, обобщающий ее в соответствии с характеристикой A_1 . A_2 - набор информационных элементов, уточняющих способ обобщения. В частности, A_2 содержит элемент (следствие A_3), где A_3 - левый край четверки для обобщающей теоремы.
4. (прием A). A есть набор ссылок "прием(...)" на вспомогательные приемы, созданные по теореме на период вывода. Обычно такие приемы создаются в специальных ячейках, содержащих не стартовые теоремы, а установку на цикл вывода. В процессе вывода немедленно создаются приемы, редуцирующие новые теоремы с учетом ранее выведенных. По завершении цикла вывода эти приемы удаляются.
5. (титр A). A есть пара (логический символ S - номер контрольной точки "прием(...)", ссылающая на примененный прием вывода. Этот прием относится к программе символа S , а контрольная точка расположена непосредственно перед обращением к регистрации выведенной теоремы в списке вывода.
6. исключение. Теорема не включается в результат вывода, и новые следствия из нее не выводятся.
7. Плюс. Теорема выведена не как следствие исходных теорем, а получена некоторым специальным образом согласно установке на вывод. Имеется в виду, что у некоторых ячеек вывода первый пункт содержит не стартовые теоремы, а некоторую техническую установку на цикл вывода теорем.
8. (начало A). Данная теорема является исходной теоремой вывода и A - ссылка "теорема($A_1 A_2$)" на нее в базе теорем.
9. регвывод. Пометка теоремы, при получении которой был использован анализируемый прием вывода - см. установку на вывод (регвывод A).
10. выход. Теорема включается в результат, хотя она и была обобщена.
11. результат. Теорема включается в результат, но следствия из нее не выводятся.
12. (характ A). A есть набор характеристик текущей теоремы, если она является одной из исходных теорем вывода.

13. деблок. Уже предпринималось деблокирование приемов, основанных на данной теореме. Имеется в виду следующее. При тестировании вывода следствий исходных теорем ячейки вывода обычно блокируются все приемы, основанные на теоремах ячейки. Иначе при редуцировании эти теоремы "уничтожали" бы самих себя. Однако, после того, как некоторая теорема уже была выведена, специальные операторы, используемые приемами вывода, могут разблокировать основанные на ней приемы. Пометка "деблок" предотвращает повторную разблокировку.
14. склейка. Теорема уже участвовала в склейке нескольких теорем (частных случаев) при выводе их обобщения.
15. (уровень A). A есть уровень срабатывания приема, создавшего данную теорему.
16. (логвывод A). A есть пара (B_1, B_2) , где B_1 - набор вхождений левых краев четверок списка вывода, выведенных непосредственно из текущей четверки. B_2 - 0 либо ссылка "теорема(...)" на текущую теорему в базе теорем. Элемент используется при регистрации вывода в архиве базы теорем.
17. (доптеор A). A есть список теорем текущего цикла вывода, использованных при решении вспомогательных задач, обеспечивших вывод текущей теоремы. Дело в том, что при завершающем редактировании выведенной теоремы часто используется вспомогательная задача, которой передается список вывода и которая может его использовать в своих преобразованиях. Список A пополняет список дополнительных теорем, применявшихся при выводе текущей теоремы.
18. функ. Блокировка примерки определения свойства функции на элементарные операции раздела.

Обычно список $x2$ установок на вывод, передаваемых процедуре "прогрвывод", пуст. Однако, если ячейка вывода вместо стартовых теорем содержит установку на цикл логического вывода, то эта установка конвертируется приемами вывода в набор элементов приводимых ниже типов, который и становится значением переменной $x2$ в процессе работы процедуры.

1. (стандформа A). Вывод упрощающих тождеств для нормализатора стандартной формы A .
2. (оценка $A_1 A_2$). В наборе A_1 перечисляются символы операций, рассматриваемых при выводе упрощающих тождеств стандартной формы, в наборе A_2 - оценки их стоимости (десятичные числа).
3. (число A). Обрыв цикла вывода после получения A теорем. A - десятичное число.
4. стандподст. При выводе упрощающих тождеств стандартной формы используются исходные тождества приведения к стандартной форме.
5. (переменные A). При выводе упрощающих тождеств стандартной формы отбрасываются все результаты, имеющие более A переменных.

6. редуцирование. Предпринимается отбрасывание тех теорем, которые изменяются другими выведенными тождествами либо эквивалентностями общей стандартизации.
7. (факторизация $A_1 A_2 A_3$). Вывод тождеств приведения к заголовку A_1 . A_2 - пара (теорема - набор характеристик) для дистрибутивной развертки выражений с заголовком A_1 , A_3 - набор пар (теорема - набор характеристик) для упрощающих тождеств, применяемых к заменяемой части.
В случае вывода тождеств сокращенного умножения берется обобщенная дистрибутивная развертка с двумя либо более сомножителями, имеющими, вообще говоря, более двух слагаемых каждый, а в качестве упрощающих тождеств - тождество $a - a = 0$. Далее предпринимаются попытки применения его к многочленной части первого тождества, чтобы в итоге пропало как можно большее число слагаемых. Таким образом легко "открываются" тождества для разности квадратов, суммы и разности кубов, и ряд других подобных тождеств.
8. начало. Указатель на имевший место цикл создания приемов вспомогательных пакетов вывода.

Выйти на начало программы "прогрвывод" можно через пункт "База теорем" - "Программирующий вывод" - "Процедура ПРОГРВЫВОД" - "Исходная точка" оглавления программ.

Прежде всего, предпринимается обращение к процедуре "блокраздела", блокирующей срабатывания всех приемов, источниками которых служат теоремы текущей ячейки логического вывода. Это необходимо, чтобы при выводе какой-либо теоремы не использовалась она сама. Фактически, блокировка необходима лишь для проверки того, что система не утратила способности воспроизводить ранее проработанный обучающий материал.

Переменной x_4 присваивается содержимое терминала x_1 , переменной x_5 - пустой накопитель списка вывода - набора четверок (вес теоремы - теорема - список ее характеристик - блок вывода). Просматриваются все элементы набора x_4 , представляющие собой ссылки на теоремы. Для каждой теоремы A в накопитель x_5 заносится четверка $(0 A B C)$, где B - список характеристик теоремы, C - блок вывода, состоящий из элементов (характ B), (логвывод (пустое слово S)), (начало S). Здесь S - ссылка "теорема($D_1 D_2$)" на теорему в базе теорем. Она либо совпадает с элементом набора x_4 , либо отличается от него заголовком.

После перехода через "ветвь 2" идет цикл сканирования списка вывода. Переменной x_6 , определяющей текущий уровень сканирования, присваивается 0. Далее идет оператор "повторение", к которому будут происходить откаты при сканировании. После него переменной x_7 - индикатору пополнения списка вывода на очередном цикле сканирования - присваивается 0.

Просматриваются все четверки x_8 списка вывода, вес которых равен x_6 . Сразу же вес текущей четверки увеличивается на 1. Переменной x_9 присваивается теорема четверки x_8 , переменной x_{10} - список ее характеристик, переменной x_{11} - блок вывода. Если в блок вывода входит символ "исключение" либо "результат", то переход к следующей четверке x_8 .

Далее рассматриваются два случая:

1. Теорема не имеет характеристики "протокол", т.е. является "обычной" теоремой либо квазипротоколом. Тогда предпринимается просмотр ее характеристик x_{12} . Переменной x_{13} присваивается пара, первым элементом которой служит список вывода, а вторым элементом - индикатор пополнения этого списка при рассмотрении характеристики x_{12} , изначально нулевой. Происходит обращение к справочнику "прогрвывод" на логическом символе, являющемся заголовком характеристики x_{12} .

Программа справочника "прогрвывод" объединяет группу приемов вывода теорем, активируемых при рассмотрении характеристик с заданным заголовком. Этому справочнику передаются следующие входные данные: x_1 - текущая четверка (вес - теорема - характеристики - блок вывода), x_2 - теорема, x_3 - список ее характеристик, x_4 - блок вывода, x_5 - пара (список вывода - индикатор изменений), x_6 - уровень сканирования, x_7 - текущая характеристика. Программа справочника реализует вывод следствий из теоремы, связанный с данной характеристикой, и регистрацию результатов в накопителе x_5 . Приемы вывода теорем, реализованные в программах справочника, будут описаны в следующей главе. Если цикл вывода должен быть прерван, то значением R обращения к справочнику служит 2. Если необходим откат к началу цикла сканирования и понижение уровня до нуля, то $R = 3$. Если необходим немедленный переход к анализу следующей четверки списка вывода, то $R = 4$.

После обращения к справочнику проверяется второй элемент пары x_{13} . Если он равен 1, т.е. список вывода изменился, то индикатор x_7 устанавливается на единицу, переменной x_5 переписывается первый элемент пары x_{13} , а переменной x_{11} - новая версия блока вывода, расположенная в последнем разряде четверки x_8 . Если результат обращения к справочнику равен 2, то цикл вывода обрывается, и происходит откат к переходу через "ветвь 1". Иначе - откат к переходу через "ветвь 4".

2. Теорема имеет характеристику "протокол", т.е. является протоколом базы теорем.

Протоколы представляют собой термы технического характера, несущие самую разнообразную функциональную нагрузку. Они дают общую характеристику раздела либо отдельных понятий, фиксируют решения об алгоритмизации раздела, задают целевые установки на циклы логического вывода и т.д. Хотя сами протоколы не являются теоремами, запуск циклов логического вывода по ним выполняется точно так же, как по теоремам. Необходимая информация при этом извлекается из базы теорем путем просмотра разделов ее оглавления либо с помощью справочников поиска теорем.

В случае протокола пара, первым элементом которой служит список вывода, а вторым элементом - индикатор пополнения этого списка, присваивается переменной x_{12} . Для вывода теорем из протокола используется уже не справочник "прогрвывод", а справочник "теоремы". Обращение к нему происходит на логическом символе - заголовке протокола x_9 . Этот справочник имеет следующие значения своих входных переменных: x_1 - текущая четверка (вес - протокол - характеристики - блок вывода), x_2 - протокол, x_3 - список его характеристик, включающий символ "протокол", x_4 - блок вывода, x_5 - пара (список вывода -

индикатор изменений), x_6 - уровень сканирования. Программа справочника реализует вывод теорем, определяемый протоколом, и регистрацию результатов в накопителе x_5 . Приемы вывода теорем, реализованные в программах справочника "теоремы", будут описаны в отдельной главе. Смысл значений 2,3,4, выдаваемых справочником "теоремы" в качестве результатов, тот же, что для справочника "прогрвывод".

Заметим, что новые протоколы, как и новые теоремы, генерируются приемами вывода обоих справочников. В процессе развития базы приемов и тестирования ее на задачах ранее принятые решения об алгоритмизации раздела могут изменяться. Пока эти механизмы не разработаны.

После обращения к справочнику "теоремы" проверяется второй элемент пары x_{12} . Если он равен 1, т.е. список вывода изменился, то индикатор x_7 устанавливается на единицу, переменной x_5 переприсваивается первый элемент пары x_{12} , а переменной x_{11} - новая версия блока вывода, расположенная в последнем разряде четверки x_8 . Если результат обращения к справочнику равен 2, то цикл вывода обрывается, и происходит откат к переходу через "ветвь 1". Иначе - откат к переходу через "ветвь 4".

Если произошел откат к переходу через "ветвь 4", т.е. справочник "прогрвывод" либо "теоремы" завершил обработку теоремы, то проверяется, равен ли текущий уровень сканирования x_6 нулю. Если равен, то предпринимается обращение к процедуре "блоквывода", реализующей такие приемы вывода следствий теоремы, которые не связаны ни с какой конкретной характеристикой теоремы. Этих приемов совсем немного, и они будут описаны ниже в отдельной главе.

Входными данными процедуры "блоквывода(x_1 x_2)" служат: пара x_1 (список вывода - индикатор изменений) и текущая четвертка x_2 списка вывода.

В нашем случае первому аргументу передается пара, присвоенная непосредственно до обращения переменной x_{12} , второму аргументу - четвертка x_8 . После обращения к процедуре проверяется второй элемент пары x_{12} . Если он равен 1, т.е. список вывода изменился, то индикатор x_7 устанавливается на единицу, переменной x_5 переприсваивается первый элемент пары x_{12} , а переменной x_{11} - новая версия блока вывода, расположенная в последнем разряде четверки x_8 .

Далее происходит откат к переходу через "ветвь 3". Если индикатор изменения x_7 равен 1, то текущий уровень сканирования переустанавливается на 0 и происходит откат к оператору "повторение", после которого сканирование списка вывода возобновляется. Если индикатор x_7 нулевой, то происходит выбор следующей четверки x_8 списка вывода, вес которой равен текущему уровню сканирования.

По окончании сканирования списка вывода - переход через "иначе 2". Если текущий уровень сканирования меньше 6, то он увеличивается на 1, и происходит откат к оператору "повторение" для возобновления сканирования списка вывода на большем уровне. Наконец, по достижении уровня 6 происходит откат к переходу через ветвь 1, где вывод следствий обрывается и начинается обработка списка вывода.

В комментарии (прогрвывод A) к посылкам исходной задачи сохраняется копия списка вывода x_5 . Она понадобится для учета вывода в архиве базы теорем.

Предпринимается расчистка списка вывода. Прежде всего, после контрольной точки "прием(5)" выполняется отбрасывание теорем, имеющих альтернативную версию, у

которой консеквент тот же самый, а список антецедентов - подмножество списка антецедентов данной теоремы. Если теоремы совпадают, то одна из них удаляется, а ее характеристики присоединяются к характеристикам оставшейся теоремы. Удаление теоремы состоит в том, что вместо ее четверки в списке вывода помещается 0. По завершении цикла - переход через "ветвь 1" к контрольной точке "прием(97)".

Здесь предпринимается отбрасывание теорем, изменяемых выведенными тождествами и эквивалентностями общей стандартизации. Рассмотрим этот цикл подробнее. Текущая четверка списка вывода присваивается переменной x_7 . Переменной x_8 присваивается теорема четверки, переменной x_9 - список характеристик.

Если в списке x_9 имеется характеристика "нормализация(...)", указывающая, что x_8 - тождество общей стандартизации, то проверяется, что либо оценка сложности заменяющего терма меньше оценки сложности заменяемого, либо число вхождений переменных в заменяющий терм меньше чем в заменяемый. Просматриваются другие теоремы T списка вывода, имеющие заголовок "длялюбого", у которых все заголовки характеристик принадлежат списку "антецедент", "спуск", "упрощение", "группировки", "исклтерм", "нормализация", "общнорм". Если у x_8 есть существенные посылки, то у T они тоже должны быть. Не рассматриваются теоремы T , у которых заголовок ссылки на примененный прием - "поглощает" либо "Сокращ". Предпринимается попытка применить тождество x_8 к консеквенту теоремы T . Если это удастся, то теорема T отбрасывается (ее четверка заменяется на 0).

Если в списке x_9 есть характеристика "кванторнаясвертка(...)", указывающая, что x_8 - тождество для замены кванторного утверждения на бескванторное, то просматриваются другие теоремы T списка вывода. Если какая-либо из них имеет такую же характеристику, причем единственную, то сравниваются заменяемые термы обеих теорем. Если эти термы - кванторные импликации, отличающиеся переобозначением без отождествлений своих свободных переменных, причем оценка сложности заменяющего терма теоремы T не меньше, чем у теоремы x_8 , то теорема T отбрасывается.

По завершении цикла из списка вывода удаляются все нули, и переход через "ветвь 1". Здесь заменяются на ноль все четверки списка вывода, у которых среди характеристик имелся символ "Исключение". Далее - снова переход через "ветвь 1". Здесь происходит расчистка протоколов "нормзаголовков", созданных в цикле вывода. Отбрасывается тот протокол, чье множество заголовков - подмножество заголовков другого протокола. Снова происходит исключение нулей из списка вывода.

Далее - еще один переход через "ветвь 1". Здесь рассматриваются два случая, когда теорему, обобщенную в цикле вывода, целесообразно сохранить. В первом случае теорема имеет характеристики "группировки" и "нормализация(...)", а число ее переменных не более 3. Элемент "исключение" ее блока вывода заменяется на "выход", и характеристики полагаются состоящими из единственного символа "перестановки". Во втором случае теорема имела характеристики "группировки", "варьир(...)" и не имела характеристики "нормализация(...)". Действия аналогичны предыдущим; в характеристиках сохранится только "варьир(...)".

По завершении перечисленных коррекций списка вывода, после контрольной точки "прием(100)", реализуется выдача результата. Просматривается список вывода. Отбираются такие его четверки x_7 , для которых выполнены следующие требования:

1. Блок вывода не содержит элементов "исключение", "Исключение".

2. Либо блок вывода имеет элемент (источник . . .), либо он имеет элемент "Плюс".
3. Если теорема имеет не менее четырех переменных, была обобщена и ее блок вывода не имеет элемента "выход", то ее источник в списке вывода не был обобщен.

У этих четверок отбрасывается первый элемент (вес), и составленный из них список х6 выдается как результат вывода. Предварительно расчищается буфер фильтрации, выполнявший блокировку приемов, основанных на теоремах ячейки вывода.

1.3 Вспомогательные процедуры, используемые приемами вывода теорем

Приемы вывода теорем реализованы на ЛОСе. Чтобы упростить создание и чтение их программ, было создано множество вспомогательных процедур. Перечислим основные из них. Выйти на список этих процедур и их программы можно через пункт "База теорем" - "Программирующий вывод" - "Вспомогательные процедуры логического вывода" оглавления программ.

Процедура "смтеор"

При выводе следствий теоремы бывает необходимо привлечение дополнительных теорем. Наиболее часто используемый способ их поиска - справочники поиска теорем. Входным данным х1 любого такого справочника служит одноэлементный набор, образованный изначально пустым накопителем ссылок "теорема($A_1 A_2$)" на теоремы из базы теорем, отбираемые согласно определенному принципу по текущему логическому символу, на котором происходит обращение к справочнику. Список справочников поиска теорем, созданных на текущий момент, будет приведен в следующем разделе.

Прием вывода теорем обращается к справочникам поиска теорем через процедуру "смтеор($x_1 x_2 x_3 x_4$)". Здесь х1 - набор логических символов, представляющих собой названия справочников поиска теорем, либо единственный такой символ. х2 - логический символ. Процедура перечисляет теоремы х3, определяемые справочниками списка х1 по логическому символу х2. Одновременно переменной х4 присваивается список характеристик теоремы х3, к которому добавлена ссылка "теорема($A_1 A_2$)" на теорему х3 в базе теорем.

Программа "смтеор" вначале создает одноэлементный набор х5, состоящий из пустого накопителя ссылок на теоремы. Он заполняется путем последовательного обращения к справочникам списка х1 на символе х2. Затем ссылки "теорема(. . .)" последовательно просматриваются, и при помощи процедуры "теорема" для текущей ссылки х6 находятся теорема х7 и список ее характеристик х8.

Процедура "тождвывод"

Эта процедура - наиболее часто используемое правило вывода, заключающееся в тождественном либо эквивалентном преобразовании фрагмента одной теоремы при помощи другой теоремы. Обращение к ней имеет вид "тождвывод($x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$)", где х1 - кванторная импликация, х2 - вхождение в него некоторого подтерма, х3 -

тождество либо эквивалентность, x_4 - набор дополнительных установок на вывод. Перечисляются варианты x_5 вывода следствий из x_1 путем унификации терма x_2 с одной из частей тождества либо эквивалентности x_3 .

Используются следующие дополнительные установки на вывод:

1. *направл(A)*. Символ A ("первыйтерм" либо "второйтерм") указывает направление применения тождества либо эквивалентности x_3 .
2. *модификатор*. Указание на ввод при преобразованиях вспомогательной переменной - модификатора (дополнительный параметр корневой ассоциативно - коммутативной операции каждой из частей тождества x_3).
3. *существосылки*. Блокируется невырожденная подстановка в существенные посылки теорем x_1 , x_3 .
4. (*переменная x A*). x есть переменная утверждения x_1 , участвующая в унификации. После каждой текущей унификации, порождающей очередную версию следствия, элемент A заменяется на терм, подставляемый вместо переменной x . Таким образом, данный элемент играет роль дополнительного выходного канала, позволяющего контролировать варианты унификации.
5. (*перем x A*). Аналогично предыдущему, но x есть переменная утверждения x_3 .
6. (*фикс A*). A есть набор переменных терма x_1 , вместо которых подстановка при унификации не выполняется.
7. *новаяпеременная*. Блокировка ввода новых переменных при унификации.
8. *варунифик*. Варьирование преобразующего тождества либо эквивалентности оператором "варунифик".
9. (*пересекаются x y*). Термы, унифицированные с переменными x, y теоремы x_1 , имеют общую переменную.
10. *разбиение*. При унификации ассоциативно-коммутативной операции f от двух переменных x, y с операцией $f(z, t_1, t_2)$, где z - переменная, происходит разбиение z в "произведение" двух новых переменных z_1 и z_2 , относимых к x и y .

Несмотря на обилие типов установок, обычно используется только элемент "(направл ...)".

Программа "тождвывод" прежде всего проверяет наличие установки "варунифик". Если ее нет, то переменной x_6 передается неизменная теорема x_3 , иначе - перечисляются варианты ее варьирования процедурой "варунифик", поочередно присваиваемые переменной x_6 .

Процедура "варунифик" сначала выдает неизменную версию теоремы x_3 . Дальнейшее перечисление выполняется только в случаях, когда x_3 - эквивалентность. В этом случае находится набор A_1, \dots, A_n конъюнктивных членов подтерма x_2 и набор B_1, \dots, B_m конъюнктивных членов заменяемой части эквивалентности x_3 . Заменяемая часть определяется согласно установке (направл ...). Рассматриваются два случая:

1. $m < n$. Тогда выбирается переменная x , не входящая в теоремы x_1, x_3 , и она добавляется к конъюнктивным членам как заменяемой, так и заменяющей частей теоремы x_3 . Результат выдается.
2. $m = n$. В некотором отличном от равенства B_i встречается выражение t , являющееся непосредственным операндом отношения. Его заголовок s имеет единственное вхождение в B_i и встречается в единственном A_j , имеющем вид равенства. Тогда выбирается переменная x , не входящая в теоремы x_1, x_3 , и вместо B_i в конъюнктивные члены заменяемой части заносится равенство $x = t$ и результат замены в B_i подтерма t на переменную x . К конъюнктивным членам заменяющей части добавляется равенство $x = t$. Результат выдается.

После того, как преобразующая теорема присвоена переменной x_6 , переменной x_7 присваивается пустой накопитель результатов вывода. Он позволит отслеживать количество выведенных следствий и обрывать вывод при слишком большом их числе (более 40). Переменной x_8 присваивается результат переобозначения переменных теоремы x_6 на переменные, не входящие в теорему x_1 и в термы A из элементов (переменная x A) установки на вывод. Соответственно переобозначаются переменные термов A .

Переменной x_9 присваивается связывающая приставка теоремы x_1 , переменной x_{10} - подтерм по вхождению x_2 . Переменной x_{11} присваивается конкатенация связывающих приставок теорем x_1 и x_8 . Эта конкатенация сохраняется в переменной x_{12} , после чего из списка x_{11} исключаются все переменные, указанные в элементах (фикс...) установки на вывод. Если имеет элемент (направл N) установки на вывод, то переменной x_{13} присваивается символ N . Иначе поочередно рассматриваются случаи $x_{13} = \text{"первыйтерм"}$ и $x_{13} = \text{"второйтерм"}$. Параметр x_{13} будет определять направление замены согласно теореме x_8 . Переменной x_{15} присваивается заменяемый терм теоремы x_8 .

Далее последовательно реализуются следующие ветви программы, каждая из которых выполняет некоторое перечисление результатов:

1. После контрольной точки "прием(2)" рассматривается случай унификации без ввода дополнительной переменной в обеих частях тождества либо эквивалентности x_8 . Прежде всего, переменной x_{16} присваивается заготовка набора установок на унификацию. В нее заносятся элементы (унификация $x_{10} x_{15}$ пустое слово) и (переменные P), где P - объединение списка x_{12} и списка переменных теоремы x_1 . Если в списке x_4 имеются символы "новаяпеременная", "разбиение", то они передаются в набор x_{16} . Предпринимается обращение к процедуре "унификация" для установки на унификацию x_{16} и списка x_{11} переменных унификации. Она перечисляет наборы x_{17} термов, образующих вместе со списком x_{11} унифицирующую подстановку S . Подробное описание процедуры "унификация", используемой логической системой, дано в главе 2 второго тома монографии.

Если в наборе x_4 имеется элемент (пересекаются $x y$), то проверяется, что термы, сопоставленные подстановкой S переменным x, y , имеют общие переменные.

Проверяется отсутствие такой переменной x списка x_{11} и свободной переменной y терма, подставляемого вместо x , что x не является переменной консеквента

теоремы x_8 , не встречающейся в антецедентах, y встречается в терме x_{10} , не входит в список x_{11} , и при этом не встречается в списках A элементов (фикс A) набора x_4 .

Далее, согласно найденной унифицирующей подстановке, корректируются элементы (переменная ...) и (перем ...) набора x_4 . Определяется результат x_{18} применения унифицирующей подстановки к заменяющему терму теоремы x_8 , и находится результат x_{19} замены в теореме x_1 вхождения x_2 на терм x_{18} . Переменной x_{20} присваивается набор антецедентов кванторной импликации x_{19} , переменной x_{21} - ее консеквент. Переменной x_{22} присваивается набор антецедентов теоремы x_8 .

Если в наборе x_4 имеется элемент "существосылки", то проверяется, что унифицирующая подстановка не подставляет более чем однобуквенные термы в антецеденты теорем x_1 и x_8 .

Находится список x_{23} результатов применения унифицирующей подстановки к элементам списков x_{20} и x_{22} , а также результат x_{24} применения ее к терму x_{21} . Вводится кванторная импликация x_{25} со списком антецедентов x_{23} и консеквентом x_{24} . Она является одним из результатов вывода. Проверяется, что в списке x_7 отсутствует подобная (полученная переобозначением связанных переменных и изменением порядка операндов коммутативных операций или отношений) кванторная импликация. Если в списке x_7 уже набралось 40 элементов, то работа процедуры "тождвывод" завершается. Иначе - терм x_{25} заносится в список x_7 и выдается в качестве очередного значения выходной переменной x_5 .

После цикла выдачи результатов, описанного в данном пункте, переход через "ветвь 2" перед контрольной точкой "прием(2)". Здесь проверяется, что набор x_4 содержит символ "модификатор" и что заголовок x_{16} заменяемой части теоремы x_8 - ассоциативный и коммутативный символ s . Выбирается переменная z , не встречающаяся в теоремах x_1 и x_8 . Переменной x_{18} присваивается результат добавления переменной z к концу списка x_{11} . Переменной x_{19} присваивается результат добавления заменяемому терму теоремы x_8 операнда z , а переменной x_{20} - результат добавления заменяющему терму этой теоремы нового s - члена z .

2. После контрольной точки "прием(3)" рассматривается случай унификации со вводом дополнительной переменной в обеих частях тождества либо эквивалентности x_8 . Предпринимается обращение к процедуре "унификация" для пары унифицируемых термов x_{10} , x_{19} и списка x_{18} переменных унификации. Она перечисляет наборы x_{21} термов, образующих вместе со списком x_{18} унифицирующую подстановку S . Дальнейшие действия аналогичны действиям из предыдущего пункта. Тем не менее, приведем их описание.

Если в наборе x_4 имеется элемент (пересекаются x y), то проверяется, что термы, сопоставленные подстановкой S переменным x , y , имеют общие переменные.

Проверяется отсутствие такой переменной x списка x_{18} и свободной переменной y терма, подставляемого вместо x , что x не является переменной консеквента

теоремы x_8 , не встречающейся в антецедентах, y встречается в терме x_{10} и не входит в список x_{18} .

Согласно найденной унифицирующей подстановке, корректируются элементы (переменная ...) и (перем ...) набора x_4 . Определяются результат x_{22} применения унифицирующей подстановки к терму x_{20} и результат x_{23} замены в теореме x_1 вхождения x_2 на терм x_{22} . Переменной x_{24} присваивается набор антецедентов кванторной импликации x_{23} , переменной x_{25} - ее консеквент. Переменной x_{26} присваивается набор антецедентов теоремы x_8 .

Если в наборе x_4 имеется элемент "существпосылки", то проверяется, что унифицирующая подстановка не подставляет более чем однобуквенные термы в антецеденты теорем x_1 и x_8 .

Находится список x_{27} результатов применения унифицирующей подстановки к элементам списков x_{24} и x_{26} , а также результат x_{28} применения ее к терму x_{25} . Вводится кванторная импликация x_{29} , полученная из импликации со списком антецедентов x_{27} и консеквентом x_{28} применением процедуры "полныепосылки", добавляющей посылки, необходимые по о.д.з. Этого требует новая переменная z . Проверяется, что в списке x_7 отсутствует подобная x_{29} кванторная импликация. Терм x_{29} заносится в список x_7 и выдается в качестве очередного значения выходной переменной x_5 .

После цикла выдачи результатов, описанного в данном пункте, переход через "ветвь 1" перед контрольной точкой "прием(3)". Здесь проверяется, что x_2 - одна из частей равенства, являющегося консеквентом теоремы x_1 . Выбирается переменная u , отличная от z и не входящая в теоремы x_1, x_8 . Переменной x_{23} присваивается результат добавления переменной u к концу списка x_{18} . Определяется результат x_{24} добавления к расположенному по вхождению x_2 подтерму s - члена u .

3. После контрольной точки "прием(4)" рассматривается случай унификации со вводом дополнительных переменных в обоих теоремах x_1, x_8 . Предпринимается обращение к процедуре "унификация" для пары унифицируемых термов x_{24}, x_{19} и списка x_{23} переменных унификации. Она перечисляет наборы x_{25} термов, образующих вместе со списком x_{23} унифицирующую подстановку S . Дальнейшие действия аналогичны действиям из предыдущего пункта:

Если в наборе x_4 имеется элемент (пересекаются $x y$), то проверяется, что термы, сопоставленные подстановкой S переменным x, y , имеют общие переменные.

Проверяется отсутствие такой переменной x списка x_{23} и свободной переменной y терма, подставляемого вместо x , что x не является переменной консеквента теоремы x_8 , не встречающейся в антецедентах, y встречается в терме x_{10} и не входит в список x_{23} .

Согласно найденной унифицирующей подстановке, корректируются элементы (переменная ...) и (перем ...) набора x_4 . Определяется результат x_{26} применения унифицирующей подстановки к терму x_{20} . Рассматривается вхождение

x_{27} противоположной x_2 части равенства в консеквенте теоремы x_1 . Переменной x_{28} присваивается результат добавления к подтерму x_{27} s - члена u , и далее находится результат x_{29} применения к x_{28} подстановки S . Если x_2 было первым операндом равенства, то переменной x_{30} присваивается терм "равно(x_{26} x_{29})", иначе - терм "равно(x_{29} x_{26})". Находится результат x_{31} замены в теореме x_1 ее консеквента на терм x_{30} . Переменной x_{32} присваивается набор антецедентов кванторной импликации x_{31} . Переменной x_{33} присваивается набор антецедентов теоремы x_8 .

Если в наборе x_4 имеется элемент "существопосылки", то проверяется, что унифицирующая подстановка не подставляет более чем однобуквенные термы в антецеденты теорем x_1 и x_8 .

Находится список x_{34} результатов применения унифицирующей подстановки к элементам списков x_{32} и x_{33} . Вводится кванторная импликация x_{35} , полученная из импликации со списком антецедентов x_{34} и консеквентом x_{30} применением процедуры "полныепосылки", добавляющей посылки, необходимые по о.д.з. Проверяется, что в списке x_7 отсутствует подобная x_{29} кванторная импликация. Если этот список содержит 40 элементов, то перечисление результатов обрывается. Иначе терм x_{35} заносится в список x_7 и выдается в качестве очередного значения выходной переменной x_5 .

После цикла выдачи результатов, описанного в данном пункте, переход через "ветвь 1" перед контрольной точкой "прием(4)".

4. После контрольной точки "прием(10)" рассматривается случай унификации со вводом дополнительных переменных только в тождестве x_1 . Предпринимается обращение к процедуре "унификация" для пары унифицируемых термов x_{24} , x_{15} и списка x_{23} переменных унификации. Она перечисляет наборы x_{25} термов, образующих вместе со списком x_{23} унифицирующую подстановку S . Дальнейшие действия почти полностью совпадают с действиями из предыдущего пункта. Единственное отличие - переменной x_{26} присваивается результат применения унифицирующей подстановки к заменяющему терму теоремы x_8 .
5. По завершении всех перечисленных циклов - откат к переходу через "ветвь 1" расположенному в том же фрагменте программы, что и контрольная точка "прием(2)". После контрольной точки "прием(5)" рассматривается случай унификации при наличии функциональных переменных. Составляется список x_{15} всех таких переменных f связывающей приставки теоремы x_1 , что в подтерме x_{10} по вхождению x_2 встречается выражение вида "значение(f ...)". Проверяется, что этот список непуст и что вхождение x_2 находится в консеквенте теоремы x_1 . Проверяется также, что каждая переменная f списка x_{15} имеет только такие вхождения в терм x_{10} , которые суть вхождения первых операндов подтермов с заголовком "значение".

Вводится пустой накопитель x_{16} аргументов функциональных переменных списка x_{15} . Для его составления предпринимается просмотр данного списка. x_{17} - текущая переменная списка. Просматриваются вхождения x_{18} символа "значение", первым операндом которых служит x_{17} , а вторым - какая-либо переменная x_{19} . Проверяется, что x_{19} является вторым операндом каждого вхожде-

ния в x_{10} терма "значение", имеющего x_{17} первым операндом. Предпринимается попытка найти такой квантор общности либо существования, отличный от корня всей теоремы x_1 , что x_{19} входит в его связывающую приставку, а x_2 расположено внутри него (для квантора общности - в консеквенте). В случае квантора общности определяется список x_{21} антецедентов, содержащих x_{19} , и переменной x_{22} присваивается терм "равно(класс(x_{19} и(x_{21})) область(x_{17}))". В случае квантора существования в качестве x_{21} берется список всех подкванторных утверждений, не содержащих внутри себя вхождение x_2 . Предпринимается попытка доказать обработанное нормализаторами общей стандартизации утверждение x_{22} как следствие списка x_{23} антецедентов теоремы x_1 . Если это удастся сделать, то переменная x_{19} заносится в накопитель x_{16} , и переход к очередной переменной x_{17} . В случае неудачи - попытки унификации с учетом функциональных переменных обрываются.

После того, как список x_{16} составлен, находится список x_{17} вхождений в x_{10} всех подтермов "значение($f \dots$)", у которых первый операнд f принадлежит списку x_{15} . Находится результат x_{18} замены в x_{10} всех этих вхождений на их первые операнды f . Переменной x_{19} присваивается заменяемый терм теоремы x_8 , и предпринимается обращение к процедуре "унификация" для пары унифицируемых термов x_{18} , x_{19} и списка x_{11} переменных унификации. Она перечисляет наборы x_{20} термов, образующих вместе со списком x_{11} унифицирующую подстановку S .

Если в наборе x_4 имеется элемент (пересекаются $x \ y$), то проверяется, что термы, сопоставленные подстановкой S переменным x, y , имеют общие переменные.

Составляется список x_{21} термов, подставляемых унифицирующей подстановкой вместо переменных списка x_{15} . Находится список x_{22} свободных переменных термов x_{21} . Это новые функциональные переменные. Проверяется, что список x_{22} не пересекается со списком x_9 . Проверяется, что каждый терм, подставляемый унифицирующей подстановкой вместо переменной списка x_{15} , имеет свободную переменную из списка x_{22} , а каждый терм, подставляемый вместо переменной списка x_9 , не принадлежащей x_{15} , не имеет свободной переменной из x_{22} . Согласно найденной унифицирующей подстановке, корректируются элементы (переменная ...) и (перем ...) набора x_4 .

Определяется результат x_{23} применения унифицирующей подстановки к заменяющему терму теоремы x_8 . Вводятся пустой накопитель x_{24} аргументов новых функциональных переменных и пустой накопитель x_{25} соответствующих старых функциональных переменных. Начинается просмотр списка x_{22} для заполнения указанных накопителей. x_{26} - текущая новая функциональная переменная списка x_{22} . Просматриваются старые функциональные переменные x_{27} списка x_{15} . Находится такая из них, что x_{26} входит в терм, подставляемый вместо нее унифицирующей подстановкой. По списку x_{16} находится аргумент x_{28} функциональной переменной x_{27} . Проверяется, что не существует другой старой функциональной переменной, такой, что x_{26} входит в терм, подставляемый вместо нее унифицирующей подстановкой, а аргумент ее отличен от x_{28} . Затем x_{28} присоединяется к концу накопителя x_{24} , а x_{27} - к концу накопителя x_{25} .

Если для какой-то переменной x_{26} указанные действия выполнить не удалось, то откат к перечислению вариантов унификации. Иначе - переход через "ветвь 1", где переменной x_{26} присваивается список термов "значение(f_i, x_i)" для всевозможных новых функциональных переменных f_i и их аргументов x_i . Находится результат x_{27} подстановки термов набора x_{26} вместо переменных списка x_{22} в терм x_{23} . Терм x_{27} будет замещать вхождение x_2 в теорему x_1 .

После контрольной точки "прием(6)" составляется список x_{28} выражений, на которые будут заменяться старые функциональные переменные. Для текущей старой функциональной переменной x_{29} списка x_{15} определяется терм x_{30} , подставляемый вместо нее унифицирующей подстановкой. Находится результат x_{31} подстановки в x_{30} вместо новых функциональных переменных списка x_{22} выражений набора x_{26} . Определяется аргумент x_{32} старой функциональной переменной x_{29} . Выбирается какая-то новая функциональная переменная x_{33} , имеющая свободное вхождение в терм x_{30} . Затем в список x_{28} заносится терм "отображение(x_{32} принадлежит(x_{32} область(x_{33})) x_{31})", и переход к очередной переменной x_{29} . По окончании составления списка x_{28} - переход через "ветвь 1".

Здесь находится результат x_{29} замены в консеквенте теоремы x_1 вхождения x_2 на терм x_{27} . Составляется список x_{30} термов, которые должны будут подставляться вместо переменных связывающей приставки x_9 теоремы x_1 . Вместо старых функциональных переменных подставляются термы набора x_{28} , вместо остальных - те же, что для унифицирующей подстановки. Определяется результат x_{31} подстановки термов x_{30} вместо переменных x_9 в терм x_{29} . Находится также список x_{33} результатов подстановки термов x_{30} вместо переменных x_9 в антецеденты теоремы x_1 .

Переменной x_{34} присваивается список антецедентов теоремы x_8 . Проверяется, что каждый элемент этого списка содержит не более одной свободной переменной списка x_{22} . Реализуется цикл коррекции списка x_{34} . Для текущего элемента E этого списка определяется результат x_{36} применения к нему унифицирующей подстановки. Если он не содержит переменных списка x_{22} , то просто заменяет собой старую версию элемента E . Иначе находится результат x_{37} подстановки в x_{36} термов набора x_{26} (термов "значение(...)" для новых функциональных переменных) вместо самих новых функциональных переменных x_{22} . В терме x_{37} находится терм "значение($f x$)", где f - новая функциональная переменная, и создается терм "длялюбого(x если принадлежит(x область(f)) то x_{37})". Этот терм и замещает старую версию элемента E .

После коррекции списка x_{34} создается объединенный список антецедентов, полученный добавлением к концу списка x_{33} списка x_{34} . Для каждой новой функциональной переменной f в список x_{33} заносится утверждение "функция(f)".

Просматриваются список x_{22} новых функциональных переменных и список x_{25} соответствующих им старых. Если две новых функциональных переменных f, g имеют одну и ту же породившую их старую переменную, то к списку x_{33} добавляется утверждение "равно(область(f) область(g))".

Наконец, формируется импликация x_{35} с антецедентами x_{33} и консеквентом x_{31} . Проверяется, то в списке x_7 нет подобной импликации. Если этот список

имеет 40 элементов, то обрыв перечисления результатов и выход из процедуры. Иначе - терм x_3 заносится в список x_7 и выдается как очередной результат.

Процедура "выводпосылки"

Эта процедура реализует еще одно правило вывода - обобщенную транзитивность импликации. У первой кванторной импликации выделяется некоторый антецедент, который унифицируется с консеквентом другой кванторной импликации. Процедура используется существенно реже, чем процедура "тождвывод".

Обращение к процедуре имеет вид "выводпосылки(x_1 x_2 x_3 x_4 x_5)". Здесь x_1 - кванторная импликация, x_2 - входжение ее антецедента, x_3 - другая кванторная импликация. x_4 - набор дополнительных установок на вывод следствий. Перечисляются варианты x_5 вывода следствий из x_1 путем унификации антецедента x_2 с консеквентом импликации x_3 .

Пока был введен единственный тип установки набора x_4 - элемент (разбиение A). Он означает, что переменные антецедентов импликации x_3 после унификации должны обеспечивать разбиение набора A переменных антецедента x_2 .

Выйти на начало программы "выводпосылки" можно через пункт "База теорем" - "Программирующий вывод" - "Процедура ВЫВОДПОСЫЛКИ" оглавления программ.

Прежде всего, вводится пустой накопитель результатов x_6 . Он необходим, чтобы не выдавать повторно одну и ту же теорему и чтобы ограничить число перечисляемых теорем. Далее переменной x_7 присваивается результат переобозначения во второй импликации x_3 всех ее переменных на переменные, не встречающиеся в первой импликации. Переменной x_8 присваивается связывающая приставка теоремы x_1 , а переменной x_9 - подтерм по входжению x_2 . Переменной x_{10} присваивается конкатенация списка x_8 и связывающей приставки теоремы x_7 (если она бескванторная, то берется пустой список). Переменной x_{11} присваивается консеквент теоремы x_7 . Предпринимается обращение к процедуре "унификация" для унификации термов x_9 и x_{11} . В качестве списка переменных унификации берется x_{10} . Процедура перечисляет наборы термов x_{12} , образующие вместе со списком переменных x_{10} унифицирующую подстановку. Определяется набор x_{13} результатов применения данной подстановки к отличным от x_2 антецедентам теоремы x_1 и к антецедентам теоремы x_7 . Определяется также результат x_{14} применения этой подстановки к консеквенту теоремы x_1 . Переменной x_{15} присваивается импликация с антецедентами x_{13} и консеквентом x_{14} . Проверяется, что в списке x_6 отсутствует импликация, подобная x_{14} .

Если в наборе x_4 имеется установка (разбиение A), то определяется список x_{17} термов, подставляемых унифицирующей подстановкой вместо переменных списка A . Переменной x_{18} присваивается список свободных переменных этих термов. Находится список x_{19} результатов применения унифицирующей подстановки к антецедентам теоремы x_7 . Проверяется, что каждая переменная списка x_{18} входит хотя бы в один из термов списка x_{19} , причем ни один из этих термов не содержит всех переменных списка x_{18} . Если данное условие нарушено, то откат к рассмотрению очередной версии унификации.

Если в накопителе x_6 имеется 40 элементов, то выход из процедуры. Иначе в накопитель x_6 заносится импликация x_{15} , и она выдается в качестве очередного результата.

Процедура "нормтеорема"

Прежде чем выдавать очередную теорему в качестве результата, прием логического вывода обычно ее упрощает и стандартизирует. Для этой цели используются процедуры "нормтеорема" и "Нормтеорема". Начнем с рассмотрения первой из них.

Обращение к процедуре имеет вид "нормтеорема(x1)". Она представляет собой операторное выражение, значением которого служит результат обработки теоремы x1 вспомогательной задачей на преобразование.

Выйти на начало программы "нормтеорема" можно через пункт "База теорем" - "Программирующий вывод" - "Процедура нормтеорема" оглавления программ.

Прежде всего, удаляются комментарии к посылкам исходной задачи, сохраняющие результаты обращений к пакетным операторам. Затем вводится задача на преобразование x2, имеющая единственную посылку "истина" и условие x1. Цели этой задачи - "упростить", "нормтеорема", "редуцирование". Цель "нормтеорема" определяет особый режим обработки, ориентированный на преобразование теоремы к "стандартному" виду. Для такой обработки приходится создавать специальные приемы ГЕНОЛОГа, относящиеся к самым разным предметным областям. Эта же цель блокирует ряд слишком активных общих приемов, чтобы они не портили теорему. В частности, блокируются перестановки частей равенств и эквивалентностей, что позволяет сохранить исходные указания ориентации преобразований, отраженные в сопровождающих теорему характеристиках. Цель "редуцирование" осталась от старых версий вывода теорем. Она указывала на режим упрощения теоремы другими ранее выведенными теоремами, чтобы исключать избыточность. В настоящей версии сохранились отдельные приемы, учитывающие данную цель.

После того, как задача x2 создана, запускается процесс ее решения. Максимальный уровень равен 4. Ответ задачи выдается в качестве результата.

Процедура "Нормтеорема"

Процедура "Нормтеорема" представляет собой усиление процедуры "нормтеорема", позволяющее передавать задаче на преобразование дополнительные указания. Кроме того, эта процедура позволяет при обработке новой теоремы пользоваться теоремами, выведенными до нее в том же самом цикле логического вывода. Никаких приемов по таким предшествующим теоремам на этот момент не создается. Заметим, что обычно используется процедура "нормтеорема", и лишь в особых случаях прием обращается к ее усилению.

Обращение к процедуре имеет вид "Нормтеорема(x1 x2)". Это операторное выражение, значением которого служит результат обработки теоремы x1 вспомогательной задачей на упрощение, в комментарии которой заносятся элементы набора x2.

В наборе x2 выделим, прежде всего, элемент (смтеор A₁ A₂ A₃). Он представляет собой комментарий к задаче на преобразование, имеющей цель "нормтеорема", включающий дополнительную обработку теоремы за счет других теорем, уже выведенных в текущем цикле вывода. Здесь A₁ - набор четверок (вес - теорема - характеристики - блок вывода), перечисляющий ранее выведенные оператором "прогрвывод" теоремы. A₂ - терм либо логический символ, уточняющий тип обработки. Пока используется только символ "описатель". A₃ - вначале пустой список, который будет заполняться процедурой "Нормтеорема" парами (заголовок преобразуемого терма - список пар

(теорема - направление преобразования)). Эти пары соответствуют ситуациям типа общей стандартизации и используются общим приемом решателя, когда он начинает работать с задачей на преобразование теоремы. Подробнее об этом приеме будет сказано в следующем подразделе.

Кроме того, в наборе x_2 могут появляться произвольные другие комментарии. Например, используется комментарий "свертка", указывающий тенденцию к сокращенной переформулировке термов, а также комментарий "числовой атом", используемый при обработке соотношений с невырожденными числовыми атомами. Ряд комментариев набора x_2 дополняет комментарий (смтеор ...). Так, комментарий "общнорм" подключает к преобразованиям эквивалентности общей стандартизации, выведенные в том же цикле логического вывода; комментарий "упрощдн" подключает тождества, уменьшающие оценку сложности.

Как и программа оператора "нормтеорема", рассматриваемая программа прежде всего удаляет комментарии к посылкам исходной задачи, сохраняющие результаты обращений к пакетным операторам. Затем вводится задача на преобразование x_3 , имеющая единственную посылку "истина" и условие x_1 . Цели этой задачи - "упростить", "нормтеорема", "редуцирование". Список ее комментариев - x_2 .

Если имеется комментарий (смтеор A_1 описатель пустоеслово), то предпринимается заполнение последнего (пустого) элемента этого комментария.

Просматриваются четверки x_5 набора A_1 . Второй элемент такой четверки - теорема T , третий - список ее характеристик. Рассматриваются следующие случаи:

1. Теорема T либо имеет характеристику "нормализация(N)", либо в набор x_2 входит символ "общнорм", а теорема имеет характеристику "общнорм(N)", либо в набор x_2 входит символ "упрощдн", а теорема имеет характеристику "упрощение(N)", либо теорема имеет характеристику "описатель(N)", либо она имеет характеристику "сокращ(N)". В случае характеристики "сокращ" проверяется, что теорема не заменяет неповторный терм на неповторный. В этой ситуации теорема и направление преобразования N регистрируются в структуре данных A_3 комментария (смтеор ...) так, как указано выше в описании этого комментария.
2. Теорема T имеет комментарий "числатом", причем правая часть ее тождества не имеет переменных. Тогда она вместе с направлением замены "слева направо" регистрируется в структуре данных A_3 комментария (смтеор ...).
3. Теорема T имеет комментарий (спуск ...). Ее консеквент не имеет заголовка "не". Тогда она регистрируется в структуре данных A_3 таким образом, как если бы представляла собой эквивалентность своего консеквента константе "истина".
4. Теорема T имеет комментарий "пример". Если ее консеквент B не имел заголовка "не", то он заменяется на эквивалентность $B \leftrightarrow$ истина. Если он имел вид "не(C)", то заменяется на $C \leftrightarrow$ ложь. Результат замены регистрируется в структуре данных A_3 .

По окончании цикла просмотра четверок x_5 - переход через "иначе 3". Здесь регистрируются теоремы структуры данных A_3 , имеющие antecedенты "функция(f)".

Предпринимается попытка перейти от них к теоремам с функциональными переменными.

По окончании формирования структуры данных A_3 - обращение к решению задачи х3 с максимальным уровнем 4. Ответ выдается как результат обработки теоремы.

Приемы решателя, использующие теоремы, выведенные на предшествующих шагах цикла логического вывода

Приемы вывода теорем часто обращаются к решению вспомогательных задач. Иногда при решении таких задач необходимо использовать теоремы, выведенные на предыдущих шагах цикла логического вывода. В этих случаях задачи снабжаются комментариями, ссылающимися на текущий список вывода. Примером служит рассмотренный в предыдущем разделе комментарий (смтеор ...) к задаче на преобразование. Аналогичным комментарием могут снабжаться также вспомогательные задачи на доказательство и на исследование. Рассмотрим все три типа задач по отдельности.

1. Задачи на преобразование.

В этом случае комментарий (смтеор $A_1 A_2 A_3$) вводится до начала решения задачи, причем структура данных A_3 заполняется парами (заголовок преобразуемого терма - (список пар (теорема - направление преобразования) для данного заголовка) тоже до начала решения. Обычно это делает оператор "Нормтеорема".

Данный комментарий используется общим приемом решения задач на преобразование, начало программы которого можно найти через пункт "Приемы решателя" - "Общие приемы" - "Задачи на преобразование"/ - "Использование ранее выведенных теорем для упрощения текущей теоремы в цикле вывода" оглавления программ.

Прием срабатывает на уровне 3. После проверки того, что задача х1 имеет цель "нормтеорема", переменной х6 присваивается комментарий (смтеор $A_1 A_2 A_3$), а переменной х7 - структура данных A_3 (см. контрольную точку "прием(9)").

Переменной х8 присваивается условие задачи, после чего просматриваются вхождения х10 в это условие. Переменной х11 присваивается символ по вхождению х10. В наборе A_3 находится пара х12 с первым разрядом х11. Просматриваются элементы х13 второго разряда этой пары. Каждый такой элемент - пара, состоящая из теоремы х14 и символа х15, указывающего направление замены с ее помощью.

Если теорема х14 представляет собой бескванторное равенство $t_1 = t_2$, причем подтерм по вхождению х10 совпадает с его заменяемым термом, то в задаче подтерм х10 заменяется на противоположную часть равенства х14. При этом теорема х14 регистрируется в списке A комментария (доптеор A) к посылкам исходной задачи. Это нужно для последующего учета того, какие старые теоремы были использованы при выводе очередной новой теоремы.

Если заголовком теоремы x_{14} служит квантор общности, то переменной x_{16} присваивается его связывающая приставка. Если обнаруживается, что переменные x_{16} пересекаются с переменными условия x_8 , то предпринимается переобозначение в теореме x_{14} всех ее связанных переменных на переменные, не входящие в x_8 . Далее предполагается, что это переобозначение уже произошло и значение переменной x_{16} скорректировано.

Переменной x_{17} присваивается входение консеквента теоремы x_{14} . Если его заголовком служит равенство либо эквивалентность, то переменной x_{18} присваивается ее заменяемый терм, иначе - сам консеквент. Переменной x_{19} присваивается список свободных переменных терма x_{18} . Проверяется, что он включает все переменные связывающей приставки x_{16} . Далее рассматриваются две альтернативы:

- (а) У теоремы x_{14} есть функциональные переменные. Составляется список x_{20} , имеющий такую же длину, как и x_{19} . Если переменная f списка x_{19} имеет единственное входение в x_{18} ; это входение имеет вид "значение($f a$)", где a - переменная, связанная внешним описателем "отображение" либо "класс", причем каждое входение f в теорему x_{14} , кроме вхождения в связывающую приставку, имеет вид "значение($f \dots$)", то в списке x_{20} на соответствующей позиции помещается переменная a . Иначе на этой позиции помещается 0.

Проверяется, что не все разряды набора x_{20} нулевые. В терме x_{18} все подтермы "значение($f a$)" для тех функциональных переменных f , у которых соответствующий разряд набора x_{20} ненулевой, заменяются на переменные a . Если подтерм "значение($f a$)" был предпоследним операндом описателя "отображение", то вместо a берется терм "отд(a)". Символ "отд" необходим для корректной работы процедуры унификации.

Переменной x_{21} присваивается набор всех утверждений из области заменяемого вхождения x_{10} . Процедура "унификация" предпринимает попытку унификации терма x_{18} с подтермом по вхождению x_{10} относительно списка переменных x_{19} . Этой процедуре передаются дополнительные установки (контекст x_{21}), "смтеор", "новаяпеременная", а также всевозможные элементы (значение $a f$) для указанных выше a, f . Результатом унификации служит набор термов x_{22} , образующий вместе с переменными x_{19} и указателями функциональных переменных x_{20} функциональную унифицирующую подстановку (см. оператор "функподст"). Перед заменой проверяется ее корректность. Для этого унифицирующая подстановка применяется к антецедентам теоремы x_{14} , и при помощи задач на доказательство, решаемых до уровня 4, проверяется, что эти антецеденты суть следствия контекста x_{21} .

Затем переменной x_{23} присваивается результат применения унифицирующей подстановки к заменяющему терму теоремы x_{14} (при отсутствии такового переменной x_{23} присваивается константа "истина"). Если подтерм по вхождению x_{10} получался из новой своей версии x_{23} вычеркиванием и перестановкой части операндов, то замена x_{10} на x_{23} отменяется. Иначе она выполняется. Предварительно теорема x_{14} регистрируется в комментарии (доптеор \dots).

- (b) Предыдущий прием не сработал, т.е. функциональные переменные не усмотрены. Тогда действия аналогичны предыдущим. Переменной x_{20} присваивается набор всех утверждений из области заменяемого вхождения x_{10} . Процедура "унификация" предпринимает попытку унификации терма x_{18} с подтермом по вхождению x_{10} относительно списка переменных x_{19} . Этой процедуре передаются дополнительные установки (контекст x_{20}), "смтеор", "новаяпеременная". Результатом унификации служит набор термов x_{21} , образующий вместе с переменными x_{19} унифицирующую подстановку. Перед заменой проверяется ее корректность. Для этого унифицирующая подстановка применяется к антецедентам теоремы x_{14} , и при помощи задач на доказательство, решаемых до уровня 4, проверяется, что эти антецеденты суть следствия контекста x_{20} .

Переменной x_{22} присваивается результат применения унифицирующей подстановки к заменяющему терму теоремы x_{14} (при отсутствии такового переменной x_{22} присваивается константа "истина"). Если подтерм по вхождению x_{10} получался из новой своей версии x_{22} вычеркиванием и перестановкой части операндов, то замена x_{10} на x_{22} отменяется.

Если x_{14} - эквивалентность, то выполняется дополнительный контроль целесообразности замены. Проверяется выполнение следующих условий:

- i. Оценка сложности подтерма x_{10} либо меньше 3, либо не больше оценки сложности терма x_{22} .
- ii. Список свободных переменных терма x_{22} не короче, чем у подтерма x_{10} .
- iii. Общее число вхождений переменных в x_{22} не меньше чем в подтерм x_{10}

Если они выполнены, то замена подтерма x_{10} на x_{22} тоже отменяется. Иначе она выполняется. Предварительно теорема x_{14} регистрируется в комментарии (доптеор ...).

2. Задачи на доказательство.

Чтобы при решении вспомогательной задачи на доказательство использовались замены, основанные на теоремах, выведенных в текущем цикле вывода, необходимо до начала решения передать ей комментарий (смтеор $A_1 A_2$). В отличие от задач на преобразование, он имеет всего две компоненты. Как и ранее, A_1 - набор четверок (вес - теорема - характеристики теоремы - блок вывода), перечисляющий ранее выведенные оператором "прогрвывод" теоремы. Элемент A_2 вначале равен 0, причем сама задача в начале решения преобразует его в набор пар (заголовок преобразуемого терма - список троек (теорема - характеристики теоремы - направление преобразования)). Для использования теорем, выведенных в текущем цикле вывода, созданы следующие общие приемы решения задач на доказательство:

- (a) Прием, преобразующий A_2 в структуру данных, поддерживающую отобранные для использования теоремы. Его программу можно найти через пункт "Приемы решателя" - "Общие приемы" - "Задачи на доказательство" - "Инициализация адресной структуры комментария "смтеор" "оглавления программ.

Если задача имеет комментарий (смтеор $A_1 0$), то последний разряд заменяется на символ "пустоеслово" и предпринимается просмотр четверок $x7$ набора A_1 . Второй элемент такой четверки - теорема T , третий - список ее характеристик. Рассматриваются следующие случаи:

- i. Теорема T имеет характеристику "нормализация(N)" либо "описатель(N)" либо "сокращ(N)". Ее заголовок - квантор общности. Тогда она регистрируется в структуре данных A_2 при направлении замены N .
- ii. Теорема T имеет характеристику "спуск(. . .)". Заголовок ее консеквента K отличен от символа "не". Тогда она регистрируется в структуре данных A_3 таким образом, как если бы представляла собой эквивалентность " $K \leftrightarrow$ истина".
- iii. Теорема T имеет характеристику "определение(. . .)". Тогда она регистрируется в структуре данных A_2 при направлении замены, обеспечивающем расшифровку по определению.

По завершении просмотра четверок $x7$ - выход из программы приема.

- (b) Прием, использующий ранее выведенные теоремы для упрощения условия задачи на доказательство. Его программу можно найти через пункт "Приемы решателя" - "Общие приемы" - "Задачи на доказательство" - "Использование ранее выведенных теорем для упрощения условия задачи на доказательство, решаемой в цикле вывода теорем" оглавления программ. Уровень срабатывания приема равен 3. Программа приема совпадает с аналогичной программой, описанной выше для задач на преобразование. Отличие состоит лишь в том, что в ее начале отсутствует проверка наличия цели "нормтеорема".
- (c) Прием, использующий ранее выведенные теоремы для исключения определяемых ими понятий в условии задачи на доказательство. Его программу можно найти через пункт "Приемы решателя" - "Общие приемы" - "Задачи на доказательство" - "Использование ранее выведенных теорем для исключения определяемых ими понятий в условии задачи на доказательство" оглавления программ.

Исключение определяемых понятий выполняется и предыдущим приемом, но иногда для него необходимо наличие посылок, которых сначала нет, а потом они появляются. Тогда предыдущий прием не сработает, однако данный прием, имеющий уровень срабатывания 4 (т.е. на единицу больше), имеет шанс сработать. Его программа представляет собой упрощенную версию программы предыдущего приема, причем случай функциональных переменных не рассматривается.

- (d) Прием, использующий ранее выведенные теоремы для усиления вывода следствий в посылках. Его программу можно найти через пункт "Приемы решателя" - "Общие приемы" - "Задачи на доказательство" - "Использование ранее выведенных теорем для усиления вывода следствий в посылках" оглавления программ. Уровень срабатывания приема равен 5.

Этот прием использует не комментарий (смтеор . . .), а комментарий (смвывод A), у которого набор A перечисляет уже полученные в текущем

цикле теоремы, отобранные для вывода в посылках вспомогательной задачи на доказательство. Такой комментарий должен передаваться задаче при обращении к ней.

Прием работает однократно. Он проверяет отсутствие комментария "Вывод" к задаче и затем сразу его вводит. Просматриваются теоремы x_7 набора A , у которых число антецедентов менее десяти, причем заголовок каждого антецедента является заголовком какой-либо посылки. Определяется результат x_8 переобозначения связанных переменных теоремы x_7 на переменные, не входящие в текущую задачу, и оператор "Подборзначений" предпринимает попытку определить подстановку вместо переменных связывающей приставки теоремы x_8 , переводящую ее антецеденты в посылки задачи x_1 . Допускаются перестановки операндов коммутативных операций. В случае успеха эта подстановка применяется к консеквенту теоремы x_8 , и результат регистрируется в посылках задачи x_1 . Теорема x_7 при этом регистрируется в комментарии (доптеор ...).

3. Задачи на исследование.

Вспомогательные задачи на исследование, используемые при выводе теорем, могут сопровождаться комментарием (смтеор A), где A - набор четверок (вес - теорема - набор ее характеристик - блок вывода), перечисляющий выведенные к текущему моменту теоремы. Обычно это делается для задач, имеющих цель (исключ $x_1 \dots x_n$), ориентирующую на вывод следствий без переменных x_1, \dots, x_n . Наличие указанного комментария активирует следующие два приема, использующие ранее полученные в том же цикле вывода теоремы:

- (а) Попытка использования ранее полученных теорем для исключения переменных при выводе новой теоремы. Программу приема можно найти через пункт "Приемы решателя" - "Общие приемы" - "Задачи на исследование" - "Попытка использования ранее полученных теорем для исключения переменных при выводе новой теоремы" оглавления программ.

Прием срабатывает на уровне 3. После проверки наличия цели "нормтеорема" находится комментарий (смтеор A), и набор A присваивается переменной x_7 . Переменной x_8 присваивается цель (исключ $x_1 \dots x_n$). Просматриваются посылки x_9 текущей задачи, имеющие вес 3 и содержащие хотя бы одну из переменных x_1, \dots, x_n . Проверяется отсутствие комментария "нормтеорема" к такой посылке, и этот комментарий сразу же вводится.

Просматриваются переменные x_{11} списка x_8 . Находится вхождение x_{12} переменной x_{11} в посылку x_9 . Рассматривается вхождение x_{13} символа операции x_{14} , внутри которого расположено x_{12} . Просматриваются тождества x_{16} списка x_7 , у которых заголовок одной из частей - символ x_{14} . Находится результат x_{20} переобозначения связанных переменных тождества x_{16} на переменные, не встречающиеся в текущей задаче. Рассматривается та часть t_1 тождества x_{20} , заголовком которой служит символ x_{14} . Предпринимается попытка унифицировать t_1 с подтермом по вхождению x_{13} , причем списком x_{25} переменных унификации служит непустой список всех свободных переменных терма t_1 . Результатом унификации является набор термов x_{26} . Определяется список x_{27} результатов применения унифицирующей подстановки к антецедентам тождества x_{20} . Обнаруживается,

что список x_{28} свободных переменных этих результатов, не встречающихся в текущей задаче, непуст. Процедура "подборнеизвестных" находит набор x_{29} выражений, подстановка которых вместо переменных списка x_{28} в утверждения x_{27} отождествляет их с посылками текущей задачи. Определяется результат x_{33} подстановки термов x_{26} , x_{29} вместо переменных x_{25} , x_{28} в противоположную часть t_2 тождества x_{20} . Проверяется, что переменная x_{11} в терме x_{33} отсутствует, а новые переменные списка x_8 не возникли. Затем предпринимается замена вхождения x_{13} на терм x_{33} .

- (b) Попытка дополнительного построения с помощью ранее полученных теорем для исключения переменных при выводе новой теоремы. Программу приема можно найти через пункт "Приемы решателя" - "Общие приемы" - "Задачи на исследование" - "Попытка дополнительного построения с помощью ранее полученных теорем для исключения переменных при выводе новой теоремы" оглавления программ.

Прием срабатывает на уровне 4. После проверки наличия цели "норм-теорема" находится комментарий (см теор A), и набор A присваивается переменной x_7 . Переменной x_8 присваивается цель (исключ $x_1 \dots x_n$), а переменной x_9 - набор исключаемых переменных x_1, \dots, x_n . К списку x_9 добавляются переменные x , представленные в комментариях (неизв x) к списку посылок текущей задачи. Такие комментарии передаются задаче непосредственно приемом вывода теорем. Переменной x_{10} присваивается набор свободных переменных посылок задачи, не вошедших в список x_9 .

Просматриваются посылки x_{11} текущей задачи, вес которых равен 4, а заголовок отличен от символа "актив". Проверяется, что x_{10} - подмножество свободных переменных посылки x_{11} , причем эта посылка содержит хотя бы одну исключаемую переменную x_i . Проверяется также отсутствие комментария "тождвывод" к данной посылке, после чего этот комментарий сразу же вводится. Рассматривается вхождение x_{13} неоднобуквенного подтерма x_{14} посылки x_{11} . Проверяется, что список x_{15} свободных переменных терма x_{14} совпадает с x_{10} и что число корневых операндов x_{14} более одного. Составляется список x_{16} всех не имеющих заголовка "актив" посылок текущей задачи, свободные переменные которых включаются в список x_{10} .

Далее будет предприниматься попытка воспользоваться определением - теоремой набора x_7 для такого дополнительного построения, которое связывало бы новые переменные с подтермом x_{14} . Просматриваются четверки x_{17} набора x_7 . Переменной x_{18} присваивается теорема четверки x_{17} и проверяется, что она имеет характеристику "определение(t)". Консеквент теоремы x_{18} - равенство, одна из частей которого совпадает с t . Находится результат x_{24} переобозначения переменных теоремы x_{18} на переменные, не встречающиеся в текущей задаче. При этом определяемая часть x_{28} консеквента теоремы x_{24} - некоторый терм t_1 . Переменной x_{29} присваивается список свободных переменных терма t_1 . В наборе x_{30} antecedентов теоремы x_{24} находится утверждение x_{31} , у которого по вхождению x_{32} расположен заголовок терма x_{14} . Переменной x_{33} присваивается подтерм по вхождению x_{32} , а переменной x_{34} - список его параметров. Проверяется, что списки x_{34} и x_{29} совпадают.

Находится набор термов x_{35} , подстановка которых вместо переменных x_{34} унифицирует термы x_{33} и x_{14} . Ввод новых переменных при унификации блокируется. Переменной x_{36} присваивается набор результатов применения унифицирующей подстановки к антецедентам списка x_{30} . Определяется поднабор x_{37} набора x_{36} , составленный из утверждений, свободные переменные которых включаются в список x_{15} . Проверяется, что все эти утверждения суть следствия посылок задачи x_1 . Переменной x_{38} присваивается непустой остаток набора x_{37} , а переменной x_{39} - непустой список свободных переменных термов набора x_{38} . Проверяется, что результат навешивания квантора существования по переменным набора x_{39} на конъюнкцию утверждений x_{38} является следствием посылок текущей задачи. После этого к посылкам текущей задачи присоединяется конъюнкция утверждений x_{38} и результата применения унифицирующей подстановки к консеквенту теоремы x_{24} .

Процедура "регтеор"

После того, как прием вывел новую теорему и предпринял ее упрощение, эта теорема должна быть зарегистрирована в списке вывода. Необходимо определить ее характеристики, а также проверить избыточность. Эти действия реализуются процедурой "регтеор", обычно завершающей программу приема вывода теорем.

Обращение к процедуре имеет вид "регтеор(x_1 x_2)", где x_1 - новая теорема, x_2 - набор информационных элементов, уточняющих способ регистрации теоремы. В этом наборе допускаются элементы следующих типов:

1. (характ $A_1 \dots A_n$). Отбираются только те предлагаемые характеристизатором характеристики теоремы x_1 , заголовки которых попадают в список A_1, \dots, A_n .
2. характ. Использование характеристизатора отменяется. Характеристиками теоремы становятся только те, которые явно указаны в элементе (характеристика \dots); см. ниже.
3. (входит $A_1 \dots A_n$). Проверяется, что характеристизатор получил характеристику с заголовком, принадлежащим списку A_1, \dots, A_n . Иначе теорема не регистрируется.
4. (источник A). Указание способа получения теоремы. В сочетании с логическим символом, к программе которого относится прием вывода, представляет собой разновидность ссылки на этот прием. Элемент A - логический символ s либо набор вида $(st_1 \dots t_m)$, где s - логический символ; t_1, \dots, t_m - дополнительные теоремы, использованные при выводе. Символ s называем типом источника теоремы. Чтобы исключить чрезмерную активность приемов вывода, обычно в начале их программы располагается проверка неиспользования в текущей линии вывода источников заданных типов.
5. (характеристика $A_1 \dots A_n$). Характеристики A_1, \dots, A_n дополнительно заносятся в список характеристик теоремы x_1 .
6. обобщение. Теорема представляет собой обобщение источника по текущей характеристике.

7. вспомприемы. По теореме x_1 создаются вспомогательные приемы, необходимые для продолжения цикла вывода. Этот элемент используется только в специальных циклах вывода, стартующих не с обычной теоремы, а с установки на цикл вывода. Например, при выводе упрощающих тождеств какой-либо стандартной формы.
8. новтеор. Проверяется, что новая теорема не является частным случаем ранее выведенной в данном цикле теоремы.
9. исключение. Та теорема, по которой была выведена теорема x_1 , исключается из дальнейших выводов и не включается в результат.
10. (смхаракт A). Проверяется, что характеристизатор усматривает характеристику A теоремы x_1 , после чего список характеристик полагается состоящим из характеристики A , к которой добавляются все характеристики с заголовками, перечисленными в элементе (характ ...).
11. контроль. Дополнительный контроль избыточности теоремы.
12. (выход $A_1 \dots A_n$). Прием выполнил обобщение теоремы, однако исходная теорема включается в итоговый список, если она имела характеристику с заголовком, принадлежащим списку A_1, \dots, A_n .
13. сохр. Прием выполнил обобщение теоремы, однако вывод следствий из обобщенной теоремы продолжается.
14. выход. Прием выполнил обобщение теоремы, однако обобщенная теорема включается в итоговый список теорем.
15. (непересек $A_1 \dots A_n$). Проверяется, что среди характеристик новой теоремы нет ни одного из элементов A_1, \dots, A_n .
16. (направл A). Проверяется наличие характеристики с заголовком A , причем отбрасываются все характеристики, у которых направление замены отличается от направления характеристики A .
17. (примечание $A_1 \dots A_n$). A_1, \dots, A_n суть элементы, указывающие способ обобщения. См. элемент (обобщение ...) блока вывода.
18. (списокпеременных $A_1 \dots A_n m$). Проверяется, что если все характеристики новой теоремы имеют только заголовки A_1, \dots, A_n , то число переменных теоремы меньше m .
19. (исходный $A_1 \dots A_n$). A_1, \dots, A_n суть исходные характеристики новой теоремы, передаваемые характеристизатору.
20. (исключ A). Если среди характеристик исходной теоремы имеется элемент $A(n)$, где направление n не совпадает с направлением текущей характеристики, то исходная теорема не помечается в своем блоке вывода элементом "исключение", иначе - помечается.
21. antecedentes. Контроль отсутствия чрезмерно сложных antecedентов теоремы.

22. смпропорц. Контроль отсутствия ранее выведенного эквивалентного соотношения пропорциональности. Рассматриваются теоремы, имеющие соотношение пропорциональности в консеквенте и одно соотношение - в антецедентах.
23. результат. Теорема включается в результирующий список, но следствия из нее не выводятся.
24. стандхаракт. Специальная характеристика для тождеств стандартной формы.
25. Исключение. Теорема не включается в результат, но следствия из нее выводятся.
26. (Напр A). Игнорируются все характеристики с направлением замены A .
27. теоремаприема. Отменяется проверка отсутствия такой же теоремы в накопителе, так как основная смысловая нагрузка приходится на ее характеристики, связанные с созданием приема специального типа.
28. (смхаракт). Разрешается регистрация теоремы $x1$, даже если в накопителе уже есть такая же теорема, но у нее нет характеристики с заголовком A .

Выйти на начало программы "регтеор" можно через пункт "База теорем" - "Программирующий вывод" - "Вспомогательные процедуры логического вывода" - "Процедура РЕГТЕОР" оглавления программ.

Прежде всего, проверяется наличие комментария (доптеор A) к посылкам исходной задачи. В его списке A регистрируются теоремы, полученные в текущем цикле логического вывода и использованные вспомогательными задачами текущего приема вывода теорем при получении теоремы $x1$. Если он есть, то присоединяется к списку $x2$ сопровождающих теорему информационных элементов и исключается из исходной задачи. Теоремы набора A будут добавляться к списку теорем - источников теоремы $x1$, явно указанных в наборе $x2$.

Далее - переход через "ветвь 2", где проверяется, что $x1$ не есть константа "истина". Если исходная задача имеет комментарий (архвывод A), причем теорема $x1$ отсутствует в списке A , то выход из процедуры по значению "ложь". Комментарий "архвывод" создается при ускоренном тестировании программирующего вывода. Здесь отбрасываются все выведенные теоремы, кроме тех, которые фактически использовались в деревьях доказательств из архива базы теорем.

Далее - переход через "ветвь 1". Переменной $x3$ присваивается пара (список вывода - индикатор изменений), являющаяся значением переменной $x5$ текущей программы приема вывода. Если в $x2$ отсутствует элемент "теоремаприема", то проверяется отсутствие в списке вывода такой кванторной импликации T , подобной теореме $x1$, что выполнены условия:

1. Либо T имеет характеристику с заголовком "нормализация", либо в наборе $x2$ отсутствует элемент (смхаракт A), такой, что T не имеет характеристики с тем же заголовком, что и A .
2. В наборе $x2$ отсутствует элемент (характмн A), такой, что T не имеет характеристики с тем же заголовком, что и A .

После контрольной точки "прием(11)" предпринимается учет информационного элемента "смпропорц". Проверяется, что теорема $x1$, имеющая вид соотношения пропорциональности для невырожденных числовых атомов, имеет единственный антецедент такого же вида. Просматривается список вывода, в котором ищется другое соотношение пропорциональности T , имеющее единственный антецедент такого же вида. Проверяется, что этот антецедент и консеквент теоремы T отличаются от соответствующих антецедента и консеквента теоремы $x1$ только переобозначением переменных, причем после этого переобозначения антецеденты теоремы T суть следствия антецедентов теоремы $x1$. В этой ситуации теорема $x1$ не регистрируется.

Переменной $x4$ присваивается пустой список исходных характеристик теоремы $x1$. Если в $x2$ имеется элемент (исходный $A_1 \dots A_n$), то характеристики A_1, \dots, A_n заносятся в набор $x4$.

Далее переменной $x5$ присваивается исходная версия списка характеристик теоремы $x1$. Если в $x2$ имеется элемент "стандхаракт", то характеристики определяются процедурой "стандхаракт", используемой при выводе упрощающих тождеств стандартной формы. Если в $x2$ входит элемент "характ", то список $x5$ пуст. Если в $x2$ входит элемент "обобщение", не входит элемент "входит", отсутствует элемент с заголовком "смхаракт" и отсутствует отличный от логического символа элемент с заголовком "характ", то тоже список $x5$ пуст. В остальных случаях список $x5$ определяется процедурой "характеризатор", которой передаются теорема $x1$ и список исходных характеристик $x4$.

Если в $x2$ имеется элемент (напр n), то из $x5$ удаляются все отличные от логических символов элементы, в которые входит логический символ n .

Если список $x5$ пуст, в наборе $x2$ встречается элемент (непересек $A_1 \dots A_n$), то предпринимается обращение к характеризатору, которому передаются теорема $x1$ и список $x4$ исходных характеристик. Если хотя бы одна из характеристик A_i входит в список, выданный характеризатором, то регистрация теоремы $x1$ отменяется.

Если в $x2$ имеется элемент (характ $A_1 \dots A_n$), где $n > 0$, то переменной $x8$ присваивается список всех элементов набора $x5$, заголовков которых - один из символов A_1, \dots, A_n . Если в $x2$ входит символ "обобщение", то рассматривается та характеристика исходной теоремы, при рассмотрении которой сработал прием вывода, получивший теорему $x1$. Если она не входит в $x5$, то добавляется к списку $x8$. Если имеется элемент (смхаракт B), то проверяется, входит ли B в список $x5$. Если входит, то A добавляется к списку $x8$. Иначе - отказ от регистрации теоремы. Далее (вне зависимости от наличия элемента "смхаракт") переменной $x5$ присваивается список $x8$.

Если $x2$ содержит логический символ "входит", причем та характеристика исходной теоремы, при рассмотрении которой сработал прием вывода, получивший теорему $x1$, не входит в список $x5$, то отказ от регистрации теоремы $x1$. Если $x2$ содержит набор (входит $B_1 \dots B_m$), причем ни одна из характеристик B_1, \dots, B_m не входит в набор $x5$, то тоже отказ от регистрации теоремы $x1$.

Если $x2$ содержит элемент (непересек $B_1 \dots B_m$), причем хотя бы один из элементов B_1, \dots, B_m входит в набор $x5$, то отказ от регистрации теоремы $x1$.

Если $x2$ содержит элемент (смхаракт B), причем в $x2$ отсутствует отличный от логического символа элемент с заголовком "характ", то проверяется, входит ли B в

список x_5 . Если входит, то x_5 далее полагается состоящим только из характеристики B . Иначе - отказ от регистрации теоремы x_1 .

Если x_2 содержит элемент (направл B), то переменной x_8 присваивается список всех элементов набора x_5 , имеющих заголовок B . Если он пустой, то отказ от регистрации теоремы x_1 . Иначе из списка x_5 удаляются все отличные от логических символов характеристики, последний операнд которых (подразумевается направление замены - "первыйтерм" либо "второйтерм") не является последним операндом какого-либо элемента набора x_8 .

Если x_2 содержит элемент (характеристика $A_1 \dots A_n$), то характеристики A_1, \dots, A_n добавляются к списку x_5 .

Если x_2 содержит элемент "обобщение", то в список x_5 добавляется элемент "обобщзнак". Если при этом x_2 не имеет элементов с заголовками "характ" и "характеристика", то к списку x_5 добавляется та характеристика исходной теоремы, при рассмотрении которой сработал прием вывода, получивший теорему x_1 .

Если в x_2 входит элемент "сохр", то из набора x_5 отбрасывается элемент "обобщзнак".

Если в x_2 входит элемент (списокпеременных $A_1 \dots A_n m$), причем все символы A_1, \dots, A_n суть заголовки характеристик списка x_5 , а число переменных теоремы x_1 не менее m , то регистрация теоремы x_1 не выполняется.

Проверяется, что список x_5 имеет какие-либо элементы, кроме элемента "обобщзнак". В противном случае регистрация теоремы x_1 не выполняется.

Если в x_2 входит символ "контроль", то рассматриваются следующие случаи:

1. В x_5 имеется характеристика "общнорм(N)". Переменной x_9 присваивается заменяемый терм теоремы x_1 согласно этой характеристике, а переменной x_{10} - заменяющий. Если в x_9 встречается ассоциативно - коммутативная операция, у которой более двух операндов суть переменные, не имеющие других вхождений в x_9 , то регистрация теоремы x_1 отменяется. В противном случае проверяется, что терм x_{10} содержит не все свободные переменные терма x_9 . Если это так, причем в заменяемой части x_9 встречается ассоциативно - коммутативная операция $f(\dots x \dots t(y) \dots)$, где x, y - неповторные в x_9 переменные, встречающиеся в x_{10} , а $t(y)$ при подходящем подборе y можно обратить в единицу операции f , то регистрация теоремы x_1 тоже отменяется. Основанием служит то, что при обращении $t(y)$ в единицу можно получить усиленную версию теоремы.
2. Характеристика исходной теоремы T , при рассмотрении которой сработал прием вывода, получивший теорему x_1 , имеет вид "дистрибразвертка(N)". В x_5 имеется характеристика "декомпозиция(P)". При этом к заменяемому терму теоремы x_1 (согласно направлению замены P) применимо тождество T (согласно направлению N). Тогда регистрация теоремы x_1 отменяется, так как для декомпозиции она избыточна.
3. В x_5 имеется характеристика вида "спуск(P)". В списке вывода имеется теорема x_{10} с такой же характеристикой. Обе теоремы x_1 и x_{10} имеют своим заголовком квантор общности. Находится результат x_{11} переобозначения в x_1 всех связанных переменных на переменные, не входящие в x_{10} . Переменной

x_{12} присваивается связывающая приставка теоремы x_{10} , переменным x_{13} и x_{14} - консеквенты теорем x_{10} и x_{11} . Находится унифицирующая подстановка для пары термов x_{13} , x_{14} относительно списка переменных x_{12} . Переменным x_{16} и x_{17} присваиваются наборы antecedентов теорем x_{11} и x_{10} . Либо терм x_{13} короче терма x_{14} , либо все утверждения набора x_{17} имеют не более двух свободных переменных, либо существует утверждение набора x_{16} , имеющее более двух таких переменных. Каждый результат применения к antecedенту списка x_{17} унифицирующей подстановки является следствием antecedентов списка x_{16} . В этом случае регистрация теоремы x_1 отменяется, так как определяемый ею прием проверочного оператора P является частным случаем приема ранее найденной теоремы x_{10} .

4. В x_5 имеется характеристика вида "смнеизв(...)". Переменной x_9 присваивается заменяемый терм теоремы x_1 согласно данной характеристике. Если некоторый неоднобуквенный корневой операнд терма x_9 преобразуется нормализаторами общей стандартизации относительно antecedентов теоремы x_1 в более короткий терм, то регистрация теоремы x_1 отменяется. В этом случае шаблон заменяемого терма обычно будет нереализуем, ввиду выполняемой задачей общей стандартизации.
5. Характеристика исходной теоремы T , при рассмотрении которой сработал прием вывода, получивший теорему x_1 , имеет вид "сокращ(N)". В x_5 имеется характеристика "сокращ(P)". Тожество T применимо в направлении N к подвыражению заменяемого (относительно направления P) терма теоремы x_1 . Тогда регистрация теоремы x_1 отменяется.
6. В x_5 имеется характеристика x_6 вида "глуб($x N$)". Если среди antecedентов теоремы x_1 имеется утверждение "рациональное(x)", то данная характеристика удаляется из списка x_5 . Если при этом список x_5 оказывается пуст, то регистрация теоремы x_1 отменяется.

Если указанного antecedента нет, то переменной x_{10} присваивается заменяемый терм теоремы x_1 (относительно направления N), переменной x_{11} - список ее antecedентов. Проверяется, что утверждения списка x_{11} не имеют свободных переменных, не являющихся свободными переменными терма x_{10} . Затем просматриваются теоремы x_{13} списка вывода, имеющие характеристику вида "глуб($y P$)". Проверяется, что теорема x_{13} , будучи применена к заменяемому терму теоремы x_1 , разрешает его относительно неизвестной x . Тогда x_6 исключается из списка x_5 . Если список x_5 оказывается пуст, то регистрация теоремы x_1 отменяется.

7. x_5 состоит из единственной характеристики x_6 вида "нормзаголовок($P N$)". В списке вывода имеется такая теорема T с характеристикой "нормзаголовок($P M$)", что заменяемый терм теоремы x_1 представляет собой результат применения некоторой подстановки к заменяемому терму теоремы T . Тогда регистрация теоремы x_1 отменяется.
8. Теорема x_1 представляет собой эквивалентность, в каждой из частей которой встречается одна и та же ассоциативно-коммутативная операция f , быть может, от различных операндов. Однако, среди этих операндов в обоих случаях находятся одни и те же термы t_1, t_2 . Терм t_1 содержит только переменную x , а терм

t_2 - только переменную y . В каждой из частей эквивалентности переменные x, y неповторны. Тогда регистрация теоремы x_1 отменяется, ввиду избыточности операндов рассматриваемых операций f .

9. Теорема x_1 представляет собой тождество. В x_5 имеется характеристика "нормализация(N)". Существуют такие переменные x, y , которые входят в заменяемый терм и не входят в заменяющий, причем в заменяемом терме они встречаются только внутри вхождений одного и того же выражения $f(x, y)$. При обнаружении таких "сдвоенных" переменных регистрация теоремы x_1 отменяется.

Если x_2 содержит символ "антецеденты", причем некоторый антецедент теоремы x_1 имеет оценку сложности, не меньшую, чем ее консеквент, то рассматривается исходная теорема T , при рассмотрении которой сработал прием вывода, получивший теорему x_1 . Если оценка сложности каждого ее антецедента меньше оценки сложности ее консеквента, то регистрация теоремы x_1 отменяется.

В наборе x_2 находится элемент (источник D). Переменной x_7 присваивается D , переменной x_8 - четверка (вес - теорема T - список ее характеристик - блок вывода) для той теоремы, из которых текущий прием вывел теорему x_1 .

Вычисляется хэш теоремы x_1 , и с его помощью предпринимается попытка найти в базе теорем идентичную теорему, которая являлась бы стартовой для какой-либо ячейки логического вывода. В этой ситуации получение следствий теоремы x_1 для текущего цикла вывода блокируется: в набор x_2 заносится символ "результат".

Переменной x_9 присваивается четверка $(0, x_1, x_5, B)$, посредством которой теорема x_1 будет зарегистрирована в списке вывода. Блок вывода B вначале состоит из элемента (логвывод 0) и элемента (источник L x_7), где L - вхождение первого элемента четверки x_8 (левый край четверки). Затем к этому блоку добавляется элемент (уровень U), где U - текущий уровень сканирования.

Если набор x_2 содержит символ "результат", то этот символ добавляется к блоку вывода B .

Если набор x_2 содержит символ "Исключение", то этот символ добавляется к блоку вывода B .

Если набор x_2 содержит элемент (доптеор ...), то этот элемент добавляется к блоку вывода B .

Если набор x_2 содержит символ "новтеор", то процедура "новтеор" проверяет по четверке x_9 , что теорема x_1 не является частным случаем какой-либо теоремы списка вывода. Эта процедура будет рассмотрена ниже.

К списку вывода присоединяется элемент x_9 . Указатель изменений этого списка устанавливается на 1. При необходимости на экране корректируется счетчик числа выведенных теорем.

Переменной x_{10} присваивается последний элемент четверки x_8 - блок вывода той теоремы T , из которой получена теорема x_1 . Переменной x_{11} присваивается набор указателей A_1, \dots, A_n из определяющего способ обобщения теоремы T элемента (примечание $A_1 \dots A_n$) набора x_2 . Если такого элемента нет, то x_{11} равно пустому набору. Затем к набору x_{11} присоединяется элемент (следствие J), где J - левый край четверки x_9 . Этот же элемент присоединяется к блоку вывода x_{10} . Если набор x_2 содержит

символ "обобщение", то к блоку вывода x_{10} добавляется также элемент (обобщение H x_{11}). Здесь H - та характеристика, по которой сработал примененный прием вывода.

Если в x_2 имеется элемент "исключение", то он добавляется к блоку вывода x_{10} .

Если в x_2 имеется элемент (исключ A), то переменной x_{14} присваивается список характеристик той теоремы, из которой выведена теорема x_1 , а переменной x_{15} - направление n той характеристики, к программе которой относится примененный прием вывода. Если в x_{14} нет элемента вида $A(m)$, где m отлично от n , то в блок вывода x_{10} заносится элемент "исключение".

Если x_2 содержит элемент "обобщение" и не содержит элементов "исключение" и "сохр", а также элемента с заголовком "выход", причем исходная теорема, из которой выведена теорема x_1 , не имеет характеристик, отличных от "обобщзнак" и текущей характеристики, по которой сработал прием вывода, то в блок вывода x_{10} заносится элемент "исключение".

Если x_2 содержит элемент "обобщение" и элемент (выход $A_1 \dots A_n$), причем хотя бы один из логических символов A_1, \dots, A_n является заголовком характеристики исходной теоремы, из которой выведена теорема x_1 , то блок вывода x_{10} снабжается элементом "выход". Такое же действие выполняется, если x_2 содержит элементы "обобщение" и "выход".

Переменной x_4 внешней программы приема вывода присваивается измененный блок вывода x_{10} той теоремы, из которой выведена теорема x_1 .

Если в x_2 входит элемент "вспомприемы", то предпринимается обращение к процедуре "вспомприемы", создающей необходимые для продолжения вывода приемы вспомогательных пакетных операторов. Приемы регистрируются в разделе "Генератор приемов" буфера базы приемов.

На этом работа процедуры "регтеор" завершается.

Процедура "новтеор"

Обращение к процедуре имеет вид "новтеор(x_1)", где x_1 - четверка (вес - теорема - список ее характеристик - блок вывода) для теоремы, выведенной приемом логического вывода. Процедура проверяет, что эта теорема не является частным случаем другой теоремы из списка вывода. Если не является, то выход по "истина", иначе - по "ложь". Если некоторая старая теорема из списка вывода оказывается частным случаем теоремы x_1 , то ее блок вывода сопровождается элементом "исключение".

Выйти на начало программы "новтеор" можно через пункт "База теорем" - "Программирующий вывод" - "Вспомогательные процедуры логического вывода" - "Процедура НОВТЕОР" оглавления программ.

Переменной x_2 присваивается список вывода, переменной x_3 - анализируемая теорема. Далее последовательно рассматриваются следующие случаи:

1. Теорема x_3 имеет характеристику "неизвоценка(N F)". Это означает, что она является эквивалентностью, применение которой в направлении N позволяет получить более простые выражения с неизвестными. F - фильтр, уточняющий контекст. Переменной x_4 присваивается консеквент теоремы, переменной x_5 -

ее связывающая приставка. Проверяется, что консеквент включает все переменные списка x_5 . Переменной x_8 присваивается набор конъюнктивных членов фильтра F , переменной x_9 - заменяемое утверждение теоремы. Проверяется, что x_9 содержит все переменные теоремы.

Просматриваются четверки x_{10} списка вывода, у которых теорема x_{11} имеет характеристику вида "неизвоценка($M G$)". Проверяется, что либо обе теоремы x_3 , x_{11} были выведены приемом, заголовок ссылки на который - символ "развязка", либо ни одна из них не была выведена таким приемом. Переменной x_{14} присваивается набор конъюнктивных членов фильтра G , переменной x_{15} - заменяемый терм теоремы x_{11} . Проверяется, что он содержит все переменные теоремы x_{11} .

Предпринимается попытка усмотреть, что теорема x_{11} - частный случай теоремы x_3 . Для этого переменной x_{16} присваивается список свободных переменных терма x_9 . Проверяется, что терм x_{15} является результатом подстановки в терм x_9 вместо переменных x_{16} некоторых термов x_{17} . Определяются набор x_{18} результатов подстановки x_{17} вместо x_{16} в antecedentes теоремы x_3 , а также набор x_{19} antecedentes теоремы x_{11} . Проверяется, что каждый элемент списка x_{18} является следствием утверждений списка x_{19} . Находится набор x_{20} результатов подстановки в фильтры списка x_8 термов x_{17} вместо переменных x_{16} . Если подставляемое выражение t отлично от переменной, то фактически подставляется терм "терм(t)". Переменной x_{21} присваивается задача на преобразование фильтров ГЕНОЛОГа, имеющая вид ($x_{14} x_{20}$ пустое слово) (см. процедуру "преобрфильтр"). Процедура "преобрфильтр" преобразует второй разряд этой задачи в константу "истина", т.е. усматривает, что фильтры x_{20} - следствия фильтров x_{14} . После этого в блоке вывода теоремы x_{11} и всех теорем, достижимых из нее переходами через элементы (следствие ...) блоков вывода, регистрируется элемент "исключение". Затем - переход к очередной четверке x_{10} .

Если не удалось усмотреть, что x_{11} - частный случай теоремы x_3 , то аналогичным образом предпринимается попытка усмотреть, что x_3 - частный случай теоремы x_{11} . Если это удалось, то выход по "ложь".

- Теорема x_3 имеет характеристику "единствсущ(N)". Это означает, что она является тождеством, преобразующим терм с несколькими вхождениями операции максимальной сложности, хотя бы одно из которых содержит все переменные заменяемой части, в выражение с единственным вхождением этой операции максимальной сложности. N - направление замены. Проверяется, что консеквент теоремы x_3 содержит все переменные ее связывающей приставки.

Просматриваются четверки x_8 списка вывода, теорема x_9 которых имеет характеристику "единствсущ(M)". Переменной x_{12} присваивается связывающая приставка теоремы x_9 , переменной x_{14} - заменяемый терм теоремы x_9 , переменной x_{15} - заменяемый терм теоремы x_3 . Находится подстановка S термов x_{16} вместо переменных x_{12} , переводящая x_{14} в x_{15} . Определяются набор x_{18} результатов применения подстановки S к antecedентам теоремы x_9 и список x_{18} antecedентов теоремы x_3 . Если каждое утверждение списка x_{18} является следствием утверждений списка x_{17} , то выход по "ложь".

3. Консеквент x_4 теоремы x_3 содержит все переменные ее связывающей приставки x_5 . Просматриваются четверки x_6 списка вывода. Переменной x_7 присваивается теорема четверки x_6 , переменной x_8 - ее консеквент. Проверяется, что термы x_4 , x_8 имеют одну и ту же длину и что x_8 - результат применения к x_4 некоторой подстановки S вместо переменных x_5 различных термов. Проверяется, что терм x_8 содержит все переменные связывающей приставки теоремы x_7 . Переменной x_{13} присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_3 , а переменной x_{12} - набор антецедентов теоремы x_7 .

Если усматривается, что каждое утверждение списка x_{12} является следствием утверждений списка x_{13} , то выход по "ложь". Если при этом в характеристики исходной теоремы T , из которой прием вывода получил теорему x_3 , входит символ "обобщзнак", а сам этот список характеристик включается в список характеристик теоремы x_3 , то в блок вывода теоремы T заносится символ "исключение".

Если предыдущее условие не выполняется, то каждое утверждение списка x_{13} является следствием утверждений списка x_{12} , то в блок вывода теоремы x_7 заносится элемент "исключение".

4. Переменной x_4 присваивается элемент (источник $A_1 A_2$) из блока вывода четверки x_1 , а переменной x_5 - левый край A_1 той четверки списка вывода, из которой была получена четверка x_1 . Проверяется, что блок вывода четверки x_5 не содержит элемента "исключение". Переменной x_6 присваивается теорема четверки x_5 . Проверяется, что заголовками теорем x_3 и x_6 служит квантор общности. Переменной x_7 присваивается консеквент теоремы x_3 . Проверяется, что он имеет тот же заголовок, что и консеквент теоремы x_6 . Переменной x_8 присваивается результат переобозначения связанных переменных теоремы x_6 на переменные, не входящие в теорему x_3 . Переменной x_9 присваивается консеквент теоремы x_8 , переменной x_{10} - ее связывающая приставка. Находится унифицирующая подстановка для пары термов x_9 , x_7 относительно переменных x_{10} . Оператору "унификация" передаются опции "заменазнака" (разрешение использовать справочник "заменазнака"), а также (если x_3 имеет характеристику "нормализация" и заменяемый терм не имеет однократно входящих в него переменных) "приведение". Последняя опция блокирует обработку промежуточных термов оператором "приведение". Унифицирующая подстановка применяется к антецедентам теоремы x_8 . Если каждый результат оказывается следствием антецедентов теоремы x_3 , то выход по "ложь".

5. Заголовком теоремы x_3 служит квантор общности. Просматриваются четверки x_4 списка вывода, у которых теорема x_5 имеет заголовком квантор общности, причем заголовки и длины консеквентов теорем x_3 , x_5 совпадают. Проверяется, что консеквент любой из этих теорем содержит все ее переменные. Переменной x_6 присваивается список свободных переменных консеквента теоремы x_5 . Усматривается, что консеквент теоремы x_3 является результатом подстановки термов x_7 вместо переменных x_6 в консеквент теоремы x_5 . Проверяется, что каждый из термов x_7 - переменная, причем все они различны. Определяется набор x_8 результатов обработки оператором "станд" антецедентов теоремы x_3 , а также набор результатов обработки оператором "станд" результатов подстановки термов x_7 вместо переменных x_6 в антецеденты теоремы x_5 .

Если x_9 - собственное подмножество x_8 , то выход по "ложь". Если x_8 - собственное подмножество x_9 , то в блок вывода четверки x_4 заносится элемент "исключение", и продолжение просмотра четверок x_4 .

Если ни один из списков x_8 , x_9 не содержится в другом, то проверяется, что блок вывода четверки x_4 не содержит элемент "исключение". По элементу (источник ...) четверки x_1 проверяется, что теорема x_3 не была выведена непосредственно из теоремы x_5 . Проверяется, что списки переменных теорем x_3 и x_5 совпадают. Определяется пересечение x_{10} списков x_8 и x_9 , а также результаты x_{11} и x_{12} отбрасывания из список x_8 и x_9 элементов этого пересечения. Далее рассматриваются два случая:

- (a) Список x_{11} имеет не более двух элементов. Для любого максимального по включению подвыражения утверждения списка x_{11} существует элемент списка x_{12} , содержащий данное подвыражение. Если каждый элемент списка x_{11} является следствием утверждений x_9 , то в блок вывода четверки x_4 заносится элемент "исключение", и переход к следующей четверке x_4 .
- (b) Список x_{12} имеет не более двух элементов. Для любого максимального по включению подвыражения утверждения списка x_{12} существует элемент списка x_{11} , содержащий данное подвыражение. Если каждый элемент списка x_{12} является следствием утверждений x_8 , то выход по "ложь".

Если в процессе рассмотрения перечисленных случаев не имел место выход по "ложь", то выход по "истина".

Процедура "нормантецеденты"

В некоторых случаях обращение к процедурам "нормтеорема", "Нормтеорема" нежелательно, так как они могут испортить специальным образом созданный консеквент. Однако, в этих ситуациях часто бывает приемлемым провести общую стандартизацию хотя бы антецедентов. Такая стандартизация выполняется процедурой "нормантецеденты".

Обращение к процедуре имеет вид "нормантецеденты(x_1 x_2)", где x_1 - список утверждений, представляющих собой антецеденты формируемой кванторной импликации. x_2 - список свободных переменных консеквента. Процедура реализует программное выражение, значением которого служит упрощенный и стандартизированный список x_1 . По мере возможности, отбрасываются антецеденты, свободные переменные которых не входят в список x_2 .

Выйти на начало программы "нормантецеденты" можно через пункт "База теорем" - "Программирующий вывод" - "Вспомогательные процедуры логического вывода" - "Процедура "нормантецеденты" " оглавления программ.

Если x_1 - пустой набор, то он заменяется на одноэлементный набор, состоящий из логической константы "истина". Переменной x_3 присваивается задача на описание x_3 , имеющая единственную посылку "истина" и список условий x_1 . Эта задача имеет цели "редакция", "полный", "редуцирование", "прямойответ", "нормантецеденты", "наборантецедентов". Ввод ее блока анализа заблокирован. Задача сопровождается

комментарием (нормантецеденты x_2). Предпринимается решение задачи x_3 до максимального уровня 4. Задача выполняет основную работу по редактированию списка антецедентов, и ее цель "нормантецеденты" подключает множество специальных приемов такого редактирования. Эти приемы вводились по мере надобности при обучении системы выводу теорем. Переменной x_5 присваивается набор конъюнктивных членов ответа задачи x_3 .

Если некоторый параметр x_6 списка x_5 не входит в список x_2 , то определяется конъюнкция всех содержащих переменную x_6 утверждений списка x_5 . Переменной x_8 присваивается результат навешивания квантора существования по x_6 на данную конъюнкцию. Предпринимается попытка доказать, что x_8 - следствие всех не содержащих x_6 утверждений списка x_5 . В случае успеха из списка x_5 удаляются все утверждения, содержащие x_6 .

После рассмотрения всех не входящих в x_2 параметров x_6 списка x_5 по отдельности предпринимается попытка рассмотреть их все сразу. Для этого переменной x_7 присваивается список всех утверждений списка x_5 , содержащих параметр, не входящий в x_2 . Затем переменной x_8 присваивается результат навешивания на конъюнкцию утверждений x_7 квантора существования по всем свободным переменным списка x_5 , не входящим в x_2 . Если удастся доказать, что x_8 - следствие всех утверждений списка x_5 , все свободные переменные которых входят в x_2 , то прочие утверждения из x_5 отбрасываются.

Если в x_5 имеется утверждение x_6 без свободных переменных, заголовков которого отличен от символов "планиметрия" и "истина", то предпринимается попытка доказать его истинность из пустого множества посылок. В случае удачи оно исключается из x_5 , в противном случае выдается ответ, состоящий из константы "ложь". Это не совсем корректно, но лучше совсем отбросить теорему с остаточным константным антецедентом, чем занести ее в результат.

В остальных случаях выдается ответ x_5 .

Процедура "источники"

Блок вывода каждой теоремы списка вывода, кроме стартовых теорем, содержит элемент (источник $v A$), определяющий ту теорему, из которой она была выведена, а также указатель A способа вывода. Иногда бывает необходимо получить всю последовательность таких указателей A , начинающуюся со стартовой теоремы. Для этого служит процедура "источники". Обращение к ней имеет вид "источники(x_1)". Здесь x_1 - блок вывода некоторой теоремы. Обращение представляет собой программное выражение, а значением его служит набор указателей способов получения теорем вдоль цепочки вывода теоремы x_1 . Эта теорема соответствует концу набора. Программа процедуры невелика. Она просто прослеживает цепочку ссылок по элементам (источник ...).

Надобность в данной процедуре возникает в связи с необходимостью обрыва слишком длинных или малополезных цепочек вывода. В начале программы почти каждого приема вывода проверяется отсутствие тех или иных конкретных элементов в цепочке указателей способа вывода.

Процедура "Источники"

В отдельных случаях бывает нужна не цепочка указателей способа вывода, а цепочка самих блоков вывода. Тогда применяется процедура "Источники". Обращение к ней имеет вид "Источники(x_1)", где x_1 - блок вывода некоторой теоремы. Значением этого программного выражения служит набор блоков вывода теорем вдоль цепочки вывода теоремы x_1 . Эта теорема соответствует концу набора. Программа процедуры аналогична предыдущей.

Процедура "сокращающиеденты"

Процедура предпринимает попытку явного разрешения антецедентов выведенной теоремы относительно некоторых переменных. В каких случаях это целесообразно делать, решает она сама. Предполагается, что процедура объединит в своей программе несколько различных приемов, выполняющих указанное действие. Обращение к процедуре имеет вид "сокращающиеденты(x_1)", где x_1 - новая теорема. Пока в процедуре представлен единственный прием. Если консеквент теоремы имеет вид "значение(t, x)", где терм t не содержит переменной x , то предпринимается попытка явного разрешения ее антецедентов относительно x . В случае удачи создается теорема с измененным списком антецедентов и старым консеквентом. После обработки оператором "нормтеорема" она выдается в качестве результата.

Процедура "исклант"

Для отбрасывания избыточных антецедентов новой теоремы служит процедура "исклант". Обращение к ней имеет вид "исклант(x_1)", где x_1 - теорема. Программа данной процедуры присваивает переменной x_2 список антецедентов теоремы x_1 , переменной x_3 - ее консеквент. Далее последовательно рассматриваются следующие случаи:

1. Среди антецедентов встречается утверждение x_5 вида $\neg(x = y)$, где x, y - переменные. Это утверждение не встречается в списке утверждений, образующих сопровождение по о.д.з. антецедентов и консеквента. Переменной x_9 присваивается набор результатов подстановки y вместо x в отличные от x_5 антецеденты, переменной x_{10} - результат подстановки y вместо x в консеквент. Предпринимается попытка доказать x_{10} в предположении истинности утверждений x_9 . На время решения этой задачи все блокировки приемов снимаются. В случае успеха рассматривается импликация x_{12} , полученная из x_1 отбрасыванием антецедента x_5 . К ней рекурсивным образом применяется процедура "исклант", и выдается результат.
2. Среди антецедентов встречается утверждение x_5 вида $\neg(t_1 = t_2)$, не используемое для сопровождения по о.д.з. Предпринимается попытка доказать истинность консеквента из списка утверждений, получаемого при замене в x_2 утверждения x_5 на свое отрицание. В случае успеха - те же действия, что и выше. Этот случай накрывает предыдущий, однако предобработка антецедентов, предпринятая в предыдущем случае, иногда ускоряет усмотрение истинности и позволяет уложиться в рамки отведенного лимита трудоемкости.
3. Среди антецедентов встречается равенство x_4 вида $x = t$, где x - переменная, не входящая в t , а также не входящая в другие антецеденты и в консеквент.

К импликации, полученной из x_1 отбрасыванием антецедента x_4 , применяется процедура "исклант", и выдается результат.

Процедура "Исклант"

Эта процедура дополняет процедуру "исклант". Обращение к ней имеет вид "Исклант(x_1)", где x_1 - теорема. Программа данной процедуры присваивает переменной x_2 набор антецедентов теоремы, переменной x_3 - индикатор изменения списка x_2 (вначале нулевой), переменной x_4 - консеквент теоремы x_1 . Переменной x_5 присваивается список утверждений, составляющих сопровождение по о.д.з. для антецедентов и консеквента. Если в списке x_2 встречается утверждение "рациональное(x)", причем x - показатель степени, встречающийся в консеквенте, то к списку x_5 добавляются все антецеденты, содержащие переменную x и хотя бы один из символов "числитель", "знаменатель". Далее рассматривается список x_6 всех антецедентов, не вошедших в список x_5 . Последовательно предпринимаются попытки доказать истинность консеквента из списка x_2 , в котором отброшено какое-либо утверждение x_7 списка x_6 . Блокировки приемов при этом снимаются. В случае успеха утверждение x_7 отбрасывается из списка x_2 , а индикатор изменения x_3 устанавливается на 1. По исчерпании возможностей отбрасывания антецедентов, если x_3 равно 1, строится новая импликация с укороченным списком антецедентов x_2 . Иначе - выдается старая импликация x_1 .

Процедура "сокращант"

Процедура "сокращант(x_1)" удаляет у кванторной импликации x_1 те антецеденты, которые являются следствиями других антецедентов. Однократно просматривается список антецедентов теоремы x_1 . Для каждого антецедента, не используемого для сопровождения по о.д.з., создается вспомогательная задача на доказательство его из остальных антецедентов. В случае успеха этот антецедент заменяется на константу "истина". По завершении цикла все тождественно истинные антецеденты отбрасываются, и формируется итоговая кванторная импликация.

Процедура "исхаракт"

Значением выражения "исхаракт(x_1)" служит список характеристик той стартовой теоремы цикла вывода, из которой по цепочке выводов была получена теорема с блоком вывода x_1 . Этот список определяется при помощи процедуры "Источники".

Процедура "исключтеор"

Обращение к процедуре имеет вид "исключтеор(x_1)", где x_1 - четверка из списка вывода. В этой четверке, а также во всех достижимых из нее переходами через элементы (следствие ...) блоков вывода четверках регистрируется элемент "исключение". Таким образом, теорема четверки x_1 и все выведенные из нее теоремы не включаются в результат вывода. Следствия из них далее не выводятся.

Процедура "нормтеор"

Процедура "нормтеор(x_1)" выполняет ослабленную стандартизацию кванторной импликации x_1 . Она применяется, чтобы не разрушить специальным образом сконструированный консеквент. Антецеденты упрощаются задачами на преобразование,

а консеквент - только нормализаторами общей стандартизации и проверочными операторами. Сначала реализуется цикл упрощений антецедентов. Используемые для этого задачи на преобразование имеют цели "упростить", "редуцирование". Уровень обращения к ним равен 4. Затем реализуется цикл исключения переменных x , для которых имеется антецедент вида $x = t$, где t не содержит x . Наконец, просматриваются подтермы результирующей теоремы, и в случае выражения реализуется обработка их нормализаторами общей стандартизации относительно утверждений их контекста, а в случае утверждения - предпринимаются попытки усмотреть их истинность либо ложность при помощи проверочных операторов. В случае успеха подставляются константы "истина" либо "ложь". Блокируются попытки разрушить антецеденты, указывающие типы данных для переменных теоремы. Обработка продолжается, пока происходят изменения. Затем теорема обрабатывается операторами "стандупорядочение" и "нормлог".

Процедура "Нормкоэфф"

Обращение к процедуре имеет вид "Нормкоэфф($x_1 x_2$)", где x_1 - теорема, x_2 - набор символьных номеров ее антецедентов, которые при применении приема, ради которого была выведена теорема, станут идентифицироваться с посылками. Процедура пытается избавиться от операций типа "минус", расположенных перед многоместными операциями, выбирая неповторный параметр последних и относя этот "минус" к нему. Иными словами, выполняется переход от параметра x к параметру y , равному $-x$, чтобы избавиться от внешнего "минуса". Под "минусом" понимается любая операция типа отрицания.

Процедура "деблок"

По мере вывода теорем можно снимать блокировку применения тех приемов, которые основаны на только что выведенных теоремах текущей ячейки вывода. Это необходимо для исключения заведомо избыточных либо не стандартизированных теорем. Данная работа выполняется обращением к оператору "деблок(x_1)". Здесь x_1 - пара (список вывода - индикатор его изменений), являющаяся значением переменной x_5 в программах приемов вывода.

Процедура "развтеор"

Процедура "развтеор(x_1)" проверяет, имеет ли кванторная импликация антецедент вида " $x \in \{A_1, \dots, A_n\}$ ", где x - переменная, не входящая в прочие антецеденты. Если имеет, то указанный антецедент исключается, а консеквент $P(x)$ преобразуется в конъюнкцию $P(A_1) \& \dots \& A_n$. Данное действие повторяется, пока это возможно.

Процедура "фикспарам"

Иногда при стандартизации теоремы необходимо сохранить антецеденты, вводящие вспомогательные переменные. Тогда перед стандартизацией используется процедура "фикспарам(x_1)". Она заменяет каждый антецедент кванторной импликации x_1 , имеющий вид $x = t$, где x - переменная, не входящая в t , на терм "фикс(x) = t ". Результат всевозможных таких замен становится значением данного программного выражения.

Процедура "исклфикс"

После стандартизации теоремы, в которую предыдущей процедурой были введены символы "фикс", предпринимается отбрасывание всех таких символов. Это делает процедура "исклфикс(x1)".

Процедура "подстконст"

Программное выражение "подстконст(x1 x2)" получает в качестве входных данных теорему x1 и переменную x2, для которой теорема x1 имеет antecedent "функция(x2)". Значением выражения служит результат подстановки в теорему x1 константной функции в качестве x2.

Процедура "тождпреобр"

Обращение к процедуре имеет вид "тождпреобр(x1 x2 x3 x4 x5 x6). x1 - терм, x2 - вхождение в этот терм, x3 - список посылок, x4 - тождество (кванторная импликация либо константный терм), x5 - набор дополнительных установок. x6 перечисляет результаты преобразования x1 путем применения к подтерму x2 тождества x4. В качестве дополнительных установок пока рассматривается лишь терм "направл(A)", задающий направление A ("первыйтерм" либо "второйтерм") применения тождества x4. Программа данной процедуры несложна и основана на применении процедуры "идентификация".

Процедура "стандподбор"

Программное выражение "стандподбор(x1 x2)" получает в качестве входных данных кванторную импликацию x1 и переменную x2. Предполагается, что эта импликация выведена для подбора значений неизвестной x2. Значением выражения служит результат стандартизации x1. Создание данной процедуры было подсказано необходимостью упрощения чрезвычайно громоздкой исходной версии формулы Кардано, полученной приемом вывода. В прочих случаях процедура не использована. Прежде всего, предпринимается попытка исключить вспомогательные переменные, задаваемые равенством в antecedентах, если такие переменные используются однократно, а исключение их не приводит к слишком сложным термам. Затем предпринимается попытка упростить antecedенты, отличные от тех, которые вводят вспомогательные переменные. Далее упрощаются выражения, для которых введены вспомогательные переменные. Если имеются слишком громоздкие antecedенты, то предпринимается попытка ввести вспомогательные переменные для встречающихся в них неоднократно подтермов. Наконец, предпринимается попытка упростить консеквент относительно неизвестных. После этого выдается результат. Формула Кардано, выведенная системой, приобретает после обработки данным оператором сравнительно компактный вид.

Процедура "блокраздела"

В некоторых случаях прием вывода может временно отключить блокировку приемов, основанных на теоремах, относящихся к текущей ячейке вывода. Вообще, эти блокировки нужны лишь для проверки того, не утратила ли система способность выводить теоремы, которым она уже была обучена. В режиме поиска новых теорем

они несущественны. Тем не менее, тестирование аппарата логического вывода необходимо, чтобы при продолжении обучения не утратить достигнутого. Причины таких утрат могут быть совершенно мелкими и нелепыми, но если их во-время не найти и не устранить, то с течением времени придется заново прорабатывать значительную часть ранее проработанного материала. Это заставляет аккуратно относиться к блокировкам и пользоваться рядом вспомогательных процедур для их включения либо отключения. Процедура "блокраздела(x_1 x_2)" выполняет блокировку приемов, источниками которых служат теоремы той ячейки вывода, к которой относится терминал оглавления базы теорем по ссылке x_1 . Если x_2 не равно 0, то блокировка не распространяется на теоремы самого терминала x_1 . Программа процедуры "блокраздела" не представляет особого интереса, и подробно излагаться не будет. Она просматривает теоремы ячейки вывода и основанные на них приемы, используя описанные ранее структуры данных базы теорем. Напомним, что собственно блокировка либо разблокировка приемов выполняется непосредственно реализованными операторами ЛОСа "трассировка(фильтр . . .)". Для ссылок на приемы используются пары "логический символ - номер узла теоремы приема". Все приемы, характеризуемые такой парой, вне зависимости от их заголовка, оказываются заблокированы одновременно. Данные пары записываются в специальные регистры интерпретатора, которые можно расчистить операторами той же серии.

Процедуры "унификация" и "Унификация"

Процедура "унификация", кратко описанная еще в первом томе монографии (см. раздел 6.2), перечисляет наборы термов, подстановка которых вместо заданных переменных отождествляет заданные пары термов. При поиске подстановки разрешались некоторые простейшие преобразования термов и ввод дополнительных переменных. За счет этого, результат унификации становится неоднозначным, в отличие от классического случая унификации, рассматриваемого в учебниках по математической логике. С момента написания первого тома, данная процедура имела некоторое развитие. Описание программы ее исходной версии содержится во втором томе монографии, раздел 2.6.3. Отличия несущественные, и приводить описание современной версии процедуры мы не будем.

В отдельных случаях объяснение того, как происходит вывод теоремы, потребовало усиления процедуры "унификация", которой разрешено использовать тождества из базы теорем для отождествления заголовков унифицируемых термов. Обращение к такому усилению имеет вид "Унификация(x_1 x_2 x_3 x_4)". Здесь x_1 - набор установок на унификацию, такой же, как у оператора "унификация". x_2 - набор переменных, вместо которых осуществляется унифицирующая подстановка. Предпринимается попытка унификации, быть может, с использованием тождеств, извлекаемых из базы теорем. При необходимости в наборе x_1 уточняется способ отбора таких тождеств, хотя возможны действия по умолчанию. Переменной x_3 присваивается набор подставляемых вместо переменных набора x_2 термов, переменной x_4 - набор утверждений, которые должны быть истинны для корректности унификации. Оператор перечисляющий.

Программа оператора попросту обращается к оператору "унификация", списку установок на унификацию которого передается дополнительный элемент (Унификация пустое слово). Во втором разряде этого элемента будет создаваться набор утверждений x_4 , сбрасываемый при каждом откате.

Так как процедура "унификация" крайне часто используется приемами вывода теорем, имеет смысл привести здесь расширившийся с момента написания первого тома список типов установок на унификацию:

1. (унификация $t_1 t_2 K$) - унификация термов t_1, t_2 . K - набор вспомогательных пометок, вводимых процедурой унификации.
2. (переменные A) - A есть список всех переменных термов, вовлеченных в унификацию.
3. (терм $A_1 A_2$) - A_1, A_2 суть исходные теоремы, из которых извлечены унифицируемые термы.
4. (результподст A) - A есть переданный при рекурсивном обращении внешним оператором "унификация" набор термов, уже зафиксированных для подстановки вместо переменных списка x_2 .
5. (единица A) - при унификации допускается подстановка единиц вместо переменных списка A .
6. приведение - блокировка обработки промежуточных термов оператором "приведение".
7. (независит $A_1 A_2$) - терм, унифицированный с переменной A_2 , не должен зависеть от переменной, унифицированной с переменной A_1 .
8. (значение $A_1 A_2$) - терм, унифицированный с переменной A_2 , может зависеть от переменной, унифицированной с переменной A_1 .
9. новаяпеременная - блокируется введение новых переменных.
10. (списокпеременных A) - A есть список дополнительных переменных, введенных при унификации.
11. заменазнака - при унификации разрешается использование справочника "заменазнака" для анализа заголовков операндов ассоциативно - коммутативных операций.
12. отрицание - блокировка использования справочника "отрицание".
13. умножение - подключаются дополнительные приемы для унификации произведений.
14. плюс - усиленная унификация.
15. описать - использование задач на описание для обработки равенств выражений с различными заголовками.
16. (списокпосылок A) - A есть список посылок, относительно которых решается задача написание при наличии установки "описать".
17. (контекст A) - A есть список утверждений, из которого можно извлекать равенства для преобразования унифицируемых термов.

18. (Унификация A) - обращение произошло от оператора "Унификация". A - накопитель сопровождающих посылок (сбрасывается при каждом откате к продолжению унификации).
19. разбиение - при унификации ассоциативно - коммутативной операции двух переменных $f(x, y)$ с операцией $f(z, t_1, t_2)$, где z - переменная, происходит разбиение z в виде $f(z_1, z_2)$ для пары новых переменных, причем x, y идентифицируются с $f(z_1, t_1)$ и $f(z_2, t_2)$ соответственно.
20. (развязка $X A$) - предпринимается попытка развязки переменных списка X . A - накопитель развязывающих утверждений, вводимых при унификации.

Смысл перечисленных установок будет поясняться по мере использования их в приемах вывода теорем.

Заметим, что по умолчанию процедура "Унификация", столкнувшись с двумя унифицируемыми термами, имеющими различные заголовки, берет заголовок одного из них и использует справочники поиска теорем "разбиение", "включ" для получения тождеств, преобразующих термы с этим заголовком. Справочник "разбиение" выдает тождества вида $f(g(x, y), g(x, z)) = g(x, f(y, z))$ по символу g , справочник "включ" - тождества общей стандартизации, у которых заменяемая часть имеет вид $f(x, g(y, z))$, заменяющая часть тоже неповторна, содержит все три переменных x, y, z и имеет заголовок g .

Процедура "вартеор"

Обращение к процедуре имеет вид "вартеор($x_1 x_2$)", где x_1 - набор термов. Из базы теорем извлекаются теоремы, которые могут быть полезны для равноценных переформулировок термов x_1 , и переменной x_2 присваивается набор пар (теорема - список характеристик) для извлеченных теорем. Процедура возникла на самых первых шагах обучения системы логического вывода и используется всего в двух приемах. Она обращается к справочникам поиска теорем "перестановки" и "варпарам". Впоследствии поиск теорем стал полностью обеспечиваться процедурой "смтеор" либо непосредственным просмотром разделов базы теорем.

Процедура "регвывод"

Процедура обеспечивает регистрацию в базе теорем результатов каждого цикла логического вывода по заданной теореме. Обращение к ней имеет вид "регвывод($x_1 x_2 x_3$)". Здесь x_1 - ссылка на первый пункт той ячейки логического вывода, в которой происходил вывод следствий (т.е. ссылка на соответствующий концевой терминал оглавления базы теорем). x_2 - набор троек (теорема - список характеристик - блок вывода), являющийся результатом вывода. В терминалах "пв" узлов теорем текущей ячейки вывода регистрируются результаты вывода - проверяется, была ли получена теорема, и если получена, то указывается, какими именно приемами. Формат данных в этих терминалах был указан при общем описании архитектуры базы теорем в предыдущем томе. Выходной переменной x_3 присваивается набор троек (теорема A ячейки вывода - ссылка "теорема(...)" на эту теорему - 0 либо тройка набора x_2 , соответствующая теореме, идентифицированной с теоремой A). Программа процедуры чисто техническая и рассматриваться не будет.

Процедура "вспомприемы"

Процедура создает по только что полученной теореме приемы, необходимые для проверки на избыточность последующих теорем. Необходимость в таких приемах возникает для цикла вывода теорем пакетных нормализаторов, например, упрощения выражений в стандартной форме либо приведения к заданному заголовку. Обращение к процедуре имеет вид "вспомприемы(x1)", где x1 - четверка (вес - теорема - характеристики - блок вывода) для полученной теоремы. Создаваемые приемы регистрируются в буфере базы приемов (раздел "Генератор приемов"). Собственно создание приемов ГЕНОЛОГа осуществляется при помощи справочника "заголовкиприема". Компиляция их и регистрация в буфере базы приемов выполняются процедурой "Вводприема".

Процедуры "отрезкитеорем", "Отрезкитеорем"

При распараллеливании тестирования процедуры логического вывода по заданному отрезку базы теорем предпринимается разбиение ячеек вывода в этом отрезке на группы, суммарная трудоемкость вывода для которых примерно одинакова. Данные о трудоемкости хранятся в комментариях к первым пунктам оглавления для ячеек вывода. Разбиение выполняется процедурой "отрезкитеорем(x1 x2 x3 x4)". Здесь x1, x2 - пути в оглавлении базы теорем к начальной и конечной точкам тестирования. x3 - натуральное. Отрезок x1-x2 оглавления базы теорем делится на x3 подотрезков, суммарные трудоемкости для ячеек вывода которых примерно одинаковы. Переменной x4 присваивается набор путей в оглавлении, ведущих к последним пунктам данных подотрезков. Кроме полного тестирования вывода в базе теорем, предусмотрено также сокращенное тестирование. Оно ограничивается проверкой сохранности ранее освоенных выводов теорем, согласно архиву базы теорем. Для распараллеливания сокращенного тестирования создан оператор "Отрезкитеорем(x1 x2 x3 x4)", аналогичный оператору "отрезкитеорем".

В заключение перечислим вспомогательные процедуры, используемые для работы с архивом базы теорем, сохраняющим деревья "доказательств" выведенных теорем. Структуры данных этого архива были описаны в предыдущем томе. Так как перечисляемые процедуры - чисто технические, описания их программ опускаем.

Процедура "архвывод"

Обращение к процедуре имеет вид "архвывод(x1 x2 x3)". Здесь x1 - ссылка на конечной терминал оглавления базы теорем - первый пункт ячейки вывода, в которой был запущен цикл вывода. x2 - набор троек (теорема - список характеристик - блок вывода), являющийся результатом вывода. x3 - набор троек (теорема ячейки вывода x1 - ссылка "теорема(...)" на эту теорему - 0 либо тройка набора x2, соответствующая подобной теореме). Предпринимается регистрация информации о выводе в архиве базы теорем - создание новой ветви либо изменение старой.

Процедура "следствия"

Обращение к процедуре имеет вид "следствия(x1 x2)". x1 - ссылка на вершину дерева следствий в архиве базы теорем. Выходная переменная x2 перечисляет ссылки на все вершины дерева следствий, достижимые из x1 (включая x1).

Процедуры "Доптеор", "доптеор"

Оператор "Доптеор(x_1)" получает в качестве входного данного теорему и регистрирует ее в списке комментария (доптеор A) к посылкам исходной задачи.

Надобность в данном операторе и в комментарии "доптеор" возникла при регистрации в архиве базы теорем полного списка дополнительных теорем, использованных приемом вывода теорем. Частично такие теоремы известны самой программе приема, однако не все - часть их может привлекаться при решении вспомогательных задач, к которым обращается прием. Например, таким задачам может передаваться список теорем, выведенных в текущем цикле вывода на предшествующих шагах. Чтобы не терять информацию о примененных теоремах, те приемы решения задач, которые их привлекают, обращаются к процедуре "Доптеор". По завершении работы приема вывода процедура "регтеор" использует информацию, сохраненную в комментарии "доптеор".

Если вспомогательная задача, после того как была решена, все же не приводит к выводу новой теоремы, нужно каким-то образом удалить введенный ею комментарий (доптеор ...). Это достигается вставкой перед обращением к данной задаче оператора "доптеор(x_1)", у которого x_1 - фиктивная входная переменная. Данный оператор - перечисляющий. При первом прохождении его ничего не происходит, а при откате - удаляется комментарий "доптеор".

Оператор "архтеор"

Обращение к оператору имеет вид "архтеор(x_1 x_2). x_1 - ссылка "теорема(A_1 A_2)" на стартовую теорему некоторой ячейки вывода в базе теорем. Выходной переменной x_2 присваивается ссылка на корень дерева следствий этой теоремы в архиве базы теорем.

Оператор "архвершины"

Обращение к оператору имеет вид "архвершины(x_1 x_2 x_3)". x_1 - вершина дерева следствий в архиве базы теорем. Перечисляются все достижимые из нее вершины x_2 дерева следствий, причем переменной x_3 присваивается набор отметок пути от x_1 к x_2 . Сама вершина x_1 в перечисление включается.

Оператор "архвершина"

Обращение к оператору имеет вид "архвершина(x_1 x_2 x_3)". x_1 - вершина дерева следствий в архиве базы теорем, x_2 - последовательность меток пути от нее. Выходной переменной x_3 присваивается вершина, к которой от x_1 ведет путь x_2 .

Глава 2

Справочники поиска теорем

Прием вывода начинает свою работу, получив в качестве входной информации теорему и выделенную ее характеристику. Кроме этого, ему доступны еще некоторые данные, сопровождающие теорему. Иногда для вывода никаких других теорем не требуется: прием выполняет логическое преобразование теоремы либо ставит вспомогательные задачи, обращается к помощи решателя и формирует итоговую теорему по результатам решения задач.

Однако, иногда приему требуются дополнительные теоремы. Чаще всего - одна, но иногда более одной. Обычно такие дополнительные теоремы несложны и имеют весьма специфический вид. Кроме того, они могут использоваться сразу многими приемами вывода. Чтобы не тратить время на пролистывание всей базы теорем или каких-то ее разделов на поиск нужной дополнительной теоремы, были созданы так называемые справочники поиска теорем. Каждый справочник ориентирован на поиск теорем заданного типа и запускается на некотором логическом символе, который заданным образом встречается в искомой теореме. Приемы этих справочников задаются на ГЕНОЛОГе и автоматическим образом синтезируются по самим теоремам.

Таким образом, развитие системы поиска теорем может быть полностью автоматизировано. Впрочем, пока эта возможность не использована. Как правило, новый прием того или иного справочника создается в полуавтоматическом режиме: система предлагает его, а вводится он лишь по мере надобности. Это делается во избежание чрезмерной активизации процедур вывода, чтобы не отвлекаться от проработки теорем, уже зарегистрированных в базе.

В отдельных случаях дополнительная теорема не настолько специфична, чтобы ради нее создавать новый справочник поиска. Тогда прием вывода определяет раздел поиска и просматривает его для отбора представляющих интерес дополнительных теорем. Это происходит сравнительно редко, да и просмотры почти не замедляют работы системы.

Прежде, чем переходить к описанию приемов вывода, перечислим основные справочники поиска теорем, созданные на текущий момент.

2.0.1 Предварительные сведения о справочниках поиска теорем

Каждый справочник поиска теорем получает в качестве значения своей единственной входной переменной x_1 одноэлементный набор, состоящий из символа "пустое слово". Он представляет собой накопитель результатов - ссылок "теорема(A_1 A_2)" на

искомые теоремы, находящиеся в базе теорем. Как и обычно, здесь A_1 - логический символ, A_2 - номер узла статьи этого символа, являющегося узлом теоремы.

Приемы справочника поиска теорем задаются на ГЕНОЛОГе. Теорема такого приема имеет вид " $P(s \text{ теорема}(A_1 A_2))$ ", где P - логический символ, являющийся названием справочника, s - логический символ, в программу которого заносится данный прием справочника. Действия программы приема сводятся к занесению в накопитель результатов очередной ссылки "теорема(...)". Заголовок приема ГЕНОЛОГа - P .

Прием справочника поиска теорем автоматически создается по его спецификации. Спецификатор, распадающийся на группы приемов справочников "приемы" и "протокол", анализирует теорему и текущую ее характеристику, и принимает решение о создании спецификации приема. Она состоит из единственного элемента "тип(короче)".

Просмотреть оглавление существующих справочников поиска теорем можно из редактора программ ЛОСа нажатием "Ctrl-e" (кир.). Для просмотра программ спецификатора, создающих приемы этих справочников, можно использовать пункт "База теорем" - "Спецификатор" - "Процедуры справочников "приемы" и "протокол" " - "Справочники" - "Поиск теорем" - оглавления программ.

Для создания нового справочника поиска теорем, что при развитии системы программирующего вывода приходится делать крайне часто, следует придерживаться следующей последовательности действий:

1. Выбрать название P справочника, до этого не использованное в качестве заголовка приема ГЕНОЛОГа.
2. Создать в справочных сведениях о символе P (по F3 из редактора программ ЛОСа) текст, поясняющий работу справочника. За образец можно взять любой стандартный текст для таких справочников, например, текст для символа "тожд".
3. Зарегистрировать копию справочного текста в оглавлении справочников поиска теорем (по "Ctrl-e" из редактора ЛОСа).
4. Создать программу справочника "новыйприем", преобразующую задание приема справочника на ГЕНОЛОГе в ЛОС-программу. Достаточно скопировать какую-либо программу справочника "новыйприем" для другого справочника поиска теорем, например, "тожд", заменив в ней символ "тожд" на символ P .
5. Создать программу спецификатора, которая будет создавать спецификации приемов поиска теорем. Программа пишется в зависимости от того, что должен отбирать новый справочник. Можно действовать по аналогии с уже созданными программами такого типа (см. выше путь в оглавлении программ к списку этих программ).
6. Фактически сгенерировать по нужным теоремам несколько приемов нового справочника, сохранив их в буфере базы приемов. Затем вручную перенести в разделы оглавления базы приемов, где собраны справочники для соответствующих символов. В конце расчислить буфер базы приемов.

Переходим к перечислению справочников поиска теорем. В каждом пункте будем сначала указывать логический символ, являющийся названием справочника, а затем уточнять, какого вида теоремы он отбирает. Одновременно будет определяться текущий логический символ, на котором справочник выдает теорему.

2.0.2 Общий случай кванторных импликаций

1. Определение. Кванторные тождества и эквивалентности, являющиеся определением термина, заголовком которого служит текущий логический символ.
2. Значперем. Кванторные импликации, имеющие характеристику "подбор(x i)", у которых i - й антецедент имеет вид $x = t$. Текущий логический символ - самый сложный символ консеквента.

2.0.3 Тождества

Упрощающие тождества

1. констном. Кванторные тождества, имеющие характеристику "нормализация(...)", у которых в заменяемой части находится двуместная операция $f(A_1, A_2)$, где A_1, A_2 - выражения с единственной неповторной переменной x , а в заменяющей части - константный терм. Текущий логический символ - f .
2. тожд. Кванторные тождества, имеющие характеристику "нормализация(...)", у которых заменяемая часть имеет вид $f(A_1, A_2)$, где A_1, A_2 - неповторные выражения с единственной переменной x , а заменяющая - неповторна и имеет единственную переменную x . Текущий логический символ - f .
3. поглощается. Кванторные тождества, имеющие вид $f(x, g(x, y)) = a$, где a - логический символ либо переменная. Текущий логический символ - g . Допускается вхождение переменных x, y внутри g под одноместными операциями.
4. конствхожд. Кванторные тождества вида $f(x, g(x, y)) = a$, где a - логический символ либо переменная. Текущий логический символ - f . Допускается вхождение переменных x, y внутри g под одноместными операциями.
5. поглощает. Кванторные тождества, имеющие вид $P(x, y) \rightarrow f(x, y) = a$, где a - логический символ либо одна из переменных x, y . Текущий логический символ - f .
6. Сокращение. Кванторные тождества без существенных посылок (все посылки - только необходимые по о.д.з.), у которых заменяемый терм имеет вид $f(B_1, B_2)$, где каждый из термов B_1, B_2 и заменяющий терм B неповторны, причем термы B_1 и B_2 имеют единственную общую переменную, и эта переменная не входит в B . Сюда же относятся тождества, у которых заменяющий терм - переменная, а заменяемый имеет более одной переменной. Текущий логический символ - f .
7. сокращдроби. Кванторные тождества без существенных посылок, у которых заменяемый терм имеет вид $f(B_1, B_2)$, где каждый из термов B_1, B_2 и заменяющий терм B неповторны, причем термы B_1 и B_2 имеют единственную общую переменную, и эта переменная не входит в B . Текущий логический символ - заголовок B_1 либо B_2 .

8. обращение. Кванторные тождества вида $f(g(x)) = x$. Текущий логический символ - g .
9. сократимо. Кванторные тождества, у которых заменяемая и заменяющая части имеют две переменные x, y , причем заменяющая часть неповторная, а заменяемая имеет три вхождения переменных. Текущий логический символ - заголовок заменяемой части.
10. констнабор. Кванторные тождества, имеющие характеристику "нормализация", у которых в заменяемой части находится двуместная операция $f(x, a)$, где x - переменная, a - константа, причем заменяющий терм имеет вид a, x либо $g(x)$. Текущий логический символ - f .
11. исклтерм. Кванторные тождества, имеющие характеристику "нормализация(...)", у которых заменяемая часть имеет вид $f(x_1 \dots x_n)$; x_1, \dots, x_n - различные переменные, а заменяющая имеет меньшую оценку сложности, чем заменяемая. Текущий логический символ - f .
12. сокрацмн. Кванторные тождества общей стандартизации, у которых заменяемый терм имеет единственную повторную переменную x , а заменяемый неповторен, причем число вхождений x равно 2 и они располагаются в различных операндах B_1, B_2 некоммукативной операции. Заголовками B_1, B_2 служит один и тот же ассоциативно- коммутативный символ f . Текущий логический символ - f .
13. измзнака. Кванторные тождества вида $f(x) = g(a, x)$, где f - операция типа "отрицание", g - ассоциативно-коммутативная операция, a - константное выражение. Текущий логический символ - f .
14. Измзнака. Кванторные тождества вида $f(x) = g(a, x)$, где f - операция типа "отрицание", g - ассоциативно-коммутативная операция, a - константное выражение. Текущий логический символ - g .
15. упрощстанд. Кванторные тождества, обеспечивающие переход к более простому в смысле справочника "оценка" выражению. Текущий логический символ - заголовок заменяющей части.
16. смнеизв. Кванторные тождества, имеющие характеристику "смнеизв(...)". Текущий логический символ - заголовок заменяемой части.
17. симвмнож. Кванторные тождества общей стандартизации, у которых неконстантная заменяемая часть содержит константу a под корневой операцией, причем существенные посылки отсутствуют. Текущий логический символ - a .
18. вычерк. Кванторные тождества, у которых заменяющая часть получена из некоторого подтерма A заменяемой части отбрасыванием части операндов. Текущий логический символ - заголовок наименьшего такого подтерма A .
19. упрощимп. Кванторные тождества, выражающие корневую сложную операцию через эту же операцию от более простого терма. Текущий логический символ - заголовок заменяемой части.

20. включ. Кванторные тождества общей стандартизации, у которых заменяемая часть имеет вид $f(x, g(y, z))$; заменяющая часть тоже неповторна, содержит все три переменные x, y, z и имеет заголовок g . Текущий логический символ - f .
21. норм. Тождество общей стандартизации, имеющее также характеристику "группировки". Максимальный неконстантный подтерм заменяемой части не совпадает с ней. Текущий логический символ - заголовок этого подтерма. Наиболее сложный подтерм заменяемой части единственный.
22. консттерм. Тождество, имеющее характеристику "констдробь(...)". Текущий логический символ - заголовок заменяемой части.
23. исклпараметр. Тождество, имеющее неповторный заменяющий терм и повторный заменяемый. Множество переменных заменяющего терма - собственное подмножество переменных заменяемого.
24. надоператор. Тождество, уменьшающее оценку сложности корневой сложной операции. Текущий логический символ - заголовок неповторного операнда этой операции, являющийся наиболее сложным после заголовка символом заменяемой части.

Варьирующие тождества

1. перестановки. Кванторные тождества, имеющие характеристику "группировки", либо тождества, имеющие характеристику "сокращ" и неповторные части с одинаковыми переменными, у которых заголовком одной из частей служит текущий логический символ (во втором случае - заголовком заменяемой части).
2. варпарам. Кванторные тождества, у которых в одной части находится выражение с единственным подтермом B максимальной сложности, а в другой - выражение с другим единственным подвыражением C максимальной сложности, имеющим ту же сложность, что и B . Текущий логический символ - заголовок B .
3. извлечпарам. Кванторные тождества свертки либо общей стандартизации, не имеющие существенных посылок, у которых заменяющий терм имеет вид $f(x, g(y, z))$, в заменяемый входит подтерм $f(x, z)$, причем g имеет единицу по y . x, y, z - переменные. Текущий логический символ - f .
4. развязка. Кванторные тождества, преобразующие неповторное выражение $f(B, C)$ с некоммутативным заголовком f в выражение с ассоциативно - коммутативным заголовком и не менее чем двумя неконстантными операндами. Текущий логический символ - f .
5. вартеор. Кванторные равенства двух атомарных нечисловых объектов, у которых заменяющее выражение отличается от заменяемого единственной переменной. Текущий логический символ - заголовок обоих выражений. Тождества указанного вида используются для развязки antecedentов по некоторой переменной.

6. обобщслагаемое. Кванторные тождества, имеющие характеристику "обобщслагаемое(...)". Используются для ввода обобщающих параметров. Текущий логический символ - заголовок заменяемой части.
7. предвумножение. Кванторные тождества, имеющие характеристику "предвумножение(...)", у которых заменяющая часть имеет вид $f(\dots)$, а заменяемая может быть сведена к виду $f(\dots)$ после подстановки подходящих "единиц" вместо части переменных. Текущий логический символ - f .

Равенство двух атомарных выражений

1. равны. Кванторные тождества, у которых консеквент имеет вид равенства двух невырожденных нечисловых атомарных выражений с одинаковым заголовком P . Текущий логический символ - P .
2. равнчисл. Кванторные тождества, у которых консеквент имеет вид равенства двух невырожденных числовых атомоа с одинаковым заголовком P , причем все параметры антецедентов входят в консеквент. Текущий логический символ - P .
3. равно. Кванторные тождества, у которых консеквент имеет вид равенства двух переменных x, y , симметричным образом входящих в антецеденты. Имеется антецедент $P(x)$, определяющий тип значения переменных. Текущий логический символ - P .
4. равныетермы. Кванторные тождества, у которых некоторый антецедент имеет вид равенства двух невырожденных числовых атомов с одинаковым заголовком P , а консеквент тоже имеет вид равенства двух невырожденных числовых атомов (быть может, с другим заголовком). Текущий логический символ - P .

Свертки и декомпозиции

1. свертки. Кванторные тождества без существенных посылок, выполняющие свертку в неповторное выражение некоторого повторного выражения. Текущий логический символ - заголовок сворачиваемого выражения.
2. дистрибразвертка. Кванторные тождества вида $f(g(x, y), g(x, z)) = g(x, h(y, z))$, где f, h - ассоциативны и коммутативны. Текущий логический символ - g .
3. раздпарам. Кванторные тождества вида $f(g(x, y), g(x, z)) = g(x, f(y, z))$. Текущий логический символ - f .
4. разбиение. Кванторные тождества вида $f(g(x, y), g(x, z)) = g(x, f(y, z))$. Текущий логический символ - g .
5. дублпарам. Кванторные тождества, имеющие характеристику "свертка(...)" и не имеющие характеристик "нормализация(...)", "дистрибразвертка", у которых заменяющая часть неповторна, а заменяемая - нет. Дополнительно требуется, чтобы корневая операция заменяющего терма имела в нем наибольшую эвристическую оценку сложности. Текущий логический символ - заголовок заменяемой части.

6. варианты. Кванторные тождества свертки, у которых заменяемая часть имеет вид "вариант($B t_1 t_2$)", а заменяющая - не содержит символа "вариант". Текущий логический символ - заголовок неодносимвольного выражения t_1 либо t_2 .

Числовые атомы

1. числатом. Кванторные тождества, выражающие сложный числовой атом через более простые. Текущий логический символ - заголовок этого числового атома. Заменяемая часть - левая.
2. числвыраз. Кванторные тождества, декомпозирующие сложный числовой атом. Текущий логический символ - операция от двух переменных в заменяемой части (т.е. внутри декомпозируемого атома), по которой происходит декомпозиция. Например, декомпозируется скалярное произведение с суммой векторов.
3. сумма. Кванторные тождества типа "аддитивности". В одной части расположен невырожденный числовой атом, а в другой - сумма двух одноименных числовых атомов. Текущий логический символ - заголовок числового атома. Например, аддитивность массы.
4. варьир. Кванторные тождества, выражающие один невырожденный числовой атом через другой атом той же сложности. Текущий логический символ - заголовок первого числового атома.
5. числопред. Кванторные тождества, выражающие один невырожденный числовой атом через другие невырожденные числовые атомы, число которых более одного. Текущий логический символ - заголовок первого числового атома.
6. числатомы. Кванторные тождества с более чем одним невырожденным числовым атомом, у которых все переменные кванторной приставки присутствуют в некотором числовом атоме. Текущий логический символ - заголовок такого атома.

Определения

1. опраом. Кванторные тождества, представляющие собой определения, у которых текущий логический символ - заголовок определяющего выражения.
2. характ. Кванторные тождества, представляющие собой определения выражений вида $f(t)$, где f - одноместная операция, t - нечисловое атомарное выражение. Текущий логический символ - заголовок выражения t .

Координаты

1. уравнижество. Кванторные тождества, определяющие координаты множества объектов. Текущий логический символ - либо заголовок выражения, задающего множество объектов, либо (если множество обозначено переменной) одноместный предикатный символ для типа множества.
2. коорд. Кванторные тождества, определяющие координаты некоторого множества точек M , на которое ссылаются antecedentes B_1, \dots, B_n . Если рассмотреть

все antecedentes C_1, \dots, C_m , параметры которых пересекаются с параметрами x_1, \dots, x_k выражения M , то из оставшихся antecedентов вытекает существование значений x_1, \dots, x_k , для которых истинны все C_1, \dots, C_m . Текущий логический символ - заголовок некоторого B_i , имеющий наибольшую эвристическую оценку сложности.

3. тчкоорд. Кванторное тождество, в котором вводится обозначение объекта с заданными координатами a , и устанавливается, что его координаты равны a . Текущий логический символ - обозначение координат.

2.0.4 Эквивалентности

Упрощающие эквивалентности

1. нормкн. Кванторные эквивалентности, имеющие характеристику "общнорм(...)", у которых заменяемая и заменяющая части суть конъюнкции элементарных утверждений (в случае заменяемой части конъюнкция невырожденная). Текущий логический символ - наиболее сложный заголовок конъюнктивного члена заменяемой части.
2. фиксконст. Кванторные эквивалентности общей стандартизации, у которых в заменяемой части расположено нечисловое равенство $A = K$, где K - константный терм; заголовок выражения A - самый сложный символ консеквента. Текущий логический символ - заголовок выражения A .
3. равно. Кванторные эквивалентности с характеристикой "общнорм(...)", у которых заменяемая часть имеет вид равенства двух выражений с одинаковым заголовком P . Текущий логический символ - P .
4. уменьшение. Кванторные эквивалентности, имеющие характеристику "уменьшение(...)", причем такие, что обе части суть элементарные утверждения. Текущий логический символ - заголовок заменяемой части.
5. консеквент. Кванторные эквивалентности, в одной части которых расположено бескванторное утверждение, а в другой - квантор общности. Текущий логический символ - заголовок консеквента этого квантора, с отброшенным внешним отрицанием, если оно имеется.
6. упрощэkv. Кванторные эквивалентности, имеющие характеристику "общнорм(...)", у которых заменяемая и заменяющая части суть элементарные неповторные утверждения. Текущий логический символ - заголовок заменяемой части с отброшенным отрицанием.
7. сокращмод. Кванторные эквивалентности, имеющие характеристику "общнорм(...)", у которых заменяемая часть - равенство, имеющее наиболее сложную операцию f , а заменяющее утверждение элементарно. Текущий логический символ - f .
8. минус. Кванторные эквивалентности, имеющие неповторные части и характеристику "группировки", у которых все переменные одной из частей расположены под знаком одноместной операции f , а в другой части эта операция отсутствует. Текущий логический символ - f .

Свертки и декомпозиции

1. упрощен. Кванторные эквивалентности, имеющие характеристику "и(...)", у которых заменяемая часть и все конъюнктивные члены заменяющей суть элементарные неповторные утверждения. Текущий логический символ - заголовок заменяемой части.
2. упрощен. Кванторные эквивалентности, имеющие характеристику "или(...)", у которых заменяемая часть и все дизъюнктивные члены заменяющей суть элементарные неповторные утверждения. Текущий логический символ - заголовок заменяемой части.
3. разделяет. Кванторные эквивалентности, имеющие характеристику "и(...)" либо "или(...)", у которых декомпозируется двуместная операция $f(x, y)$, причем заменяемое утверждение и каждое элементарное утверждение заменяющей части неповторны. Текущий логический символ - f .
4. разделитель. Кванторные эквивалентности, имеющие характеристику "разделение(...)", у которых одна из частей имеет операцию $f(x, y)$ с переменными x, y , а в другой переменные x, y разнесены по различным операндам некоторого отношения. Текущий логический символ - f .
5. разделить. Кванторные эквивалентности, имеющие характеристику "или(...)" либо "и(...)", у которых две разделяемые переменные в заменяемой части соединены операцией f . Текущий логический символ - f .
6. сокращ. Кванторные эквивалентности, имеющие характеристику "и(...)" либо "или(...)", у которых заменяемая часть имеет единственную неповторную переменную, а каждое элементарное утверждение заменяющего термина неповторно. Текущий логический символ f - заголовок подтерма $f(a, b)$ заменяемой части, где a, b - переменные, причем a - неповторная, а b - неповторная.
7. Сокращ. Кванторные эквивалентности, имеющие характеристику "общнорм", у которых заменяемая часть имеет единственную неповторную переменную, а заменяющее утверждение неповторно. Текущий логический символ f - заголовок заменяемой части.
8. соединение. Кванторные эквивалентности, сворачивающие конъюнкцию двух элементарных неповторных утверждений с равными списками переменных в одно элементарное неповторное утверждение. Текущий логический символ - отличный от "не" заголовок одного из конъюнктивных членов заменяемой части.
9. равнозначны. Кванторные эквивалентности, декомпозирующие неповторное равенство в конъюнкцию равенств. Текущий логический символ - заголовок самого сложного подвыражения заменяемой части.

Варьирующие эквивалентности

1. группировка. Кванторные эквивалентности, имеющие неповторные части и характеристики "группировка(первыйтерм)", "группировка(второйтерм)". Текущий логический символ - наиболее сложный функциональный символ одной из частей эквивалентности.

Параметрические описания

1. обознач. Кванторные эквивалентности, дающие параметрическое описание для объектов типа f , указывающие стандартный вид обозначения таких объектов. Текущий логический символ - f . Например, эквивалентность, дающая параметрическое описание условия "Прямая(x)" через пары точек.
2. парамописание. Кванторные эквивалентности без существенных посылок, дающие явное параметрическое описание для утверждения $P(x)$. Текущий логический символ - P .
3. смпарам. Кванторные эквивалентности без существенных посылок, дающие явное параметрическое описание для утверждения, имеющего заголовком своего наиболее сложного подтерма текущий логический символ. Не включаются теоремы, определяемые с помощью справочника "парамописание".
4. описание. Кванторные эквивалентности, у которых в одной части расположено элементарное утверждение с заголовком f , отличным от отрицания, а в другой - явное параметрическое описание. Текущий логический символ - f .

Разрешение относительно неизвестных

1. неизвмнож. Кванторные эквивалентности, позволяющие разрешать относительно неизвестной x утверждение B , имеющее более одного вхождения этой неизвестной. Текущий логический символ - заголовок некоммукативной операции, под которой x встречается в B .

Определения

1. опред. Кванторные эквивалентности, представляющие собой определение, в котором определяющая часть есть конъюнкция (быть может, вырожденная) элементарных утверждений, причем текущий логический символ - наиболее сложный символ этой части.
2. опрзнач. Кванторные эквивалентности, являющиеся определениями равенства некоторого терма t заданному значению. Текущий логический символ - заголовок терма t .

Числовые атомы

1. числ. Эквивалентности общей стандартизации, в одной из частей которых находится равенство невырожденного числового атома t константе, а в другой - утверждение меньшей сложности. Текущий логический символ - заголовок терма t .
2. эквтермы. Кванторные эквивалентности, у которых в одной части расположено равенство, декомпозирующее числовой атом B , а в другой - элементарное утверждение. Текущий логический символ - заголовок атома B .

Нечисловые атомы

1. атомы. Эквивалентности, в одной из частей которых находится нечисловой предикат P , отличный от равенства, а в другой части - числовое равенство, причем все переменные этой части расположены внутри невырожденных нечисловых атомарных выражений одного и того же типа. Предикат P не содержит невырожденных атомарных выражений. Текущий логический символ - самый сложный символ предиката P .

2.0.5 Кванторные импликации - не тождества и не эквивалентности

Примеры

1. пример. Кванторная импликация без существенных посылок, консеквент которой (после отбрасывания отрицания, если оно есть) имеет своим заголовком текущий логический символ f .
2. исклпарам. Кванторная импликация с единственным существенным антецедентом P и консеквентом Q , такими, что P имеет две переменных, а Q - одну. Текущий логический символ - заголовок P с отброшенным отрицанием.
3. подтип. Кванторные импликации, у которых консеквент имеет вид $P(x)$, причем переменная x входит в единственный антецедент. Текущий логический символ - P .
4. связь. Кванторные импликации без существенных посылок, консеквент которых имеет вид " $f(x_1 \dots x_{i-1} g(y_1 \dots y_m) x_{i+1} \dots x_n)$ ", где x_j - различные переменные и y_j - различные переменные. Между собой они могут совпадать. Текущий логический символ - g .

Транзитивности и группировки

1. транзитоперанд. Кванторная импликация, имеющая вид обобщенной транзитивности: два неповторных существенных антецедента и неповторный консеквент, каждый не более чем с двумя переменными. Переменные консеквента - симметрическая разность множеств переменных антецедентов. Текущий логический символ - заголовок одного из антецедентов, с отброшенным отрицанием.
2. транзитпереход. Кванторная импликация, имеющая вид обобщенной транзитивности: два неповторных существенных антецедента и неповторный консеквент, каждый не более чем с двумя переменными. Переменные консеквента - симметрическая разность множеств переменных антецедентов. Текущий логический символ - заголовок консеквента с отброшенным отрицанием.
3. группоид. Кванторные импликации, выводящие следствие из двух утверждений, позволяющее группировать их подвыражения x, y . Текущий логический символ - операция над x, y , осуществляющая группировку.
4. сборка. Кванторные импликации, у которых консеквент имеет вид $P(\dots f(x, y) \dots)$, где x, y - переменные, не имеющие других вхождений в консеквент, а в

антецедентах выделяются две непересекающиеся группы - содержащие x и содержащие y , причем прочие антецеденты ни x , ни y не содержат. Текущий логический символ - f .

5. сборкамн. Простые импликации, у которых имеется ровно два существенных антецедента, не пересекающихся по своим переменным, причем все их переменные входят в консеквент. Текущий логический символ - заголовок консеквента, отличный от отрицания.

Квантор существования в консеквенте

1. общий. Кванторные импликации, имеющие своим консеквентом параметрическое описание общего вида уравнений для координат множеств объектов, определяемых выражениями, заголовком которых служит текущий логический символ f (например, "прямая").
2. незавгруппы. Кванторные импликации, консеквент которых имеет вид квантора существования, под которым расположена конъюнкция равенства двух неповторных нечисловых атомарных выражений A_1, A_2 с общим заголовком C и некоторых дополнительных условий B . Переменные квантора существования входят только в A_2 и B . Выражение A_1 не имеет общих переменных с выражениями A_2, B . Никакой антецедент не содержит более одной переменной. Текущий логический символ - C . Импликации указанного вида используются для развязки параметров атомарных выражений типа C .

Числовые атомы

1. числоценка. Кванторные неравенства, в одной из частей которых находится невырожденный числовой атом, а в другой - выражение без невырожденных числовых атомов. Текущий логический символ - заголовок числового атома.
2. числпарам. Кванторные неравенства с более чем одним невырожденным числовым атомом, у которых все переменные кванторной приставки присутствуют в некотором числовом атоме. Текущий логический символ - заголовок такого атома.
3. числсвязь. Кванторные импликации, имеющие своим консеквентом нечисловой предикат без невырожденных числовых атомов, причем антецеденты содержат единственный невырожденный числовой атом. Текущий логический символ - заголовок этого атома.
4. числинт. Кванторные импликации, в консеквенте которых расположен предикат, не содержащий числовых атомов, а антецеденты содержат невырожденные числовые атомы и не имеют заголовка "равно". Текущий логический символ - заголовок предиката.
5. числооеравенство. Кванторные импликации, у которых имеется единственный антецедентс заголовком "равно", и этот антецедент является равенством двух невырожденных числовых атомов с одним и тем же заголовком B . Консеквент не является равенством. Текущий логический символ - B .

Координаты

1. нормкоорд. Кванторные импликации с квантором существования в консеквенте, имеющие характеристику "нормкоорд". Текущий логический символ - название рассматриваемой координатной функции.

Многоместные антецеденты или консеквент

1. много. Кванторные импликации, имеющие характеристику "отношение", у которых некоторый антецедент - предикатный символ с более чем двумя операндами, а другие антецеденты имеют не более двух операндов. Текущий логический символ - заголовок этого антецедента.
2. множнабор. Кванторные импликации, имеющие характеристику "вывод", у которых консеквент - предикатный символ с более чем двумя операндами, а все антецеденты имеют не более двух операндов. Текущий логический символ - заголовок этого антецедента.

Усиление и ослабление

1. ослабление. Кванторные импликации вида $P(t_1 \dots t_n) \rightarrow Q(t_1 \dots t_n)$. Допускаются также несущественные антецеденты. Текущий логический символ - P .
2. усиление. Кванторные импликации вида $P(t_1 \dots t_n) \rightarrow Q(t_1 \dots t_n)$. Допускаются также несущественные антецеденты. Текущий логический символ - Q .
3. варопер. Кванторные импликации, имеющие характеристику с заголовком "варопер". Текущий логический символ - заголовок консеквента.

Дизъюнкция в консеквенте

1. Альтернатива. Кванторные импликации, консеквент которых представляет собой дизъюнкцию двух элементарных утверждений, каждое из которых имеет единственный подтерм наибольшей сложности, причем заголовки этих подтермов одинаковы. Текущий логический символ - общий заголовок подтермов.
2. дизъюнкция. Кванторная импликация без существенных посылок, имеющая в консеквенте дизъюнкцию элементарных утверждений с заголовками, отличными от отрицания.

Вывод утверждения заданного вида

1. стандмн. Импликация, выводящая утверждение, вид которого согласован с шаблоном некоторого протокола "стандтеор". Текущий логический символ - наиболее сложный символ антецедентов. Напомним, что протокол "стандтеор(x1)" посредством шаблона x1 определяет вид представляющих интерес при выводе следствий промежуточных утверждений. Такие утверждения часто используются в антецедентах теорем приемов.

2.0.6 Константные утверждения

1. константа. Константные утверждения вида $f(t_1 \dots t_n)$, где f отлично от равенства. Текущий логический символ - f .
2. констдробь. Бескванторное тождество, имеющее характеристику "искотерм(...)". Текущий логический символ - заголовок заменяемой части.

2.0.7 Квазипротоколы

1. стандтеор. Квазипротоколы с характеристиками "операнд", "стандравно", "оператор(A)", где A - текущий логический символ (название нормализатора стандартной формы, используемого для контекстной стандартизации).

2.0.8 Протоколы

1. смодз. Протоколы, имеющие вид "одз($f(\dots)$)". Текущий логический символ - f .
2. стандплс. Протоколы, имеющие вид "стандтеор(A)". Текущий логический символ - самый сложный символ утверждения A .
3. едн. Протоколы, имеющие вид "едн(A x y)". Текущий логический символ - операция терма A , операндом которой служит y .
4. существпосылки. Протоколы, имеющие вид "существпосылки(f)". Текущий логический символ - f .
5. взаимодействие. Протоколы, имеющие вид "взаимодействие($f \dots$)". Текущий логический символ - f .

Глава 3

Приемы вывода теорем, относящиеся к справочнику "прогрвывод"

Напомним, что приемы вывода теорем распределены между справочниками "прогрвывод", "теоремы" и процедурой "блоквывода". Первый из них содержит приемы, инициируемые рассмотрением некоторой характеристики теоремы, второй - приемы, инициируемые рассмотрением протокола, третий - небольшое число приемов, активируемых безотносительно к характеристикам теоремы. Все приемы реализованы на ЛОСе. Подавляющее большинство приемов вывода теорем относится к справочнику "прогрвывод".

Приемы справочника "прогрвывод" можно найти в разделе "База теорем" - "Программирующий вывод" - "Приемы вывода теорем (справочник ПРОГРВЫВОД)" оглавления программ. Оглавление раздела - список характеристик теорем, для которых предусмотрены приемы вывода. При перечислении приемов будем далее придерживаться этого списка. Напомним, что прием справочника "прогрвывод" получает следующие входные данные: x_1 - текущая четверка списка вывода (вес - теорема - список ее характеристик - блок вывода), x_2 - теорема, x_3 - ее характеристики, x_4 - блок вывода, x_5 - пара (список вывода - индикатор его изменения), x_6 - уровень сканирования, x_7 - текущая характеристика.

Почти в каждом приеме вывода теорем предпринимается проверка того, что в цепочке следствий, ведущей от стартовой теоремы ячейки вывода к текущей (исходной для приема) теореме не применялись приемы вывода, принадлежащие определенному списку. Эта проверка имеет чисто эвристический характер и нужна для обрыва слишком длинных цепочек вывода в одной и той же ячейке. Список запрещенных для повтора приемов пополняется в процессе обучения, как только возникают чрезмерно долгие циклы вывода. Для ссылки на запрещенный прием служит тип источника - заголовок элемента s пары (источник s), занесенной приемом в блок вывода. Чтобы избежать ненужного загромождения второстепенными деталями, ниже мы опускаем проверки указанных ограничений.

В описаниях приемов вывода теорем часто будут использоваться термины "оценка сложности подтерма", "самый сложный подтерм" и т.п. Имеется в виду оценка сложности, которую справочник "оценка" определяет по вхождению в терм корневого символа подтерма. Эта оценка относится только к корневой операции подтерма, так что внутри него могут иметься подтермы более сложные, чем он сам.

3.1 Характеристика "актив"

Характеристикой "актив(x1)" снабжаются импликация, консеквент которых представляет собой конъюнкцию термов вида "актив(...)". Такие импликации суть квазипротоколы, вводящие в рассмотрение новые объекты. x1 - список фильтров, уточняющих контекст срабатывания приема.

Склейка двух теорем

1. Склейка двух теорем, отличающихся альтернативными антецедентами.

Две импликации отличаются только группами антецедентов, дизъюнкция которых тождественно истинна. Они объединяются в одну импликацию, получаемую из исходных отбрасыванием указанных антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод импликации

$$\forall_{ABCDK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \rightarrow \text{актив}(l(AD)))$$

из двух импликаций:

$$\forall_{ABCDK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{точкалуча}(A, C, D) \rightarrow \text{актив}(l(AD)))$$

$$\forall_{ABCDK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \ \& \ A \in \text{отрезок}(CD) \rightarrow \text{актив}(l(AD)))$$

Обе эти импликации имели характеристики "актив(контрольвывода(коорд(D, K)))", указывающие, что соответствующие приемы иницируются усмотрением выражения "коорд(D, K)". Они возникли из альтернативных случаев определения координаты точки и поэтому имели различные последние антецеденты. Так как дизъюнкция данных антецедентов всегда истинна, то они отбрасываются.

Прием вывода просматривает список вывода и обнаруживает в нем вторую теорему x12 с характеристикой "актив(...)". Определяется подстановка, переводящая консеквент одной из теорем в консеквент другой (на случай различия их связанных переменных). Она применяется к спискам антецедентов и обнаруживается, что различаются эти списки ровно в одном антецеденте. Решается задача на доказательство истинности дизъюнкции различных антецедентов, после чего формируется результат, регистрируемый в списке вывода процедурой "регтеор". Ей передаются опции "обобщение", (характеристика x7), "характ", "исключение", (источник (нормдн x12)). Исходные теоремы помечаются в своих блоках вывода элементом "исключение". После этого - выход из программы обработки текущей характеристики. Остаться в программе нельзя, так как текущая теорема уже обобщена, и вывод следствий из нее должен быть сразу же прекращен.

3.2 Характеристика "альтернатива"

Характеристикой "альтернатива" снабжаются кванторные импликации, у которых консеквент имеет вид дизъюнкции попарно несовместных утверждений.

1. Использование альтернативы для уточнения дизъюнктивного определения.

Исходная теорема - дизъюнкция, представляющая собой альтернативу для объектов некоторого типа T_1 . Рассматривается надтип T_2 этого типа, и из базы теорем выбирается дизъюнктивное определение некоторого отношения объектов типа T_2 . Это определение, если его ограничить на объекты типа T_1 , удастся преобразовать с помощью альтернативы таким образом, что новые дизъюнктивные члены усиливают старые их версии.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \rightarrow a = b \vee a \leq b - 1 \leftrightarrow a \leq b)$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m = n \vee m \leq n - 1 \vee n + 1 \leq m)$$

при помощи дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a < b \vee a = b \leftrightarrow a \leq b)$$

Прежде всего, проверяется, что число дизъюнктивных членов исходной альтернативы не менее 3. Переменной x11 присваивается дизъюнктивный член, содержащий все переменные теоремы - в нашем случае $m = n$. Переменной x13 присваивается тип значений переменных термина x11 - символ "целое". Переменной x14 присваивается список x14 надтипов типа x13 - "рациональное", "число", "комплексное". Выбирается элемент x15 списка x14 - "число". При помощи справочника "дизъюнкблок" поиска теорем по символу "число" находится определение отношения, определяющая часть которого - дизъюнкция, причем один из членов этой дизъюнкции - числовое равенство. В нашем случае - это указанная выше дополнительная теорема. При необходимости переменные дополнительной теоремы переобозначаются так, чтобы были отличны от переменных исходной теоремы. Предпринимается унификация термов $m = n$ и $a = b$. Определяются список x27 результатов применения унифицирующей подстановки к antecedentes обеих теорем, список x28 результатов применения ее к оставшимся дизъюнктивным членам первой альтернативы и список x29 результатов применения ее к оставшимся дизъюнктивным членам во второй теореме. В нашем случае x27 - " a - целое", " b - целое", " a - число", " b - число"; x28 - " $a \leq b - 1$ ", " $b + 1 \leq a$ "; x29 - $a < b$. Составляется список x30 тех утверждений списка x28, для которых вспомогательная задача на доказательство не усматривает, что их отрицание - следствие посылок x27, к которым добавлена дизъюнкция утверждений x29. В нашем случае x30 состоит из единственного утверждения $a \leq b - 1$. Проверяется, что x30 короче списка x28 и что дизъюнкция утверждений списка x29 - следствие утверждений x27, к которым добавлена дизъюнкция утверждений x30. Переменной x33 присваивается результат применения унифицирующей подстановки к равенству $a = b$, а переменной x34 присваивается результат применения унифицирующей подстановки к определяющей части $a \leq b$ дополнительной теоремы. В нашем случае эти термы не изменяются. Наконец, формируется заготовка результата вывода - импликация, antecedentes которой суть элементы списка x27, а консеквент - эквивалентность

дизъюнкции утверждений списка x30 с добавленным термом x33 и утверждения x34. Эта заготовка обрабатывается нормализатором "нормтеорема", что и завершает вывод.

2. Дизъюнктивное определение подсказывает следствие из альтернативы.

Исходная теорема - дизъюнкция, представляющая собой альтернативу для объектов некоторого типа T_1 . Рассматривается надтип T_2 этого типа, и из базы теорем выбирается дизъюнктивное определение некоторого отношения объектов типа T_2 . У данного определения отрицание одного из дизъюнктивных членов перебрасывается в определяемую часть, после чего эта часть усиливается с использованием альтернативы.

В качестве примера рассмотрим вывод утверждения

$$\forall_{ab}(a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \rightarrow a + 1 \leq b \leftrightarrow a < b)$$

из тех же теорем, что и в предыдущем пункте.

Вплоть до применения унифицирующей подстановки к утверждению $a = b$ действия те же, что и выше. Однако, используется другая версия унификации, в результате чего x30 состоит из утверждения $a + 1 \leq b$. Переменной x33 оказывается присвоено утверждение $a = b$. Проверяется, что отрицание этого утверждения - следствие списка x27, к которому добавлена дизъюнкция утверждений x29. Затем нормализатор "нормтеорема" применяется к импликация, антецедентами которой служат утверждения x27, а консеквентом - эквивалентность дизъюнкции утверждений x30 дизъюнкции утверждений x29.

3.3 Характеристика "альтзначения"

Характеристикой "альтзначения(x1)" снабжаются кванторные эквивалентности, преобразующие условие, имеющее сложные выражения с неизвестными, к другим, тоже сложным выражениям с неизвестными. x1 - направление замены.

1. Фиксация стандартизируемого операнда самой сложной операции заменяющей части константой.

Стандартизируемый операнд самой сложной операции заменяющей части (например, основание логарифма) имеет единственный параметр. Для него подбирается значение, удовлетворяющее антецедентам теоремы, которое и подставляется в теорему.

В качестве примера рассмотрим вывод эквивалентности

$$\forall_{aijk}(0 < i \ \& \ a - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \rightarrow a + ki^j = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \& \ k = 0 \vee j \log_2 i - \log_2 a = -\log_2(-k) \ \& \ k < 0 \ \& \ 0 < a \vee j \log_2 i - \log_2(-a) = -\log_2 k \ \& \ a < 0 \ \& \ 0 < k)$$

из эквивалентности

$$\forall_{abijk}(\neg(b-1=0) \& 0 < b \& 0 < i \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& i - \text{число} \& j - \text{число} \& k - \text{число} \rightarrow a + ki^j = 0 \leftrightarrow a = 0 \& k = 0 \vee j \log_b i - \log_b a = -\log_b(-k) \& k < 0 \& 0 < a \vee j \log_b i - \log_b(-a) = -\log_b k \& a < 0 \& 0 < k)$$

Обе эти эквивалентности выполняют логарифмирование показательного уравнения, переходя от "сложных" показательных выражений с неизвестными к "сложным" логарифмическим.

При выводе последней эквивалентности она была снабжена комментарием "Начало($\log_b c$)", указывающим, что идентификация основания логарифма b должна происходить при усмотрении в контексте термина " $\log_b c$ ". Прием вывода находит такой комментарий, отбрасывает переменную c как не входящую в теорему, и далее решает задачу на описание для подбора примера такого b , которое удовлетворяет антецедентам $\neg(b-1=0)$, $0 < b$, $b - \text{число}$. Получив ответ $b = 2$, прием подставляет в исходную эквивалентность основание логарифма 2, отбрасывая антецеденты с b , что и дает требуемый результат. На всякий случай, теорема дополнительно обрабатывается нормализатором "нормтеорема".

3.4 Характеристика "Атомарное"

Характеристикой "Атомарное(x1)" снабжаются тождества для атомарных выражений типа x1 (например, выражение "вектор(AB)" для типа "Вектор").

Логические следствия теоремы

1. Попытка отождествления переменных, расположенных на одноименных операндах атомарных выражений консеквента.

Рассматривается тождество для трех двуместных невырожденных числовых атомов, два из которых имеют на некоторой позиции одинаковые переменные, а третий - другую переменную. Выводится результат отождествления переменных на этой позиции у всех трех атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод утверждения

$$\forall_{ab}(a - \text{точка} \& b - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(ab) - \text{вектор}(ab) = \text{вектор}0)$$

из утверждения

$$\forall_{abC}(a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& C - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(aC) - \text{вектор}(ab) = \text{вектор}(bC))$$

Прием определяет все атомарные выражения рассматриваемого типа, встречающиеся в теореме. В нашем случае - "вектор(aC)", "вектор(ab)" и "вектор(bC)". Проверяется, что этих выражений три, что все они имеют одинаковые заголовки и двуместны. Находится такой номер операнда, что по этому номеру в выделенных выражениях расположены только переменные, и этих переменных ровно две. В нашем случае номер равен 2, переменные - b, C . Эти переменные отождествляются. После обработки нормализатором "нормтеорема" получается результат.

Обобщение теоремы

1. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод утверждения

$$\forall_{ABac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow a(\text{вектор}(cB) + \text{вектор}(Ac)) = a\text{вектор}(cB) + a\text{вектор}(Ac))$$

из утверждения

$$\forall_{ABac}(\neg(A = B) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow a(\text{вектор}(cB) + \text{вектор}(Ac)) = a\text{вектор}(cB) + a\text{вектор}(Ac))$$

Прием усматривает в антецедентах теоремы отрицание равенства, не используемое для сопровождения по о.д.з. консеквента и других антецедентов. Предпринимается попытка доказать истинность консеквента из списка антецедентов, в котором отрицание равенства заменено на равенство. Задача сопровождается комментарием "допосылки", разрешающим в особых случаях добавлять некоторые не очень сильно ограничивающие контекст утверждения, необходимые для доказательства. В случае успеха создается новая теорема, в которой отрицание равенства отброшено, но добавлены вспомогательные посылки, введенные задачей на доказательство. В нашем примере таких нет.

2. Попытка развязки переменной атомарного выражения.

Одна и та же переменная встречается в двух атомарных выражениях, причем дополнительная теорема позволяет проварьировать способ задания одного из атомарных выражений так, что их переменные оказываются разделены.

В качестве примера рассмотрим вывод утверждения

$$\forall_{Aabcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \rightarrow a(\text{вектор}(bd) + \text{вектор}(Ac)) = a\text{вектор}(bd) + a\text{вектор}(Ac))$$

из утверждения

$$\forall_{ABac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow a(\text{вектор}(cB) + \text{вектор}(Ac)) = a\text{вектор}(cB) + a\text{вектор}(Ac))$$

и дополнительного утверждения

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \exists_D(D - \text{точка} \ \& \ \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(CD)))$$

Прием убеждается в том, что консеквент исходной теоремы - равенство. Переменной x11 присваивается пара операндов этого равенства. Переменной x12 присваивается список атомарных выражений рассматриваемого типа, входящих в левую часть равенства. Проверяется, что он такой же, как для правой части. В нашем случае атомарные выражения - "вектор(Ac)" и "вектор(cB)". Переменной x14 присваивается одно из выражений - "вектор(cB)". Проверяется, что его операнды - две различных переменных. Выбирается та из них, которая имеет в каждом операнде равенства более одного вхождения, причем другая переменная - ровно одно вхождение. В нашем случае выбранная переменная

- c . Переменной x_{19} присваивается список всех антецедентов, имеющих общую переменную с выражением x_{14} . В нашем случае - " c – точка" и " B – точка". По заголовку "вектор" выражения x_{14} справочник поиска теорем "незавгруппы" находит дополнительную теорему x_{20} (см. выше). Ее переменные переобозначаются так, чтобы не пересекаться с переменными исходной теоремы. Результатом переобозначения становится теорема x_{22} :

$$\forall_{bde}(b\text{–точка} \ \& \ d\text{–точка} \ \& \ e\text{–точка} \ \rightarrow \ \exists_f(f\text{–точка} \ \& \ \text{вектор}(bd) = \text{вектор}(ef)))$$

Проверяется, что связывающая приставка консеквента теоремы состоит из единственной переменной f . Среди конъюнктивных членов квантора существования находится равенство $\text{вектор}(bd) = \text{вектор}(ef)$. Выбирается тот член " $\text{вектор}(ef)$ " этого равенства, который содержит переменную f . Определяется подстановка, переводящая этот член в выражение " $\text{вектор}(bC)$ ". Эта подстановка переводит e в c , а f - в B . С ее помощью составляется список антецедентов результирующей импликации: " a – число", " A – точка", " b – точка", " d – точка", " c – точка". Консеквент получается из консеквента исходной теоремы заменой всех вхождений выражения " $\text{вектор}(cB)$ " на " $\text{вектор}(bd)$ ". Далее импликация обрабатывается нормализатором "нормтеорема".

Склейка теорем

1. Склейка двух импликаций, отличающихся альтернативными антецедентами.

Две импликации отличаются только группами антецедентов, дизъюнкция которых тождественно истинна. Они объединяются в одну импликацию, получаемую из исходных отбрасыванием указанных антецедентов.

В качестве примера можно рассмотреть вывод импликации

$$\forall_{ABac}(a\text{ – число} \ \& \ c\text{ – точка} \ \& \ A\text{ – точка} \ \& \ B\text{ – точка} \ \rightarrow \ a(\text{вектор}(cB) + \text{вектор}(Ac)) = a\text{вектор}(cB) + a\text{вектор}(Ac))$$

из двух импликаций:

$$\forall_{ABac}(a\text{ – число} \ \& \ c\text{ – точка} \ \& \ A\text{ – точка} \ \& \ B\text{ – точка} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow a(\text{вектор}(cB) + \text{вектор}(Ac)) = a\text{вектор}(cB) + a\text{вектор}(Ac))$$

$$\forall_{ABac}(a\text{ – число} \ \& \ c\text{ – точка} \ \& \ A\text{ – точка} \ \& \ B\text{ – точка} \ \& \ a \leq 0 \rightarrow a(\text{вектор}(cB) + \text{вектор}(Ac)) = a\text{вектор}(cB) + a\text{вектор}(Ac))$$

Действия данного приема совершенно аналогичны действиям приема склейки, рассмотренного для характеристики "актив". Такого рода дублирование приемов пока является стандартом развития системы вывода теорем. Оно объясняется тем, что для различных характеристик приемы могут требовать небольших различий. Копирование ЛОС-программы приема не составляет труда, а изменения вносятся в нее по мере надобности. В принципе, можно было бы вынести многие продублированные приемы в отдельные процедуры. Возможно, в конечном счете так и нужно будет сделать. Но в процессе обучения системы разделение приемов по различным характеристикам упрощает контроль за ее действиями. К тому же дублирование пока достаточно умеренное.

Замена переменных в теореме

1. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком.

Усматривается, что некоторое атомарное выражение задает общий вид объектов заданного типа, и для такого выражения вводится переменная указанного типа.

В качестве примера рассмотрим вывод импликации

$$\forall_{Aace}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ \text{Вектор}(e) \rightarrow a(e + \text{вектор}(Ac)) = ae + \text{авектор}(Ac))$$

из импликации

$$\forall_{Aabcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \rightarrow a(\text{вектор}(bd) + \text{вектор}(Ac)) = \text{авектор}(bd) + \text{авектор}(Ac))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_e(\text{Вектор}(e) \leftrightarrow \exists_{fg}(f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ e = \text{вектор}(fg)))$$

Прием усматривает в консеквенте теоремы атомарное выражение "вектор(bd)" и присваивает его переменной $x11$. Переменной $x12$ присваивается список переменных этого выражения. Проверяется что каждая переменная списка $x12$ встречается в консеквенте и существенных антецедентах только внутри вхождений выражения $x11$. Определяется тип "Вектор" значения выражения $x11$. Справочник "парамописание" находит по этому типу дополнительную теорему $x17$ (см. выше). Ее переменные переобозначаются так, чтобы не входили в исходную теорему. В параметрическом описании находится выражение "вектор(fg)", определяющее значение параметризуемой переменной e . Находится подстановка вместо переменных f, g , переводящая это выражение в "вектор(bd)". Переменной $x27$ присваивается скорректированный данной подстановкой список антецедентов дополнительной теоремы - утверждения " b -точка" и " d -точка". Переменной $x28$ присваивается список всех антецедентов исходной теоремы, содержащих переменные списка $x12$ не внутри вхождения подтерма $x11$. Он состоит из тех же утверждений " b -точка" и " d -точка". Переменной $x29$ присваивается объединение списка антецедентов с отброшенными утверждениями $x28$ и списка $x27$. Проверяется, что утверждения списка $x28$ являются следствиями утверждений $x29$. В качестве списка антецедентов результирующей импликации берутся не входящие в $x28$ антецеденты исходной теоремы, у которых подтерм "вектор(bd)" заменен на переменную e , причем к ним добавляется утверждение "Вектор(e)" из дополнительной теоремы. Консеквент результирующей импликации получается из консеквента исходной импликации такой же заменой. Нормализатор "нормтеорема" не используется.

Использование задачи на описание для вывода следствий теоремы

1. Попытка рассмотрения одноместных характеристик атомарных выражений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{Aad}(\neg(d = A) \ \& \ a \in \text{прямая}(dA) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ \text{точкалуча}(A, d, a) \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(Aa) + \text{вектор}(Ad)) = \text{длина}(\text{вектор}(Aa)) + \text{длина}(\text{вектор}(Ad)))$$

из теоремы

$$\forall_{Aabd}(\neg(d = A) \ \& \ l(ab) = l(dA) \ \& \ a \in \text{прямая}(dA) \ \& \ a \in \text{отрезок}(bA) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ \text{точкалуча}(A, d, b) \rightarrow \text{вектор}(Aa) + \text{вектор}(Ad) = \text{вектор}(Ab))$$

Прежде всего, прием проверяет, что стартовая теорема текущей ячейки вывода имела характеристику "определение(...)". В нашем случае это определение суммы векторов. Проверяется, что консеквент теоремы - равенство, в одной части которого расположено атомарное выражение x13, не входящее в противоположную часть. В нашем случае это "вектор(Ab)". При помощи справочника поиска теорем "характ" по атомарным выражениям консеквента определяется, какие одноместные операции f были определены для объектов с их заголовком. В нашем случае f - символ "длина". Для обозначения этих операций над атомарными выражениями консеквента выбираются новые переменные. Они пополняют общий список переменных x15 и регистрируются также в отдельном списке x16. Составляется список x17 результатов применения f к атомарным выражениям консеквента. Вводится список x18, образованный антецедентами текущей теоремы и добавленными к ним равенствами термов x17 новым переменным. В нашем случае список x16 образован переменными c, e, f , список x17 - выражениями "длина(вектор(Aa))", "длина(вектор(Ad))", "длина(вектор(Ab))". К антецедентам добавлены равенства " $c = \text{длина}(\text{вектор}(Aa))$ ", " $e = \text{длина}(\text{вектор}(Ad))$ ", " $f = \text{длина}(\text{вектор}(Ab))$ ". Проверяется, что список x16 имеет не менее двух переменных. Далее последние элементы списков x16, x17 и x18 присваиваются переменным x21, x19 и x20, после чего исключаются из своих списков. Первоначально они были зарегистрированы в этих списках лишь для единообразия их получения. Вводится задача на описание x23, посылками которой служат утверждения списка x18, а единственным условием - утверждение x20. Единственная неизвестная - x21. Задача имеет цель (известно...), перечисляющую переменные x16. В нашем случае условие - " $f = \text{длина}(\text{вектор}(Ab))$ ", неизвестная - f , известные параметры - c, e . Предпринимается решение задачи обычными средствами решателя. Заметим, что основанные на данной ячейке вывода приемы не используются: длины векторов заменяются длинами отрезков. В нашем случае получаем $f = c + e$. Далее вспомогательные обозначения исключаются, и с учетом исходной теоремы получается консеквент результата (присвоен переменной x27):

$$\text{длина}(\text{вектор}(Aa) + \text{вектор}(Ad)) = \text{длина}(\text{вектор}(Aa)) + \text{длина}(\text{вектор}(Ad))$$

Чтобы получить список x29 антецедентов результата, прежде всего из списка исходных антецедентов отбрасываются все утверждения, содержащие не входящие в консеквент результата переменные. Список x28 таких переменных в нашем случае состоит из переменной b . Отброшенные утверждения - " $l(ab) = l(dA)$ ", " $a \in \text{отрезок}(bA)$ ", " $b - \text{точка}$ ", " $\text{точкалуча}(A, d, b)$ ". Решается задача на описание, условиями которой служат данные утверждения, а посылками - утверждения x29. Задача имеет несущественные неизвестные x28 и цель

"исключ". Если после ее решения получается не зависящее от x_{28} утверждение, то оно присоединяется к списку x_{29} . В нашем случае это утверждение "точкалуча(A, d, a)". Список x_{29} обрабатывается процедурой "нормантецеденты", после чего по нему и по консеквенту x_{27} строится результирующая теорема. Нормализатором "нормтеорема" она не обрабатывается.

3.5 Характеристика "биекция"

Характеристикой "биекция" снабжаются такие явные параметрические описания, у которых параметры однозначно определяются по параметризуемому объекту.

Преобразование теоремы для создания приема

1. Извлечение из параметрического описания тождества для мощностей классов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bdf}(\forall_e(d(a, e) \rightarrow b(e) \subseteq f(e)) \& \forall_e(d(a, e) \rightarrow b(e) - \text{set}) \& \forall_e(d(a, e) \rightarrow f(e) - \text{set}) \rightarrow \text{card}(\text{set}_{ae}(a - \text{set} \& b(e) \subseteq a \& a \subseteq f(e) \& d(a, e))) = \text{card}(\text{set}_{ce}(c \subseteq f(e) \& c - \text{set} \& d(b(e) \cup c, e))))$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(b \subseteq f \& b - \text{set} \& f - \text{set} \rightarrow a - \text{set} \& b \subseteq a \& a \subseteq f \leftrightarrow \exists_c(a = b \cup c \& c \subseteq f \setminus b \& c - \text{set}))$$

Очевидно, выводимая теорема представляет собой квазипротокол для создания приема.

Прежде всего, переменной x_{11} присваивается набор утверждений под квантором существования. В нашем случае - " $a = b \cup c$ ", " $c \subseteq f \setminus b$ ", " $c - \text{set}$ ". В этом наборе выбирается равенство, в левой части которого находится переменная x_{14} , более нигде под квантором существования не встречающаяся. Правая часть равенства присваивается переменной x_{15} . В нашем случае $x_{14} - a$, $x_{15} - b \cup c$. Переменной x_{16} присваивается список антецедентов текущей теоремы - " $b \subseteq f$ ", " $b - \text{set}$ ", " $f - \text{set}$ ". Переменной x_{18} присваивается список всех утверждений этого списка, содержащих x_{14} (в нашем случае - пустой список), переменной x_{19} - остаток списка x_{16} .

Выбираются две новых переменных d, e , после чего переменной x_{20} присваивается выражение для мощности класса всех таких пар a, e , которые удовлетворяют заменяемой части параметрического описания и некоторому дополнительному условию $d(a, e)$. При этом переменные указанной заменяемой части, отличные от a, d, e , преобразованы в функциональные переменные от e . В нашем случае имеем выражение $\text{card}(\text{set}_{ae}(a - \text{set} \& b(e) \subseteq a \& a \subseteq f(e) \& d(a, e)))$.

Переменной x_{21} присваивается список всех утверждений под квантором существования исходной теоремы, отличных от определяющего равенства, к которым добавлены результаты подстановки в утверждения списка x_{18} и в $d(a, e)$ значения a , определяемого данным равенством. В нашем случае это " $c \subseteq f \setminus b$ ", " $c - \text{set}$ ", " $d(b \cup c, e)$ ". Если бы в x_{21} входили избыточные утверждения типа

$P(t)$, где P - тип значения выражения t , совпадающий с типом, определяемым справочником "тип", то они были бы отброшены.

Далее формируется выражение x_{22} для мощности класса всех c, e , удовлетворяющих утверждениям x_{21} . Как и выше, вводятся функциональные переменные от e : " $\text{card}(\text{set}_{ce}(c \subseteq f(e) \setminus b(e) \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d(b(e) \cup c, e)))$ ".

Переменной x_{23} сначала присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" утверждений списка x_{19} относительно параметров термов x_{20} , x_{22} . В нашем случае список x_{19} не изменяется. Далее элемент списка x_{23} преобразуются путем перехода к функциональным переменным от e и навешивания квантора общности с антецедентом $d(a, e)$. В итоге x_{23} приобретает следующий вид: " $\forall_e(d(a, e) \rightarrow b(e) \subseteq f(e))$ ", " $\forall_e(d(a, e) \rightarrow b(e) - \text{set})$ ", " $\forall_e(d(a, e) \rightarrow f(e) - \text{set})$ ".

Переменной x_{24} присваивается список характеристик "Консеквент(i блокпроверок)", ссылающихся на номера i только что введенных кванторных антецедентов. Такие характеристики означают, что антецедент - кванторная импликация, которую следует обрабатывать проверочным оператором либо вспомогательной задачей на доказательство. Наконец, переменной x_{26} присваивается результат - импликация с антецедентами x_{23} и консеквентом "равно($x_{20} \ x_{22}$)". Кроме характеристик x_{24} , ей передается характеристика "новпарам(второйтерм)". Эта характеристика указывает, что теорема является квазипротоколом, обеспечивающим декомпозирующую замену переменных при определении характеристики класса.

Решение вспомогательной задачи, использующей параметрическое описание, для определения характеристики исходных объектов

1. Извлечение из параметрического описания тождества для мощностей классов: варьирование характеристики объекта, при фиксации которой мощность явно вычисляется.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{dei}(e - \text{set} \ \& \ i - \text{натуральное} \ \& \ 0 \leq \text{carde} - i \ \& \ \text{конечное}(e) \rightarrow \text{card}(\text{set}_e(\text{перестановка}(c, e) \ \& \ d(c(i)))) = \text{card}(\text{set}_b(b \in e \ \& \ d(b))) \cdot (\text{carde} - 1)!$$

из теоремы

$$\forall_{bcei}(e - \text{set} \ \& \ b \in e \ \& \ i - \text{натуральное} \ \& \ 0 \leq \text{carde} - i \ \& \ \text{конечное}(e) \rightarrow \text{перестановка}(c, e) \ \& \ b = c(i) \leftrightarrow \exists_a(\text{перестановка}(a, e \setminus \{b\}) \ \& \ c = \text{Вставка}(a, i, b))$$

Переменной x_{11} присваивается набор конъюнктивных членов параметрического описания, переменной x_{12} - связывающая приставка квантора существования. В x_{11} выбирается равенство x_{13} , определяющее значение не входящей в список x_{12} переменной x_{14} посредством выражения x_{15} . В нашем случае x_{11} - " $\text{перестановка}(a, e \setminus \{b\})$ ", " $c = \text{Вставка}(a, i, b)$ ". Переменная x_{14} - c , выражение x_{15} - " $\text{Вставка}(a, i, b)$ ". Переменной x_{17} присваивается набор конъюнктивных членов параметризуемого утверждения. В нем выбирается равенство некоторой переменной x_{21} выражению x_{22} . Эта переменная не имеет других вхождений в

параметризуемую часть. В нашем случае $x17$ - "перестановка(c, e)", " $b = c(i)$ ". Переменная $x21$ - b , выражение $x22$ - $c(i)$. Решается вспомогательная задача на вычисление мощности класса всех $x12$, удовлетворяющих конъюнкции утверждений $x11$ с отброшенным равенством $x13$. В нашем случае эта мощность есть $\text{card}(\text{set}_a(\text{перестановка}(a, e \setminus \{b\})))$. Посылками служат все антецеденты исходной теоремы. Проверяется, что результат $x24$ не имеет заголовка "мощность". В нашем случае получается выражение $(\text{card}(e) - 1)!$. Выбирается новая переменная $x25$ (в нашем случае d). Переменной $x29$ присваивается список антецедентов результата вывода, получаемый из списка антецедентов исходной импликации отбрасыванием всех содержащих b утверждений. В нашем случае имеем антецеденты " $e - \text{set}$ ", " $i - \text{натуральное}$ ", " $0 \leq \text{card}(e) - i$ ", " $\text{конечное}(e)$ ". Консеквент результата собирается из уже имеющихся фрагментов. Он представляет собой равенство, в левой части которого располагается выражение " $\text{card}(\text{set}_c(\text{перестановка}(c, e) \ \& \ d(c(i))))$ ", а в правой - произведение $x24$ и выражения " $\text{card}(\text{set}_b(b \in e \ \& \ d(b)))$ ". Полученная кванторная импликация обрабатывается нормализатором "нормтеорема". Она снабжается ровно двумя характеристиками - "новпарам(второйтерм)" и "указатель(новаргумент(d с фикс))".

- Использование параметрического описания для сведения вычисления мощности класса к известной формуле.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bf}(b - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \ \& \ b \subseteq f \ \& \ \text{конечное}(f \setminus b) \rightarrow \text{card}(\text{set}_a(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq f \ \& \ b \subseteq a)) = 2^{\text{card}(f \setminus b)})$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(b \subseteq f \ \& \ b - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow a - \text{set} \ \& \ b \subseteq a \ \& \ a \subseteq f \leftrightarrow \exists_c(a = b \cup c \ \& \ c \subseteq f \setminus b \ \& \ c - \text{set}))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(a) \rightarrow \text{card}(\text{подмножества}(a)) = 2^{\text{card}(a)}).$$

Переменной $x11$ присваивается набор конъюнктивных членов параметрического описания, переменной $x12$ - связывающая приставка квантора существования. В $x11$ выбирается равенство $x13$, определяющее значение не входящей в список $x12$ переменной $x14$ посредством выражения $x15$. В нашем случае $x11$ - " $a = b \cup c$ ", " $c \subseteq f \setminus b$ ", " $c - \text{set}$ ". Переменная $x14$ - a , выражение $x15$ - " $b \cup c$ ". Переменной $x16$ присваивается непустой список антецедентов исходной теоремы: " $b \subseteq f$ ", " $b - \text{set}$ ", " $f - \text{set}$ ". Формируется выражение $x17$ для мощности класса объектов, определяемых утверждениями списка $x11$ без равенства $x13$: " $\text{card}(\text{set}_c(c \subseteq f \setminus b \ \& \ c - \text{set}))$ ". Решается задача на упрощение выражения $x17$ относительно посылок $x17$. Результат $x19$ имеет заголовок "мощность". В нашем случае это " $\text{card}(\text{подмножества}(f \setminus b))$ ". Переменной $x20$ присваивается выражение для мощности класса значений a , удовлетворяющих параметризуемому утверждению. В нашем случае это " $\text{card}(\text{set}_a(a - \text{set} \ \& \ b \subseteq a \ \& \ a \subseteq f))$ ". Переменной $x21$ присваивается импликация с антецедентами $x16$, консеквентом которой служит равенство выражений $x20$ и $x19$. В нашем случае это $\forall_{bf}(b \subseteq f \ \& \ b - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow \text{card}(\text{set}_a(a - \text{set} \ \& \ b \subseteq a \ \& \ a \subseteq f)) =$

$\text{card}(\text{подмножества}(f \setminus b))$). Справочник поиска теорем "числатом" находит по символу "мощность" указанную выше дополнительную теорему. Она используется процедурой "тождвывод" для преобразования второго операнда консеквента импликации x21. Результат обрабатывается процедурой "нормтеорема".

Варьирование параметрического описания с помощью дополнительной эквивалентности

1. Попытка рассмотрения дополнительного условия.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abf}(b \subseteq f \ \& \ b - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow a - \text{set} \ \& \ b \subseteq a \ \& \ a \subseteq f \leftrightarrow \exists_c(a = b \cup c \ \& \ c \subseteq f \setminus b \ \& \ c - \text{set}))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow b \subseteq a \leftrightarrow \exists_c(c - \text{set} \ \& \ a = b \cup c \ \& \ \text{непересек}(b, c)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow b \cup c \subseteq e \leftrightarrow b \subseteq e \ \& \ c \subseteq e).$$

Переменной x11 присваивается набор конъюнктивных членов параметрического описания, переменной x12 - связывающая приставка квантора существования. В x11 выбирается равенство x13, определяющее значение не входящей в список x12 переменной x14 посредством выражения x15. В нашем случае x11 - "c - set", "a = b ∪ c", "непересек(b, c)". Переменная x14 - a, выражение x15 - "b ∪ c". Проверяется, что число корневых операндов выражения x15 равно 2, а также что переменная x14 не входит в x15 и в остальные утверждения списка x11. Справочник поиска теорем "разделяет" определяет по заголовку x16 выражения x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x21 присваивается результат переобозначения всех переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в текущую теорему. В нашем случае x21 имеет следующий вид: " $\forall_{def}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow d \cup e \subseteq f \leftrightarrow d \subseteq f \ \& \ e \subseteq f)$ ". Переменной x23 присваивается заменяемое утверждение теоремы x21, в нашем случае - " $d \cup e \subseteq f$ ". Переменной x24 присваивается вхождение того операнда двухоперандного отношения x23, которое имеет своим заголовком x16. Рассматривается подтерм x26 по вхождению x24 и его список свободных переменных x27. В нашем случае x26 - $d \cup e$, x27 - d, e . Находится подстановка S вместо переменных x27, отождествляющая термы x15 и x26. В нашем случае вместо d подставляется b, вместо e - c. Находится результат x29 применения подстановки S к заменяющему терму теоремы x21. В нашем случае это " $b \subseteq f \ \& \ c \subseteq f$ ". Переменной x30 присваивается объединение списка x11 с отброшенным равенством x13, набора конъюнктивных членов утверждения x29 и результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x21. В нашем случае x30 состоит из утверждений "c - set", "непересек(b, c)", " $b \subseteq f$ ", " $c \subseteq f$ ", "b - set", "f - set". Переменной x31 присваивается список всех утверждений списка x30, параметры которых пересекаются со связывающей приставкой x12, т.е. "c - set", " $c \subseteq f$ ", "непересек(b, c)". Переменной x32 присваивается объединение списка антецедентов текущей теоремы и остатка списка x30, не вошедшего в список

x31, т.е. " $b - \text{set}$ ", " $b \subseteq f$ ", " $f - \text{set}$ ". Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения x32, а условиями - утверждения x31. Неизвестными служат переменные списка x12. В результате получается утверждение x34 вида " $c \subseteq f \setminus b \ \& \ c - \text{set}$ ". Переменной x35 присваивается набор конъюнктивных членов данного результата. Те из них, которые не содержат переменных связывающей приставки x12, перекидываются в список x32. Переменной x37 присваивается результат навешивания квантора существования по x12 на конъюнкцию утверждений x35 и равенства x13. В нашем случае это " $\exists_c(a = b \cup c \ \& \ c \subseteq f \setminus b \ \& \ c - \text{set})$ ". Переменной x38 присваивается конъюнкция параметризуемого утверждения и результата замены входящего x24 на переменную x14, т.е. " $b \subseteq a \ \& \ a \subseteq f$ ". Те утверждения списка x32, которые являются следствиями прочих утверждений этого списка, утверждений x35 и равенства x13, удаляются из x32 и добавляются к конъюнктивным членам x38. В нашем случае это делается для утверждения " $a - \text{set}$ ". Далее список x32 обрабатывается процедурой "нормантецеденты". Получается список x39, состоящий из утверждений " $b \subseteq f$ ", " $b - \text{set}$ ", " $f - \text{set}$ ". Наконец, формируется результирующая импликация с антецедентами x39, консеквент которой - эквивалентность x38 и x37.

3.6 Характеристика "варианты"

Характеристикой "варианты(x1)" снабжаются тождества, преобразующие корневую сложную операцию в условное выражение с более простыми операциями. x1 - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Вывод эквивалентности для развертки квантора существования в дизъюнкцию из тождества, заменяющая часть которого - условное выражение с константными альтернативами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(\exists_k(k - \text{целое} \ \& \ a((-1)^k)) \leftrightarrow a(1) \vee a(-1))$$

из теоремы

$$\forall_k(k - \text{целое} \rightarrow (-1)^k = (1 \text{ при } k - \text{even, иначе } -1)).$$

Переменным x10 и x11 присваиваются, соответственно, заменяющее выражение (1 при $k - \text{even}$, иначе -1) и заменяемое выражение $(-1)^k$. Проверяется, что заголовок заменяющего выражения - символ "вариант". Переменным x12 и x13 присваиваются первое и второе альтернативные выражения - в нашем случае 1 и -1. Проверяется, что они константные. Переменной x14 присваивается связывающая приставка исходной теоремы. Выбирается новая переменная x15, не входящая в исходную теорему. В нашем случае это переменная a . Формируется утверждение x17, получаемое навешиванием квантора существования по x14 на конъюнкцию антецедентов исходной теоремы и утверждение " $a((-1)^k)$ ". Переменной x18 присваивается эквивалентность x17 и дизъюнкции утверждений " $a(1)$ ", " $a(-1)$ ". Результатом становится кванторная импликация с пустым

списком антецедентов и консеквентом $x18$. Он сопровождается единственной характеристикой "нормили(второйтерм)". Фактически, выведена не теорема, а квазипротокол.

2. Расшифровка условия равенства терма, обозначающего условное выражение, первой альтернативе.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABax}(\neg(a = 0) \& A - \text{set} \& B - \text{set} \& B \subseteq A \& x \in A \rightarrow \text{индикатор}(A, B, a)(x) = a \leftrightarrow x \in B)$$

из теоремы

$$\forall_{ABax}(A - \text{set} \& B - \text{set} \& B \subseteq A \& x \in A \rightarrow \text{индикатор}(A, B, a)(x) = (a \text{ при } x \in B, \text{ иначе } 0)).$$

Переменным $x10$ и $x11$ присваиваются, соответственно, заменяющий и заменяемый термы исходной теоремы. В нашем случае $x10$ - "(a при $x \in B$, иначе 0)", $x11$ - "индикатор(A, B, a)(x)". Переменной $x12$ присваивается первая из альтернатив условного выражения, т.е. a . Проверяется, что ни одна из альтернатив не имеет заголовка "вариант" и что $x11$ - элементарное утверждение. Создается импликация, антецеденты которой суть антецеденты исходной импликации и отрицание равенства первой альтернативы второй. Консеквентом служит эквивалентность равенства выражения $x11$ первой альтернативе условию $x \in B$ условного выражения.

3. Расшифровка условия равенства терма, обозначающего условное выражение, второй альтернативе.

Аналогично предыдущему. Из той же теоремы выводится следующее следствие:

$$\forall_{ABax}(\neg(a = 0) \& A - \text{set} \& B - \text{set} \& B \subseteq A \& x \in A \rightarrow \text{индикатор}(A, B, a)(x) = 0 \leftrightarrow \neg(x \in B))$$

4. Разбор случаев для тождества с условным выражением в заменяющем терме.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABb}(A - \text{set} \& B - \text{set} \& B \subseteq A \& \neg(b = 0) \rightarrow \text{слой}(\text{индикатор}(A, B, b), b) = B)$$

из теоремы

$$\forall_{ABb}(A - \text{set} \& B - \text{set} \& B \subseteq A \rightarrow \text{слой}(\text{индикатор}(A, B, b), b) = (A \text{ при } b = 0, \text{ иначе } B))$$

Переменным $x10$ и $x11$ присваиваются, соответственно, заменяющий и заменяемый термы исходной теоремы. В нашем случае $x10$ - "(A при $b = 0$, иначе B)", $x11$ - "слой(индикатор(A, B, b), b)". В заменяющем терме берется вхождение $x12$ символа "вариант", не расположенное внутри других условных выражений. Проверяется, что переменные подтерма $x12$ не связаны внешними кванторами и описателями. Поочередно рассматриваются два случая - переменным $x13$ и $x14$ присваиваются либо условие условного выражения $x12$ и первая альтернатива,

либо отрицание условия и вторая альтернатива. Переменной x16 присваивается результат замены вхождения x12 на терм x14. В нашем случае x13 - " $\neg(b = 0)$ ", x14 - " B ", x16 - тоже " B ". Переменной x17 присваивается результат применения процедуры "нормантецеденты" к списку антецедентов исходной теоремы, пополненному утверждением x13. В наше случае он состоит из утверждений " $A - \text{set}$ ", " $B - \text{set}$ ", " $B \subseteq A$ ", " $\neg(b = 0)$ ". Определяется результат x18 обработки нормализатором "нормддлялюбого" импликации, антецеденты которой суть x17, а консеквент - равенство выражений x11 и x16. Проверяется, что он отличен от константы "истина", после чего дообрабатывается нормализатором "сокращантецеденты".

3.7 Характеристика "вартеор"

Характеристикой "вартеор(x1)" снабжаются тождества для выражений вида $f(A \dots)$, где $f(x \dots)$ встречается в эквивалентностях разрешения относительно x утверждений с более чем одним вхождением неизвестной. Операция f некоммутативна. Подвыражение A имеет наибольшую оценку сложности в заменяемой части. Оно не входит в заменяющую часть, причем наибольшая оценка сложности подвыражений заменяющей части - такая же, как для заменяемой. x1 - направление замены.

Использование тождества для преобразования уравнения к виду, для которого имеется стандартное решение

1. Варьирование эквивалентности для решения уравнения с несколькими вхождениями неизвестной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abce}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow a \sin b - c(\cos b)^2 = e - c \leftrightarrow e = a \sin b + c(\sin b)^2)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow (\sin a)^2 = -(\cos a)^2 + 1)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{acde}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e = ad + cd^2 \leftrightarrow \neg(c = 0) \ \& \ (d = -(a + \sqrt{4ce + a^2})/(2c) \vee d = (-a + \sqrt{4ce + a^2})/(2c)) \ \& \ 0 \leq 4ce + a^2 \vee c = 0 \ \& \ e = ad).$$

Сразу заметим, что выводимая теорема - лишь промежуточный результат, обобщаемый другими приемами до эквивалентности

$$\forall_{abde}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow a \sin b + e(\cos b)^2 = d \leftrightarrow a \sin b - e(\sin b)^2 = d - e).$$

Переменной x10 присваивается заменяемое выражение исходной теоремы. В нашем случае это " $(\sin a)^2$ ". Заголовком x11 этого выражения служит символ "степень", и по этому символу справочник поиска теорем "неизвмнож" находит указанную выше дополнительную теорему x12 для решения квадратных

уравнений. Переменной x_{15} присваивается переменная теоремы x_{12} , идентифицируемая с неизвестной (в нашем случае - d). По характеристике "норм-вид(квадруавн)" теоремы x_{12} определяется нормализатор "квадруавн" решения квадратных уравнений, название которого присваивается переменной x_{18} . Переменной x_{20} присваивается заменяемая часть эквивалентности x_{12} , т.е. " $e = ad + cd^2$ ". Определяется результат x_{21} переобозначения переменных исходной теоремы на новые переменные, не входящие в теорему x_{12} . В нашем случае имеем: " $\forall_b(b - \text{число} \rightarrow (\sin b)^2 = -(\cos b)^2 + 1)$ ".

Переменной x_{23} присваивается заменяемая часть теоремы x_{21} , т.е. " $(\sin b)^2$ ". В утверждении x_{20} находится такое вхождение переменной x_{15} , которое является операндом операции x_{11} . Переменной x_{26} присваивается эта операция, т.е. " d^2 ". Переменной x_{27} присваивается список переменных термов x_{23} и x_{26} , т.е. " b, d ". Определяется унифицирующая подстановка S вместо данных переменных, отождествляющая x_{26} и x_{23} . В нашем случае S не изменяет b , а вместо d подставляет $\sin b$. Определяются результаты x_{29} и x_{30} применения подстановки S к терму x_{20} и к заменяющему терму равенства x_{21} . В нашем случае x_{29} имеет вид " $e = a \sin b + c(\sin b)^2$ ", x_{30} - вид " $-(\cos b)^2 + 1$ ". Переменной x_{31} присваивается результат замены в x_{20} подтерма d^2 на x_{30} и одновременной подстановки S вместо переменных вне данного подтерма. Результатом является равенство " $e = a \sin b + c(-1 - (\cos b)^2)$ ". Переменной x_{33} присваивается набор результатов применения подстановки S к утверждениям объединенного списка антецедентов теорем x_{21} и x_{12} . В нашем случае это набор " $b - \text{число}$ ", " $a - \text{число}$ ", " $c - \text{число}$ ", " $d - \text{число}$ ", " $e - \text{число}$ ".

Проверяется, что подстановка S переводит переменную x_{15} в терм с единственной переменной. В нашем случае это переменная b . Переменной x_{36} присваивается подсписок утверждений набора x_{33} , не содержащих данной переменной, переменной x_{37} - результат присоединения равенства x_{31} к утверждениям набора x_{33} , содержащим b . Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения x_{36} , а условиями - x_{37} . Неизвестной служит переменная b . Задача имеет цель "попыткаспуска" и малый уровень обращения. Таким образом, в ней речь идет не о фактическом разрешении относительно b , а лишь об упрощении относительно неизвестной b . В результате получается утверждение x_{39} вида " $a \sin b - c(\cos b)^2 = e - c \ \& \ b - \text{число}$ ". Проверяется, что после отбрасывания из списка конъюнктивных членов терма x_{39} термов x_{33} остается единственное утверждение x_{42} . В нашем случае это " $a \sin b - c(\cos b)^2 = e - c$ ". Переменной x_{44} присваивается результат обработки списка x_{33} процедурой "нормантецеденты", после чего формируется результирующая импликация с антецедентами x_{44} и консеквентом - эквивалентностью утверждений x_{42} и x_{29} . Характеристиками ее становятся термы "неизвтермы(синус(b)квадруавн b второйтерм)" и "след-теорема(путьвхождения 1)". Второй из них определяет адрес дополнительной теоремы в базе теорем.

3.8 Характеристика "видобъекта"

Характеристикой "видобъекта" снабжаются кванторные импликации, определяющие вид объекта по уравнению для координат его точек.

Обобщение теоремы

1. Обозначение новым уникальным параметром операции с уникальным параметром.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{Kabcef}(b - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ (\neg(c = 0) \vee \neg(f = 0)) \ \& \ \text{коорд}(e, K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + ft \ \& \ y = b + ct \ \& \ t - \text{число})) \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \text{Прямая}(e))$$

из теоремы

$$\forall_{Kabdef}(d - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ (\neg(f = 0) \vee \neg(b - d = 0)) \ \& \ \text{коорд}(e, K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + ft \ \& \ y = b + t(d - b) \ \& \ t - \text{число})) \ \& \ f - \text{число} \rightarrow \text{Прямая}(e))$$

Среди антецедентов теоремы находится равенство x10, в одной части которого расположено название координат, а в другой - описатель "класс". В нашем случае это "коорд(e, K) = set_{xy}($\exists_t(x = a + ft \ \& \ y = b + t(d - b) \ \& \ t - \text{число})$)". Переменной x13 присваивается данный описатель. Рассматривается свободная переменная x14 терма x13, не входящая в косеквент теоремы. В нашем случае - переменная d . Усматривается такое вхождение x16 некоторой операции в x13, что d служит ее операндом, причем любое вхождение d в x13 является операндом вхождения такой же операции. В нашем случае x16 - вхождение $d - b$. Проверяется, что все свободные переменные подтерма x16 являются свободными переменными терма x13. Определяется тип s значения операции x16 (в нашем случае - "число"), выбирается новая переменная x19 (в нашем случае - c), и переменной x21 присваивается утверждение "число(c)". Переменной x23 присваивается результат добавления этого утверждения к списку всех антецедентов теоремы, не содержащих переменной x14. В нашем случае x23 состоит из утверждений " $b - \text{число}$ ", " $\text{систкоорд}(K)$ ", " $a - \text{число}$ ", " $f - \text{число}$ ", " $c - \text{число}$ ". Переменной x25 присваивается список утверждений, полученный присоединением к содержащим только переменную d антецедентам теоремы равенства терма x16 и переменной x19. В нашем случае x25 состоит из утверждений $d - \text{число}$ и $d - b = c$. Решается задача на описание, имеющая своими посылками утверждения x23, а условиями - утверждения x25. Незвестной служит переменная x14 (т.е. d). Переменной x27 присваивается ответ задачи; в нашем случае - $d = b + c$. Переменной x28 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x27, и в этом наборе находится равенство x29 переменной d некоторому выражению x30 (в нашем случае - $b + c$). Переменной x31 присваивается результат добавления к списку всех не содержащих x14 антецедентов теоремы остатка списка x28, набора результатов подстановки выражения x30 вместо переменной x14 в антецеденты, содержащие x14 и еще какие-то другие переменные, а также утверждения x21. Список x31 обрабатывается процедурой "нормантецеденты". В нашем случае получается набор x32, состоящий из утверждений " $b - \text{число}$ ", " $\text{систкоорд}(K)$ ", " $a - \text{число}$ ", " $f - \text{число}$ ", " $\neg(c = 0) \vee \neg(f = 0)$ ", " $\text{коорд}(e, K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + ft \ \& \ y = b + ct \ \& \ t - \text{число}))$ ", " $c - \text{число}$ ". Затем формируется результат - импликация с антецедентами x32 и консеквентом исходной теоремы.

3.9 Характеристика "внешзнак"

Характеристикой "внешзнак(x1)" снабжаются тождества, сохраняющие сложность самого сложного подвыражения, но уменьшающие сложность его надвыражений. x1 - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Усиление тождества путем явного разрешения относительно сложной надоперации сложного терма.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow (\sin b)^2 = (1 - \cos(2b))/2)$$

из теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow \cos(2b) = 1 - 2(\sin b)^2).$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. В нашем случае x10 - " $1 - 2(\sin b)^2$ ", x11 - " $\cos(2b)$ ". Находится единственное самое сложное подвыражение терма x10, присваиваемое переменной x13. В нашем случае - " $\sin b$ ". Переменной x15 присваивается сложность самой сложной надоперации вхождения x14 терма x13 в x10, переменной x16 - вхождение этой надоперации. В нашем случае x15 - 4.1, x16 - вхождение степени синуса. Проверяется, что вхождение x16 не корневое. Выбирается новая переменная x17 (в нашем случае - a), и определяется результат x18 замены в x10 вхождения x16 на эту переменную. Переменной x19 присваивается набор, состоящий из равенства выражений x18, x11, а также, если удастся усмотреть тип s значения подвыражения по вхождению x16, из утверждения " $s(x17)$ ". В нашем случае x19 - утверждения " $1 - 2a = \cos(2b)$ ", " $a - \text{число}$ ". Решается задача на описание, посылками которой служат все antecedentes теоремы, а условиями - утверждения x19. Неизвестной является a . Получается ответ x23; в нашем случае - " $a = (1 - \cos(2b))/2 \ \& \ (1 - \cos(2b))/2 - \text{число}$ ". После подстановки в него выражения $\sin b$ вместо a получаем утверждение x24 вида " $(\sin b)^2 = (1 - \cos(2b))/2 \ \& \ (1 - \cos(2b))/2 - \text{число}$ ". Наконец, создается импликация, antecedentes которой те же, что у исходной теоремы, а консеквент - x24. Эта импликация обрабатывается нормализатором "нормтеорема", устраняющим второй конъюнктивный член консеквента. Среди предлагаемых характеристик отбираются характеристики с заголовками "вартеор", "внешзнак".

3.10 Характеристика "вспомобъекты"

Характеристикой "вспомобъекты(x1)" снабжаются импликации, вводящие в рассмотрение новые объекты для использования определения объекта x1. Фактически, эти импликации суть квазипротоколы.

Склейка двух теорем

1. Склейка двух теорем, отличающихся альтернативными антецедентами.

Две импликации отличаются только группами антецедентов, дизъюнкция которых тождественно истинна. Они объединяются в одну импликацию, получаемую из исходных отбрасыванием указанных антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD FK} (\neg(D \in \text{прямая}(AB)) \& D - \text{точка} \& \text{систкоорд}(K) \& (A, B, C) = K \rightarrow F - \text{точка} \& \neg(D = F) \& F \in \text{прямая}(AB) \& \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD FK} (\neg(D \in \text{прямая}(AB)) \& \text{разныестороны}(B, D, \text{прямая}(AC)) \& D - \text{точка} \& \text{систкоорд}(K) \& (A, B, C) = K \rightarrow F - \text{точка} \& \neg(D = F) \& F \in \text{прямая}(AB) \& \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AC)) \& A \in \text{отрезок}(BF)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDEK} (\neg(D \in \text{прямая}(AB)) \& \text{однасторона}(B, D, \text{прямая}(AC)) \& D - \text{точка} \& \text{систкоорд}(K) \& (A, B, C) = K \rightarrow E - \text{точка} \& \neg(D = E) \& E \in \text{прямая}(AB) \& \text{точкалуча}(A, B, E) \& \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AC)).$$

Переменной x9 присваивается набор конъюнктивных членов консеквента, переменной x10 - список антецедентов исходной теоремы. В списке вывода рассматривается дополнительная теорема x12, отличная от исходной теоремы и обладающая той же характеристикой "вспомобъекты(...)", что и исходная теорема. Переменной x14 присваивается список антецедентов теоремы x12, переменной x15 - список конъюнктивных членов ее консеквента. Проверяется, что длины наборов x10 и x14, а также наборов x9 и x15 равны. Проверяется совпадение списков x16, x17 свободных переменных утверждений наборов x10 и x14. Проверяется, что утверждения x9 имеют единственную не входящую в x16 переменную x , а утверждения x15 - единственную не входящую в x16 переменную y . В утверждениях x15 переменная y заменяется на x . В нашем случае - E на F . Усматривается, что список x10 имеет единственное не входящее в x14 утверждение x21, а список x14 - единственное не входящее в x10 утверждение x23. В нашем случае x21 - "разныестороны($B, D, \text{прямая}(AC)$)", x23 - "однасторона($B, D, \text{прямая}(AC)$)". Переменной x24 присваивается копия набора x9. Если в ней имеются утверждения, не входящие в список x15, то предпринимается попытка доказать их конъюнкцию из объединения списка x10 и пересечения списков x24, x15. После этого x24 заменяется на пересечение списков x14 и x15. В нашем случае x24 содержит утверждение $A \in \text{отрезок}(BF)$, не входящее в x15. После усмотрения того, что оно вытекает из утверждений " $\neg(D \in \text{прямая}(AB))$ ", " $\text{разныестороны}(B, D, \text{прямая}(AC))$ ", " $D - \text{точка}$ ", " $\text{систкоорд}(K)$ ", " $(A, B, C) = K$ ", " $F - \text{точка}$ ", " $\neg(D = F)$ ", " $F \in \text{прямая}(AB)$ ", " $\text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AC)$ ", это утверждение исключается из списка x24. Аналогичные действия предпринимаются с перестановкой списков x15, x24. Далее проверяется, что списки x15 и x24 одинаковы. Переменной x25 присваивается пересечение списков x10 и x14. В нашем случае это " $\neg(D \in \text{прямая}(AB))$ ",

" D – точка", "систкоорд(K)", " $(A, B, C) = K$ ". Решается задача на доказательство дизъюнкции x_{21} и x_{23} из посылок x_{25} . Список x_{25} обрабатывается процедурой "нормантецеденты". Затем формируется результирующая импликация с антецедентами x_{25} и конъюнкцией утверждений x_{24} в консеквенте.

3.11 Характеристика "вспомописание"

Характеристикой "вспомописание(x_1)" снабжаются эквивалентности, исключают вспомогательные параметры в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". x_1 - направление замены.

1. Обращение в единицу операнда двуместной операции над параметрами координат.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCefghjk} (\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ g = (A, f, h) \ \& \ \text{коорд}(B, g) = (c, 0) \ \& \ \text{коорд}(C, g) = (j, k) \ \& \ A \text{ – точка} \ \& \ B \text{ – точка} \ \& \ C \text{ – точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(g) \rightarrow 0 < cj \leftrightarrow 0 < -\pi/2 - \angle(BAC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCcdfghjk} (\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ g = (A, f, h) \ \& \ \text{коорд}(B, g) = (c, d) \ \& \ \text{коорд}(C, g) = (j, k) \ \& \ A \text{ – точка} \ \& \ B \text{ – точка} \ \& \ C \text{ – точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(g) \rightarrow 0 < cj + dk \leftrightarrow 0 < -\pi/2 - \angle(BAC))$$

Новая теорема позволит создать прием для исключения неравенства $0 < cj$, в то время как прием, основанный на исходной теореме, на это не способен.

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм теоремы (т.е. $0 < cj + dk$), переменной x_{11} - набор ее антецедентов. В x_{10} находится вхождение x_{12} двуместной операции x_{13} , имеющей единицу e для своего операнда x_{15} . Переменной x_{16} присваивается подтерм по вхождению x_{15} . В нашем случае x_{13} - "плюс", x_{16} - dk , $e = 0$. Переменной x_{17} присваивается список всех параметров терма x_{16} , входящих в координатные наборы, задаваемые равенствами из антецедентов. В нашем случае это переменные d, k . Выбирается переменная x_{18} (в нашем случае - d) из списка x_{17} , и решается задача на описание с единственным условием $dk = 0$ и неизвестной d . Список посылок состоит из константы "истина". Получается ответ x_{20} . В нашем случае он имеет вид " $\neg(k = 0) \ \& \ d = 0 \vee k = 0) \ \& \ d$ – число $\ \& \ k$ – число". Ответ преобразуется к виду д.н.ф., и выбирается некоторый дизъюнктивный член x_{21} этой д.н.ф. Находится набор конъюнктивных членов утверждения x_{21} . В нашем случае этот набор состоит из утверждений " $\neg(k = 0)$ ", " $d = 0$ ", " d – число", " k – число". В данном наборе выбирается равенство x_{22} для неизвестной d . Затем формируется импликация с антецедентами, полученными добавлением к списку x_{11} терма x_{22} . Консеквент ее такой же, как у исходной теоремы. После обработки импликации оператором "нормтеорема" получаем требуемый результат.

2. Попытка ввести дополнительное ограничение на переменную для ее исключения из заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCabfghk}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ g = (A, f, h) \ \& \ \text{коорд}(B, g) = (a, 0) \ \& \ \text{коорд}(C, g) = (b, k) \ \& \ 0 < a \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(g) \rightarrow 0 < b \leftrightarrow 0 < -\angle(BAC) + \pi/2)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCc fghjk}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ g = (A, f, h) \ \& \ \text{коорд}(B, g) = (c, 0) \ \& \ \text{коорд}(C, g) = (j, k) \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(g) \rightarrow 0 < cj \leftrightarrow 0 < -\angle(BAC) + \pi/2)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(0 < a \ \& \ a\text{-число} \ \& \ b\text{-число} \rightarrow 0 < b \leftrightarrow 0 < ab)$$

Переменной x11 присваивается заменяемый терм $(0 < cj)$. Проверяется, что он неповторный, что его корневое отношение x12 отлично от равенства и имеет арность 2. Проверяется также, что один из корневых операндов - логический символ либо переменная, а другой - двуместная операция x15 от переменных. В базе теорем находится раздел, к которому относится символ x12 (в нашем случае - раздел "неравенства"). Просматриваются все теоремы этого раздела. Отбираются такие дополнительные теоремы x20, которые имеют характеристику "общнорм(N)". В нашем случае дополнительная теорема указана выше. Переменной x24 присваивается ее заменяемый терм. Проверяется, что он неповторный, что его заголовок - x12 и что символ x15 входит в этот терм. Проверяется, что один из корневых операндов выражения x24 - логический символ либо переменная, а другой - операция x15 от переменных. Проверяется, что заменяющий терм x27 дополнительной теоремы - двуместное отношение, операнды которого - логические символы либо переменные. Проверяется, что параметры терма x27 - собственное подмножество параметров терма x24. Далее процедура "тождвывод" реализует вывод следствия x30, получаемого преобразованием заменяемой части исходной теоремы при помощи дополнительной теоремы. Окончательный результат выдается после обработки утверждения x30 оператором "нормтеорема".

3.12 Характеристика "вспомпараметр"

Характеристикой "вспомпараметр(x1)" снабжаются тождества, исключаящие вспомогательные параметры в задаче на преобразование, имеющей цель "класс". x1 - направление замены.

1. Обобщение тождества путем домножения всех членов корневой ассоциативно-коммутативной операции на дополнительный параметр.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABKabc p q}(A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (p, q) \ \& \ c\text{-число} \rightarrow cl(AB)^2 = c(a - p)^2 + c(b - q)^2)$$

из теоремы

$$\forall_{ABK} \forall_{abpq} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (p, q) \rightarrow l(AB)^2 = (a - p)^2 + (b - q)^2)$$

Заметим, что характеристика "вспомпараметр" в обоих случаях указывает на замену справа налево.

Прежде всего, проверяется, что теорема пока не обобщена. Переменной x10 присваивается заменяемый терм теоремы, переменной x11 - его заголовок (в нашем случае - "плюс"). Справочник "стандформа" определяет название x12 нормализатора стандартной формы для ее корневой операции x11. В нашем случае - "стандплюс". Справочник "станддн" определяет по названию стандартной формы пару (f, g) , где f - корневая ассоциативно-коммутативная операция стандартной формы, g - ее внутренняя ассоциативно-коммутативная операция. Переменной x14 присваивается операция g (в нашем случае - "умножение"). Проверяется, что операция x14 имеет единицу. Находится набор x16 корневых операндов заменяемого терма. Проверяется, что они не имеют общим "множителем" (в смысле операции x14) какую-либо переменную, входящую в каждый из них лишь однократно. Выбирается переменная x19, не входящая в исходную теорему (в нашем случае - c). Переменной x21 присваивается набор результатов "домножения" на x19 термов набора x16, обработанных нормализатором общей стандартизации для x14. Если в термах набора x21 переменная x19 встречается только как операнд коммутативных операций с одним и тем же заголовком, причем эти коммутативные операции уже имели общую неповторную переменную, отличную от x19, то вывод отменяется. Иначе переменной x22 присваивается результат "домножения" на x19 всех x11 - членов заменяющего терма, обработанных нормализатором общей стандартизации. Переменной x23 присваивается равенство "суммы" выражений x22 "сумме" выражений x21. В нашем случае это $cl(AB)^2 = c(a - p)^2 + c(b - q)^2$. Затем формируется результирующая импликация с консеквентом x23. Ее антецеденты получены добавлением к антецедентам исходной теоремы содержащих переменную x19 утверждений из о.д.з. для x23. Исходная теорема исключается из активной части списка вывода. В блоке вывода помечается, что она была обобщена.

2. Обращение в единицу операнда двуместной операции над параметрами координат.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{Bdefgp} (g = (d, e, f) \ \& \ \text{коорд}(B, g) = (p, 0) \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(g) \rightarrow l(dB)^2 = p^2)$$

из теоремы

$$\forall_{Bcdefgp} (g = (d, e, f) \ \& \ \text{коорд}(B, g) = (p, q) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(g) \rightarrow cl(dB)^2 = cp^2 + cq^2)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм теоремы (т.е. $cp^2 + cq^2$), переменной x11 - набор ее антецедентов. В x10 находится вхождение x12 двуместной операции x13, имеющей единицу e для своего операнда x15. Переменной x16 присваивается подтерм по вхождению x15. В нашем случае x13 - "плюс", x16 - cq^2 , $e = 0$. Переменной x17 присваивается список всех параметров терма x16,

входящих в координатные наборы, задаваемые равенствами из антецедентов. Проверяется, что он одноэлементный, и его элемент присваивается переменной x18. В нашем случае это q . Решается задача на описание с единственной посылкой "истина" и условием " $cq^2 = 0$ ". Получается ответ " $(\neg(c = 0) \& q = 0 \vee c = 0) \& c - \text{число} \& q - \text{число}$ ". Он преобразуется к виду д.н.ф. и выбирается дизъюнктивный член " $\neg(c = 0) \& q = 0 \& c - \text{число} \& q - \text{число}$ ", содержащий равенство для q . Создается импликация, антецеденты которой получаются из антецедентов исходной теоремы добавлением указанного равенства, а консеквент прежний. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

3. Варьирование антецедента, имеющего вид равенства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall Bcdefgp(g = (d, e, f) \& \text{коорд}(B, g) = (p, q) \& c - \text{число} \& B - \text{точка} \& \text{прямокоорд}(g) \rightarrow cl(dB)^2 = cp^2 + cq^2)$$

из теоремы

$$\forall ABKabcprq(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& \text{прямокоорд}(K) \& \text{коорд}(A, K) = (a, b) \& \text{коорд}(B, K) = (p, q) \& c - \text{число} \rightarrow cl(AB)^2 = c(a - p)^2 + c(b - q)^2)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall AVCK(\text{систкоорд}(K) \& K = (A, B, C) \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (0, 0))$$

Среди антецедентов исходной теоремы выбирается равенство x9, не имеющее невырожденных числовых атомов. В нашем случае это " $\text{коорд}(A, K) = (a, b)$ ". Проверяется, что данным равенстве имеется единственный подтерм наибольшей сложности. В нашем случае это " $\text{коорд}(A, K)$ ". Переменной x11 присваивается заголовок подтерма. При помощи справочника "раздел" определяется раздел x12, к которому относится символ x11. В нашем случае - "системыкоординат". Просматриваются теоремы x16 этого раздела, имеющие характеристику "Равно". В нашем случае - см. приведенную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается консеквент " $\text{коорд}(A, K) = (0, 0)$ " дополнительной теоремы. Проверяется, что он содержит символ x11 и является элементарным утверждением. Проверяется, что среди антецедентов теоремы x16 нет равенства, в левой части которого расположена координата объекта. Проверяется также отсутствие невырожденных числовых атомов в терме x18. К вхождению антецедента x9 исходной теоремы и теореме x16 применяется процедура "выводпосылки", унифицирующая данный антецедент с консеквентом теоремы x16, заменяющая его на антецеденты теоремы x16 и применяющая к результату унифицирующую подстановку. Полученная импликация x21 обрабатывается оператором "нормтеорема".

3.13 Характеристика "вывод"

Характеристикой "вывод" снабжаются простые импликации, у которых каждое выражение консеквента встречается в антецедентах и которая может представлять интерес для создания приема вывода. Последнее уточняется в процессе обучения характеристизатора.

Логические следствия теоремы

1. Контрапозиция для получения импликации, используемой в проверочном операторе.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ d \subseteq e \ \& \ \neg(a \subseteq e) \rightarrow \neg(a \subseteq d))$$

из теоремы

$$\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ a \subseteq d \ \& \ d \subseteq e \rightarrow a \subseteq e)$$

Выбирается антецедент x10 исходной теоремы. В нашем случае - " $a \subseteq d$ ". При помощи справочника "легковидеть" устанавливается наличие проверочного оператора, обрабатывающего отрицание утверждения x10. В нашем случае выдается заголовок оператора "усмнесодержится". Затем выводится импликация, получаемая пересечением отрицания консеквента в антецеденты, а отрицания антецедента x10 - в консеквент.

2. Контрапозиция для существенного отрицания равенства переменных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDab}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(\text{прямая}(ab) = \text{прямая}(CD)) \ \& \\ A \in \text{прямая}(ab) \ \& \ A \in \text{прямая}(CD) \ \& \ B \in \text{прямая}(ab) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD) \ \& \\ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow A = B)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDab}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ A \in \text{прямая}(ab) \ \& \ A \in \text{прямая}(CD) \\ \& \ B \in \text{прямая}(ab) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \\ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(CD) = \text{прямая}(ab))$$

Проверяется, что консеквент теоремы - элементарное утверждение. Выбирается существенный (т.е. не являющийся необходимым для сопровождения по о.д.з.) антецедент x13, представляющий собой отрицание равенства. Проверяется, что части равенства - различные переменные. В нашем случае x13 - " $\neg(A = B)$ ". Рассматривается список x16 утверждений, полученных заменой антецедента x13 на отрицание консеквента и добавлением отрицания x13. Проверяется, что задача на исследование с посылками x16 не усматривает противоречия. Тогда создается импликация, антецеденты которой получены из антецедентов исходной теоремы заменой x13 отрицанием консеквента, а консеквент - отрицание утверждения x13. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

3. Переход от вывода включения к выводу принадлежности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ACabcd}(\neg(b = c) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(d \in \text{прямая}(bc)) \ \& \ A \in \text{плоскость}(bcd) \ \& \\ C \in \text{плоскость}(bcd) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ a \in \text{прямая}(AC) \rightarrow \\ a \in \text{плоскость}(bcd))$$

из теоремы

$$\forall_{ACbcd}(\neg(b = c) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(d \in \text{прямая}(bc)) \ \& \ A \in \text{плоскость}(bcd) \ \& \\ C \in \text{плоскость}(bcd) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(AC) \subseteq \\ \text{плоскость}(bcd))$$

Проверяется, что консеквент теоремы имеет вид включения $P \subseteq Q$, причем каждое из выражений P, Q - неоднобуквенное стандартное обозначение объектов некоторого типа (например, "прямая(...)", "плоскость(...)" и т.п.). После этого выбирается новая переменная x , к антецедентам добавляется утверждение $x \in P$, а консеквент заменяется на $x \in Q$.

4. Если консеквент - равенство двух переменных, то усматривается его эквивалентность некоторому антецеденту.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{fxy}(x \in \text{Dom}(f) \ \& \ y \in \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \\ f(x) = f(y) \leftrightarrow x = y)$$

из теоремы

$$\forall_{fxy}(f(x) = f(y) \ \& \ x \in \text{Dom}(f) \ \& \ y \in \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \\ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow x = y)$$

Проверяется, что консеквент имеет вид равенства двух переменных. Усматривается, что некоторый антецедент, имеющий вид равенства, после подстановки в него одной из переменных вместо другой и простейшей стандартизации, превращается в равенство одинаковых выражений. В нашем случае это антецедент " $f(x) = f(y)$ ". После этого выписывается импликация, в которой данный антецедент пропущен, а консеквент - эквивалентность этого антецедента исходному консеквенту.

Специальная стандартизация импликации

1. Группировка в левых частях всех ненулевых членов (ослабленное редуцирование).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(0 < c - e \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e - d \rightarrow 0 < c - d)$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(e < c \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \leq e \rightarrow d < c)$$

Просматриваются всевозможные вхождения в теорему двуместных предикатных символов P . Переменной x_{12} присваивается символ P , однако в случае равенства ей переприсваивается тип операндов данного равенства. Справочник "перегруппировка" находит по x_{12} тройку (A, B, C) , такую, что возможна перегруппировка A - членов отношения P из одной части в другую с изменением знака B . При этом C - единица операции A . Если оба операнда отношения C отличны от C , то предпринимается перегруппировка всех членов в левую часть отношения, а в правой части помещается C . Исключение составляют случаи, когда обе части отношения P имеют заголовок A , причем в каждой из них одним из операндов служит неповторная переменная.

2. Группировка в левых частях всех ненулевых членов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ade}(0 < d - a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d + e \leq 0 \rightarrow a + e < 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ade}(a < d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \leq e \rightarrow a < e)$$

Вначале выполняются те же действия, что и в предыдущем приеме. В результате получается теорема

$$\forall_{ade}(a - d < 0 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d - e \leq 0 \rightarrow a - e < 0)$$

Чтобы исключить минус в консеквенте, эта теорема обрабатывается операторами "исключотр", "Полныепосылки" и "нормтеорема".

3. Группировка в левых частях всех ненулевых членов (усиленное редуцирование).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ade}(0 < a + d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e - d \rightarrow 0 < a + e)$$

из теоремы

$$\forall_{ade}(a < d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \leq e \rightarrow a < e)$$

Вначале выполняются те же действия, что в первом приеме (случай ослабленного редуцирования). Получается теорема

$$\forall_{ade}(a - d < 0 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d - e \leq 0 \rightarrow a - e < 0)$$

После обработки оператором "нормтеорема" она приобретает следующий вид:

$$\forall_{ade}(0 < d - a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e - d \rightarrow 0 < e - a)$$

Чтобы исключить "минус" в консеквенте, далее последовательно применяются операторы "исключотр", "Полныепосылки" и "нормтеорема".

Реализация антецедентов

1. Попытка реализации антецедента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(ab|c \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ c - \text{целое} \rightarrow b|c)$$

из теоремы

$$\forall_{cmn}(m|n \ \& \ n|c \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|c)$$

и теоремы

$$\forall_{km}(k - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \rightarrow m|km)$$

Рассматривается вхождение x_{12} существенного антецедента исходной теоремы. В нашем случае - антецедента $m|n$. Определяется заголовок x_{14} этого антецедента; при наличии отрицания оно отбрасывается. В нашем случае x_{14} - символ "делит". По данному символу справочник поиска теорем "пример" находит указанную выше дополнительную теорему. Процедура "выводпосылки" использует ее для вывода выбранного антецедента. В результате получается следующая теорема x_{17} :

$$\forall_{abc}(ab|c \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ ab - \text{целое} \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \rightarrow b|c)$$

После обработки ее оператором "Спускоперандов" (в данном примере ничего не изменяющим) набор антецедентов теоремы x_{17} обрабатывается оператором "нормантецеденты". В результате получается список x_{21} утверждений " $ab|c$ ", " c -целое", " a -целое", " b -целое". Операнды консеквента теоремы x_{17} обрабатываются нормализаторами общей стандартизации (в нашем случае ничего не изменяющими). Проверяется, что полученное утверждение x_{19} (в нашем случае - $b|c$) не усматривается проверочным оператором из утверждений x_{21} . При этом основанные на теоремах текущей ячейки вывода приемы блокируются. Затем создается результирующая импликация с антецедентами x_{21} и консеквентом x_{19} .

2. Попытка отождествления точек для исключения обобщенного антецедента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{BCD}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(CD) \rightarrow \text{прямая}(BC) = \text{прямая}(CD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD)) \rightarrow \text{непересек}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD)))$$

Проверяется, что кванторная приставка теоремы имеет не более пяти переменных. Находятся два антецедента вида "точка(X)", где X - переменная. В нашем случае это "точка(A)" и "точка(C)". Проверяется отсутствие антецедента - отрицания равенства этих точек. Составляется список x_{14} "обобщенных антецедентов", т.е. антецедентов исходной теоремы и отрицания ее консеквента. В списке x_{14} переменная A повсюду заменена на C . Этот список обрабатывается процедурой "нормантецеденты". Проверяется, что результат x_{15} короче исходного списка x_{14} . В нашем случае x_{15} - список " B - точка", " C - точка", " D - точка", " $\neg(C = D)$ ", " $\neg(B = C)$ ", " $\text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(CD)$ ", " $\neg(\text{прямая}(BC) = \text{прямая}(CD))$ ". Далее создается импликация, антецедентами которой служат все утверждения списка x_{15} , кроме последнего, а консеквентом - отрицание последнего. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Варьирование антецедентов

1. Использование определения для устранения многоместного предиката в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(D \in \text{прямая}(BC)) \ \& \ l(AB) = l(BC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{прямая}(AD) \parallel \text{прямая}(BC) \rightarrow \text{ромб}(ABCD))$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(l(ab) = l(bc) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(cd) \ \& \ \text{прямая}(ad) \parallel \text{прямая}(bc) \ \& \ \text{четырёхугольник}(abcd) \rightarrow \text{ромб}(abcd))$$

и теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{четырёхугольник}(ABCD) \leftrightarrow \neg(B = C) \ \& \ \neg(A \in \text{прямая}(BC)) \ \& \ \neg(D \in \text{прямая}(AB)) \ \& \ \neg(D \in \text{прямая}(BC)) \ \& \ \text{однасторона}(A, D, \text{прямая}(BC)) \ \& \ \text{однасторона}(C, D, \text{прямая}(AB)))$$

Рассматривается антецедент х8, имеющий больше двух корневых операндов. В нашем случае это "четырёхугольник(abcd)". По его заголовку справочник поиска теорем "определение" находит указанную выше дополнительную теорему х10. Анализируется ее консеквент: проверяется, что заменяющая часть не имеет заголовка "или" и что каждый ее конъюнктивный член - элементарное утверждение. Оператор "тождвывод" определяет результат х16 преобразования антецедента х8 с помощью дополнительной теоремы. Этот результат имеет следующий вид:

$$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(BC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{прямая}(AD) \parallel \text{прямая}(BC) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A \in \text{прямая}(BC)) \ \& \ \neg(D \in \text{прямая}(AB)) \ \& \ \neg(D \in \text{прямая}(BC)) \ \& \ \text{однасторона}(A, D, \text{прямая}(BC)) \ \& \ \text{однасторона}(C, D, \text{прямая}(AB)) \rightarrow \text{ромб}(ABCD))$$

После применения к х16 оператора "нормтеорема" и последующего применения оператора "сокращаент", удаляющего антецеденты, являющиеся следствиями других антецедентов, получается требуемая теорема.

Переход к стандартному обозначению варьируемой переменной по ее типу

1. Однозначное определение одной из переменных связывающей приставки по другим ее переменным.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ACD}(\neg(A = C) \ \& \ A \in D \ \& \ C \in D \ \& \ \text{Плоскость}(D) \rightarrow \text{прямая}(AC) \subseteq D)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A \in B \ \& \ C \in B \ \& \ \text{Прямая}(B) \ \& \ \text{Плоскость}(D) \ \& \ A \in D \ \& \ C \in D \ \& \ \neg(A = C) \rightarrow B \subseteq D)$$

Создается задача на исследование, посылками которой служат все антецеденты теоремы. Единственная цель (неизвестные ...) указывает в качестве неизвестных все свободные переменные антецедентов. Эта задача решается с максимальным уровнем 5. После этого в ее списке посылок обнаруживается равенство x11, в одной части которого расположена переменная x14, а в другой - выражение x15, не содержащее x14. В нашем случае это равенство имеет вид " $B = \text{прямая}(AC)$ ". Проверяется, что все свободные переменные равенства x11 встречаются в антецедентах исходной теоремы. Находится список x17 результатов подстановки в антецеденты выражения x15 вместо переменной x14. В нашем случае получается " $A \in \text{прямая}(AC)$ ", " $C \in \text{прямая}(AC)$ ", " $\text{Прямая}(\text{прямая}(AC))$ ", " $\text{Плоскость}(D)$ ", " $A \in D$ ", " $C \in D$ ", " $\neg(A = C)$ ". Определяется результат x18 такой же подстановки в консеквент. Получается " $\text{прямая}(AC) \subseteq D$ ". Наконец, к импликации с антецедентами x17 и консеквентом x18 применяется оператор "нормтеорема".

2. Использование стандартного обозначения для объектов специального типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ACbcd}(\neg(b = c) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(d \in \text{прямая}(bc)) \ \& \ A \in \text{плоскость}(bcd) \ \& \ C \in \text{плоскость}(bcd) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(AC) \subseteq \text{плоскость}(bcd))$$

из теоремы

$$\forall_{ACD}(\neg(A = C) \ \& \ A \in D \ \& \ C \in D \ \& \ \text{Плоскость}(D) \rightarrow \text{прямая}(AC) \subseteq D)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_A(\text{Плоскость}(A) \leftrightarrow \exists_{BCD}(B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(D \in \text{прямая}(BC)) \ \& \ A = \text{плоскость}(BCD)))$$

Среди антецедентов теоремы находится утверждение x10 длины 2. Его заголовок - символ x11, операнд - переменная x12. В нашем случае берется антецедент " $\text{Плоскость}(D)$ ". Справочник поиска теорем "обознач" находит по символу " Плоскость " указанную выше дополнительную теорему x13. Проверяется, что она не имеет антецедентов. Определяется результат x15 переобозначения переменных теоремы x13 на новые переменные, не входящие в исходную теорему. Он имеет следующий вид:

$$\forall_a(\text{Плоскость}(a) \leftrightarrow \exists_{bcd}(b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(d \in \text{прямая}(bc)) \ \& \ a = \text{плоскость}(bcd)))$$

Переменной x17 присваивается первый операнд левой части консеквента теоремы x15; в нашем случае это переменная a . Переменной x18 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования в консеквенте. Среди них находится равенство x19 с переменной x17 в левой части, т.е. " $a = \text{плоскость}(bcd)$ ". Переменной x21 присваивается объединение множества результатов подстановки в отличные от x10 антецеденты исходной теоремы правой части равенства x19 вместо переменной x12, с множеством отличных от x19 элементов списка x18. В нашем случае x21 состоит из следующих утверждений: " $\neg(A = C)$ ", " $A \in \text{плоскость}(bcd)$ ", " $C \in \text{плоскость}(bcd)$ ",

" b – точка", " c – точка", " d – точка", " $\neg(b = c)$ ", " $\neg(d \in \text{прямая}(bc))$ ". Переменной x_{22} присваивается результат применения подстановки в консеквент исходной теоремы правой части равенства x_{19} вместо переменной x_{12} . Он имеет вид " $\text{прямая}(AC) \subseteq \text{плоскость}(bcd)$ ". Наконец, создается импликация с антецедентами x_{21} и консеквентом x_{22} , которая обрабатывается оператором "норм-теорема".

Преобразование импликации с помощью вспомогательной задачи

1. Попытка получить квантор существования при расшифровке отрицания консеквента, с последующей контрапозицией для антецедента, имеющего вид отрицания.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDa}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \ \& \ a \in \text{прямая}(AB) \ \& \ a \in \text{прямая}(CD) \rightarrow \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD)) \rightarrow \text{непересек}(\text{прямая}(AB), \text{прямая}(CD)))$$

Переменной x_{11} присваивается список всех существенных антецедентов теоремы. В нашем случае он состоит из утверждений " $\text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD)$ " и " $\neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD))$ ". Переменной x_{12} присваивается то из них, которое начинается с отрицания. Проверяется, что других начинающихся с отрицания утверждений в списке x_{11} нет. Решается задача на описание, посылками которой служат все антецеденты теоремы, а единственным условием - отрицание консеквента. Она имеет цели "редакция" и "развертка", т.е. ориентирована на расшифровку по определениям. Проверяется, что ответ x_{14} имеет своим заголовком квантор существования. В нашем случае это утверждение " $\exists_a(a \in \text{прямая}(AB) \ \& \ a \in \text{прямая}(CD))$ ". Переменной x_{15} присваивается результат замены в списке антецедентов исходной теоремы утверждения x_{12} на набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения в x_{14} . Определяется результат x_{16} обработки списка x_{15} процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{12} . В нашем случае она не изменяет списка x_{15} . В качестве результата выдается импликация с антецедентами x_{16} и консеквентом - отрицанием утверждения x_{12} .

2. Попытка расшифровки антецедентов для исключения сложных понятий.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ l(AD) = l(CD) \ \& \ l(BD) = l(CD) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{окружность}(DA) \text{ описана около фигуры}(ABC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \neg(B = C) \& \neg(D = E) \& A \in \text{окружность}(DE) \& B \in \text{окружность}(DE) \& C \in \text{окружность}(DE) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \rightarrow \text{окружность}(DE) \text{ описана около фигура}(ABC))$$

Проверяется, что консеквент теоремы не имеет заголовка "равно" либо "не". Определяется набор x11 корневых операндов консеквента. В нашем случае - "окружность(DE)" и "фигура(ABC)". Проверяется, что оценка сложности этих операндов такая же, как оценка сложности антецедентов. Предпринимается обращение к задаче на описание, условиями которой служат антецеденты теоремы, а единственной посылкой - константа "истина". Целями задачи служат символы "явное", "редакция", "развертка", "полный", "прямойответ". При решении этой задачи происходит расшифровка антецедентов по определениям. Результатом служит конъюнкция

$$\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \neg(B = C) \& \neg(D = E) \& l(BD) = l(AD) \& l(CD) = l(AD) \& l(DE) = l(AD) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка}.$$

Проверяется, что оценка сложности этой конъюнкции меньше, чем у исходного списка антецедентов. Предпринимается обработка оператором "Нормтеорема" импликации, антецеденты которой - конъюнктивные члены x14, а консеквент тот же, что у исходной теоремы. Вспомогательной задаче на упрощение теоремы, создаваемой этим оператором, передается комментарий "новыйсимвол". Это позволяет перейти к обозначению окружности, в котором исключена избыточная переменная E .

Склейка двух теорем

1. Склейка двух импликаций, отличающихся альтернативными антецедентами.

Две импликации отличаются только группами антецедентов, дизъюнкция которых тождественно истинна. Они объединяются в одну импликацию, получаемую из исходных отбрасыванием указанных антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABabc}(\neg(a = b) \& \neg(a = c) \& \neg(b = c) \& \neg(A = B) \& a \in \text{окружность}(AB) \& b \in \text{окружность}(AB) \& c \in \text{окружность}(AB) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(ac) \rightarrow A \in \text{отрезок}(bc))$$

из теоремы

$$\forall_{ABabc}(\neg(a = b) \& \neg(a = c) \& \neg(b = c) \& \neg(A = B) \& a \in \text{окружность}(AB) \& b \in \text{окружность}(AB) \& c \in \text{окружность}(AB) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(ac) \& \text{разныестороны}(a, A, \text{прямая}(bc)) \rightarrow A \in \text{отрезок}(bc))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABabc}(\neg(a = b) \& \neg(a = c) \& \neg(b = c) \& \neg(A = B) \& a \in \text{окружность}(AB) \& b \in \text{окружность}(AB) \& c \in \text{окружность}(AB) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c -$$

точка & A – точка & B – точка & прямая(ab) \perp прямая(ac) & однасторона(a, A , прямая(bc)) $\rightarrow A \in$ отрезок(bc)

Переменной x_9 присваивается консеквент, переменной x_{10} - список антецедентов исходной теоремы. В списке вывода рассматривается дополнительная теорема x_{12} , отличная от исходной теоремы. Переменной x_{14} присваивается список антецедентов теоремы x_{12} , переменной x_{15} - ее консеквент. Проверяется, что длины наборов x_{10} и x_{14} , а также термов x_9 и x_{15} равны. Проверяется совпадение длин связывающих приставок обеих теорем. В наборе антецедентов x_{14} находится утверждение x_{18} , заголовок которого не встречается среди заголовков утверждений списка x_{10} . Обратно, в списке x_{10} выбирается утверждение, заголовок которого не встречается среди заголовков утверждений списка x_{14} . В нашем случае x_{18} - "однасторона(a, A , прямая(bc))", x_{19} - "разныестороны(a, A , прямая(bc))". Переменной x_{20} присваивается остаток набора x_{10} после удаления утверждения x_{19} , переменной x_{21} - непустой остаток набора x_{14} после удаления утверждения x_{18} . Переменной x_{22} присваивается список свободных переменных термов x_{20} . Проверяется, что эти термы не имеют связанных переменных и что все свободные переменные терма x_{19} содержатся в списке x_{22} . Процедура "идентификация" определяет набор термов x_{23} , подстановка которых вместо переменных x_{22} переводит конъюнкцию утверждений x_{20} в конъюнкцию утверждений x_{21} . Находится результат x_{24} подстановки термов x_{23} вместо переменных x_{22} в утверждение x_{19} , после чего создается дизъюнкция x_{25} утверждений x_{24} и x_{18} . Определяется результат x_{26} применения такой же подстановки к терму x_9 . Усматривается, что термы x_{15} и x_{26} совпадают, с точностью до перестановки операндов в коммутативных операциях и симметричных отношениях. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x_{25} - следствие утверждений x_{21} . После этого выдается результат - импликация с антецедентами x_{20} и консеквентом x_9 . Склеенные теоремы помечаются в своих блоках вывода элементами "исключение".

Замена переменных в теореме

1. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abe}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Вектор}(e) \ \& \ \text{однонаправлены}(a, b) \ \& \ \text{однонаправлены}(b, e) \ \rightarrow \ \text{однонаправлены}(a, e))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDcd}(c \text{ – точка} \ \& \ d \text{ – точка} \ \& \ A \text{ – точка} \ \& \ B \text{ – точка} \ \& \ C \text{ – точка} \ \& \ D \text{ – точка} \ \& \ \text{однонаправлены}(\text{вектор}(cd), \ \text{вектор}(CD)) \ \& \ \text{однонаправлены}(\text{вектор}(AB), \ \text{вектор}(CD)) \ \rightarrow \ \text{однонаправлены}(\text{вектор}(cd), \ \text{вектор}(AB)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A \text{ – точка} \ \& \ B \text{ – точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$$

После проверки того, что консеквент x_9 - элементарное утверждение, в нем выбирается атомарное подвыражение x_{11} . В нашем случае это "вектор(cd)". Определяется тип x_{14} данного выражения (в нашем случае - "Вектор") и составляется список x_{15} всех входящих в теорему атомарных подвыражений того же типа. В нашем случае - "вектор(cd)", "вектор(CD)", "вектор(AB)". Переменной x_{16} присваивается список c, d, A, B, C, D всех свободных переменных термов списка x_{15} . Составляется список x_{18} всех существенных посылок теоремы, содержащих переменные списка x_{16} . В нашем случае - "однонаправлены(вектор(cd), вектор(CD))" и "однонаправлены(вектор(AB), вектор(CD))". Проверяется, что переменные списка x_{16} входят в утверждения списка x_{18} и в консеквент теоремы только внутри атомарных выражений списка x_{15} . Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по символу x_{14} указанную выше дополнительную теорему x_{19} . Переменной x_{23} присваивается набор конъюнктивных членов под квантором существования в консеквенте теоремы x_{19} , т.е. " A - точка", " B - точка", " $a =$ вектор(AB)". Переменной x_{24} присваивается корневой операнд левой части консеквента, т.е. a . В списке x_{23} выбирается равенство x_{25} для переменной a . Проверяется, что заголовок правой части - тот же, что у x_{11} . Для обозначения атомарных выражений списка x_{15} выбираются новые переменные a, b, e . Составляется список x_{27} результатов замены этих выражений в утверждениях x_{18} и в консеквенте на обозначающие их переменные. В нашем случае - "однонаправлены(a, b)", "однонаправлены(e, b)", "однонаправлены(a, e)". Переменной x_{29} присваивается объединение списка всех антецедентов исходной теоремы, параметры которых включаются в параметры x_{28} утверждений x_{27} , с утверждениями, определяющими тип значения новых переменных. В нашем случае - "Вектор(a)", "Вектор(b)", "Вектор(e)". Переменной x_{30} присваивается объединение списка остальных антецедентов исходной теоремы с равенствами обозначаемых атомарных выражений обозначающим их переменным. В нашем случае - " c - точка", " d - точка", " A - точка", " B - точка", " C - точка", " D - точка", "однонаправлены(вектор(cd), вектор(CD))", "однонаправлены(вектор(AB), вектор(CD))", "вектор(cd) = a ", "вектор(CD) = b ", "вектор(AB) = e ". Переменной x_{31} присваивается список параметров утверждений x_{30} , не вошедших в список x_{28} . В нашем случае - c, d, A, B, C, D . Решается задача на описание, посылки которой суть x_{29} , условия - x_{30} , а неизвестные - x_{31} . Все ее неизвестные - несущественные, причем задача имеет цели "полный", "явное", "прямой ответ", "исключ". Получается ответ x_{33} , имеющий вид "однонаправлены(a, b)", "однонаправлены(b, e)". Составляется импликация, антецеденты которой - утверждения x_{29} , конъюнктивные члены ответа x_{33} , а также все утверждения списка x_{27} , кроме последнего. Консеквентом служит последнее утверждение списка x_{27} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема".

Сужение теоремы путем ввода дополнительных антецедентов

1. Добавление антецедента, являющегося связующим звеном с параметром выводимого утверждения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDa}(\neg(a = B) \ \& \ \neg(a = A) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD)) \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ D\text{-точка} \ \& \ \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \ \& \ a \in \text{прямая}(CD) \ \& \ a \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \neg(A = B) \ \rightarrow \ \neg(a \in \text{отрезок}(AB)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDa}(\neg(C = D) \& \neg(A \in \text{прямая}(CD)) \& \neg(B \in \text{прямая}(CD)) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \& a \in \text{прямая}(CD) \rightarrow \neg(a \in \text{отрезок}(AB)))$$

Проверяется, что консеквент х9 имеет вид отрицания. Выбирается переменная х11, входящая в консеквент. В нашем случае это a . Проверяется, что переменная a встречается в единственном антецеденте х13. В нашем случае это " $a \in \text{прямая}(CD)$ ". Проверяется, что других общих переменных данный антецедент и консеквент не имеют. Решается задача на исследование х15, посылки которой суть все антецеденты теоремы и отрицание консеквента. Цели этой задачи - "известно", "следствие", "неизвестные ...", где роль неизвестных играют все параметры посылок. В списке посылок, возникшем после решения, выбирается содержащее х11 утверждение х17, не имеющее заголовка "актив" и не входящее в исходный список посылок. В нашем случае это " $a \in \text{прямая}(AB)$ ". Проверяется, что утверждение х17 имеет хотя бы один параметр консеквента, отличный от х11. Рассматривается список, полученный добавлением к списку антецедентов утверждения х17 и всех утверждений, необходимых для сопровождения х17 по о.д.з. Результат обработки такого списка оператором "нормантецеденты" присваивается переменной х18. Затем формируется результирующая импликация с антецедентами х18 и консеквентом х9.

Использование дополнительной теоремы для варьирования антецедентов

1. Попытка исключения многоместных предикатов в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aefgj}(\neg(e = j) \& \neg(g \in \text{прямая}(ej)) \& e \in \text{отрезок}(ag) \& j \in \text{отрезок}(fg) \& a - \text{точка} \& e - \text{точка} \& f - \text{точка} \& g - \text{точка} \& j - \text{точка} \rightarrow \text{однасторона}(a, f, \text{прямая}(ej)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \neg(A = B) \& \text{разныестороны}(C, E, \text{прямая}(AB)) \& \text{разныестороны}(D, E, \text{прямая}(AB)) \& \neg(E \in \text{прямая}(AB)) \rightarrow \text{однасторона}(C, D, \text{прямая}(AB)))$$

Проверяется наличие у теоремы антецедента, имеющего хотя бы три корневых операнда. В нашем случае - антецедент "разныестороны(...)". Проверяется, что число корневых операндов консеквента тоже не менее трех. Переменной х11 присваивается заголовок консеквента, т.е. символ "однасторона". Проверяется наличие проверочного оператора для усмотрения истинности утверждений с заголовком х11. Далее происходит обращение к процедуре "исклмнож", предпринимающей попытку исключить все более чем двуместные предикаты в антецедентах, используя справочник поиска теорем "множнабор". Результат х12 обрабатывается процедурой "нормтеорема" и выдается как результат.

Опишем работу процедуры "исклмнож" несколько подробнее. Обращение к ней имеет вид "исклмнож(х1 х2)", где х1 - исходная теорема, х2 - выходная переменная, которой присваивается результат преобразования теоремы. В нашем

случае х1 - приведенная выше исходная теорема. Просматриваются antecedentes теоремы, пока не обнаруживается antecedent х3 с более чем двумя корневыми операндами. В нашем случае - "разныестороны(C, E, прямая(AB))". По его заголовку справочник поиска теорем "множнабор" находит дополнительную теорему х5. Она имеет вид:

$$\forall_{ABCDE}(\neg(C = D) \& E \in \text{прямая}(CD) \& E \in \text{отрезок}(AB) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \rightarrow \text{разныестороны}(A, B, \text{прямая}(CD)))$$

Далее реализуется обращение к процедуре "выводпосылки", обрабатывающей выделенный antecedent х3 с помощью теоремы х5. Возникает следующая теорема:

$$\forall_{Dabcde}(c - \text{точка} \& d - \text{точка} \& a - \text{точка} \& D - \text{точка} \& b - \text{точка} \& \neg(c = d) \& \text{разныестороны}(D, b, \text{прямая}(cd)) \& \neg(b \in \text{прямая}(cd)) \& \neg(c = d) \& e \in \text{прямая}(cd) \& e \in \text{отрезок}(ab) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& d - \text{точка} \& e - \text{точка} \rightarrow \text{однасторона}(a, D, \text{прямая}(cd))).$$

Для этой теоремы реализуется рекурсивное обращение к оператору "исклмнож", продолжающему исключение многоместных antecedentов, пока это возможно.

Полученная процедурой "исклмнож" теорема имеет множество избыточных antecedentов. Они удаляются при обращении к оператору "нормтеорема".

2. Попытка сведения равенства двух числовых атомов в antecedentах к другим равенствам.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(a = b) \& \neg(a = c) \& \neg(b = c) \& \neg(b = d) \& \neg(c = d) \& l(ab) = l(bd) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& d - \text{точка} \& \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(ac) \& \text{прямая}(bd) \perp \text{прямая}(cd) \& \text{разныестороны}(d, a, \text{прямая}(bc)) \rightarrow \text{биссектриса}(dcab))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \neg(A = D) \& \angle(BAD) = \angle(CAD) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& 0 \leq -\angle(CAD) + \pi/2 \& \text{разныестороны}(B, C, \text{прямая}(AD)) \rightarrow \text{биссектриса}(BACD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCabc}(\neg(a = b) \& \neg(a = c) \& \neg(b = c) \& \neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \neg(B = C) \& l(ab) = l(AB) \& l(bc) = l(BC) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(ac) \& \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow \angle(ACB) = \angle(acb))$$

Проверяется, что все свободные переменные antecedentов входят в консеквент и что этот консеквент не имеет своим заголовком равенство либо символ неравенства. Проверяется также, что оценка сложности консеквента больше оценки сложности любого antecedenta. Выбирается antecedent х10, представляющий собой равенство двух выражений с одинаковыми заголовками х11. Проверяется,

что он содержит числовой атом с заголовком x11. В нашем случае x10 - равенство " $\angle(BAD) = \angle(CAD)$ ", x11 - символ "угол". Справочник поиска теорем "равнчисл" определяет по символу "угол" указанную выше дополнительную теорему x12. Проверяется, что среди ее антецедентов встречается равенство и что все ее переменные суть свободные переменные консеквента. После этого процедура "выводпосылки" определяет результат x15 замены (после унификации) антецедента x10 на список антецедентов теоремы x12. Чтобы проконтролировать непротиворечивость антецедентов теоремы x15, создается вспомогательная задача на исследование x17. Ее посылки суть все антецеденты теоремы x15. Цели задачи - "известно", "теорема", "контроль", неизвестные - все параметры посылок. После обращения к ее решению проверяется отсутствие константы "ложь" в списке посылок. Для получения окончательного результата теорема x15 обрабатывается оператором "нормтеорема".

3. Попытка варьирования числового атома в антецедентах при помощи дополнительного тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{Cabcde}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(a = e) \ \& \ \neg(a = C) \ \& \ \angle(caC) = \angle(dae) \ \& \ a \in \text{отрезок}(be) \ \& \ a \in \text{отрезок}(cd) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ 0 \leq -\angle(dae) + \pi/2 \ \& \ \text{разныестороны}(b, C, \text{прямая}(cd)) \rightarrow \text{биссектриса}(baCc))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \angle(BAD) = \angle(CAD) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ 0 \leq -\angle(CAD) + \pi/2 \ \& \ \text{разныестороны}(B, C, \text{прямая}(AD)) \rightarrow \text{биссектриса}(BACD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ A \in \text{отрезок}(BE) \ \& \ A \in \text{отрезок}(CD) \rightarrow \angle(BAC) = \angle(DAE))$$

Проверяется, что каждый параметр антецедентов встречается в консеквенте и что консеквент не является равенством либо неравенством. Среди антецедентов встречается единственное равенство x10. В нашем случае это " $\angle(BAD) = \angle(CAD)$ ". В данном равенстве выбирается невырожденный числовой атом x11. Именно, " $\angle(BAD)$ ". Этот атом имеет единственное вхождение x12 в теорему. Справочник поиска теорем "равнчисл" определяет по его заголовку указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что среди ее антецедентов нет равенства. Процедура "тождвывод" определяет результат применения дополнительной теоремы для преобразования вхождения x12. Для получения итоговой теоремы применяется оператор "нормтеорема".

Последовательное применение двух кванторных импликаций

1. Ослабление консеквента для вывода утверждения стандартного вида.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(\neg(a = c) \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \neg(d = e) \ \& \ \neg(\text{прямая}(bc) = \text{прямая}(de)) \ \& \\ b \text{ — точка} \ \& \ c \text{ — точка} \ \& \ d \text{ — точка} \ \& \ e \text{ — точка} \ \& \ \text{однасторона}(b, c, \text{прямая}(de)) \\ \& \ a \in \text{прямая}(de) \ \& \ a \in \text{прямая}(bc) \ \& \ \neg(b = c) \rightarrow \neg(a \in \text{интервал}(bc)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDa}(\neg(a = B) \ \& \ \neg(a = A) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD)) \ \& \\ A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ D \text{ — точка} \ \& \ \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \\ \& \ a \in \text{прямая}(CD) \ \& \ a \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \neg(a \in \text{отрезок}(AB)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ \neg(A \in \text{отрезок}(BC)) \rightarrow \neg(A \in \text{интервал}(BC)))$$

Смысл изменения консеквента заключается в том, что условие размещения точки на луче в посылках задач обычно переформулируется как условие непринадлежности вершины луча интервалу между двумя его точками.

В консеквенте теоремы выбирается символ операции x11 (в нашем случае - "отрезок"). По этому символу справочник поиска теорем "стандмн" определяет указанную выше дополнительную теорему x12. У теоремы x12 находится антецедент x14, содержащий символ x11. В нашем случае - " $\neg(A \in \text{отрезок}(BC))$ ". Процедура "выводпосылки" унифицирует данный антецедент с консеквентом исходной теоремы и выводит следствие x15. Его антецеденты обрабатываются оператором "нормантецеденты", убирающим повторные антецеденты. Затем создается результирующая импликация, консеквент которой - тот же, что у x15.

2. Переход от многоместного отношения в консеквенте к двуместному.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{Eabcde}(E \text{ — точка} \ \& \ \neg(d = e) \ \& \ E \in \text{прямая}(de) \ \& \ E \in \text{прямая}(ab) \ \& \\ \neg(\text{прямая}(ab) = \text{прямая}(de)) \ \& \ a \text{ — точка} \ \& \ b \text{ — точка} \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ c \text{ — точка} \\ \& \ d \text{ — точка} \ \& \ e \text{ — точка} \ \& \ \text{разныестороны}(c, d, \text{прямая}(ab)) \ \& \ \text{однасторона}(c, e, \\ \text{прямая}(ab)) \ \& \ \neg(c \in \text{прямая}(ab)) \rightarrow E \in \text{отрезок}(ed))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ D \text{ — точка} \ \& \\ E \text{ — точка} \ \& \ \text{разныестороны}(C, D, \text{прямая}(AB)) \ \& \ \text{однасторона}(C, E, \\ \text{прямая}(AB)) \ \& \ \neg(C \in \text{прямая}(AB)) \rightarrow \text{разныестороны}(E, D, \text{прямая}(AB)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ D \text{ — точка} \ \& \ E \text{ — точка} \ \& \\ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ E \in \text{прямая}(CD) \ \& \ E \in \text{прямая}(AB) \ \& \\ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD)) \ \& \ \text{разныестороны}(C, D, \text{прямая}(AB)) \rightarrow \\ E \in \text{отрезок}(CD))$$

Проверяется, что число корневых операндов консеквента больше 2. По заголовку x11 этого консеквента справочник поиска теорем "много" находит указанную выше дополнительную теорему x12. У теоремы x12 выбирается антецедент x14

с заголовком x11. В нашем случае - "разныестороны(C, D , прямая(AB))". Процедура "выводпосылки" унифицирует его с консеквентом исходной теоремы и выводит следствие x15, получаемое заменой антецедента x14 на антецеденты текущей теоремы. Предварительно обе теоремы корректируются унифицирующей подстановкой. К набору антецедентов теоремы x15 применяется процедура "нормантецеденты" и создается импликация x17, антецедентами которой служит результат данного обращения, а консеквент - тот же, что у x15.

Обобщение теоремы

1. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde} (\neg(d = e) \ \& \ e \text{ — точка} \ \& \ d \text{ — точка} \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ c \text{ — точка} \ \& \ b \text{ — точка} \ \& \ \neg(\text{прямая}(bc) = \text{прямое}(de)) \ \& \ \text{однасторона}(b, c, \text{прямая}(de)) \ \& \ a \in \text{прямая}(de) \ \& \ a \in \text{прямая}(bc) \rightarrow \neg(a \in \text{интервал}(bc)))$$

из теоремы

$$\forall_{abcde} (\neg(d = e) \ \& \ e \text{ — точка} \ \& \ d \text{ — точка} \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ c \text{ — точка} \ \& \ b \text{ — точка} \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \neg(\text{прямая}(bc) = \text{прямое}(de)) \ \& \ \text{однасторона}(b, c, \text{прямая}(de)) \ \& \ a \in \text{прямая}(de) \ \& \ a \in \text{прямая}(bc) \rightarrow \neg(a \in \text{интервал}(bc)))$$

Среди антецедентов теоремы выбирается утверждение x10 вида " $\neg(x = t)$ ", где x - переменная, не встречающаяся в выражении t . Проверяется, что данное утверждение не является сопровождающим по о.д.з. для консеквента либо других антецедентов. Создается список x17, полученный из набора антецедентов теоремы заменой утверждения x10 на равенство $x = t$ и добавлением всех необходимых для сопровождения по о.д.з. отличных от x10 утверждений. Предпринимается попытка доказать, что консеквент теоремы является следствием утверждений x17. После этого создается результирующая теорема, полученная из исходной отбрасыванием антецедента x10 и добавлением утверждений, недостающих для сопровождения по о.д.з. остальных антецедентов.

2. Отбрасывание антецедента, если для его отрицания уже была выведена аналогичная импликация.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde} (\neg(d = e) \ \& \ \neg(b \in \text{прямая}(de)) \ \& \ a \text{ — точка} \ \& \ b \text{ — точка} \ \& \ c \text{ — точка} \ \& \ d \text{ — точка} \ \& \ e \text{ — точка} \ \& \ \text{однасторона}(a, b, \text{прямая}(de)) \ \& \ \text{однасторона}(b, c, \text{прямая}(de)) \rightarrow \text{однасторона}(a, c, \text{прямая}(de)))$$

из теоремы

$$\forall_{abcde} (\neg(d = e) \ \& \ \neg(b \in \text{прямая}(de)) \ \& \ \neg(c \in \text{прямая}(de)) \ \& \ a \text{ — точка} \ \& \ b \text{ — точка} \ \& \ c \text{ — точка} \ \& \ d \text{ — точка} \ \& \ e \text{ — точка} \ \& \ \text{однасторона}(a, b, \text{прямая}(de)) \ \& \ \text{однасторона}(b, c, \text{прямая}(de)) \rightarrow \text{однасторона}(a, c, \text{прямая}(de)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(C = D) \& A \in \text{прямая}(CD) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)))$$

В списке вывода находится отличная от исходной теоремы дополнительная теорема x11, имеющая характеристику "вывод". Проверяется, что все переменные теоремы x11 встречаются в ее консеквенте x13. Переменной x14 присваивается список свободных переменных термина x13, и определяется набор выражений x15, подстановка которых вместо x14 в x13 дает (с точностью до допустимых перестановок операндов; в нашем случае это относится к первым двум операндам консеквента) консеквент x9 исходной теоремы. Определяется набор x16 применения оператора "станд" к результатам подстановки x15 вместо x14 в антецеденты теоремы x11. Определяется также набор x17 результатов применения оператора "станд" к антецедентам исходной теоремы. Напомним, что оператор "станд" упорядочивает операнды коммутативных операций некоторым стандартным образом. Проверяется, что разность списков x16 и x17 состоит из единственного утверждения x19. В нашем случае это " $c \in \text{прямая}(de)$ ". Проверяется, что отрицание x20 утверждения x19 входит в список x17. После этого создается результат, получаемый из исходной теоремы отбрасыванием ее антецедента x20.

3.14 Характеристика "Выч"

Характеристикой "Выч(x1 x2 x3)" снабжаются тождества, позволяющие выделить константный подтерм x1, для которого существует специальный упрощающий оператор x2. x3 - направление замены.

Обобщение теоремы

1. Обобщение тождества выделения константного подвыражения для обработки специальным упрощающим оператором путем домножения обеих частей на новую переменную и перемещения ее внутрь заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdef}(\neg(d = 0) \& \neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \& c - \text{число} \& d - \text{число} \& e - \text{число} \& f - \text{rational} \rightarrow e(c/d)^f = ec^f/d^f)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& c - \text{rational} \& \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \& \neg(b = 0) \rightarrow (a/b)^c = a^c/b^c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(\neg(b = 0) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& e - \text{число} \rightarrow e \cdot (a/b) = (ae)/b)$$

Заметим, что исходная теорема имела характеристику "Выч(a/b сокращдоби первыйтерм)", результирующая - "Выч(c/d сокращдоби первыйтерм)". В обоих случаях группировка численных констант позволяет предпринять попытку сокращения численной дроби.

Рассматривается заменяемый терм x_{10} исходной теоремы, и по его заголовку x_{11} справочник поиска теорем "перестановки" находит указанную выше дополнительную теорему. В нашем случае $x_{10} - a^c/b^c$. Проверяется, что дополнительная теорема имеет характеристику "нормализация(N)". Переменной x_{17} присваивается вхождение в дополнительную теорему заменяемого относительно направления N терма. Проверяется, что он имеет два корневых операнда, один из которых - переменная x_{20} , а другой имеет заголовок x_{11} . В нашем случае x_{20} - переменная e , другой операнд - a/b . Проверяется, что операция x_{21} по вхождению x_{17} имеет единицу по переменной x_{20} . Переменной x_{23} присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. В нашем случае - " ae/b ". Переменной x_{25} присваивается символ операции, являющейся корневым операндом x_{24} терма x_{23} . В нашем случае - "умножение". Проверяется, что либо терм x_{10} имеет единственный корневой операнд, либо операция x_{25} коммутативна и имеет своим операндом переменную x_{20} . Проверяется, что не выполнено ни одно из следующих условий:

- (a) Если корневая операция терма x_{10} коммутативна, то рассматривается произвольный ее операнд x_{26} , иначе - имеющий тот же номер, что операнд x_{24} . В нашем случае x_{26} - вхождение числителя. По этому вхождению расположена переменная, имеющая в x_{10} единственное вхождение и не входящая в характеристику "Выч" текущей теоремы.
- (b) По вхождению x_{26} , указанному в предыдущем пункте, расположена операция x_{25} , имеющая одним из своих операндов переменную, не имеющую других вхождений в x_{10} .

Эта проверка необходима, чтобы убедиться в избыточности вводимого нового параметра. Она предотвращает многократный ввод все новых и новых его версий на одно и то же место теоремы. Далее процедура "тождвывод" определяет результат преобразования исходной теоремой вхождения выражения a/b в консеквент дополнительной теоремы. Возникает теорема x_{26} вида:

$$\forall_{cdef} (\neg(d^f = 0) \ \& \ c^f - \text{число} \ \& \ d^f - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ f - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \ \& \ \neg(d = 0) \rightarrow e(c/d)^f = c^f e/d^f)$$

После обработки ее оператором "нормтеорема" получается указанный выше результат.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Извлечение операции над константными термами и обработка специальным вычислителем.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdf} (\neg(a = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ d = b/c \rightarrow bf/(ac) = fd/a)$$

из теоремы

$$\forall_{abe} (\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \cdot (a/b) = ae/b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ade}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ a\text{-число} \ \& \ d\text{-число} \ \& \ e\text{-число} \ \rightarrow \ d/(ae) = (d/e)/a).$$

Начало действий данного приема дословно совпадает с предыдущим приемом, вплоть до получения его результата x27. Здесь он имеет следующий вид:

$$\forall_{abcf}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ a\text{-число} \ \& \ b\text{-число} \ \& \ c\text{-число} \ \& \ f\text{-число} \ \rightarrow \ f(b/c)/a = bf/(ac))$$

Далее находится заголовок x31 нормализатора общей стандартизации, обрабатывающего выделенное для вычисления подвыражение b/c . В нашем случае это "нормдробь". Вхождение указанного подвыражения в теорему x27 заменяется на новую переменную d , а к ее антецедентам добавляется равенство $d = b/c$. Результат сопровождается характеристиками "константа(второйтерм нормдробь)" и "вычисл(второйтерм)".

3.15 Характеристика "вычпрог"

Характеристикой "вычпрог(x1 x2 x3)" снабжаются тождества либо эквивалентности, которые в случае применения в направлении x1 обеспечивают упрощение относительно констант, использующее вычисления ГЕНОЛОГа. x2 - конъюнкция фильтров, уточняющих контекст стандартизации (в нее включаются указания на типы константных значений переменных), x3 - список подвыражений заменяющего терма, обрабатываемых путем непосредственных вычислений.

Использование тождества типа сокращения для исключения одного из двух исходных сложных константных подвыражений заменяемой части

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(\neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c\text{-число} \ \& \ d\text{-число} \ \& \ e\text{-число} \ \rightarrow \ \log_d(cd^e) = e + \log_d c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a\text{-число} \ \& \ b\text{-число} \ \& \ c\text{-число} \ \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \rightarrow \ \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ae}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ a\text{-число} \ \& \ e\text{-число} \ \rightarrow \ \log_a(a^e) = e)$$

Исходная теорема имеет характеристику "вычпрог(первыйтерм и(десчисло(b) десчисло(c)) умножение(b c))".

Переменной x11 присваивается набор корневых операндов заменяемой части, т.е. выражения " $\log_a b$ ", " $\log_a c$ ". Переменной x12 присваивается заменяющее выражение " $\log_a(bc)$ ". Проверяется, что каждое из перечисленных выражений неповторно и что выражения списка x11 образуют декомпозицию выражения x12 по его переменным. Определяется самый сложный подтерм x14 терма x12; проверяется, что он единственный. В нашем случае x14 совпадает с x12. Проверяется, что оценки сложности заменяемого и заменяющего термов совпадают и что число самых сложных подтермов заменяемого терма равно 2. Проверяется, что каждый из термов набора x11

имеет ровно одно подвыражение максимальной сложности, причем заголовки x14 и указанных подвыражений совпадают. Этот заголовок присваивается переменной x17. В нашем случае x17 - символ "логарифм". Справочник поиска теорем "Сокращение" определяет по символу "логарифм" указанную выше дополнительную теорему x22. Проверяется, что заменяющий терм теоремы x22 - переменная x26 (в нашем случае - e). В заменяемой части исходной теоремы выбирается вхождение логарифма (в нашем случае - первое вхождение), после чего процедура "тождвывод" находит результат преобразования данного вхождения посредством дополнительной теоремы. Получается результат x28 следующего вида:

$$\forall_{cde}(d - \text{число} \ \& \ d^e - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < d \ \& \ \neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < d^e \ \& \ 0 < c \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \log_d(d^e c) = e + \log_d c)$$

После обработки оператором "нормтеорема" возникает следующая теорема x29:

$$\forall_{cde}(\neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \log_d(cd^e) = e + \log_d c)$$

Переменной x31 присваивается заменяющий терм этой теоремы, т.е. " $\log_d(cd^e)$ ". Проверяется, что его сложность совпадает со сложностью заменяемого термина и что самый сложный его подтерм совпадает с ним самим. Проверяется также, что заменяемый подтерм имеет единственное подвыражение максимальной сложности. При помощи процедуры "вычтерм" определяется набор максимальных подвыражений термина x31, допускающих вычисление над константными значениями переменных с помощью нормализаторов общей стандартизации. Переменной x35 присваивается набор пар (подвыражение - тип его константного значения), переменной x36 - набор пар (переменная термина x31 - тип ее константного значения). Проверяется, что для каждого корневого операнда выражения x31, имеющего длину более единицы, в наборе x35 имеется пара для вычисления его значения. Затем формируется характеристика "предвумножение(первыйтерм и(дробнаявеличина(d) целое(e) дробнаявеличина(c)) cd^e)", которой сопровождается найденная теорема x29. Создание других характеристик блокируется. В указанной характеристике первый операнд определяет направление замены, второй - определяется набором x36 и определяет типы константных значений переменных, последний операнд указывает выражение, подлежащее обработке нормализаторами для вычисления константного значения. Напомним, что характеристика "предвумножение(x1 x2 x3)" указывает на тождество, позволяющее свернуть с помощью нормализаторов общей стандартизации константный терм, содержащий единственную сложную операцию, в терм, заголовком которого служит данная операция, а операндами - константы. Здесь x1 - направление замены, x2 - конъюнкция фильтров, уточняющих контекст стандартизации (в нее включаются указания на типы константных значений переменных), x3 - список подвыражений заменяющего термина, обрабатываемых путем вычислений.

3.16 Характеристика "главнчлен"

Характеристикой главнчлен(x1)" снабжаются теоремы, у которых наиболее сложный терм антецедентов - выражение, причем он единственный и имеет единственное вхождение. Глубина этого выражения больше единицы, а оценка сложности больше 4. x1 - заголовок данного выражения.

Использование дополнительной теоремы для варьирования антецедентов

1. Варьирование самого сложного подвыражения антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abce}(e(c) = \inf(\text{образ}(e, (a, b))) \& 0 < b - c \& 0 < c - a \& (a, b) \subseteq \text{Dom}(e) \& \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \& e - \text{функция} \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& \text{дифференцируема}(e, c) \rightarrow \text{производная}(e, c) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abcf}(f - \text{функция} \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& (a, b) \subseteq \text{Dom}(f) \& \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \& 0 < c - a \& 0 < b - c \& f(c) = \sup(\text{образ}(f, (a, b))) \& \text{дифференцируема}(f, c) \rightarrow \text{производная}(f, c) = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{af}(a - \text{set} \& f - \text{функция} \& a \subseteq \text{Dom}(f) \& \text{огрснизу}(\text{образ}(f, a)) \& \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \sup(\text{образ}(\lambda_x(-f(x), x \in \text{Dom}(f)), a)) = -\inf(\text{образ}(f, a)))$$

Характеристика исходной теоремы - "главнчлен(суп)". Определяется вхождение символа "sup" в антецеденты теоремы. Справочник поиска теорем "варьир" находит по этому символу указанную выше дополнительную теорему x9. Процедура "тождвывод" находит результат x14 преобразования вхождения x9 при помощи тождества x10. Процедура "нормтеорема" преобразует его в окончательный результат.

2. Склейка двух теорем списка вывода и реализация дизъюнкции в антецедентах при помощи теоремы существования дизъюнкции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abf}(\forall_c(c \in (a, b) \rightarrow \text{дифференцируема}(f, c)) \& f(a) = f(b) \& a < b \& [a, b] \subseteq \text{Dom}(f) \& \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \& f - \text{функция} \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& \text{непрерывно}(f, [a, b]) \rightarrow \exists_c(\text{производная}(f, c) = 0 \& c \in (a, b)))$$

из теоремы

$$\forall_{abcf}(f - \text{функция} \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& (a, b) \subseteq \text{Dom}(f) \& \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \& 0 < c - a \& 0 < b - c \& f(c) = \sup(\text{образ}(f, (a, b))) \& \text{дифференцируема}(f, c) \rightarrow \text{производная}(f, c) = 0)$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{abce}(e(c) = \inf(\text{образ}(e, (a, b))) \& 0 < b - c \& 0 < c - a \& (a, b) \subseteq \text{Dom}(e) \& \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \& e - \text{функция} \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& \text{дифференцируема}(e, c) \rightarrow \text{производная}(e, c) = 0)$$

$$\forall_{abf}(a - \text{число} \& b - \text{число} \& a < b \& f - \text{функция} \& [a, b] \subseteq \text{Dom}(f) \& \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \& \text{непрерывно}(f, [a, b]) \& f(a) = f(b) \rightarrow \exists_c(c - \text{число} \& 0 < c - a \& 0 < b - c \& (f(c) = \inf(\text{образ}(f, (a, b))) \vee f(c) = \sup(\text{образ}(f, (a, b))))))$$

Исходная теорема имеет характеристику "главнчлен(суп)". Прежде всего, в списке вывода находится первая дополнительная теорема x12. Она имеет характеристику с заголовком "главнчлен", относящуюся к другому символу. В нашем случае это символ "инф". Проверяется, что списки x13 и x14 антецедентов теорем x12 и исходной теоремы x2 имеют равную длину. Определяются антецедент x16 теоремы x12, содержащий символ "инф", а также антецедент x17 теоремы x2, содержащий символ "суп". Определяются остаточные списки антецедентов x18, x19 теорем x12, x2 после удаления указанных антецедентов. Проверяется, что все параметры терма x16 содержатся среди параметров термов x18. Переменной x20 присваивается список свободных переменных термов x18. Процедура "идентификация" находит набор термов x21, подстановка которых вместо x20 в термы списка x18 дает термы списка x19. В нашем случае x20 - переменные a, b, c, e ; x21 - термы a, b, c, f . Проверяется, что подстановка x21 вместо x20 преобразует (с точностью до перестановки операндов коммутативных операций) консеквент теоремы x12 в консеквент теоремы x2. Переменной x23 присваивается результат подстановки x21 вместо x20 в терм x16. Затем переменной x24 присваивается дизъюнкция утверждений x17 и x23. В нашем случае она имеет вид " $f(c) = \sup(\text{образ}(f, (a, b))) \vee f(c) = \inf(\text{образ}(f, (a, b)))$ ". Справочник поиска теорем "дизъюнктоперанд" определяет по символу "суп" вторую дополнительную теорему (см. выше). Переменной x27 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в текущую теорему x2:

$$\forall_{deh}(d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d < e \ \& \ h - \text{функция} \ \& \ [d, e] \subseteq \text{Dom}(h) \ \& \ \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{непрерывно}(h, [d, e]) \ \& \ h(d) = h(e) \rightarrow \exists_g(g - \text{число} \ \& \ 0 < g - d \ \& \ 0 < e - g \ \& \ (h(g) = \inf(\text{образ}(h, (d, e))) \vee h(g) = \sup(\text{образ}(h, (d, e))))))$$

Переменной x29 присваивается связывающая приставка квантора существования в консеквенте теоремы x27. В наборе x30 конъюнктивных членов этого квантора выбирается дизъюнкция x31. Проверяется, что она содержит символ "суп" и что в нее входят все переменные теоремы x27. Определяется унифицирующая подстановка S вместо свободных переменных терма x31, отождествляющая дизъюнкцию x24 и x31. Проверяется, что эта подстановка лишь переобозначает переменные, не склеивая их. Переменной x35 присваивается набор результатов применения подстановки S к отличным от x31 утверждениям списка x30. Он состоит из утверждений " $c - \text{число}$ ", " $0 < c - a$ ", " $0 < b - c$ ". Переменной x36 присваивается список переменных, подставляемых унифицирующей подстановкой S вместо переменных x29. В нашем случае - единственная переменная c . Переменной x37 присваивается список всех содержащих переменные x36 утверждений списка x19. Составляется список x38 всех не вошедших в x37 утверждений списка x19, пополненный результатами применения подстановки S к антецедентам теоремы x27. Вводится конкатенация M списков x38 и x35. Создается список x39 всех утверждений списка x37, для которых не усматривается, что они являются следствиями утверждений M . Для каждого утверждения F списка x39 создается кванторная импликация вида "длялюбого x36 если x35 то F ", и переменной x40 присваивается список всех таких импликаций. В нашем случае он состоит из единственной импликации " $\forall_c(c - \text{число} \ \& \ 0 < c - a \ \& \ 0 < b - c \rightarrow \text{дифференцируема}(f, c))$ ". Переменной x41 присваивается результат пополнения списка x38 импликациями x40. Создается теорема T , антецедентами которой служат утверждения

x41, а консеквент получается навешиванием квантора существования по x36 на конъюнкцию утверждений x35 и консеквента теоремы x2. В нашем случае это " $\exists_c(c\text{—число} \ \& \ 0 < c-a \ \& \ 0 < b-c \ \& \ \text{производная}(f, c) = 0)$ ". После применения к теореме T оператора "нормтеорема" получается указанный выше результат.

3.17 Характеристика "глуб"

Характеристикой "глуб(x1 x2)" снабжаются эквивалентности, заменяемая часть которых - элементарное утверждение, имеющее вхождения переменной x1, глубина которых (с отбрасыванием внешнего отрицания) более 1, а заменяющая часть построена при помощи логических связок из утверждений, содержащих каждое не более одного вхождения переменной x1, и притом глубины 1. x2 - указатель направления замены ("первыйтерм" либо "второйтерм").

Логические следствия эквивалентности

1. Перестановка симметричных переменных в заменяемой части эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bce}(b\text{—set} \ \& \ c\text{—set} \ \& \ e\text{—set} \rightarrow b \setminus c \subseteq e \leftrightarrow b \setminus e \subseteq c)$$

из теоремы

$$\forall_{bce}(b\text{—set} \ \& \ c\text{—set} \ \& \ e\text{—set} \rightarrow b \subseteq c \cup e \leftrightarrow b \setminus c \subseteq e)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(e второйтерм)". Переменной x10 присваивается ее заменяемая часть. В нашем случае - " $b \subseteq c \cup e$ ". Внутри данной части находится коммутативная операция x11. В нашем случае - " $c \cup e$ ". Проверяется, что эта операция имеет ровно два операнда, представляющих собой различные переменные. Других вхождений в x10 эти переменные не имеют. Проверяется, что antecedentes симметричны относительно перестановки данных переменных. Находится результат x17 перестановки их в заменяющем терме. В нашем случае - " $b \setminus e \subseteq c$ ". Проверяется, что после лексикографического переупорядочения операндов коммутативных операций терм x17 отличен от заменяющего терма x16. Наконец, формируется результат - импликация, antecedentes которой те же, что у исходной теоремы, а консеквент - эквивалентность x16 и x17. Заметим, что полученная теорема сопровождается сразу двумя характеристиками "глуб" - "глуб(c второйтерм)" и "глуб(e первыйтерм)".

2. Определение условия существования решения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(\neg(b=0) \ \& \ a\text{—число} \ \& \ b\text{—число} \ \& \ d\text{—число} \rightarrow \exists_e(ae+be^2=d \ \& \ e\text{—число}) \leftrightarrow 0 \leq 4bd+a^2)$$

из теоремы

$$\forall_{abde}(\neg(b=0) \ \& \ a\text{—число} \ \& \ b\text{—число} \ \& \ d\text{—число} \ \& \ e\text{—число} \rightarrow ae+be^2=d \leftrightarrow 0 \leq 4bd+a^2 \ \& \ (e = -(a + \sqrt{4bd+a^2})/(2b) \vee e = (-a + \sqrt{4bd+a^2})/(2b)))$$

Характеристика исходной теоремы - "глуб(e второйтерм)". Переменной x_9 присваивается переменная, относительно которой разрешается условие. В нашем случае - e . Список антецедентов исходной теоремы разбивается на два подписка x_{14} и x_{15} . Утверждения первого из них содержат e , второго - не содержат. В нашем случае x_{14} состоит из единственного утверждения e - число. Переменной x_{16} присваивается объединение списка конъюнктивных членов заменяющей части эквивалентности и x_{14} . В нашем случае - " $0 \leq 4bd + a^2$ ", " $(e = -(a + \sqrt{4bd + a^2})/(2b) \vee e = (-a + \sqrt{4bd + a^2})/(2b))$ ", " e - число". Решается задача на описание посылки которой суть утверждения x_{15} , а условия - утверждения x_{16} . Неизвестной служит e , причем эта неизвестная несущественная. Имеется также цель "исключ", форсирующая исключение несущественных неизвестных. В нашем случае ответ x_{18} имеет вид " $0 \leq 4bd + a^2$ ". Проверяется, что он не содержит переменной x_9 . Формируется утверждение S существования таких значений x_9 , что истинна конъюнкция заменяемого терма исходной теоремы и утверждений x_{14} . В нашем случае S имеет вид " $\exists_e (ae + be^2 = d \ \& \ e - \text{число})$ ". Наконец, формируется импликация с антецедентами x_{15} и консеквентом - эквивалентностью утверждений S , x_{18} . Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", использующим список уже выведенных в данном цикле теорем.

3. Попытка извлечения параметрического описания из эквивалентности для решения уравнения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c (\forall_i (i \in \{1, \dots, l(c)\} \rightarrow l(c(i)) = 2 \ \& \ c(i) - \text{слово}) \ \& \ c - \text{слово}) \leftrightarrow \exists_{ab} (c = \text{кортежпар}(a, b) \ \& \ l(a) = l(b) \ \& \ a - \text{слово} \ \& \ b - \text{слово})$$

из теоремы

$$\forall_{abc} (l(a) = l(b) \ \& \ a - \text{слово} \ \& \ b - \text{слово} \rightarrow c = \text{кортежпар}(a, b) \leftrightarrow \forall_i (i \in \{1, \dots, l(c)\} \rightarrow l(c(i)) = 2 \ \& \ c(i) - \text{слово}) \ \& \ a = \lambda_i(c(i)(1), i \in \{1, \dots, l(c)\}) \ \& \ b = \lambda_i(c(i)(2), i \in \{1, \dots, l(c)\}) \ \& \ c - \text{слово})$$

Исходная теорема имеет характеристики "глуб(a второйтерм)" и "глуб(b второйтерм)". Для вывода следствия выбирается та из них, которая относится к переменной с меньшим номером, т.е. "глуб(a второйтерм)". Проверяется, что заменяемый терм имеет вид равенства переменной x_{14} выражению x_{15} , не содержащему эту переменную. В нашем случае x_{14} - c , x_{15} - "кортежпар(a, b)". Проверяется, что свободные переменные заменяющего терма включаются в множество свободных переменных заменяемого. Переменной x_{17} присваивается набор конъюнктивных членов заменяющего терма. Создается список x_{19} таких отличных от x_{14} переменных X , что среди утверждений x_{17} имеется равенство вида " $X = T$ ", где T не содержит X . Переменной x_{18} присваивается список самих равенств. В нашем случае x_{18} - " $a = \lambda_i(c(i)(1), i \in \{1, \dots, l(c)\})$ "; " $b = \lambda_i(c(i)(2), i \in \{1, \dots, l(c)\})$ ". Список x_{19} состоит из переменных a, b . Переменной x_{20} присваивается остаток списка x_{17} . Проверяется, что как x_{18} , так и x_{20} непусты. Переменной x_{21} присваивается конъюнкция утверждений x_{20} . В нашем случае она имеет вид " $\forall_i (i \in \{1, \dots, l(c)\} \rightarrow l(c(i)) = 2 \ \& \ c(i) - \text{слово}) \ \& \ c - \text{слово}$ ". Проверяется, что либо утверждение x_{21} имеет связанные переменные, либо оценка его сложности больше 4. Проверяется также, что его

заголовок не является названием типа объектов. Переменной x23 присваивается список всех антецедентов исходной теоремы, имеющих параметр из списка x19. В нашем случае это все антецеденты. Переменной x24 присваивается остаток списка антецедентов. Проверяется, что из конкатенации списков x24 и x17 усматривается истинность конъюнкции утверждений x23. Для этого используется вспомогательная задача на доказательство. Формируется утверждение R , получаемое навешиванием квантора существования по x19 на конъюнкцию заменяемой части исходной теоремы и утверждений x23. Наконец, формируется результат - импликация с антецедентами x24 и консеквентом, представляющим собой эквивалентность утверждений x21, R .

4. Попытка определить область значений неизвестной, в которой решение становится однозначным.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ax}(a - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \ \& \ x \leq \pi/2 \ \& \ 0 \leq x + \pi/2 \rightarrow a = \sin x \leftrightarrow x = \arcsin a \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq -a + 1)$$

из теоремы

$$\forall_{ax}(a - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x + \pi/2 \ \& \ 0 \leq -x + 3\pi/2 \rightarrow a = \sin x \leftrightarrow (x = -\arcsin a + \pi \vee x = \arcsin a) \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq -a + 1)$$

Заметим, что здесь исходная теорема является лишь вспомогательным промежуточным звеном в цепочке выводов. Она была получена из общего вида решения уравнения с синусом путем ограничения его нулевым значением параметра. Соответствующий прием вывода относится к характеристике "неизвпарам" и будет описан ниже.

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(x второйтерм)". Переменной x9 присваивается переменная x . Переменной x12 присваивается заменяющий терм исходной теоремы. Проверяется, что он содержит символ "или". Рассматривается заменяемый терм x11. В нашем случае это " $a = \sin x$ ". Проверяется, что он имеет вид равенства переменной x15, отличной от x9. В нашем случае x15 - это a . Проверяется, что x11 не имеет других переменных, кроме x9 и x15 и что вхождение в него переменной x15 - единственное. Переменной x16 присваивается результат обработки процедурой "днф" заменяющего терма. В нашем случае он имеет следующий вид: " $x = -\arcsin a + \pi \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq -a + 1 \vee x = \arcsin a \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq -a + 1$ ". Выбирается дизъюнктивный член x17 дизъюнкции x16. В нашем случае это " $x = \arcsin a \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq -a + 1$ ". Переменной x18 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x17. Проверяется наличие в нем равенства для x9. Переменной x21 присваивается объединение списка x18 со всеми антецедентами исходной теоремы, содержащими x15. Переменной x22 - остаток списка антецедентов исходной теоремы. Решается задача на описание, антецедентами которой служат утверждения x22, а условиями - утверждения x21. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x15", "параметры x15". В нашем случае посылки суть " $x - \text{число}$ ", " $0 \leq x + \pi/2$ ", " $0 \leq -x + 3\pi/2$ ". Условия - " $\arcsin a = x$ ", " $0 \leq a + 1$ ", " $0 \leq -a + 1$ ", " $a - \text{число}$ ". Неизвестная - a . Получается ответ x24, имеющий в нашем случае вид " $x \leq \pi/2 \ \& \ x - \text{число}$ ". Переменной x25

присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы со списком конъюнктивных членов утверждения x24. Формируется импликация со списком антецедентов x25 и эквивалентностью утверждений x11, x17 в консеквенте. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

5. Редактирование конъюнктивной заменяющей части эквивалентности разрешения относительно неизвестных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq -a + 1 \rightarrow b = \arcsin a \leftrightarrow a = \sin b \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \leq 2b + \pi \ \& \ 0 \leq -2b + \pi)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq -a + 1 \rightarrow b = \arcsin a \leftrightarrow a = \sin b \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \leq b + \pi/2 \ \& \ 0 \leq -b + \pi/2)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(*a* второйтерм)". Переменной x9 присваивается переменная *a*. Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов заменяющей части. Проверяется, что среди них встречаются утверждения, не содержащие x9. Проверяется также отсутствие у исходной теоремы других характеристик с заголовком "глуб". Решается задача на описание, посылками которой служат все антецеденты исходной теоремы, а условиями - утверждения x13. Задача имеет цели "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x9", "редакция". Переменной x17 присваивается ответ данной задачи. В нашем случае он имеет вид $a = \sin b \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \leq 2b + \pi \ \& \ 0 \leq -2b + \pi$. Проверяется, что терм x17 отличен от заменяющего термина исходной теоремы. После этого создается результирующая импликация, полученная из исходной теоремы заменой ее заменяющего термина на терм x17.

6. Усмотрение эквивалентности, сводящей равенство значений операции к равенству ее аргументов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq c + 1 \ \& \ 0 \leq -a + 1 \ \& \ 0 \leq -c + 1 \rightarrow \arcsin a = \arcsin c \leftrightarrow a = c)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq -a + 1 \rightarrow b = \arcsin a \leftrightarrow a = \sin b \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \leq b + \pi/2 \ \& \ 0 \leq -b + \pi/2)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(*a* второйтерм)". Переменной x11 присваивается переменная из данной характеристики, т.е. *a*. Проверяется, что заменяемый терм имеет вид равенства некоторой переменной x15, не встречающейся в антецедентах, выражению x16, единственной свободной переменной которого является переменная x11. В нашем случае x15 - *b*, x16 - " $\arcsin a$ ". Среди конъюнктивных членов заменяющей части находится равенство x18 переменной x11 некоторому выражению, не имеющему других свободных переменных,

кроме x15. Переменной x21 присваивается результат переобозначения всех переменных исходной теоремы на новые переменные. В нашем случае получается следующая теорема:

$$\forall_{cd}(c - \text{число} \ \& \ 0 \leq c + 1 \ \& \ 0 \leq -c + 1 \rightarrow d = \arcsin c \leftrightarrow c = \sin d \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq d + \pi/2 \ \& \ 0 \leq -d + \pi/2).$$

Переменной x25 присваивается неоднобуквенный операнд заменяемой части теоремы x21. В нашем случае - "arcsin c". Переменной x27 присваивается единственная свободная переменная данного операнда, т.е. c. Далее создается результирующая импликация, антецеденты которой суть объединение антецедентов исходной теоремы и теоремы x21, а консеквент - эквивалентность равенства термов x16, x25 равенству переменных x11, x27.

7. Подстановка значения известного параметра, выделенного равенством в заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(a - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(c) \rightarrow ac = \text{вектор}0 \leftrightarrow a = 0 \vee c = \text{вектор}0)$$

из теоремы

$$\forall_{acd}(a - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ \text{Вектор}(d) \rightarrow d = ac \leftrightarrow \neg(a = 0) \ \& \ c = (1/a)d \vee a = 0 \ \& \ d = \text{вектор}0)$$

Под умножением здесь понимается умножение вектора на число. Исходная теорема имеет характеристику "глуб(c второйтерм)". Переменной x9 присваивается переменная c, переменной x12 - заменяющий терм. Проверяется, что заголовком терма x12 служит символ "или". В нем находится равенство переменной x14 выражению x15, не содержащему этой переменной. Заголовки надтермов данного равенства - только "и", "или". Переменная x14 отлична от x9; x9 не входит в x15. В нашем случае x14 - переменная d, x15 - "вектор0". Определяется набор x16 результатов подстановки x15 вместо x14 в антецеденты теоремы. Определяется также результат x17 подстановки x15 вместо x14 в консеквент теоремы. В нашем случае x16 - "a - число", "Вектор(c)", "Вектор(вектор0)"; x17 - терм "вектор0 = ac ↔ ¬(a = 0) & c = (1/a)вектор0 ∨ a = 0 & вектор0 = вектор0". Создается импликация с антецедентами x16 и консеквентом x17. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому передается для усиления стандартизации текущий список вывода. Проверяется, что оценка сложности результирующей теоремы не менее чем у исходной.

8. Вывод специального случая эквивалентности, не приводящего к появлению новой сложной операции над параметром.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(a = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ \text{Вектор}(d) \rightarrow ac = bd \leftrightarrow c = (b/a)d)$$

из теоремы

$$\forall_{acd}(\neg(a = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ \text{Вектор}(d) \rightarrow d = ac \leftrightarrow c = (1/a)d)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(с второйтерм)". Переменной x9 присваивается переменная c , переменной x11 - заменяемый терм, переменной x12 - заменяющий. Выбирается параметр x13 терма x11, отличный от x9 и имеющий единственное вхождение в каждый из термов x11, x12. В нашем случае это параметр d . Переменной x14 присваивается вхождение d в x12. Проверяется, что оно является операндом вхождения x15 двуместной операции x16, не являющейся ни коммутативной, ни ассоциативной. В нашем случае x16 - "умнож-вект". Находится антецедент x18 исходной теоремы, содержащий переменную x13 и имеющий длину 2. Переменной x19 присваивается заголовок данного антецедента. В нашем случае - символ "Вектор". Проверяется, что символ x19 является названием одного из основных типов объектов. Переменной x21 присваивается противоположный операнд операции x15. В нашем случае - " $1/a$ ". Проверяется, что этот операнд неоднобуквенный и что тип его значения (в нашем случае - "число") отличен от x19. Проверяется, что вхождение переменной x13 в терм x11 является непосредственным операндом некоторого отношения. В нашем случае - равенства. Переменной x26 присваивается выражение, полученное из подтерма x15 заменой отличного от x14 операнда на новую переменную x25. В нашем случае x25 - переменная b , x26 - выражение bd . Переменной x28 присваивается результат пополнения списка антецедентов исходной теоремы утверждениями, определяющими о.д.з. для x26. В нашем случае он состоит из утверждений " $\neg(a = 0)$ ", " a - число", "Вектор(c)", "Вектор(d)", "Вектор(d)", " b - число". Переменной x29 присваивается результат замены в подтерме x15 операнда x14 на x26. В нашем случае - " $(1/a)(bd)$ ". Находится результат x31 упрощения x29 при помощи вспомогательной задачи на преобразование, имеющей список посылок x28. На период ее решения блокировки приемов снимаются. Получается выражение " $(b/a)d$ ". Проверяется, что x31 имеет ровно одно вхождение символа x16. Определяются результат x32 подстановки в x11 терма x26 вместо x13, а также результат x33 замены вхождения x15 в терм x12 на терм x31. Первый из этих результатов имеет вид " $bd = ac$ ", второй - " $c = (b/a)d$ ". Формируется импликация с антецедентами x28, консеквент которой - эквивалентность x32 и x33. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

9. Перенесение в антецеденты отрицания конъюнктивного члена не содержащего неизвестной дизъюнктивного члена заменяющей дизъюнкции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \rightarrow \ b = ac \leftrightarrow \neg(c = 0) \ \& \ a = b/c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \rightarrow \ b = ac \leftrightarrow \neg(c = 0) \ \& \ a = b/c \ \vee \ b = 0 \ \& \ c = 0)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(a второйтерм)". Переменной x8 присваивается переменная a , переменной x13 - заменяющий терм эквивалентности. Проверяется, что он представляет собой дизъюнкцию. Находится дизъюнктивный член x15 этой дизъюнкции, не содержащий переменной x8. В нашем случае - " $b = 0 \ \& \ c = 0$ ". Рассматривается такой конъюнктивный член x17 утверждения x15, который не имеет своим заголовком символ "не", причем отрицание его не является конъюнктивным членом никакого отличного от

x15 дизъюнктивного члена утверждения x13. В нашем случае x17 имеет вид " $b = 0$ ". Переменной x18 присваивается результат отбрасывания у x13 дизъюнктивного члена x15. В нашем случае это " $\neg(c = 0) \& a = b/c$ ". Переменной x19 присваивается результат добавления к списку антецедентов исходной теоремы отрицания утверждения x17. Наконец, формируется импликация со списком антецедентов x19, консеквентом которой служит эквивалентность заменяемого терма исходной теоремы утверждению x18. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

10. Получение параметрического описания с конечным отрезком целых чисел, ориентированного на развертку в дизъюнкцию.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cmn}(m - \text{целое} \& n - \text{целое} \rightarrow c \in \{m, \dots, n\} \leftrightarrow \exists_a(c = a + m \& a \in \{0, \dots, n - m\}))$$

из теоремы

$$\forall_{abmn}(a - \text{целое} \& b - \text{целое} \& m - \text{целое} \& n - \text{целое} \rightarrow a + b \in \{m, \dots, n\} \leftrightarrow a \in \{m - b, \dots, n - b\})$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(a второйтерм)". Переменной x8 присваивается переменная a , переменной x13 - заменяющий терм теоремы. Проверяется, что он имеет вид принадлежности x8 выражению x16 с заголовком "номера". Проверяется, что x8 имеет единственное вхождение как в заменяемый, так и в заменяющий термы. Переменной x17 присваивается первый операнд выражения "номера". В нашем случае это $m - b$. Проверяется, что список свободных переменных терма x17 непуст. Находится подвыражение x22 заменяемого терма, содержащее x8 и имеющее ровно один общий параметр x24 с термом x17. В нашем случае x22 - " $a + b$ ", x24 - b . Проверяется, что переменная x24 имеет единственное вхождение в заменяемый терм. Находится список x26 всех содержащих данную переменную антецедентов теоремы, пополненный равенством выражения x17 нулю. В нашем случае он состоит из утверждений " $b - \text{целое}$ ", " $m - b = 0$ ". Решается задача на описание, условия которой суть утверждения x26, а посылки - все не содержащие x24 антецеденты теоремы. Единственной неизвестной служит x24. Ответ присваивается переменной x30. В нашем случае он имеет вид " $b = m$ ". Проверяется, что это - равенство переменной x24 некоторому выражению x31. Определяется результат x32 подстановки x31 вместо x24 в заменяющий терм. Он имеет вид " $a \in \{m - m, \dots, n - m\}$ ". Определяется список x34 результатов подстановки x31 вместо x24 в антецеденты теоремы. Находится также результат x38 подстановки x31 вместо x24 в терм x22. Решается задача на описание, условия которой суть все содержащие переменную x8 утверждения списка x34 и равенство выражения x38 новой переменной x33. Посылки - все не содержащие переменной x8 утверждения списка x34. Их список присваивается переменной x36. В нашем случае условия имеют вид " $a - \text{целое}$ ", " $a + m = c$ ". Новая переменная - c . Посылки - " $m - \text{целое}$ ", " $n - \text{целое}$ ". Единственной неизвестной служит x8, причем эта неизвестная - несущественная. Ответ x41 имеет вид " $c - \text{целое}$ ". Проверяется, что он не содержит x8. Определяется результат x42 замены в заменяемом терме подвыражения x22 на переменную x33. Переменной x43 присваивается эквивалентность

утверждения x_{42} результату навешивания квантора существования по x_8 на конъюнкцию x_{32} и равенства выражений x_{33} , x_{38} . В нашем случае x_{43} имеет вид " $c \in \{m, \dots, n\} \leftrightarrow \exists_a (a \in \{m - m, \dots, n - m\} \& c = a + m)$ ". Составляется список x_{44} тех конъюнктивных членов утверждения x_{41} , которые не являются следствиями как левой, так и правой частей эквивалентности x_{43} , пополненных утверждениями x_{36} . В нашем случае он пуст. Составляется импликация, антецеденты которой суть элементы списков x_{36} и x_{44} , а консеквент - x_{43} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема". Выведенная теорема снабжается единственной характеристикой "перечисл". Она указывает, что теорема выведена для единственной цели - развертки квантора существования в дизъюнкцию.

Обобщение теоремы

1. Обобщение эквивалентности для решения уравнения: выделение невырожденного известного подвыражения с уникальным параметром и замена его на новый параметр.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ade} (d - \text{число} \& e - \text{число} \& a - \text{число} \rightarrow 2de + d^2 = a \leftrightarrow (d = -e + \sqrt{a + e^2} \vee d = -(e + \sqrt{a + e^2})) \& 0 \leq a + e^2)$$

из теоремы

$$\forall_{cde} (c - \text{число} \& d - \text{число} \& e - \text{число} \rightarrow 2de + d^2 = c - e^2 \leftrightarrow (d = -e + \sqrt{c} \vee d = -(e + \sqrt{c})) \& 0 \leq c)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(d второй терм)". Переменной x_{11} присваивается переменная d , переменной x_{10} - заменяемый терм. Выбирается отличная от x_{11} переменная x_{12} , имеющая единственное вхождение в x_{10} . В нашем случае - переменная c . Определяется вхождение x_{13} этой переменной в терм x_{10} . Затем находится максимальный надтерм x_{14} вхождения x_{13} , не содержащий переменной x_{11} . Если встречается надтерм, содержащий эту переменную, но имеющий ассоциативно-коммутативный заголовок f , то берутся все его операнды t_1, \dots, t_k , не содержащие x_{11} . Проверяется, что $k > 1$, и в качестве x_{14} берется $f(t_1 \dots t_k)$. Переменной x_{13} переписывается вхождение терма x_{14} (в последнем случае - вхождение операции f). В нашем случае x_{14} имеет вид " $c - e^2$ ". Проверяется, что терм x_{14} не однобуквенный. С помощью справочника "тип" по заголовку терма x_{14} определяется тип T его значений, присваиваемый переменной x_{17} . В нашем случае этот тип - "число". Выбирается новая переменная x_{18} . В нашем случае это переменная " a ". Решается задача на описание x_{20} , посылками которой являются антецеденты текущей теоремы, а условиями - утверждения " $a = c - e^2, T(a)$ ". Неизвестной служит переменная x_{12} (т.е. c). Переменной x_{21} присваивается ответ " $c = a + e^2 \& a - \text{число}$ ". По этому ответу находится выражение x_{24} для значения неизвестной - в нашем случае " $a + e^2$ ". Переменной x_{25} присваивается тот терм, на который будет заменяться x_{14} . Если заголовком подтерма по вхождению x_{13} был ассоциативно-коммутативный символ f , то перед всеми содержащими переменную x_{11} его операндами помещается переменная a , и к этому набору применяется f . Иначе в качестве x_{25} берется однобуквенный терм a . Определяется результат x_{27}

подстановки выражения x_{24} вместо x_{12} в заменяющий терм теоремы. Он имеет вид " $(d = -e + \sqrt{a + e^2} \vee d = -(e + \sqrt{a + e^2})) \& 0 \leq a + e^2$ ". Переменной x_{28} присваивается результат замены в терме x_{10} вхождения x_{13} на терм x_{25} . Он имеет вид " $2de + d^2 = a$ ". Переменной x_{29} присваивается конкатенация набора результатов подстановки x_{24} вместо x_{12} в antecedentes теоремы и отличных от равенства конъюнктивных членов ответа x_{21} . Предпринимается попытка разрешить x_{27} относительно x_{11} ; результат переписывается переменной x_{27} . В нашем случае эта попытка не изменяет терма x_{27} . Утверждения x_{29} обрабатываются процедурой "нормантецеденты". Проверяется, что не остается antecedентов, указывающих тип значения неоднобуквенных выражений. Наконец, формируется результат - импликация с antecedентами x_{29} и консеквентом - эквивалентностью x_{27} и x_{28} . Ориентация эквивалентности выбирается такой же, как у исходной теоремы. Процедуре "регтеор" передается указатель "обобщение", приводящий к исключению исходной теоремы, поглощенной ее обобщенной версией.

Заметим, что данный прием применяется многократно, и в сочетании с приемом обобщения путем домножения обеих частей уравнения на новый параметр приводит в конце концов к привычной формуле корней квадратного уравнения.

2. Обобщение эквивалентности для разрешения относительно неизвестной: домножение обеих частей двуместного отношения на новый параметр и дистрибутивная развертка.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(c = 0) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& d - \text{число} \rightarrow bcd + cd^2 = ac \leftrightarrow (d = -(b + \sqrt{4a + b^2})/2 \vee (-b + \sqrt{4a + b^2})/2) \& 0 \leq 4a + b^2)$$

из теоремы

$$\forall_{abd}(d - \text{число} \& a - \text{число} \& b - \text{число} \rightarrow bd + d^2 = a \leftrightarrow (d = -(b + \sqrt{4a + b^2})/2 \vee (-b + \sqrt{4a + b^2})/2) \& 0 \leq 4a + b^2)$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \rightarrow ab = bc \leftrightarrow a = c)$$

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(d второй терм)". Переменной x_8 присваивается переменная d , переменной x_{11} - заменяемый терм. Проверяется, что теорема не имеет характеристики "общнорм(...)" и что x_{11} - двуместное отношение. Переменной x_{15} присваивается тот операнд отношения, который содержит переменную x_8 . В нашем случае это " $bd + d^2$ ". Переменной x_{16} присваивается заголовок терма x_{11} . Если этот заголовок - символ "равно", то переменной x_{16} переписывается тип операндов равенства. В нашем случае x_{16} - "число". Справочник поиска теорем "коэфф" определяет по символу x_{16} указанную выше первую дополнительную теорему. Переменной x_{21} присваивается заменяемый терм дополнительной теоремы, т.е. " $ab = bc$ ". Переменной x_{22} присваивается заголовок первого операнда данного терма, т.е. "умножение". Справочник поиска теорем "дистрибразвертка" определяет по символу

x22 вторую дополнительную теорему. Переменной x27 присваивается заменяющий (при развертке по дистрибутивности) терм теоремы, т.е. " $ab + ac$ ". Проверяется, что заголовок данного терма такой же, как у терма x15. Переменной x29 присваивается набор операндов терма x15. В нашем случае - " bd " и " d^2 ". Проверяется, что домножение будет избыточным, т.е. существует выражение набора x29, либо отличное от переменной, либо являющееся переменной x8, среди x22 - членов которого нет переменной, отличной от x8. При рассмотрении x22 - членов корневая одноместная операция, если она есть, отбрасывается. Выбирается новая переменная x30. В нашем случае - переменная c . Переменной x31 присваивается результат домножения на нее всех термов набора x29 и соединения их корневой операцией терма x15. В нашем случае получается " $bdc + d^2c$ ". Происходит домножение на x30 противоположной части заменяемого равенства исходной теоремы; переменной x33 присваивается результат домножения всего уравнения. В нашем случае - " $bdc + d^2c = ac$ ". Переменной x34 присваивается та переменная терма x21, которая имеет в него два вхождения, т.е. переменная b . Рассматривается заменяющий терм x35 первой дополнительной теоремы, т.е. " $a = c$ ". Переменной x36 присваивается переменная a , переменной x37 - переменная c . Переменной x38 присваивается набор результатов подстановок в antecedentes второй дополнительной теоремы вместо переменных x34, x36, x37 соответственно терма x30, первого операнда равенства x11 и второго операнда этого равенства. Получается набор " $\neg(c = 0)$ ", " $bd + d^2$ - число", " c - число", " a - число". Составляется объединенный список x39 antecedentes исходной теоремы и утверждений x38. Формируется импликация, antecedentes которой суть x39, а консеквент - эквивалентность утверждения x33 заменяющему терму исходной теоремы. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема". Перед ее регистрацией проверяется, что подстановка единицы операции x22 вместо новой переменной c не делает список antecedentes противоречивым.

3. Обобщение эквивалентности для разрешения относительно неизвестной: ввод дизъюнкции для учета вырожденного случая.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow b = ac \leftrightarrow \neg(c = 0) \ \& \ a = b/c \vee b = 0 \ \& \ c = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow b = ac \leftrightarrow a = b/c)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(a второй терм)". Переменной x8 присваивается переменная a , переменной x11 - заменяемый терм. В списке antecedentes x12 находится утверждение x13 вида " $\neg(x = t)$ ", где x - отличная от x8 переменная, не входящая в выражение t . Переменная x присваивается переменной x17, выражение t - переменной x18. В нашем случае x17 - c , x18 - "0". Проверяется, что переменная x8 не входит в терм x18. Проверяется, что x13 не является сопровождающим по о.д.з. для остальных antecedentes теоремы и ее заменяемого терма. Определяется результат подстановки x18 вместо x17 в заменяемый терм теоремы, после чего он обрабатывается нормализаторами общей стандартизации относительно antecedentes. Полученный терм присваивается переменной x20. В нашем случае имеем " $b = 0$ ". Проверяется, что число

вхождений переменной x_8 в терм x_{20} меньше числа ее вхождений в терм x_{11} . Переменной x_{21} присваивается дизъюнкция двух утверждений - конъюнкции заменяющей части теоремы с утверждением x_{13} и конъюнкции отрицания x_{13} с x_{20} . В нашем случае имеем " $\neg(c = 0) \ \& \ a = b/c \ \vee \ b = 0 \ \& \ c = 0$ ". Предпринимается расчистка дизъюнкции x_{21} : при помощи вспомогательных задач на доказательство усматриваются избыточные конъюнктивные члены ее дизъюнктивных членов, и такие члены отбрасываются. В нашем случае ничего не отбрасывается. Наконец, формируется результат - импликация, антецедентами которой служат антецеденты исходной теоремы с отброшенным утверждением x_{13} , а консеквентом - эквивалентность утверждений x_{11} и x_{21} .

4. Попытка усилить эквивалентность для решения уравнения, если это уравнение является следствием отрицания некоторого антецедента, не содержащего неизвестной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = 0) \ \& \ b < 0 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow c < a^b \leftrightarrow a < c^{1/b} \ \& \ -c^{1/b} < a \ \& \ 0 < c \ \vee \ c \leq 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b < 0 \ \& \ 0 < c \ \& \ \neg(a = 0) \rightarrow c < a^b \leftrightarrow a < c^{1/b} \ \& \ -c^{1/b} < a)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(a второй терм)". Переменной x_8 присваивается переменная a , переменной x_{11} - заменяемый терм. Переменной x_{14} присваивается не содержащий переменной x_8 элемент списка x_{12} антецедентов теоремы, не используемых для указания о.д.з. утверждения x_{11} . В нашем случае - утверждение " $0 < c$ ". Проверяется, что x_{14} содержит единственную переменную x_{16} и не имеет вида $P(x)$ где P - указание типа объектов. В нашем случае x_{16} - переменная c . Переменной x_{20} присваивается результат замены в списке x_{12} утверждения x_{14} на его отрицание. Проверяется, что заменяемый терм x_{11} является следствием утверждений x_{20} . Переменной x_{22} присваивается дизъюнкция отрицания утверждения x_{14} и конъюнкции заменяющего терма теоремы с утверждением x_{14} . В наше случае - " $\neg(0 < c) \ \vee \ 0 < c \ \& \ a < c^{1/b} \ \& \ -c^{1/b} < a$ ". Формируется импликация, антецеденты которой получены удалением из списка x_{12} утверждения x_{14} , а консеквент - эквивалентность утверждений x_{11} и x_{22} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема".

5. Попытка усилить эквивалентность для решения уравнения: если некоторый антецедент является следствием других антецедентов и заменяемого утверждения, то он переносится в конъюнктивные члены заменяющего утверждения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(b < 0 \ \& \ 0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a^b < c \leftrightarrow 0 < c \ \& \ c^{1/b} < a)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b < 0 \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a^b < c \leftrightarrow c^{1/b} < a)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(a второйтерм)". Переменной x_8 присваивается переменная a , переменной x_{11} - заменяемый терм. Переменной x_{14} присваивается не содержащий переменной x_8 элемент списка x_{12} антецедентов теоремы, не используемых для указания о.д.з. утверждения x_{11} . В нашем случае - утверждение " $0 < c$ ". Проверяется, что x_{14} содержит единственную переменную x_{16} и не имеет вида $P(x)$ где P - указание типа объектов. В нашем случае x_{16} - переменная c . Переменной x_{18} присваивается результат отбрасывания из списка антецедентов утверждения x_{14} . Составляется список x_{19} , полученный добавлением к списку x_{18} утверждения x_{11} . Решается задача на доказательство x_{14} из посылок x_{19} . Переменной x_{21} присваивается конъюнкция заменяющего терма теоремы и утверждения x_{14} . Фомируется импликация со списком антецедентов x_{18} , консеквентом которой служит эквивалентность x_{11} и x_{21} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

6. Попытка усилить эквивалентность для решения уравнения: отрицание некоторого антецедента, имеющего две переменные, приводится к виду дизъюнкции, и для каждой альтернативы усматривается истинность либо ложность уравнения.

Слово "уравнение" здесь трактуется обобщенно - как произвольное утверждение с неизвестными. В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{числитель}(b) - \text{even}) \ \& \ b < 0 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow a^b < d \leftrightarrow a < 0 \ \& \ 0 \leq d \vee 0 < ad \ \& \ d^{1/b} < a)$$

из теоремы

$$\forall_{abd}(\neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{числитель}(b) - \text{even}) \ \& \ b < 0 \ \& \ 0 < ad \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow a^b < d \leftrightarrow d^{1/b} < a)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(a второйтерм)". Переменной x_8 присваивается переменная a , переменной x_{11} - заменяемый терм. Переменной x_{14} присваивается содержащий переменную x_8 элемент списка x_{12} антецедентов теоремы, не используемых для указания о.д.з. утверждения x_{11} . В нашем случае - утверждение " $0 < ad$ ". Проверяется, что x_{14} содержит ровно две переменных. Проверяется, что оценка сложности утверждения x_{14} меньше оценки сложности утверждения x_{11} . Переменной x_{16} присваивается отрицание утверждения x_{14} , переменной x_{17} - результат исключения x_{14} из списка антецедентов теоремы. Решается задача на описание с посылками x_{17} и единственным условием x_{16} . Цели - "полный", "попыткаспуска", "прямойответ", "неизвестные x_8 ". Ответ x_{19} имеет заголовок "или". В нашем случае он имеет вид " $a \leq 0 \ \& \ 0 \leq d \vee d \leq 0 \ \& \ 0 \leq a$ ". Переменной x_{20} присваивается набор дизъюнктивных членов результата преобразования x_{19} к виду д.н.ф. В нашем случае - просто набор дизъюнктивных членов утверждения x_{19} . Последовательно просматриваются элементы набора x_{20} . Для каждого такого элемента A рассматривается результат S пополнения списка x_{17} набором конъюнктивных членов утверждения A , а также утверждениями, необходимыми для сопровождения по о.д.з. Последние регистрируются также в списке x_{17} . Сначала предпринимается попытка установить, что заменяемое утверждение x_{11} - следствие S , а в случае неудачи - что отрицание утверждения x_{11} является следствием S . Если ни

одна из попыток для какого-либо A не удастся, то применение приема обрывается. Иначе - в накопителе $x21$ регистрируются те A , для которых удачной была первая попытка. В нашем случае $x21$ состоит из конъюнкции " $a \leq 0 \ \& \ 0 \leq d$ ". По завершении рассмотрения элементов набора $x20$ создается дизъюнкция $x22$, первый член которой - конъюнкции заменяющего терма теоремы с утверждением $x14$. Далее идут все элементы списка $x21$. Наконец, создается импликация с антецедентами $x17$ и консеквентом - эквивалентностью утверждений $x11$, $x22$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема". При обработке нестрогое неравенство $a \leq 0$ заменяется на строгое $a < 0$, так как в антецедентах встречается отрицание равенства a нулю.

Варьирование эквивалентности с помощью дополнительного тождества

1. Попытка проварьировать эквивалентность для разрешения утверждения с единственным вхождением неизвестной, при помощи тождества, создающего кратные вхождения неизвестной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow 2de + d^2 = c - e^2 \leftrightarrow (d = -e + \sqrt{c} \vee d = -(e + \sqrt{c})) \ \& \ 0 \leq c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow a^b = c \leftrightarrow 0 \leq c \ \& \ (a = c^{1/b} \vee a = -c^{1/b}))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$$

Заметим, что выводимая теорема представляет собой первое звено в цепочке обобщений, приводящих к формуле корней квадратного уравнения.

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(a второйтерм)". Переменной $x9$ присваивается переменная a , переменной $x11$ - заменяемый терм. Проверяется, что вхождение переменной $x9$ в терм $x11$ единственное. Определяется подвыражение $x13$ утверждения $x11$, имеющее максимальную оценку сложности. Проверяется, что оно единственное и содержит $x9$. В нашем случае имеем подвыражение a^b . По его заголовку $x14$ справочник поиска теорем "дублпарам" определяет указанную выше дополнительную теорему. Она интересна тем, что позволяет преобразовать неповторное выражение в выражение с повторяющимися вхождениями переменных. Таким образом создаются предпосылки для решения уравнений, имеющих более одного вхождения неизвестной. Переменной $x19$ присваивается символ направления замены согласно дополнительной теореме для перехода к неповторному выражению. В нашем случае это символ "второйтерм". Переменной $x21$ присваивается расположенное внутри заменяемой части вхождение подтерма $x13$. Процедура "тождвывод" определяет результат $x24$ преобразования подтерма $x21$ при помощи дополнительной теоремы, применяемой в направлении $x19$. Этой процедуре передается комментарий

(переменная $x_9 = 0$), позволяющий отследить терм x_{26} , в который этим преобразованием переводится переменная x_9 . В нашем случае теорема x_{24} имеет следующий вид:

$$\forall_{cde}(d+e-\text{число} \ \& \ c-\text{число} \ \& \ 2-\text{rational} \ \& \ \text{числитель}(2)-\text{even} \ \& \ \neg(2=0) \ \& \ d-\text{число} \ \& \ e-\text{число} \ \rightarrow \ d^2+2de+e^2=c \leftrightarrow 0 \leq c \ \& \ (d+e=\sqrt{c} \vee d+e=-\sqrt{c})).$$

Терм x_{26} имеет вид $d+e$. Проверяется, что он имеет переменную, входящую в заменяемую часть теоремы x_{24} более одного раза. Определяется результат x_{27} обработки теоремы x_{24} процедурой "нормтеорема". Он имеет следующий вид:

$$\forall_{cde}(c-\text{число} \ \& \ d-\text{число} \ \& \ e-\text{число} \ \rightarrow \ d^2+2de+e^2=c \leftrightarrow (-\sqrt{c}=d+e \vee \sqrt{c}=d+e) \ \& \ 0 \leq c).$$

Проверяется что никакой антецедент теоремы x_{27} , имеющий не менее двух свободных переменных, не имеет общей переменной с выражением x_{26} . В заменяемой (левой) части x_{29} теоремы x_{27} выбирается переменная x_{30} , входящая в терм x_{26} и имеющая не менее двух вхождений в x_{29} . В нашем случае это переменная d . Переменной x_{34} присваивается список антецедентов теоремы x_{27} , не содержащих переменной x_{30} , переменной x_{33} присваивается остаток антецедентов. Решается вспомогательная задача на описание с посылками x_{34} и условиями x_{33} , пополненными заменяющим термом теоремы x_{27} . Неизвестные задачи - x_{30} . В нашем примере получается утверждение x_{36} вида " $(d = -e + \sqrt{c} \vee d = -(e + \sqrt{c})) \ \& \ 0 \leq c$ ". Затем решается вспомогательная задача на описание с теми же посылками, условия которой суть утверждения x_{33} , пополненные заменяемым термом теоремы x_{27} . В отличие от предыдущей задачи, она имеет цель "попыткаспуска", т.е. не получает явного выражения, а лишь упрощает свои условия относительно неизвестной x_{30} . Результат x_{38} имеет вид " $d-\text{число} \ \& \ 2de+d^2=c-e^2$ ". Проверяется, что переменная x_{30} имеет в нем более одного вхождения. Формируется эквивалентность x_{39} утверждений x_{38} и x_{36} , в которых предварительно отброшены все антецеденты теоремы x_{27} . Наконец, создается импликация, антецеденты которой те же, что у теоремы x_{27} , а консеквент - x_{39} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

2. Попытка подстановки вместо неизвестной выражения, допускающего декомпозицию по этой неизвестной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdf}(\neg(b=0) \ \& \ a-\text{число} \ \& \ b-\text{число} \ \& \ d-\text{число} \ \& \ c-\text{число} \ \& \ f-\text{число} \ \& \ \neg(f=0) \ \rightarrow \ acf+bc^2-df^2=0 \leftrightarrow (c=-f(a+\sqrt{4bd+a^2})/(2b) \vee c=f(-a+\sqrt{4bd+a^2})/(2b)) \ \& \ 0 \leq 4bd+a^2)$$

из теоремы

$$\forall_{abde}(\neg(b=0) \ \& \ a-\text{число} \ \& \ b-\text{число} \ \& \ d-\text{число} \ \& \ e-\text{число} \ \rightarrow \ ae+be^2=d \leftrightarrow 0 \leq 4bd+a^2 \ \& \ (e=-(a+\sqrt{4bd+a^2})/(2b) \vee e=(-a+\sqrt{4bd+a^2})/(2b)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a-\text{число} \ \& \ b-\text{число} \ \& \ c-\text{число} \ \& \ c-\text{rational} \ \& \ \text{neg}(\text{знаменатель}(c)-\text{even}) \ \& \ \neg(b=0) \ \rightarrow \ (a/b)^c = a^c/b^c)$$

Заметим, что данный переход влечет цепочку применений обобщающих приемов, приводящую к "обычной" формуле решения однородного уравнения второй степени.

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(е второйтерм)". Переменной x9 присваивается переменная e , переменной x11 - заменяемый терм. Проверяется, что x9 имеет более одного вхождения в x11. Рассматривается вхождение x9 в x11, являющееся операндом некоммутативной операции x14. Переменной x13 присваивается вхождение этой операции. В нашем случае это вхождение выражения e^2 . Переменной x16 присваивается противоположный операнд этой операции, в нашем случае - 2. Проверяется, что он не содержит x9. Справочник поиска теорем "разбиение" находит по символу x14 (в нашем случае - "степень") указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем случае x19 имеет следующий вид:

$$\forall_{c f g} (c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ g - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(g) - \text{even}) \ \& \ \neg(f = 0) \rightarrow (c/f)^g = c^g/f^g).$$

Переменной x21 присваивается тот операнд равенства в консеквенте теоремы x19, который имеет заголовок x14. Проверяется, что x19 имеет комментарий (нормализация ...), согласно которому x21 - заменяемая часть. Внутри x21 рассматривается операнд x24 с тем же номером, с которым x9 было операндом для x13. В нашем случае x24 - вхождение подтерма c/f , присваиваемого переменной x26. Проверяется, что по вхождению x24 располагается двуместная некоммутативная операция. Переменной x27 присваивается набор утверждений, обеспечивающих сопровождение подтерма x24 по о.д.з. Проверяется, что список x28 антецедентов теоремы x19 содержит лишь такие пересекающиеся по свободным переменным с подтермом x24 утверждения, которые содержатся в x27. Переменной x30 присваивается подтерм по вхождению x13, переменной x31 - подтерм по вхождению x21. В нашем случае эти подтермы суть e^2 и $(c/f)^g$. Переменной x32 присваивается список переменных термов x30, x31. Затем определяется набор термов x33, подстановка которых вместо x32 унифицирует выражения x30 и x31. В нашем случае x32 - переменные c, e, f, g ; x33 - выражения $c, c/f, f, 2$. Переменной x34 присваивается результат применения данной подстановки к терму x26. В нашем случае это не изменяет x26. Проверяется, что операнды выражения x34 - различные переменные. Переменной x35 присваивается первая из них (это c), переменной x36 - вторая (f). Переменной x37 присваивается набор результатов применения унифицирующей подстановки к антецедентам исходной теоремы и теоремы x19. Переменной x38 присваивается результат применения этой подстановки к заменяемой части исходной теоремы. В нашем случае x37 - утверждения " $\neg(b = 0)$ ", " $a - \text{число}$ ", " $b - \text{число}$ ", " $d - \text{число}$ ", " $c - \text{число}$ ", " $f - \text{число}$ ", " $2 - \text{число}$ ", " $2 - \text{rational}$ ", " $\neg(\text{знаменатель}(2) - \text{even})$ ", " $\neg(f = 0)$ ". Терм x38 имеет вид " $(c/f) \cdot a + b(c/f)^2 = d$ ". Решается задача на описание, имеющая посылки x37 и единственное условие x38. Цели ее - "полный", "явное", "прямой ответ", "попытка спуска". Известные - все переменные терма x26. Ответ x40 в нашем случае имеет вид " $acf + bc^2 - df^2 = 0$ ". Проверяется, что для любых двух вхождений переменных x35, x36 в x40 заголовком наименьшего содержащего оба вхождения подтерма служит коммутативная операция. Проверяется, что заголовок x25 терма x26 - операция, имеющая единицу по

некоторому своему операнду, после чего переменной x_{42} присваивается противоположный операнд операции x_{26} . В нашем случае - переменная c . Переменной x_{44} присваивается набор вхождений в заменяющий терм x_{43} исходной теоремы наименьших подутверждений, содержащих неизвестную x_9 . В нашем случае это вхождения равенств для e . Проверяется, что каждое такое подутверждение имеет ровно одно вхождение неизвестной. К каждому подутверждению набора x_{44} применяется унифицирующая подстановка, а результат этой подстановки разрешается относительно неизвестной x_{42} вспомогательной задачей на описание. Получается набор утверждений x_{45} . В нашем случае - равенства " $c = -f(a + \sqrt{4bd + a^2})/(2b)$ " и " $c = f(-a + \sqrt{4bd + a^2})/(2b)$ ". Переменной x_{46} присваивается результат замены в заменяющем терме исходной теоремы вхождений x_{44} на утверждения x_{45} . Этот результат еще раз обрабатывается вспомогательной задачей на описание, имеющей неизвестные x_{35} , x_{36} и цель "попыткаспуска". Уровень обращения здесь равен всего лишь 3. В нашем случае данное обращение не изменяет терма x_{46} . Переменной x_{47} присваивается эквивалентность утверждений x_{40} и x_{46} . Переменной x_{48} присваивается результат обработки списка x_{37} оператором "нормантецеденты", после чего создается итоговая импликация с антецедентами x_{48} и консеквентом x_{47} . Она сопровождается характеристикой "неизвестные($c f$)".

3. Попытка вывести упрощающее тождество путем упрощения подвыражения заменяющей части эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a (a - \text{число} \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq 1 - a \rightarrow \arcsin(-a) = -\arcsin a)$$

из теоремы

$$\forall_{ab} (a - \text{число} \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq 1 - a \rightarrow \arcsin a = b \leftrightarrow a = \sin b \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \leq \pi - 2b \ \& \ 0 \leq \pi + 2b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a (a - \text{число} \rightarrow \sin(-a) = -\sin a)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(a второйтерм)". Переменной x_9 присваивается переменная a , переменной x_{11} - заменяемый терм. Проверяется, что x_{11} имеет заголовок "равно", одним из операндов равенства служит переменная x_{14} . Переменной x_{15} присваивается список антецедентов исходной теоремы, переменной x_{16} - противоположный операнд равенства. В нашем случае x_{14} - b , x_{16} - " $\arcsin a$ ". Проверяется, что x_{16} не содержит переменной x_{14} и что все параметры антецедентов входят в x_{16} . Среди конъюнктивных членов заменяющей части находится равенство x_{18} , одним из операндов которого служит переменная x_{21} , а другим - неодносимвольный подтерм x_{22} . Проверяется, что x_{22} имеет единственную переменную x_{14} . В нашем случае x_{21} - a , x_{22} - " $\sin b$ ". Справочники поиска теорем "упрощимп", "упрощстанд" определяют по заголовку терма x_{22} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "нормализация(...)" либо "сокращ(...)". Затем процедура "тождвывод" определяет результат преобразования подтерма x_{22} при помощи дополнительной теоремы, применяемой в направлении данной характеристики. Получается теорема x_{27} следующего вида:

$$\forall_{ac}(a - \text{число} \ \& \ 0 \leq 1 + a \ \& \ 0 \leq 1 - a \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \arcsin a = -c \leftrightarrow a = -\sin c \ \& \ -c - \text{число} \ \& \ 0 \leq \pi - 2(-c) \ \& \ 0 \leq \pi + 2(-c))$$

После обработки оператором "нормтеорема" из нее получается теорема x28:

$$\forall_{ac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq 1 + a \ \& \ 0 \leq 1 - a \rightarrow -c = \arcsin a \leftrightarrow a = -\sin c \ \& \ 0 \leq 2c + \pi \ \& \ \pi - 2c)$$

Переменной x30 присваивается набор конъюнктивных членов заменяющей части теоремы x28, переменной x31 - список ее антецедентов. В списке x30 находится равенство x32 переменной x9 некоторому выражению x35. В нашем случае x32 имеет вид " $a = -\sin c$ ". Проверяется, что x35 имеет единственную переменную x37. В нашем случае - переменную c . Переменной x38 присваивается список всех утверждений набора x31, содержащих переменную x37, переменной x39 - остаток списка x31. Проверяется, что этот остаток непуст. Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения x39, а условиями - объединение списков x30 и x38. Задача имеет цели "полный", "явное", "прямойответ", "нормтеорема", "упростить", "равно", "неизвестные x37". Ее ответ x42 в нашем случае имеет следующий вид:

$$a = -1 \ \& \ c = \pi/2 \ \vee \ a = 1 \ \& \ c = -(\pi + \arcsin(-1)) \ \vee \ c = \arcsin(-a).$$

Среди дизъюнктивных членов данного ответа выбирается равенство x44, в одной части которого находится переменная x37, а в другой - некоторое выражение x47. В нашем случае - равенство " $c = \arcsin(-a)$ ". Переменной x49 присваивается список x38, пополненный заменяемым термом теоремы x28. В нашем случае этот список состоит из утверждений " $c - \text{число}$ " и " $-c = \arcsin a$ ". Решается задача на описание с посылками x39 и условиями x49. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x37", "упростить", "равно". Ее ответ x51 в нашем случае имеет вид " $c = -\arcsin a$ ". Проверяется, что данный ответ имеет вид равенства переменной некоторому выражению A . Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x39, а консеквент - равенство выражений x47 и A . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

4. Упрощение заменяющей части для получения эквивалентности общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{целое} \rightarrow [a] < b \leftrightarrow a < b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow [a] < b \leftrightarrow a < -[-b])$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{целое} \rightarrow [a] = a)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(a второйтерм)". Переменной x12 присваивается вхождение заменяющего термина. Внутри этого вхождения рассматривается вхождение x13 символа операции x14. В нашем случае x14 - "целаячасть". Справочник поиска теорем "исклтерм" находит по x14 указанную

выше дополнительную теорему. Процедура "тождвывод" применяет эту теорему для преобразования подтерма по вхождению x13. Получается следующая теорема:

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ -b - \text{целое} \rightarrow [a] < b \leftrightarrow a < - - b)$$

Оператор "нормтеорема" преобразует ее в окончательный результат. Оператору "регтеор" передается список заголовков допустимых характеристик "упрощ-прог", "усиление", "общнорм", "уменьшение", обеспечивающий проверку того, что найденная теорема действительно выполняет общую стандартизацию.

Варьирование условий на параметры

1. Попытка ослабления условия на параметры, расположенного в заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(0 < b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow c = a^b \leftrightarrow a = c^{1/b} \ \& \ 0 \leq c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a^b = c \leftrightarrow a = c^{1/b} \ \& \ 0 < c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \rightarrow a \leq b)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(a второйтерм)". Переменной x9 присваивается переменная a, переменной x12 - заменяющий терм, переменной x13 - набор конъюнктивных членов утверждения x12. В наборе x13 усматривается равенство x14 переменной x9 некоторому выражению. В нашем случае это "a = c^{1/b}". Далее в наборе x13 выбирается утверждение x15, не содержащее переменной x9. В нашем случае - 0 < c. Справочник поиска теорем "ослабление" определяет по заголовку x16 утверждения x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Среди них выбирается утверждение x20 с заголовком x16, содержащее все переменные дополнительной теоремы. В нашем случае - утверждение "a < b". Переменной x21 присваивается список свободных переменных терма x20, после чего находится набор выражений x22, подстановка которых вместо переменных x21 в терм x20 дает терм x15. Определяется набор x23 результатов применения данной подстановки к отличным от x20 утверждениям набора x19. В нашем случае x23 содержит утверждения "0 - число", "c - число". Переменной x24 присваивается результат применения той же подстановки к консеквенту дополнительной теоремы. В нашем случае - "0 ≤ c". Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения x23, а условиями - утверждение x24 и отрицание утверждения x15. Задача имеет единственную цель "редакция". Ее ответ x27 в нашем случае имеет вид "c = 0". Проверяется, что он имеет вид равенства некоторой переменной x30 выражению x31, не содержащему этой переменной. Переменной x33 присваивается результат подстановки x31 вместо x30

в конъюнкцию отличных от x_{15} элементов списка x_{13} . В нашем случае имеем " $a = 0^{1/b}$ ". Переменной x_{34} присваивается объединение списка x_{23} со списком антецедентов исходной теоремы и с утверждениями, формулирующими условия на о.д.з. для x_{33} . В нашем случае x_{34} состоит из утверждений "истина", " $-$ число", " $a -$ число", " $b -$ число", " $\neg(b = 0)$ ", " $0 < a$ ", " $0 < b$ ". Переменной x_{35} присваивается подсписок списка x_{34} , состоящий из утверждений, в которые входит переменная x_9 (в нашем случае a), а переменной x_{36} - остаток списка x_{34} . Определяется результат x_{37} подстановки выражения x_{31} вместо переменной x_{30} в правую часть равенства x_{14} . В нашем случае это " $0^{1/b}$ ". Этот результат упрощается вспомогательной задачей на преобразование относительно посылок x_{36} . Получается выражение x_{39} , в нашем случае равное 0. Переменной x_{40} присваивается равенство переменной x_9 выражению x_{39} , а переменной x_{41} - результат добавления этого равенства к списку x_{36} . В нашем случае имеем список " $c -$ число", " $b -$ число", " $\neg(b = 0)$ ", " $0 < b$ ", " $a = 0$ ". Переменной x_{42} присваивается список элементов набора x_{35} , истинность которых усматривается проверочными операторами из утверждений x_{41} . В нашем случае x_{42} состоит из утверждения " $a -$ число". Переменной x_{43} присваивается конъюнкция утверждений списка x_{35} , не вошедших в x_{42} . В нашем случае - " $0 < a$ ". Переменной x_{44} присваивается дизъюнкция утверждений x_{43} и x_{40} , т.е. " $0 < a \vee a = 0$ ". Эта дизъюнкция обрабатывается нормализатором "нормили" относительно посылок x_{36} , x_{42} . Полученное утверждение x_{46} имеет вид " $0 \leq a$ ". Проверяется, что оно элементарное. Переменной x_{47} присваивается результат подстановки выражения x_{31} вместо переменной x_{30} в заменяемый терм исходной теоремы. Получается утверждение " $a^b = 0$ ". Переменной x_{48} присваивается результат такой же подстановки в конъюнкцию утверждений x_{13} , отличных от x_{15} . В нашем случае - " $a = 0^{1/b}$ ". Переменной x_{49} присваивается объединение списков x_{36} и x_{42} , пополненное утверждением x_{46} . При помощи вспомогательных задач на доказательство проверяется, что каждое из утверждений x_{47} и x_{48} является следствием другого относительно посылок x_{49} . Переменной x_{52} присваивается эквивалентность заменяемой части исходной теоремы конъюнкции утверждений списка x_{13} , в котором x_{15} заменено на x_{24} . Наконец, формируется импликация с антецедентами x_{49} и консеквентом x_{52} , которая обрабатывается оператором "нормтеорема".

Склейка двух теорем

1. Попытка склеить две эквивалентности разрешения относительно неизвестной.

Две эквивалентности с одинаковыми заменяемыми частями склеиваются так, что заменяющей частью становится дизъюнкция утверждений вида (заменяющая часть для подслучая & антецеденты, выделяющие этот подслучай).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acd}(\neg(d = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow c < ad \leftrightarrow d < 0 \ \& \ a < c/d \vee 0 < d \ \& \ c/d < a)$$

из теоремы

$$\forall_{acd}(c < 0 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow a < d/c \leftrightarrow d < ac)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{acd}(0 < d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow c < ad \leftrightarrow c/d < a)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(*a* первыйтерм)". Переменной x9 присваивается переменная *a*, переменной x11 - заменяемый терм. В нашем случае это терм " $d < ac$ ". Проверяется, что все корневые операнды терма x11 неконстантные. В списке вывода ищется отличная от исходной теоремы дополнительная теорема, имеющая характеристику вида "глуб(*X*, *N*)". В нашем случае это "глуб(*a* второйтерм)". Переменной x17 присваивается заменяемый терм дополнительной теоремы. В нашем случае - терм " $c < ad$ ". Проверяется, что длины термов x11 и x17 равны. Переменной x18 присваивается связывающая приставка исходной теоремы, переменной x19 - дополнительной. Проверяется, что первая из них включается в список параметров терма x11, вторая - в список параметров терма x17. Усматривается, что терм x17 получается из терма x11 подстановкой вместо переменных x18 попарно различных переменных x20. Проверяется, что при этой подстановке неизвестная x9 исходной теоремы переводится в неизвестную x21 дополнительной теоремы. Переменной x24 присваивается набор результатов применения подстановки к антецедентам исходной теоремы, обработанных оператором "станд". Переменной x25 присваивается набор антецедентов дополнительной теоремы, обработанных оператором "станд". Напомним, что этот оператор стандартизирует порядок операндов коммутативных операций и симметричных отношений. Переменной x26 присваивается разность наборов x24 и x25, переменной x27 - разность наборов x25 и x24. Проверяется, что обе эти разности одноэлементные. В нашем случае первая из них состоит из утверждения " $d < 0$ ", вторая - из утверждения " $0 < d$ ". Переменной x28 присваивается пересечение наборов x24 и x25. В нашем случае это "*a* - число", "*c* - число", "*d* - число". Решается задача на преобразование, условием которой служит дизъюнкция указанных выше утверждений x26 и x27, а посылками - утверждения x28. Ответ присваивается переменной x30. В нашем случае он имеет вид " $\neg(d = 0)$ ". Проверяется, что x30 - элементарное утверждение. Переменной x31 присваивается результат присоединения его к списку x28. Проверяется, что список антецедентов исходной теоремы не включается в список x31. Переменной x32 присваивается результат подстановки переменных x20 вместо x18 в заменяющий терм исходной теоремы. В нашем случае - " $a < c/d$ ". Если этот терм совпадает с заменяющим термом дополнительной теоремы, то проверяется, что из посылок x31 не усматривается эквивалентность утверждений x26 и x27. Переменной x33 присваивается дизъюнкция конъюнкции утверждений x26, x32 и конъюнкции утверждения x27 с заменяющим термом дополнительной теоремы. В нашем случае - " $d < 0 \ \& \ a < c/d \vee 0 < d \ \& \ c/d < a$ ". Наконец, создается импликация с антецедентами x31, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x17 и x33.

2. Попытка склеить две эквивалентности разрешения относительно неизвестной: усиление антецедентов для их идентификации.

Две эквивалентности с одинаковыми заменяемыми частями склеиваются так, что заменяющей частью становится дизъюнкция утверждений вида (заменяющая часть для подслучая & антецеденты, выделяющие этот подслучай).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(\neg(b = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow a^b < d \leftrightarrow a < d^{1/b} \ \& \ 0 < b \vee b < 0 \ \& \ d^{1/b} < a)$$

из теоремы

$$\forall_{abd}(b < 0 \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow a^b < d \leftrightarrow d^{1/b} < a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abd}(0 < b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq d \rightarrow a^b < d \leftrightarrow a < d^{1/b})$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(a второйтерм)". Переменной x_9 присваивается переменная a , переменной x_{11} - заменяемый терм. В нашем случае это терм " $a^b < d$ ". Далее повторяется начальный отрезок действий предыдущего приема. Для удобства чтения напомним его, корректируя соответственно нашему примеру. Проверяется, что все корневые операнды терма x_{11} неконстантные. В списке вывода ищется отличная от исходной теоремы дополнительная теорема, имеющая характеристику вида "глуб(X, N)". В нашем случае это "глуб(a второйтерм)". Переменной x_{17} присваивается заменяемый терм дополнительной теоремы. В нашем случае - терм " $a^b < d$ ". Проверяется, что длины термов x_{11} и x_{17} равны. Переменной x_{18} присваивается связывающая приставка исходной теоремы, переменной x_{19} - дополнительной. Проверяется, что первая из них включается в список параметров терма x_{11} , вторая - в список параметров терма x_{17} . Усматривается, что терм x_{17} получается из терма x_{11} подстановкой вместо переменных x_{18} попарно различных переменных x_{20} . Проверяется, что при этой подстановке неизвестная x_9 исходной теоремы переводится в неизвестную x_{21} дополнительной теоремы. Переменной x_{24} присваивается набор результатов применения подстановки к антецедентам исходной теоремы, обработанных оператором "станд". Переменной x_{25} присваивается набор антецедентов дополнительной теоремы, обработанных оператором "станд". Далее начинаются отличия от предыдущего приема. Переменной x_{26} присваивается пересечение списков x_{24} и x_{25} . В нашем случае это " $a - \text{число}$ ", " $b - \text{число}$ ", " $d - \text{число}$ ". Переменной x_{27} присваивается разность списков x_{24} и x_{26} , переменной x_{28} - разность списков x_{25} и x_{26} . В нашем случае набор x_{27} состоит из утверждений " $b < 0$ ", " $0 < a$ ", " $0 < d$ "; набор x_{28} - из утверждений " $0 < b$ ", " $0 \leq a$ ", " $0 \leq d$ ". Последовательно просматриваются утверждения списков x_{27} , x_{28} и для каждого из них с помощью справочника поиска теорем "ослабление" определяется его ослабленная версия, принадлежащая противоположному списку. Обе эти версии исключаются из списков x_{27} , x_{28} , причем усиленная версия переносится в список x_{26} . Таким образом, в список x_{26} попадают утверждения $0 < a$ и $0 < d$. В списке x_{27} остается утверждение " $b < 0$ ", в списке x_{28} - " $0 < b$ ". Проверяется, что списки x_{27} , x_{28} одноэлементные. Дизъюнкция их утверждений обрабатывается задачей на преобразование с посылками x_{26} и целью "упростить". Проверяется, что ответ x_{30} (в нашем случае " $\neg(b = 0)$ ") является элементарным утверждением. Он присоединяется к списку x_{26} . Находится результат x_{31} подстановки переменных x_{20} вместо переменных x_{18} в заменяющий терм исходной теоремы. В нашем случае - " $d^{1/b} < a$ ". Переменной x_{32} присваивается дизъюнкция конъюнкции утверждений x_{27} , x_{31}

и конъюнкции утверждения x28 с заменяющим термом дополнительной теоремы. Формируется импликация с антецедентами x26, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x17 и x32. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Исключение простой операции в параметрическом описании.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bde}(b - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow \exists_{af}(d(a^b) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ e(f)) \leftrightarrow \exists_{af}(d(a) \ \& \ 0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ e(f)))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a^b = c \leftrightarrow a = c^{1/b} \ \& \ 0 < c)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(*a* второйтерм)". Переменной x9 присваивается переменная *a*, переменной x11 - заменяемый терм. Проверяется, что он имеет вид равенства некоторой переменной x15 выражению, отличному от переменной. Переменной x14 присваивается вхождение последнего выражения. Проверяется, что каждый операнд операции x14 - переменная либо логический символ. В нашем случае x15 - переменная *c*, x14 - вхождение выражения a^b . Проверяется, что x11 неповторно. Переменной x16 присваивается набор конъюнктивных членов заменяющей части. В нашем случае он состоит из утверждений $a = c^{1/b}$ и $0 < c$. Проверяется, что все эти утверждения элементарны, причем среди них выбирается равенство x17 переменной x9 не содержащему x9 выражению x18. В нашем случае x18 - $c^{1/b}$. Набор антецедентов теоремы разбивается на два поднабора x20, x21. В первом из них собраны все утверждения, содержащие переменную x15, во втором - остальные. В нашем случае x20 состоит из единственного утверждения "*c* - число", x21 - из утверждений "*a* - число", "*b* - число", " $\neg(b = 0)$ ", " $0 < a$ ". Переменной x22 присваивается подсписок списка x21, состоящий из всех утверждений, содержащих переменную x9. В нашем случае x22 - список "*a* - число", " $0 < a$ ". Проверяется, что каждое утверждение списка x20 является следствием утверждений x21, пополненных утверждением x11. Переменной x25 присваивается результат замены в списке x16 утверждения x17 на утверждения списка x20. В нашем случае x25 - список " $0 < c$ ", "*c* - число". Проверяется, что эти утверждения не содержат переменной x9. Составляется список x26, полученный объединением разности списков x21, x22 со списком x25 и с утверждением x17. В нашем случае он состоит из утверждений "*b* - число", " $\neg(b = 0)$ ", " $0 < c$ ", "*c* - число", " $a = c^{1/b}$ ". Проверяется, что все утверждения списка x22 суть следствия утверждений x26. Далее начинается формирование результата вывода. Для этого выбираются три новые переменные - в нашем случае *d*, *e*, *f*. Переменной x28 присваивается результат навешивания квантора существования по x9 и *f* на конъюнкцию утверждений $d(A)$, x22 и $e(f)$. Здесь *A* - подтерм по вхождению x14. В нашем случае получается $\exists_{af}(d(a^b) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ e(f))$. Переменной x29 присваивается результат навешивания квантора существования по x9 и *f* на конъюнкцию утверждения $d(x9)$, результатов замены переменной

x_{15} на x_9 в утверждениях x_{25} и утверждения $e(f)$. В нашем случае получается $\exists_{af}(d(a) \ \& \ 0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ e(f))$. Наконец, формируется импликация, антецедентами которой служат не вошедшие в x_{22} утверждения списка x_{21} , а консеквентом - эквивалентность x_{28} и x_{29} . Эта импликация регистрируется в списке вывода, причем снабжается единственной характеристикой "новпеременные". Эта характеристика означает, что теорема создана только для использования ее в качестве теоремы приема, упрощающего параметрическое описание путем перехода к новым переменным.

2. Группировка в левой части разрешаемого двуместного отношения всех ненулевых членов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow b + ac = 0 \leftrightarrow a = -b/c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow b = ac \leftrightarrow a = b/c)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(а второйтерм)". Переменной x_9 присваивается переменная a , переменной x_{11} - вхождение заменяемой части теоремы, переменной x_{12} - символ по этому вхождению. Если символ x_{12} отличен от равенства, то предпринимается обращение на нем к справочнику "перегруппировка". Иначе - обращение к справочнику "перегруппировка" происходит на символе, являющемся типом значения частей равенства. При успехе переменной x_{13} оказывается присвоена тройка (A, B, C) , означающая, что возможна перегруппировка A - членов операндов рассматриваемого отношения x_{12} из одной части в другую с изменением знака B , причем C - единица операции A . В нашем случае x_{12} - равенство, тип значений его операндов - "число", и x_{13} становится равно тройке (плюс минус 0). Переменной x_{14} присваивается пара операндов по вхождению x_{11} . Значением переменной x_{15} становится тот из них, который содержит x_9 . В нашем случае это ac . Проверяется, что его заголовок отличен от операции, указанной в тройке x_{13} . Переменной x_{16} присваивается оставшийся элемент пары x_{14} . Проверяется, что он представляет собой переменную. Переменной x_{18} присваивается результат применения указанной в x_{13} операции к выражениям x_{15} , x_{16} . В нашем случае получается " $ac + b$ ". Переменной x_{19} присваивается результат замены в операции x_{11} операнда x_{16} на указанную в тройке x_{13} единицу операции, а операнда x_{15} - на x_{18} . Получается утверждение " $0 = ac + b$ ". Находится результат x_{20} подстановки в заменяющую часть теоремы вместо переменной x_{16} этой же переменной со знаком, измененным согласно тройке x_{13} . Получается утверждение " $a = (-b)/c$ ". Такая же подстановка выполняется для антецедентов теоремы, и результатом оказывается список x_{23} . Наконец, формируется импликация с антецедентами x_{23} , консеквент которой - эквивалентность утверждений x_{19} и x_{20} . Восстанавливаются необходимые для сопровождения по о.д.з. посылки, и к результату применяется оператор "нормтеорема".

3. Частичная группировка в левой части разрешаемого двуместного отношения членов противоположной части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow d = b + ac \leftrightarrow a = (d - b)/c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow b = ac \leftrightarrow a = b/c)$$

Начало программы приема дословно воспроизводит начало программы предыдущего приема. Для удобства повторим его.

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(*a* первый терм)". Переменной *x9* присваивается переменная *a*, переменной *x11* - вхождение заменяемой части теоремы, переменной *x12* - символ по этому вхождению. Если символ *x12* отличен от равенства, то предпринимается обращение на нем к справочнику "перегруппировка". Иначе - обращение к справочнику "перегруппировка" происходит на символе, являющемся типом значения частей равенства. При успехе переменной *x13* оказывается присвоена тройка (*A, B, C*), означающая, что возможна перегруппировка *A* - членов операндов рассматриваемого отношения *x12* из одной части в другую с изменением знака *B*, причем *C* - единица операции *A*. В нашем случае *x12* - равенство, тип значений его операндов - "число", и *x13* становится равно тройке (плюс минус 0). Переменной *x14* присваивается пара операндов по вхождению *x11*. Значением переменной *x15* становится тот из них, который содержит *x9*. В нашем случае это *ac*. Проверяется, что его заголовок отличен от операции, указанной в тройке *x13*. Переменной *x16* присваивается оставшийся элемент пары *x14*. Проверяется, что он представляет собой переменную. Переменной *x18* присваивается результат применения указанной в *x13* операции к выражениям *x15, x16*. В нашем случае получается "*ac + b*".

С этого момента начинаются отличия от предыдущего приема. Выбирается новая переменная *x19*. В нашем случае это переменная *d*. Переменной *x20* присваивается равенство этой переменной терму *x18*, с сохранением порядка размещения операндов в исходной теореме. В нашем случае получается "*d = ac + b*". Переменной *x21* присваивается результат применения указанной в тройке *x13* операции к переменной *x19* и результату изменения знака терма *x16*. В нашем случае получается выражение *d - b*. Переменной *x22* присваивается результат подстановки данного выражения в заменяющий терм исходной теоремы вместо переменной *x16*. Получается равенство "*a = (d - b)/c*". Переменной *x23* присваивается эквивалентность утверждений *x20* и *x22*. Переменной *x25* присваивается набор результатов подстановки выражения *x21* вместо переменной *x16* в antecedentes теоремы. Его объединение с утверждениями, образующими сопровождение по о.д.з. для *x23*, присваивается переменной *x26*. Наконец, формируется импликация с antecedентами *x26* и консеквентом *x23*. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Определение случаев вырожденных ограничений на неизвестные

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow b \leq |a| \leftrightarrow (a \leq -b \vee b \leq a) \ \& \ 0 < b \vee b \leq 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow b \leq |a| \leftrightarrow a \leq -b \vee b \leq a)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глуб(a второйтерм)". Переменной x8 присваивается переменная a , переменной x11 - заменяемое утверждение исходной теоремы, переменной x12 - набор антецедентов, переменной x13 - заменяющее утверждение. Проверяется, что оно представляет собой дизъюнкцию. Проверяется, что если переменная x8 входит в какой-либо дизъюнктивный член утверждения x13, то она встречается в каждом конъюнктивном члене этого дизъюнктивного члена. Проверяется, что исходная теорема не имеет других характеристик с заголовком "глуб". Переменной x14 присваивается список всех антецедентов, содержащих x8, переменной x15 - остаток списка антецедентов. Переменной x16 присваивается результат присоединения к x14 всех конъюнктивных членов отрицания утверждения x13. В нашем случае он состоит из утверждений " $a - \text{число}$ " и " $\neg(a \leq -b)$ ", " $\neg(b \leq a)$ ". Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения x15, а условиями - утверждения x16. Она имеет цели "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные a ", "параметры a ", "исключение". Получается ответ x18, имеющий в нашем случае вид " $0 < b$ ". Проверяется, что этот ответ не содержит переменной x8. Переменной x19 присваивается дизъюнкция отрицания утверждения x18 и конъюнкции утверждений x13, x18. Формируется импликация с антецедентами x12, консеквентом которой служит эквивалентность утверждения x11 утверждению x19. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

3.18 Характеристика "глубина"

Характеристикой "глубина(x1 x2)" снабжаются тождества перестановочного типа, уменьшающие глубину переменной x1 до единицы. x2 - направление замены ("первыйтерм" либо "второйтерм").

Обобщение тождества, уменьшающего глубину переменной

1. Обобщение тождества уменьшения глубины переменной путем ввода неповторного внешнего параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(\neg(b = 0) \ \& \ \neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < e \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e^{c \log_a a/b} = a^{c \log_a e/b})$$

из теоремы

$$\forall_{acde}(\neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < e \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e^{c \log_a a} = a^{c \log_a e})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \cdot (a/b) = (ae)/b)$$

Исходная теорема имеет характеристику "глубина(a второйтерм)". Переменной x10 присваивается ее заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий. В заменяемом терме выбирается вхождение x12 двуместной операции x13. В нашем

случае - произведения " $c \log_d a$ ". Справочник поиска теорем "перестановки" находит по символу x_{13} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "нормализация(N)". Переменной x_{19} присваивается заменяемый (в смысле направления N) терм дополнительной теоремы. В нашем случае - терм " $e \cdot (a/b)$ ". Проверяется, что он имеет заголовок x_{13} . Среди корневых операндов терма x_{19} выбирается такой операнд x_{20} , который представляет собой двуместную операцию от двух различных переменных x_{22} , x_{23} . В нашем случае - a/b . Проверяется, что эта операция имеет единицу по одному из своих операндов. Проверяется также, что другой корневой операнд x_{24} терма x_{19} представляет собой переменную x_{25} . Среди операндов операции x_{12} выбирается тот, номер которого равен номеру операнда x_{24} (в случае коммутативной операции x_{13} - любой операнд). Проверяется, что этот операнд x_{26} - переменная x_{27} , имеющая единственное вхождение в заменяемый терм x_{10} . В нашем случае x_{27} - переменная c . Переменной x_{28} присваивается вхождение другого операнда операции x_{12} . В нашем случае - терма $\log_d a$. Переменной x_{29} присваивается та из переменных x_{22} , x_{23} , по которой операция x_{20} не имеет единицы, переменной x_{30} - та, по которой она имеет единицу. Соответственно, в нашем случае x_{29} - a , x_{30} - b . Переменной x_{31} присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. Проверяется, что его заголовок отличен от символа x_{13} , причем число корневых операндов равно 2. Переменной x_{32} присваивается тот корневой операнд терма x_{31} , который представляет собой операцию x_{13} от двух переменных. В нашем случае это ae . Проверяется, что одна из переменных - x_{29} , причем в случае некоммутативного x_{13} она расположена под тем же номером, что операнд x_{20} операции x_{19} . Другая переменная должна быть равна x_{25} . Переменной x_{35} присваивается оставшийся корневой операнд терма x_{31} . Проверяется, что он представляет собой переменную x_{30} . Переменной x_{36} присваивается заголовок терма x_{31} . В нашем случае - "дробь".

Далее предпринимается проверка избыточности нового параметра. В нашем случае - проверка того, что вхождение x_{12} не является числителем дроби, знаменателем которой служит переменная, не имеющая других вхождений в терм x_{10} .

После проверки избыточности выбирается не входящая в исходную теорему переменная x_{37} (в нашем случае - b). Формируется терм x_{38} , полученный соединением при помощи операции x_{36} подтерма x_{12} и новой переменной x_{37} . Номер операнда x_{37} - тот же, что номер операнда x_{35} в операции x_{31} . Для нашего примера имеем терм $c \log_d a/b$. Переменной x_{39} присваивается результат замены вхождения x_{12} в терм x_{10} на терм x_{38} . Получается терм $e^{c \log_d a/b}$. Определяется результат x_{40} подстановки в подтерм x_{20} переменных x_{27} , x_{37} вместо переменных x_{29} , x_{30} . Получается терм c/b . Переменной x_{41} присваивается результат подстановки в терм x_{11} выражения x_{40} вместо переменной x_{27} . Получается терм $a^{(c/b) \cdot \log_d e}$. Переменной x_{43} присваивается набор результатов подстановки в antecedentes дополнительной теоремы переменных x_{27} , x_{37} и подтерма x_{28} вместо переменных x_{29} , x_{30} , x_{25} . Получаются утверждения " $\neg(b = 0)$ ", " c - число", " b - число", " $\log_d a$ - число". Переменной x_{44} присваивается объединение списка x_{43} с результатами подстановки выражения x_{40} вместо переменной x_{27} в antecedentes исходной теоремы.

Далее выражение x_{39} обрабатывается нормализаторами общей стандартиза-

ции относительно посылок x44, чтобы снова проверить избыточность нового параметра: он не должен оказаться операндом ассоциативно-коммутативной операции, имеющей другую неповторную переменную своим операндом.

Наконец, формируется импликация с антецедентами x44, консеквентом которой служит равенство выражений x41 и x39. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

2. Обобщение тождества уменьшения глубины переменной путем ввода неповторного дополнительного параметра операнда.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acde}(\neg(c - 1 = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(a) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(e) - \text{even}) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d^a \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a - \text{rational} \ \& \ e - \text{rational} \rightarrow e \log_c(d^a) = \log_c(d^{ae}))$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(\neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \log_c d = \log_c(d^e))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow (a^b)^c = a^{bc})$$

Характеристика исходной теоремы - "глубина(e первый терм)". Смысл ее обобщения заключается в том, что основание степени d в новой теореме не обязано быть положительным. При этом возможно хотя бы частичное извлечение показателя степени из-под логарифма.

Вначале действия полностью совпадают с действиями предыдущего приема. Так как в нашем примере термы другие, повторим эту начальную часть.

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий. В заменяемом терме выбирается вхождение x12 двуместной операции x13. В нашем случае - степени d^e . Справочник поиска теорем "перестановки" находит по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "нормализация(N)". Переменной x19 присваивается заменяемый (в смысле направления N) терм дополнительной теоремы. В нашем случае - терм " $(a^b)^c$ ". Проверяется, что он имеет заголовок x13. Среди корневых операндов терма x19 выбирается такой операнд x20, который представляет собой двуместную операцию от двух различных переменных x22, x23. В нашем случае - a^b . Проверяется, что эта операция имеет единицу по одному из своих операндов. Проверяется также, что другой корневой операнд x24 терма x19 представляет собой переменную x25. Среди операндов операции x12 выбирается тот, номер которого равен номеру операнда x24 (в случае коммутативной операции x13 - любой операнд). Проверяется, что этот операнд x26 - переменная x27, имеющая единственное вхождение в заменяемый терм x10. В нашем случае x27 - переменная d . Переменной x28 присваивается вхождение другого операнда операции x12. В нашем случае - переменной e . Переменной x29 присваивается та из переменных x22, x23, по которой операция x20 не имеет

единицы, переменной x_{30} - та, по которой она имеет единицу. Соответственно, в нашем случае $x_{29} - a$, $x_{30} - b$. Переменной x_{31} присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы.

Далее начинаются отличия от предыдущего приема. Проверяется, что терм x_{31} имеет своим заголовком символ x_{13} . Переменной x_{32} присваивается корневой операнд терма x_{31} , имеющий тот же номер, что операнд x_{20} терма x_{19} (в случае коммутативного x_{13} - любой корневой операнд терма x_{31}). Проверяется, что по вхождению x_{32} расположена переменная x_{29} . Находится другой корневой операнд x_{33} терма x_{31} . В нашем случае - bc . Проверяется, что его заголовком служит коммутативная операция x_{34} . В наше случае - умножение. Если по вхождению x_{28} расположена та же операция x_{34} , то проверяется отсутствие у нее операнда - неповторной в терме x_{10} переменной. Выбирается не входящая в исходную теорему переменная x_{35} . В нашем случае - a . Переменной x_{36} присваивается результат соединения операцией x_{34} этой переменной и подтерма x_{28} . В нашем случае имеем ae . Переменной x_{37} присваивается результат замены вхождения x_{28} в терм x_{10} на терм x_{36} . В нашем случае - $\log_c(d^{ae})$. Переменной x_{38} присваивается результат замены в подтерме x_{20} переменных x_{29} , x_{30} на x_{27} , x_{35} . Имеем d^a . Переменной x_{39} присваивается результат подстановки в терм x_{11} выражения x_{38} вместо переменной x_{27} . В нашем случае - $e \log_c(d^a)$. Переменной x_{41} присваивается набор результатов подстановки в antecedentes дополнительной теоремы переменных x_{27} , x_{35} и подтерма x_{28} вместо переменных x_{29} , x_{30} , x_{25} . Переменной x_{42} присваивается список, полученный добавлением списка x_{41} к набору результатов подстановки терма x_{38} вместо переменной x_{27} в antecedentes исходной теоремы. Как и в предыдущем приеме, проверяется избыточность добавления нового параметра. Затем создается импликация с antecedентами x_{42} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{37} и x_{39} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

3.19 Характеристика "группировка"

Характеристикой "группировка(x_1)" снабжаются эквивалентности, позволяющие группировать в одной части бинарного отношения две переменные, ранее расположенные в разных частях. x_1 - направление замены.

Применение дополнительного тождества для упрощения заменяемого термина

1. Попытка опрокинуть эквивалентность перегруппировки путем сильного упрощения заменяемого термина.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ e \subseteq d \rightarrow \text{непересек}(c, e) \leftrightarrow \text{непересек}(e, c \cap d))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(c, a \cap b) \leftrightarrow \text{непересек}(a, b \cap c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ c \subseteq b \rightarrow b \cap c = c)$$

Характеристика исходной теоремы - "группировка(второйтерм)". Заметим, что она также имеет характеристику "группировка(первыйтерм)". Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Просматриваются символы более чем одноместных операций и отношений в x10, и составляется список x11 ссылок на всевозможные теоремы, определяемые по этим символам справочниками поиска теорем "констнорм", "тожд", "поглощается", "поглощает".

В заменяемом терме рассматривается вхождение x13 более чем одноместного символа x14. В нашем случае - вхождение выражения $a \cap b$. В списке x11 выбирается указанная выше дополнительная теорема. Процедура "тождвывод" использует эту теорему для преобразования вхождения x13. Получается следующий результат x21:

$$\forall_{cde}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ e \subseteq d \rightarrow \text{непересек}(c, e) \leftrightarrow \text{непересек}(e, c \cap d))$$

К нему последовательно применяются операторы "Спускоперандов", "демо-дификация", "полныепосылки", выполняющие предварительную стандартизацию. Окончательная стандартизация выполняется оператором "нормтеорема". В нашем случае все эти действия изменений не создают. Проверяется, что антецеденты полученной теоремы не содержат переменных, не входящих в консеквент, что число переменных этой теоремы не больше, чем у исходной и что ни один из антецедентов не имеет более двух переменных. Затем теорема регистрируется в списке вывода.

2. Попытка сильно упростить одну из частей нейтральной эквивалентности для извлечения импликации проверочного оператора.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ b \subseteq e \rightarrow \text{непересек}(b, c \setminus e))$$

из теоремы

$$\forall_{acd}(a - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(a, c \setminus d) \leftrightarrow \text{непересек}(c, a \setminus d))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ b \subseteq c \rightarrow b \setminus c = \emptyset)$$

Характеристика исходной теоремы - "группировка(второйтерм)". Переменной x8 присваивается набор антецедентов. Просматриваются символы операций и отношений в консеквенте теоремы, и составляется список x10 ссылок на всевозможные теоремы, определяемые по этим символам справочниками поиска теорем "констнорм", "тожд", "поглощается", "поглощает", "констцелое". Поочередно рассматриваются два случая: когда заменяемый терм левый и когда он правый. Исходная ориентация теоремы игнорируется. Указатель направления замены присваивается переменной x11. В заменяемой части эквивалентности рассматривается вхождение x13 символа x14, после которого идет открывающая скобка. В нашем случае x13 - вхождение разности $a \setminus d$ в правую часть

эквивалентности. В списке x10 выбирается указанная выше дополнительная теорема. Оператор "тождвывод" использует ее для преобразования вхождения x13. Получается теорема x21, которая в нашем случае имеет следующий вид:

$$\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ b \subseteq e \rightarrow \text{непересек}(b, c \setminus e) \leftrightarrow \text{непересек}(c, \emptyset))$$

Переменной x22 присваивается результат обработки данной теоремы операторами "Спускоперандов" и "демодификация". В нашем случае они не изменяют теоремы. Проверяется, что если исходная теорема имела характеристику "общнорм", то список переменных теоремы x22 не длинее списка переменных исходной теоремы. Поочередно рассматриваются два случая: либо переменной x26 присваивается результат пополнения списка антецедентов теоремы x22 ее заменяемым термом, а переменной x27 - заменяющий терм, либо переменной x26 присваивается результат пополнения списка антецедентов теоремы x27 отрицанием заменяемого термина, а переменной x27 - отрицание заменяющего термина. Переменной x28 присваивается результат обработки списка x26 оператором "нормантецеденты" относительно параметров термина x27. Проверяется, что после этого не возникают антецеденты, имеющие более двух параметров. Операнды консеквента обрабатываются операторами общей стандартизации. В нашем случае список x28 оказывается состоящим из утверждений "b - set", "c - set", "e - set", "b \subseteq e". Утверждение x27 - "непересек(b, c \setminus e)". Переменной x29 присваивается импликация с антецедентами x28 и консеквентом x27. Предпринимается проверка ее избыточности для использования в проверочных операторах.

Логические следствия теоремы

1. Вывод импликации из эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ \neg(b \setminus c \subseteq e) \rightarrow \neg(b \subseteq c \cup e))$$

из теоремы

$$\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow b \subseteq c \cup e \leftrightarrow b \setminus c \subseteq e)$$

Переменной x9 присваивается набор антецедентов исходной теоремы. Проверяется, что он непуст. Переменным x11, x12 присваиваются (в произвольном порядке) части эквивалентности. Проверяется, что ни одна из них не имеет заголовка "не". Отрицания x13, x14 утверждений x11, x12 упрощаются относительно посылок x9 задачей на преобразование. Проверяется, что оба они имеют заголовок "не". В качестве результата выдается импликация, антецеденты которой суть x9 и x13, а консеквент - x14.

3.20 Характеристика "группировки"

Характеристикой "группировки" снабжаются тождества и эквивалентности, обе части которых - элементарные неповторные термы, имеющие одно и то же множество переменных.

Логические следствия теоремы

1. Вывод из тождества вынесения наружу отрицания тождества двойной перегруппировки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow (-a) \cdot (-c) = ac)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow -ab = (-a) \cdot b)$$

Проверяется, что консеквент теоремы - равенство вида $f(x, t) = h(f(x, r))$, где f - коммутативная операция, h - операция типа "отрицание", т.е. двойное ее применение не изменяет значения. x - переменная, не входящая в термы t, r . В нашем случае f - умножение, h - минус, r - " a ", t - " $-a$ ", x - переменная b . Переменной x_{21} присваивается список переменных выражения r . Проверяется, что он совпадает со списком переменных выражения t . Выбирается набор x_{22} новых переменных, имеющий ту же длину, что и набор x_{21} . В нашем случае он состоит из переменной c . Переменным x_{23} и x_{24} присваиваются результаты замены переменных x_{21} на x_{22} в термах t и r соответственно. В нашем случае они суть " $-c$ " и " c ". Переменной x_{25} присваивается равенство результата соединения операцией f термов t , x_{23} результату соединения этой операцией термов r , x_{24} . В нашем случае оно имеет вид " $(-a) \cdot (-c) = a \cdot c$ ". Переменной x_{29} присваивается объединение подмножества не содержащих переменной x антецедентов теоремы с результатами замены x_{21} на x_{22} в утверждениях этого подмножества. Переменной x_{30} присваивается набор результатов подстановки терма x_{23} вместо переменной x в антецеденты теоремы, содержащие x . К объединению списков x_{29} , x_{30} применяется процедура "нормантецеденты"; результат присваивается переменной x_{31} . Наконец, формируется импликация с антецедентами x_{31} и консеквентом x_{25} .

2. Извлечение из перегруппировочной эквивалентности с равенством в одной части тождества общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - c = 0 \rightarrow c - b = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow c - b = 0 \leftrightarrow b - c = 0)$$

Проверяется, что одна из частей эквивалентности представляет собой равенство. Другая часть переносится в антецеденты, а равенство - остается в консеквенте. Проверяется, что полученная таким образом теорема приобретает характеристику "нормализация", причем другие характеристики отбрасываются.

3. Извлечение из перегруппировочной эквивалентности простой импликации для проверочного оператора.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ c - a < 0 \rightarrow 0 < a - c)$$

из теоремы

$$\forall_{ac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow c - a < 0 \leftrightarrow 0 < a - c)$$

Проверяется, что в консеквенте расположена эквивалентность. Поочередно рассматриваются случаи, когда переменным x15, x16 присваиваются либо части этой эквивалентности, либо их отрицания. Проверяется, что утверждение x15 согласовано с шаблоном входных данных некоторого проверочного оператора. Переменной x20 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка, полученного добавлением к антецедентам теоремы утверждения x16. Проверяется, что в наборе x20 отсутствует равенство переменной терму, не содержащему эту переменную. Формируется импликация, антецеденты которой суть x20, а консеквент - x15. Проверяется ее избыточность как теоремы приема проверочного оператора.

4. Извлечение из перегруппировочной эквивалентности простой импликации, позволяющей усматривать истинность либо ложность утверждения с помощью проверочного оператора.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ b \leq a \rightarrow \neg(a < b))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \neg(a < b) \leftrightarrow b \leq a)$$

Отличие от предыдущего приема заключается лишь в том, что к антецедентам добавляется утверждение x15, а консеквентом становится утверждение x16. Проверяется отсутствие существенных антецедентов исходной теоремы. Проверяется избыточность: проверочный оператор не должен усматривать истинность консеквента из антецедентов. Основанные на теоремах данной ячейки вывода приемы при этом заблокированы.

Применение дополнительного тождества для упрощения заменяемого термина

1. Попытка сильно упростить одну из частей нейтральной эквивалентности для извлечения импликации проверочного оператора.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \ \& \ 0 < b \rightarrow -b < 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow -b < a \leftrightarrow -a < b)$$

и дополнительной теоремы

$$-0 = 0$$

Просматриваются символы консеквента, после которых идет открывающая скобка, и по каждому такому символу справочники поиска теорем "констнорм", "тожд", "поглощается", "поглощает", "констцелое" заполняют накопитель x10 ссылками на дополнительные теоремы. Одна из частей консеквента рассматривается как заменяемая, другая - как заменяющая (обрабатываются оба варианта). В заменяемой части рассматривается вхождение x13 символа операции либо отношения x14. В нашем случае заменяемый терм правый, а x14 - "минус". Из накопителя x10 выбирается дополнительная теорема, один из операндов равенства которой имеет заголовок x14. В нашем случае дополнительная теорема указана выше. Оператор "тождвывод" использует дополнительную теорему для преобразования вхождения x13. Получается результат x21, который в нашем случае имеет вид $\forall_b(0 - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow -b < 0 \leftrightarrow 0 < b)$. После обработки операторами "Спускоперандов" и "демодификация" теорема x21 преобразуется в теорему x22. В нашем случае они совпадают. Проверяется, что консеквент теоремы x22 имеет заголовок "эквивалентно" и что либо исходная теорема не имела характеристики "общнорм", либо число переменных теоремы x22 не больше числа переменных исходной теоремы. Поочередно рассматриваются случаи, когда переменной x26 присваивается список антецедентов теоремы x22, пополненный ее заменяемым термом, а переменной x27 - заменяющий терм, либо переменной x26 присваивается список антецедентов, пополненный отрицанием заменяемого терма, а переменной x27 - отрицание заменяющего терма. Переменной x28 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка x26. Проверяется отсутствие в нем утверждения, имеющего более двух параметров. Операнды утверждения x27 обрабатываются относительно x28 нормализаторами общей стандартизации. Формируется импликация с антецедентами x28 и консеквентом x27. Проверяется ее избыточность для проверочного оператора. При регистрации теоремы допускаются лишь характеристики "спуск", "Спуск", "легковидеть". Таким образом, полученная теорема действительно может быть использована в проверочном операторе.

2. Попытка сильно упростить одну из частей нейтральной эквивалентности для получения эквивалентности общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow -a = 0 \leftrightarrow a = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow b = -a \leftrightarrow -b = a)$$

и дополнительной теоремы

$$-0 = 0$$

Начало программы данного приема совпадает с началом программы предыдущего приема. После того, как получена теорема x22 и выполнены связанные с ней проверки, начинаются различия.

В нашем примере теорема x22 имеет вид " $\forall_a(0 - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow 0 = -a \leftrightarrow 0 = a)$ ". К этой теореме применяется оператор "нормтеорема", который и выдает окончательный результат.

3. Попытка использовать перегруппировочное тождество для варьирования декомпозирующей эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(b\text{-set} \ \& \ c\text{-слово} \ \& \ d\text{-слово} \rightarrow \text{непересек}(b, \{; c; d\}) \leftrightarrow \text{непересек}(b, \{; c\}) \ \& \ \text{непересек}(b, \{; d\}))$$

из теоремы

$$\forall_{cd}(c\text{-слово} \ \& \ d\text{-слово} \rightarrow \{; c\} \cup \{; d\} = \{; d; c\});$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bef}(b\text{-set} \ \& \ e\text{-set} \ \& \ f\text{-set} \rightarrow \text{непересек}(b, e \cup f) \leftrightarrow \text{непересек}(b, e) \ \& \ \text{непересек}(b, f))$$

Поочередно рассматриваются два случая для выбора в теореме заменяемого и заменяющего термина. Проверяется, что заголовок консеквента - равенство. По заголовку x13 заменяемого термина справочник поиска теорем "разделяет" находит указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "и(...)" либо "или(...)". В заменяемой части дополнительной теоремы берется вхождение символа x13. В нашем случае - вхождение подтерма "e ∪ f". Оператор "тождвывод" находит результат x21 преобразования этого вхождения при помощи исходной теоремы. В нашем случае получаем:

$$\forall_{bcd}(b\text{-set} \ \& \ \{; c\}\text{-set} \ \& \ \{; d\}\text{-set} \ \& \ c\text{-слово} \ \& \ d\text{-слово} \rightarrow \text{непересек}(b, \{; c; d\}) \leftrightarrow \text{непересек}(b, \{; c\}) \ \& \ \text{непересек}(b, \{; d\})).$$

Далее применяется оператор "нормтеорема".

3.21 Характеристика "группмножитель"

Характеристикой "группмножитель(x1)" сопровождаются тождества, выполняющие группировку сложных операций. x1 - направление замены.

Использование дополнительной эквивалентности для варьирования тождества

1. Попытка варьирования тождества группировки сложных выражений с помощью эквивалентности, варьирующей равенство.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ \neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ a\text{-число} \ \& \ b\text{-число} \ \& \ c\text{-число} \rightarrow \log_a b = \log_a c \log_c b)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ \neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ a\text{-число} \ \& \ b\text{-число} \ \& \ c\text{-число} \rightarrow \log_a b / \log_a c = \log_c b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow b = ac \leftrightarrow a = b/c)$$

Характеристика исходной теоремы - "группмножитель(второйтерм)". Проверяется, что заголовок заменяемого выражения - двуместная операция x12 (в нашем случае "дробь"). Справочник поиска теорем "группировка" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождывывод" применяет ее для преобразования консеквента исходной теоремы. Результат обрабатывается оператором "нормтеор".

Вывод путем решения вспомогательной задачи на описание

1. Попытка получения эквивалентности для преобразования двух уравнений, имеющих каждое два сложных подтерма, в два уравнения, имеющих каждое один сложный подтерм.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow c = \sin a \cos b \ \& \ d = \sin b \cos a \leftrightarrow \sin(a + b) = c + d \ \& \ \sin(a - b) = c - d)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \sin(b - c) = \sin b \cos c - \cos b \sin c)$$

Характеристика теоремы - "группмножитель(первыйтерм)". Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что наиболее сложный подтерм заменяющего терма - он сам. Заменяемый терм небесповторен. Переменной x12 присваивается список максимальных бесповторных подтермов заменяемого терма. В нашем случае он состоит из выражений $\sin a \cos b$, $\cos a \sin b$. Проверяется, что список x12 имеет длину 2. Отбрасываются, если они есть, корневые одноместные операции термов этого списка. Проверяется, что элементы списка различны и что списки их свободных переменных одинаковы. Проверяется, что каждая переменная заменяемой части расположена внутри подтерма, представленного в списке x12. В текущем списке вывода выбирается отличная от текущей дополнительная теорема, имеющая характеристику "группмножитель(...)". В нашем примере она указана выше. Проверяется, что все логические символы заменяемого терма исходной теоремы (кроме, быть может, общелогических) входят в заменяемый терм x18 дополнительной теоремы. Переменной x19 присваивается набор максимальных бесповторных подтермов терма x18. В нашем случае он состоит из выражений $\sin b \cos c$, $-\sin c \cos b$. Проверяется, что длина списка x19 равна 2. У его элементов отбрасываются, если они есть, корневые одноместные операции. В нашем случае будет отброшен минус. Проверяется, что списки свободных переменных термов набора x19 одинаковы. Проверяется, что каждая переменная заменяемой части дополнительной теоремы расположена внутри подтерма, представленного в этом списке. Выбирается такое выражение x20 списка x19, что существует подстановка S вместо его параметров x21,

преобразующая его в первое выражение списка x12. Переменной x22 присваивается список подставляемых термов. В нашем случае x20 - " $\sin b \cos c$ ". Проверяется, что данная подстановка переводит оставшееся выражение x23 списка x19 во второе выражение списка x12. Выбирается набор x25 из четырех переменных, не входящих в исходную теорему. Для нашего примера это набор c, d, e, f . Переменной x26 присваивается выражение, полученное из терма x10 заменой первого выражения списка x12 на c , а второго - на d . В нашем случае имеем выражение $c + d$. Переменной x27 присваивается выражение, полученное из терма x18 заменой подтерма x20 на c , а подтерма x23 - на d . Имеем выражение $c - d$. Переменной x28 присваивается пара, образованная равенством терма x26 переменной e и равенством терма x27 переменной f . Решается задача на описание, список условий которой есть x28, единственная посылка - логическая константа "истина", а цели - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные cd ", "одз", "упростить". Ответ присваивается переменной x30. В нашем случае он имеет вид " $d = (e - f)/2 \ \& \ c = (e + f)/2 \ \& \ f - \text{число} \ \& \ e - \text{число}$ ". Проверяется, что для каждой неизвестной среди конъюнктивных членов ответа имеется равенство, определяющее ее значение. Составляется объединение x32 списка антецедентов исходной теоремы со списком результатов применения подстановки S к антецедентам дополнительной теоремы. Переменной x33 присваивается конъюнкция равенств выражений списка x12 переменным c, d . В нашем случае она имеет вид " $\sin a \cos b = c \ \& \ \cos a \sin b = d$ ". Переменной x34 присваивается результат применения подстановки S к заменяющему терму дополнительной теоремы, переменной x35 - конъюнкция равенства заменяющего терма исходной теоремы выражению x26 и равенства выражения x34 выражению x27. В нашем случае он имеет вид " $\sin(a + b) = c + d \ \& \ \sin(a - b) = c - d$ ". Наконец, создается импликация с антецедентами x32, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x33 и x35. Она обрабатывается операторами "Полныепосылки" и "нормтеорема". Результат сопровождается единственной характеристикой "группреш($a \ b$ второйтерм)".

- Использование двух тождеств группировки для получения тождества, варьирующего сложный терм.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin a \cos b = (\sin(a + b) + \sin(a - b))/2)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \sin(b - c) = \sin b \cos c - \sin c \cos b)$$

Характеристика теоремы - "группмножитель(первыйтерм)". Начало программы данного приема дословно совпадает с программой предыдущего приема. Однако, для удобства чтения повторим его. Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий. Проверяется, что заменяемый терм небесповторный, причем в число самых сложных подтермов заменяемого терма входит он сам. Переменной x12 присваивается список максимальных

бесповторных подтермов заменяемого терма. В нашем случае он состоит из выражений $\sin a \cos b$, $\cos a \sin b$. Проверяется, что список x12 имеет длину 2. Отбрасываются, если они есть, корневые одноместные операции термов этого списка. Проверяется, что элементы списка различны и что списки их свободных переменных одинаковы. Проверяется, что каждая переменная заменяемой части расположена внутри подтерма, представленного в списке x12. В текущем списке вывода выбирается отличная от текущей дополнительная теорема, имеющая характеристику "группмножитель(...)". В нашем примере она указана выше. Проверяется, что все логические символы заменяемого терма исходной теоремы (кроме, быть может, общелогических) входят в заменяемый терм x18 дополнительной теоремы. Переменной x19 присваивается набор максимальных бесповторных подтермов терма x18. В нашем случае он состоит из выражений $\sin b \cos c$, $-\sin c \cos b$. Проверяется, что длина списка x19 равна 2. У его элементов отбрасываются, если они есть, корневые одноместные операции. В нашем случае будет отброшен минус. Проверяется, что списки свободных переменных термов набора x19 одинаковы. Проверяется, что каждая переменная заменяемой части дополнительной теоремы расположена внутри подтерма, представленного в этом списке. Выбирается такое выражение x20 списка x19, что существует подстановка S вместо его параметров x21, преобразующая его в первое выражение списка x12. Переменной x22 присваивается список подставляемых термов. В нашем случае x20 - " $\sin b \cos c$ ". Проверяется, что данная подстановка переводит оставшееся выражение x23 списка x19 во второе выражение списка x12. Выбирается набор x25 из четырех переменных, не входящих в исходную теорему. Для нашего примера это набор c, d, e, f . Переменной x26 присваивается выражение, полученное из терма x10 заменой первого выражения списка x12 на c , а второго - на d . В нашем случае имеем выражение $c + d$. Переменной x27 присваивается выражение, полученное из терма x18 заменой подтерма x20 на c , а подтерма x23 - на d . Имеем выражение $c - d$. Переменной x28 присваивается пара, образованная равенством терма x26 переменной e и равенством терма x27 переменной f . Решается задача на описание, список условий которой есть x28, единственная посылка - логическая константа "истина", а цели - "полный", "явное", "прямой ответ", "неизвестные cd ", "одз", "упростить". Ответ присваивается переменной x30. В нашем случае он имеет вид " $d = (e - f)/2 \ \& \ c = (e + f)/2 \ \& \ f - \text{число} \ \& \ e - \text{число}$ ". Проверяется, что для каждой неизвестной среди конъюнктивных членов ответа имеется равенство, определяющее ее значение. Составляется объединение x32 списка антецедентов исходной теоремы со списком результатов применения подстановки S к антецедентам дополнительной теоремы.

Далее начинаются отличия от предыдущего приема. Переменной x34 присваивается результат применения подстановки S к заменяющему терму дополнительной теоремы. В нашем случае это выражение " $\sin(a - b)$ ". Рассматриваются два случая: либо x36 присваивается переменная c , а x37 - первый терм пары x12, либо x36 присваивается переменная d , а x37 - второй терм пары x12. Для каждого случая выводится своя теорема. В нашем случае x36 - c , x37 - $\sin a \cos b$. Выбирается конъюнктивный член x38 утверждения x30, имеющий вид равенства переменной x36. В нашем случае это $c = (e + f)/2$. Находится результат x39 подстановки вместо переменных e, f выражений x11, x34 в правую часть равенства x38. Для нашего примера имеем $(\sin(a + b) + \sin(a - b))/2$. Создается

импликация с антецедентами x32, консеквентом которой служит равенство выражения x37 выражению x39. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Применение дополнительного тождества для упрощения заменяемого термина

1. Упрощение заменяемой части с помощью дополнительного тождества для получения тождества, упрощающего сложное выражение с неизвестными после навешивания внешней операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(\neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \log_d(cd^e) = e + \log_d c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \rightarrow \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ae}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \log_a(a^e) = e)$$

Характеристика теоремы - "группмножитель(первыйтерм)". Переменной x11 присваивается набор корневых операндов заменяемой части, т.е. пара " $\log_a b$ ", " $\log_a c$ ". Переменной x12 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что она неповторная и что все термы списка x11 тоже неповторные. Проверяется, что они образуют декомпозицию термина x12 по его переменным. В x12 имеется единственный подтерм x14 наибольшей сложности. Переменной x15 присваивается его заголовок. В нашем случае - "логарифм". Каждый из термов списка x11 имеет единственный подтерм наибольшей сложности, причем их заголовки равны x15. Справочник поиска теорем "Сокращение" определяет по символу x15 указанную выше дополнительную теорему. В ее заменяемой части рассматривается вхождение x25 символа x15. Процедура "тождвывод" осуществляет преобразование этого вхождения с помощью исходной теоремы. Результат присваивается переменной x26. В нашем случае он имеет следующий вид:

$$\forall_{cde}(d - \text{число} \ \& \ d^e - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < d \ \& \ \neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < d^e \ \& \ 0 < c \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \log_d(d^e \cdot c) = e + \log_d c)$$

Переменной x27 присваивается результат обработки утверждения x26 оператором "нормтеорема". Он совпадает с указанной выше итоговой теоремой вывода. Однако, перед регистрацией в списке вывода, предпринимается специальная характеристика теоремы. Рассматривается набор корневых операндов ее заменяющей (в нашем примере - левой) части. Выбирается тот операнд x34, чья оценка сложности больше оценок сложности остальных операндов. В нашем случае - cd^e . Предпринимается обращение к процедуре "неизвконтексты", определяющей набор фильтров задачи на описание, указывающий ситуацию, в которой сложность относительно неизвестных операнда x34 больше сложности относительно неизвестных заменяющей части теоремы x27. В нашем случае этот набор имеет вид "тип(описать)", "условие", "не(известно(e))", "или(и(известно(d))

не(контекст(сомножитель(х6 с)не(известно(х6)) не(контекст(вид(х6 степень(х7 х8)) известно(х7)))))) и(не(известно(d)) заголовок(c 1)))". Фильтры упрощаются процедурой "преобрфильтр". По результату упрощения создается характеристика "смнеизв(второйтерм 2 и(тип(описать) условие не(известно(e))или(и(известно(d) не(контекст(сомножитель(х6 с)не(известно(х6)) не(контекст(вид(х6 степень(х7 х8)) известно(х7)))))) и(не(известно(d)) заголовок(c 1))))". Затем происходит регистрация теоремы x27, которой придается единственная указанная выше характеристика.

2. Использование тождества "предвумножение" для получения тождества свертки константного выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aefgijk}(\neg(a^j i^k - 1 = 0) \ \& \ 0 < e \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < i \ \& \ a - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \ \rightarrow (f + g \log_a e) / (j + k \log_a i) = \log_{a^j i^k}(a^f e^g))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ \neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \rightarrow \log_a b / \log_a c = \log_c b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abef}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \rightarrow \log_a(a^e b^f) = e + f \log_a b)$$

Дополнительная теорема имеет характеристику "предвумножение(первыйтерм, и(дробнаявеличина(a)целое(e) дробнаявеличина(b)целое(f)), $a^e b^f$)". Она означает, что переход справа налево позволяет свернуть константный терм с целочисленными e, f и рациональными a, b , содержащий единственную сложную операцию (логарифм), в терм, заголовком которого служит данная операция, а операндами - константы. Предполагается, что свертка использует нормализаторы общей стандартизации.

Характеристика исходной теоремы - "группмножитель(второйтерм)". Переменной x11 присваивается заменяемый терм, переменной x12 - набор его подтермов, имеющих максимальную сложность. Проверяется, что этот набор имеет ровно два элемента. В нашем случае - " $\log_a b$ " и " $\log_a c$ ". Переменной x13 присваивается набор вхождений термов x12 в заменяемую часть теоремы. Проверяется, что он тоже имеет ровно два элемента. Переменной x14 присваивается заменяющий терм теоремы. Он имеет единственный подтерм x16 максимальной сложности. Оценки сложности терма x16 и термов набора x12 равны. Термы набора x12 имеют один и тот же заголовок x18. Справочник поиска теорем "предвумножение" определяет по символу x18 указанную выше дополнительную теорему. Ее переменные переобозначаются на переменные, не входящие в исходную теорему. Результат присваивается переменной x23. В нашем примере получаем:

$$\forall_{defg}(\neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < e \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \rightarrow \log_d(d^f e^g) = f + g \log_d e)$$

Затем переменные дополнительной теоремы переобозначаются еще раз - так, чтобы они не входили в исходную теорему и теорему x23. Результат x24 в нашем случае имеет следующий вид:

$$\forall_{hijk}(\neg(h-1=0) \ \& \ 0 < h \ \& \ 0 < i \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \rightarrow \log_h(h^j i^k) = j + k \log_h i)$$

Переменным x26 и x28 присваиваются заменяющие термы теоремы x23 и x24. В нашем случае - $\log_d(d^f e^g)$ и $\log_h(h^j i^k)$. Переменным x29 и x30 присваиваются, соответственно первый и второй подтермы по вхождению набора x13. В нашем случае - $\log_a b$ и $\log_a c$. Предпринимается унификация терма x26 с x29, а x28 - с x30. Список x31 переменных унификации образован всеми параметрами унифицируемых термов. В нашем случае - $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$. Набор подставляемых унифицирующей подстановкой S термов присваивается переменной x32. В нашем случае это термы $a, a^f e^g, a^j i^k, a, e, f, g, a, i, j, k$. Переменной x33 присваивается результат замены в исходной теореме вхождений x13 на заменяемые термы теоремы x23, x24. В нашем случае он имеет следующий вид:

$$\forall_{abc}(\neg(a-1=0) \ \& \ \neg(c-1=0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow (f + g \log_d e)/(j + k \log_h i) = \log_c b)$$

Определяется результат x35 применения подстановки S к консеквенту импликации x33. В нашем случае имеем:

$$(f + g \log_d e)/(j + k \log_h i) = \log_{a^j i^k}(a^f e^g)$$

Переменной x37 присваивается результат обработки процедурой "нормантецеденты" результатов применения подстановки S к утверждениям объединенного списка антецедентов исходной теоремы и теорем x23, x24. В нашем примере он состоит из утверждений " $\neg(a^j i^k - 1 = 0)$ ", " $0 < e$ ", " $e - \text{число}$ ", " $f - \text{число}$ ", " $g - \text{число}$ ", " $\neg(a-1=0)$ ", " $0 < a$ ", " $0 < i$ ", " $a - \text{число}$ ", " $i - \text{число}$ ", " $j - \text{число}$ ", " $k - \text{число}$ ". Формируется импликация x38 с антецедентами x37 и консеквентом x35. Для сопровождения этой итоговой импликации характеристикой "нормконст(второйтерм и(дробнаявеличина(a)целое(j)дробнаявеличина(i)целое(k)целое(f) дробнаявеличина(e) целое(g)))" используется процедура "вычтерм". Выведенная теорема может быть использована для свертки константной дроби с логарифмами в единственный константный логарифм.

Вывод теоремы, используемой приемами вывода теорем в качестве вспомогательной

1. Вывод теоремы для справочника "Сокращение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}() - \text{even}) \ \& \ b + c = 1 \rightarrow a^b a^c = a)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}() - \text{even}) \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$$

Напомним, что "Сокращение" - справочник поиска теорем. По заданному логическому символу f он находит кванторные тождества без существенных посылок, у которых заменяемый терм имеет вид $f(B_1, B_2)$, где каждый из термов B_1, B_2 и заменяющий терм B неповторны, причем термы B_1 и B_2 имеют единственную общую переменную, и эта переменная не входит в B . Дополнительно находятся тождества, у которых заменяющий терм - переменная, а заменяемый имеет более одной переменной.

Характеристика исходной теоремы - "группмножитель(второйтерм)". Проверяется, что она имеет характеристику "нормализация(...)". Переменной x10 присваивается заменяющий терм. Проверяется, что он неповторный. Проверяется, что заголовком заменяемого терма служит коммутативная и ассоциативная операция с двумя операндами. Переменной x13 присваивается набор ее операндов. В нашем случае - a^b и a^c . Проверяется, что он образует декомпозицию терма x10 относительно переменных. Проверяется, что оценки сложности утверждений x13 равны друг другу и больше 3. Проверяется, что заголовок x15 выражения x10 некоммутативен. Определяется, что операция x15 (в нашем случае - степень) имеет единицу x17 по своему операнду с номером x18. В нашем случае $x17 = 1, x18 = 2$. Переменной x20 присваивается корневой операнд выражения x10 с номером x18. В нашем случае - $b+c$. Проверяется, что его список переменных x20 не менее чем двухэлементный и что каждый терм списка x13 пересекается с x20. Переменной x21 присваивается равенство x20 и x17. В нашем случае - $b+c = 1$. Находится результат x23 замены подтерма x20 терма x10 на x17. В нашем случае он имеет вид a^1 . Определяется результат x25 обработки выражения x23 нормализаторами общей стандартизации. Проверяется, что он представляет собой переменную. Наконец, формируется итоговая импликация, antecedentes которой получены добавлением x21 к antecedентам исходной теоремы, а consequent имеет вид равенства заменяемого терма исходной теоремы переменной x25.

3.22 Характеристика "декомпозиции"

Характеристикой "декомпозиции" снабжаются квазипротоколы, представляющие собой дизъюнкцию шаблонов утверждений, допускающих декомпозицию либо сильное упрощение относительно неизвестных. Они сопровождаются также характеристиками "указатель(...)" и "см(...)", уточняющими контекст.

Непосредственное использование шаблона для создания теоремы приема

1. Непосредственная декомпозиция утверждения с неизвестными.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы приема

$$\forall_{nxy}(n - \text{целое} \ \& \ x - \text{целое} \ \& \ y - \text{целое} \ \& \ \neg(n = 0) \rightarrow xy = n \leftrightarrow \exists_{ab}(ab = n \ \& \ x = a \ \& \ y = b))$$

из шаблона

$$xy = n$$

Этот шаблон имеет характеристики "декомпозиции", "см(контекст(обл(х4)заголовок(х4 целое натуральное)первыйсимвол(х4 х5) неизвестная(х5)входит(х5 корень)) не(известно(х)) не(известно(у)) целое(н) не(заголовок(н 0))легковидеть(целое(х)) легковидеть(целое(у)))". Он указывает на возможность декомпозиции уравнения с произведением неизвестных множителей в левой части и целочисленной константой в другой.

Прежде всего, проверяется, что шаблон не имеет своим заголовком символ "или". Переменной х8 присваивается его характеристика "см(...)", а переменной х9 - набор расположенных в ней фильтров. Переменной х10 присваивается список переменных, охарактеризованных в фильтрах как не известные. В нашем случае - x, y . Внутри шаблона рассматривается вхождение логического символа х12. В нашем случае - символа "умножение". На этом символе выполняется обращение к справочнику "вычисл", регистрирующему в наборе х13 всевозможные способы реализации утверждения либо выражения, содержащего х12, предусмотренные компилятором ГЕНОЛОГа. Каждый способ представлен набором (F, A_1, \dots, A_m, T) , где F - вид вычисляемого оператора либо операторного выражения; A_i - термы "вход($x_i t_i$)", "выход($x_i t_i$)", "выход(t)", уточняющие типы значения входных и выходных переменных x_i либо тип значения вычисляемого выражения; T - оператор либо операторное выражение ЛОСа, используемые для вычисления. В списке х13 выбирается набор х15, и переменной х16 присваивается его первый элемент. В нашем случае - равенство " $ab = c$ ". Набор х15 ссылается на оператор ЛОСа, перечисляющий разложения целого числа c в произведение двух целочисленных сомножителей a, b . Переменной х17 присваивается список переменных термина х16, после чего процедура "идентификация" находит подстановку S вместо переменных х17, переводящую х16 в рассматриваемый шаблон. Переменной х19 присваивается набор результатов применения S к элементам "вход" набора х15. В нашем случае получается единственный терм "вход(n десчисло)". Проверяется, что его переменные не пересекаются со списком х10. Проверяется также, что каждый элемент списка х19 имеет вид "вход(X десчисло)", причем в наборе х13 содержится одно из утверждений "десчисло(X)", "целое(X)", "натуральное(X)". Проверяется, что в наборе х13 имеются лишь такие фильтры "легковидеть(A)", все переменные которых содержатся в списке х10. Переменной х20 присваивается список корневых операндов фильтров "легковидеть" набора х13. К ним присоединяются прочие элементы списка фильтров, все переменные которых содержатся среди параметров термов х19. Подтверждения вида "заголовок(A 0)" заменяются на "равно(A 0)". В нашем случае х20 состоит из утверждений " x - целое", " y - целое", " n - целое", " $\neg(n = 0)$ ". Переменной х21 присваивается список всех утверждений набора х20, имеющих параметр из набора х10, переменной х22 - остаток списка х20. Предпринимается попытка доказать, что утверждение х23 вида "конечное(класс(х10 (х21 и х2)))" является следствием утверждений х22. В нашем случае х23 имеет вид "конечное(set_{xy}(x - целое & y - целое & $xy = n$))", х22 - " n - целое" и " $\neg(n = 0)$ ". Переменной х25 присваивается список переменных, не входящих в исходный шаблон и его характеристику х8, длина которого равна длине списка х10. В нашем случае имеем список a, b . Переменной х26 присваивается результат замены в исходном шаблоне переменных х10 на х25. Получаем $ab = n$. Переменной х27 присваивается эквивалентность исходного шаблона квантору существования по

x25, навешенному на конъюнкцию утверждения x26 и равенств переменных x10 соответствующим переменным x25. В нашем примере имеем эквивалентность " $xy = n \leftrightarrow \exists_{ab}(ab = n \ \& \ x = a \ \& \ y = b)$ ". Формируется импликация x28 с антецедентами x20 и консеквентом x27. Она сопровождается характеристикой "перечисление(x10 x29 второйтерм)", где x29 - конъюнкция всех фильтров набора x9, не пересекающихся с переменными x10. В нашем случае эта характеристика имеет вид "перечисление(x y и(контекст(обл(x4) заголовок(x4 целое натуральное) первыйсимвол(x4 x5) неизвестная(x5) входит(x5 корень)) целое(n) не(заголовок(n 0))) второйтерм)".

- Использование нормализатора приведения к заданным заголовкам для подготовки декомпозиции утверждения с неизвестными (при отсутствии характеристики "минимум").

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы приема

$$\forall_{abc}(a = c - b \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow b = c \leftrightarrow a = 0)$$

из шаблона

$$axy/b = 0 \ \vee \ ax^c/b = 0$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow b = c \leftrightarrow c - b = 0).$$

Рассматриваемый шаблон имеет характеристики "декомпозиции", "см(не(известно(x)) не(известно(y)))", "указатель(единица(1 a b) заменазнака(минус a))". Результирующая теорема имеет характеристику "Заголовки(видумножение второйтерм)", означающую, что она создана для приема, декомпозирующего условие задачи на описание при помощи нормализатора "видумножение". Эта характеристика дополняется характеристикой "см(или(контекст(вид(a дробь(умножение(x4 x7 x8)x5)) не(известно(x7)) не(известно(x8)) единица(1 x4 x5) заменазнака(минус x4)) контекст(вид(a дробь(умножение(x4 степень(x7 x6)) x5)) не(известно(x7)) единица(1 x4 x5) заменазнака(минус x4))))". Прием будет выписывать разность частей уравнения, обрабатывать ее нормализатором "видумножение" и проверять, что результат a - произведение либо степень с неизвестными, равенство которой нулю декомпозируется в более простые уравнения.

Переменной x8 присваивается набор дизъюнктивных членов исходного шаблона. Проверяется, что все его термы неповторны. Переменной x9 присваивается первый элемент набора x8. В нашем случае - $axy/b = 0$. Рассматривается неоднобуквенный корневой операнд x11 терма x9. Проверяется, что все остальные операнды однобуквенные. Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. В нашем случае - "умножение". На этом символе предпринимается обращение к справочнику "нормзаголовков", определяющему список нормализаторов приведения к заголовкам, одним из которых служит символ x12. Выбирается конкретный такой нормализатор x16, и переменной x17 присваивается список заголовков, на получение которых он ориентирован. В нашем случае - "умножение", "степень", "дробь". Проверяется, что все операции

внутри подтерма x_{11} принадлежат списку x_{17} . Проверяется, что все остальные элементы набора x_8 аналогичны первому элементу: их заголовок и количество корневых операндов те же, что у x_9 ; на позиции, соответствующей x_{11} , расположен неоднобуквенный подтерм, все символы которого принадлежат списку x_{17} , а прочие корневые операнды равны соответствующим корневым операндам терма x_9 . Проверяется, что исходный шаблон не имеет характеристики "минимум(...)". Выбирается новая переменная x_{19} (в нашем случае - переменная d). Переменной x_{20} присваивается результат замены в терме x_9 вхождения x_{11} на переменную x_{19} . В нашем случае получается $d = 0$. Проверяется, что терм x_{20} имеет единственную свободную переменную x_{19} и что число его корневых операндов больше единицы. Определяется раздел оглавления базы приемов, к которому относятся символ x_{12} (в нашем случае - "элементарная алгебра"). Просматриваются теоремы x_{25} этого раздела, имеющие характеристику "группировка(N)" либо "усмгруппа(N)" и представляющие собой кванторные импликации. В нашем случае x_{25} - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x_{29} присваивается заменяющий терм эквивалентности x_{25} . В нашем случае - " $c - b = 0$ ". Проверяется, что он неповторный. Усматривается, что этот терм представляет собой результат подстановки в терм x_{20} вместо переменной x_{19} некоторого терма T . В нашем случае - терма $c - b$. Переменной x_{31} присваивается заменяемый терм эквивалентности x_{25} . В нашем случае - " $b = c$ ". Проверяется, что он неповторный и все его корневые операнды - переменные. Выбирается переменная x_{32} , не входящая в теорему x_{25} . В нашем случае - переменная a . Переменной x_{33} присваивается результат замены в терме x_{20} переменной x_{19} на переменную x_{32} . В нашем случае - " $a = 0$ ". Формируется импликация x_{34} , антецеденты которой получаются присоединением равенства x_{32} терму T к антецедентам теоремы x_{25} . Ее консеквент - эквивалентность утверждений x_{31} и x_{33} . Далее начинается формирование характеристик, сопровождающих новую теорему x_{34} . Переменной x_{35} присваивается набор неоднобуквенных корневых операндов термов списка x_8 . В нашем случае он состоит из термов axy/b и ax^c/b . Переменной x_{36} присваиваются характеристики "см", "указатель" исходного шаблона. В нашем случае они приведены выше. Выбирается набор переменных, не входящих в теорему x_{34} , имеющий ту же длину, что набор переменных исходного шаблона. Список составленных из них однобуквенных термов присваивается переменной x_{39} . В нашем случае - x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 . Переменной x_{40} присваивается набор результатов переобозначения переменных исходного шаблона на переменные x_{39} в термах списка x_{35} . В нашем случае получается пара термов "дробь(умножение(x_4 x_7 x_8) x_5)", "дробь(умножение(x_4 степень(x_7 x_6)) x_5)". Аналогично, определяется список x_{41} результатов такого же переобозначения переменных в термах набора x_{36} . В нашем случае имеем: "см(не(известно(x_7)) не(известно(x_8)))", "указатель(единица(1 x_4 x_5) заменазнака(минус x_4))". Далее предпринимается просмотр элементов списка x_{40} и для каждого из них формируется фильтр "контекст(...)" с использованием списка x_{41} . В нашем случае имеем фильтры "контекст(вид(a дробь(умножение(x_4 x_7 x_8) x_5)) не(известно(x_7)) не(известно(x_8)) единица(1 x_4 x_5) заменазнака(минус x_4))", "контекст(вид(a дробь(умножение(x_4 степень(x_7 x_6)) x_5)) не(известно(x_7)) единица(1 x_4 x_5) заменазнака(минус x_4))". Наконец, предпринимается регистрация результата x_{34} , сопровождаемого характеристиками "Заголовки(x_{16} второйтерм)" и "см(D)", где D - дизъюнкция указанных выше фильтров "контекст(...)".

3. Использование нормализатора приведения к заданным заголовкам для подготовки декомпозиции утверждения с неизвестными (при наличии характеристики "минимум").

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы приема

$$\forall_{abn}(b = a \rightarrow a = n \leftrightarrow b = n)$$

из шаблона

$$xy = n$$

Этот шаблон уже встречался выше. Он имеет характеристики "декомпозиции", "см(контекст(обл(x4)заголовок(x4 целое натуральное)первыйсимвол(x4 x5) неизвестная(x5)входит(x5 корень)) не(известно(x)) не(известно(y)) целое(n) не(заголовок(n 0))легковидеть(целое(x)) легковидеть(целое(y)))", "минимум(n)", "Тип(целое)". Шаблон указывает на возможность декомпозиции уравнения с произведением неизвестных множителей в левой части и целочисленной константой в другой. Характеристика "минимум(n)" указывает на предпочтительность варианта срабатывания с наименьшим возможным значением модуля целочисленного параметра n . Характеристика "Тип(целое)" указывает, что шаблон декомпозиции относится только к ситуациям, когда все переменные и все промежуточные выражения уравнения имеют тип "целое". Прием, для которого строится теорема, предпринимает попытку разложения на множители левой (неконстантной) части уравнения для последующего перечисления вариантов значений множителей.

Начало программы приема совпадает с программой предыдущего приема вывода. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_8 присваивается набор дизъюнктивных членов исходного шаблона. Проверяется, что все его термы неповторны. Переменной x_9 присваивается первый элемент набора x_8 . В нашем случае - $xy = n$. Рассматривается недобуквенный корневой операнд x_{11} терма x_9 . Проверяется, что все остальные операнды однобуквенные. Переменной x_{12} присваивается символ по вхождению x_{11} . В нашем случае - "умножение". На этом символе предпринимается обращение к справочнику "нормзаголовок", определяющему список нормализаторов приведения к заголовкам, одним из которых служит символ x_{12} . Выбирается конкретный такой нормализатор x_{16} , и переменной x_{17} присваивается список заголовков, на получение которых он ориентирован. В нашем случае - "умножение", "степень", "дробь". Проверяется, что все операции внутри подтерма x_{11} принадлежат списку x_{17} . Проверяется, что все остальные элементы набора x_8 аналогичны первому элементу: их заголовок и количество корневых операндов те же, что у x_9 ; на позиции, соответствующей x_{11} , расположен недобуквенный подтерм, все символы которого принадлежат списку x_{17} , а прочие корневые операнды равны соответствующим корневым операндам терма x_9 .

Далее начинаются различия. Проверяется, что набор x_8 одноэлементный и что количество корневых операндов его единственного элемента x_9 равно 2. Переменной x_{20} присваивается однобуквенный корневой операнд терма x_9 . В нашем

случае - переменная n . Переменной x_{21} присваивается объединение списка переменных исходного шаблона и переменных его характеристики "см". В нашем случае он состоит из переменных d, e, n, x, y . Переменной x_{22} присваивается пара переменных, не входящих в список x_{21} . В нашем случае - переменные a, b . Переменной x_{23} присваивается результат замены в терме x_9 вхождения x_{11} на первую из переменных списка x_{22} , а переменной x_{24} - результат аналогичной замены на вторую из этих переменных. В нашем случае x_{23} имеет вид " $a = n$ ", x_{24} - вид " $b = n$ ". Переменной x_{25} присваивается импликация, антецедентом которой служит равенство переменных x_{22} , а консеквентом - эквивалентность утверждений x_{23}, x_{24} . При помощи характеристики "см" исходного шаблона создается следующая характеристика импликации x_{25} : "см(контекст(вид(b умножение(x_{23} x_{24})) не(известно(x_{23})) не(известно(x_{24})) легковидеть(целое(x_{23})) легковидеть(целое(x_{24}))контекст(обл(x_4)заголовок(x_4 целое натуральное) первыйсимвол(x_4 x_5)неизвестная(x_5) входит(x_5 корень)) целое(n)не(заголовок(n 0))))". Кроме нее, эта импликация сопровождается характеристикой "Заголовки(видумножение второйтерм)".

4. Использование нормализатора приведения к заданным заголовкам для подготовки декомпозиции консеквента кванторной импликации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы приема

$$\forall_{deg}(d(f) = g(f) \rightarrow \forall_f(e(f) \rightarrow d(f) = 0) \leftrightarrow \forall_f(e(f) \rightarrow g(f) = 0))$$

из шаблона

$$axy/b = 0 \vee ax^c/b = 0$$

Этот шаблон и его характеристики уже рассматривались выше. Прием, для которого выводится теорема, предпринимает попытку разложить на множители левую часть консеквента кванторной импликации для его последующей декомпозиции относительно варьруемой переменной.

Начало программы приема совпадает с программой предыдущего приема вывода. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_8 присваивается набор дизъюнктивных членов исходного шаблона. Проверяется, что все его термы неповторны. Переменной x_9 присваивается первый элемент набора x_8 . В нашем случае - $axy/b = 0$. Рассматривается неоднобуквенный корневой операнд x_{11} терма x_9 . Проверяется, что все остальные операнды однобуквенные. Переменной x_{12} присваивается символ по вхождению x_{11} . В нашем случае - "умножение". На этом символе предпринимается обращение к справочнику "нормзаголовок", определяющему список нормализаторов приведения к заголовкам, одним из которых служит символ x_{12} . Выбирается конкретный такой нормализатор x_{16} , и переменной x_{17} присваивается список заголовков, на получение которых он ориентирован. В нашем случае - "умножение", "степень", "дробь". Проверяется, что все операции внутри подтерма x_{11} принадлежат списку x_{17} . Проверяется, что все остальные элементы набора x_8 аналогичны первому элементу: их заголовок и количество корневых операндов те же, что у x_9 ; на позиции, соответствующей x_{11} , расположен неоднобуквенный подтерм, все символы которого принадлежат списку x_{17} , а прочие корневые операнды равны соответствующим корневым операндам терма x_9 .

Далее начинаются различия. Проверяется, что исходный шаблон не имеет характеристики "минимум(...)". Выбирается новая переменная x_{19} (в нашем случае - переменная d). Переменной x_{20} присваивается результат замены в терме x_9 вхождения x_{11} на переменную x_{19} . В нашем случае получается $d = 0$. Проверяется, что терм x_{20} имеет единственную свободную переменную x_{19} и что число его корневых операндов больше единицы. Переменной x_{21} присваивается тройка переменных, отличных от x_{19} и от переменных исходного шаблона. В нашем случае это переменные e, f, g . Переменным x_{22}, x_{23} и x_{24} присваиваются термы $e(f), d(f)$ и $g(f)$. Переменным x_{25} и x_{26} присваиваются результаты замены вхождения x_{11} в терм x_9 на выражения x_{23}, x_{24} . Получаются равенства $d(f) = 0$ и $g(f) = 0$. Формируется импликация x_{27} , связанные переменные которой суть e, d, g , антецедент - равенство x_{23} и x_{24} , а консеквент - эквивалентность двух кванторных импликаций. Эти импликации имеют связанную переменную f и антецедент x_{22} . Консеквентом первой из них служит x_{25} , второй - x_{26} . Эта импликация и является результатом вывода. Она сопровождается характеристиками "импликанты(видумножение второйтерм)" и "или(контекст(вид($g(f), axy/b$) не(известно(x)) не(известно(y)) единица(1 $a b$) заменазнака(минус a)) контекст(вид($g(f), ax^c/b$) не(известно(x)) единица(1 $a b$) заменазнака(минус a)))".

Использование дополнительной эквивалентности для извлечения теоремы приема из шаблона

1. Группировка условий и применение нормализатора приведения к заданным заголовкам для подготовки декомпозиции утверждения с неизвестными.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы приема

$$\forall_{abcde}(e = a + c - b - d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a = b \rightarrow c = d \leftrightarrow e = 0)$$

из шаблона

$$axy/b = 0 \ \vee \ ax^c/b = 0$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a = b \rightarrow c = d \leftrightarrow a + c - b - d = 0)$$

Этот шаблон и его характеристики уже рассматривались выше. Прием, для которого выводится теорема, предпринимает попытку вычесть два уравнения, сгруппировав в левой части все ненулевые члены, и разложить эту левую часть на множители для последующей декомпозиции.

Начало программы приема совпадает с программой предыдущего приема вывода. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_8 присваивается набор дизъюнктивных членов исходного шаблона. Проверяется, что все его термы неповторны. Переменной x_9 присваивается первый элемент набора x_8 . В нашем случае - $axy/b = 0$. Рассматривается неоднобуквенный корневой операнд x_{11} терма x_9 . Проверяется, что все остальные

операнды однобуквенные. Переменной x_{12} присваивается символ по вхождению x_{11} . В нашем случае - "умножение". На этом символе предпринимается обращение к справочнику "нормзаголовков", определяющему список нормализаторов приведения к заголовкам, одним из которых служит символ x_{12} . Выбирается конкретный такой нормализатор x_{16} , и переменной x_{17} присваивается список заголовков, на получение которых он ориентирован. В нашем случае - "умножение", "степень", "дробь". Проверяется, что все операции внутри подтерма x_{11} принадлежат списку x_{17} . Проверяется, что все остальные элементы набора x_8 аналогичны первому элементу: их заголовок и количество корневых операндов те же, что у x_9 ; на позиции, соответствующей x_{11} , расположен неоднобуквенный подтерм, все символы которого принадлежат списку x_{17} , а прочие корневые операнды равны соответствующим корневым операндам терма x_9 . Проверяется, что исходный шаблон не имеет характеристики "минимум(...)". Выбирается новая переменная x_{19} (в нашем случае - переменная d). Переменной x_{20} присваивается результат замены в терме x_9 вхождения x_{11} на переменную x_{19} . В нашем случае получается $d = 0$. Проверяется, что терм x_{20} имеет единственную свободную переменную x_{19} и что число его корневых операндов больше единицы.

Далее начинаются различия. Определяется раздел, к которому относится символ x_{12} . В нашем случае - "элементарная алгебра". Просматриваются теоремы x_{25} этого раздела, имеющие характеристику "группировка(N)" либо "усмгруппа(N)". В нашем случае x_{25} - указанная выше дополнительная теорема. Проверяется, что ее консеквент имеет заголовок "эквивалентно", причем неповторный заменяющий терм x_{29} является результатом подстановки в терм x_{20} вместо переменной x_{19} некоторого терма t . В нашем случае - терма $a + c - b - d$. Переменной x_{31} присваивается заменяемый терм теоремы x_{25} . В нашем случае - $c = d$. Проверяется, что он неповторный, и что его корневые операнды - переменные. Выбирается переменная x_{32} , не входящая в теорему x_{25} . В нашем случае - переменная e . Переменной x_{33} присваивается результат замены в терме x_{20} переменной x_{19} на переменную x_{32} . В нашем случае получается $e = 0$. Переменной x_{34} присваивается импликация, антецеденты которой суть антецеденты теоремы x_{25} , к которым добавлено равенство x_{32} терму t . Консеквент ее - эквивалентность x_{31} и x_{33} . Далее формируются характеристики, с которыми будет зарегистрирована теорема x_{25} . В нашем примере - "неизмножители(6)" (указание на антецедент, идентифицируемый со вторым уравнением), "оператор(видумножение)", "см(или(контекст(вид(e дробь(умножение(x_6 x_9 x_{10}) x_7))не(известно(x_9))не(известно(x_{10}))единица(1 x_6 x_7) заменазнака(минус x_6)) контекст(вид(e дробь(умножение(x_6 степень(x_9 x_8)) x_7))не(известно(x_9))единица(1 x_6 x_7) заменазнака(минус x_6))))))".

2. Группировка условий и применение нормализатора приведения к заданным заголовкам для подготовки сильного упрощения относительно неизвестных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы приема

$$\forall_{abcde}(e = a + c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a = b \rightarrow c = d \leftrightarrow e = b + d)$$

из шаблона

$$ax^b/c = d$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcd}(a-\text{число} \ \& \ b-\text{число} \ \& \ c-\text{число} \ \& \ d-\text{число} \ \& \ a = b \rightarrow c = d \leftrightarrow a+c = b+d)$$

Рассматриваемый шаблон имеет характеристики "декомпозиции", "см(не(известно(x))известно(a)известно(b)известно(c) известно(d))", "указатель(единица(1 a c) заменазнака(минус a))". Он определяет вид уравнения, допускающего исключение степени неизвестного выражения. Прием, основанный на выводимой теореме, предпринимает попытку сложений уравнений для усмотрения степенного выражения в левой части.

Начало программы приема почти совпадает с программой предыдущего приема вывода. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_8 присваивается набор дизъюнктивных членов исходного шаблона. Проверяется, что все его термы неповторны. Переменной x_9 присваивается первый элемент набора x_8 . В нашем случае - $ax^b/c = d$. Рассматривается неоднобуквенный корневой операнд x_{11} терма x_9 . Проверяется, что все остальные операнды однобуквенные. Переменной x_{12} присваивается символ по вхождению x_{11} . В нашем случае - "дробь". На этом символе предпринимается обращение к справочнику "нормзаголовок", определяющему список нормализаторов приведения к заголовкам, одним из которых служит символ x_{12} . Выбирается конкретный такой нормализатор x_{16} , и переменной x_{17} присваивается список заголовков, на получение которых он ориентирован. В нашем случае - "умножение", "степень", "дробь". Проверяется, что все операции внутри подтерма x_{11} принадлежат списку x_{17} . Проверяется, что все остальные элементы набора x_8 аналогичны первому элементу: их заголовок и количество корневых операндов те же, что у x_9 ; на позиции, соответствующей x_{11} , расположен неоднобуквенный подтерм, все символы которого принадлежат списку x_{17} , а прочие корневые операнды равны соответствующим корневым операндам терма x_9 . Проверяется, что набор x_8 одноэлементный и что количество корневых операндов его единственного элемента x_9 равно 2. Переменной x_{20} присваивается однобуквенный корневой операнд терма x_9 . В нашем случае - переменная d . Определяется раздел, к которому относится символ x_{12} . В нашем случае - "элементарная алгебра". Просматриваются теоремы x_{25} этого раздела, имеющие характеристику "усмгруппа(N)". В нашем случае x_{25} - указанная выше дополнительная теорема. Проверяется, что ее консеквент имеет заголовок "эквивалентно". Переменной x_{29} присваивается заменяемая часть эквивалентности. Проверяется, что она неповторна. В нашем случае x_{29} имеет вид $a + c = b + d$.

Далее начинаются различия. Проверяется, что число корневых операндов терма x_{29} равно 2. Переменной x_{30} присваивается вхождение того корневого операнда, который расположен так же, как операнд x_{11} терма x_9 . Переменной x_{31} присваивается вхождение другого операнда, переменной x_{32} - терм по вхождению x_{31} . В нашем случае x_{30} - вхождение левой части равенства x_{29} ; x_{32} имеет вид $b + d$. Проверяется, что терм x_{32} неконстантный. Переменной x_{33} присваивается заменяемая часть эквивалентности x_{25} . В нашем случае - $c = d$. Проверяется, что эта часть неповторна и что все ее корневые операнды - переменные. Выбирается переменная x_{34} , не входящая в теорему x_{25} . В нашем

случае - переменная e . Если в список характеристик $x3$ исходного шаблона входит элемент "минимум(...)", то переменной $x5$ присваивается импликация, antecedentes которой получаются присоединением к списку antecedентов теоремы $x25$ равенства переменной $x4$ подтерму по вхождению $x30$ и утверждения $x33$. Консеквентом ее служит результат R замены вхождения $x30$ в равенство $x29$ на переменную $x34$. Если элемента "минимум(...)" нет, то утверждение $x33$ к antecedентам импликации $x5$ не присоединяется, а консеквент - эквивалентность $x33$ и R . В нашем примере характеристика "минимум(...)" отсутствует. Пример, где она имеется, рассматривается в следующем пункте. Далее формируются характеристики, которыми сопровождается полученная теорема $x35$. В нашем примере они таковы: "неизвмножители(6)", "оператор(видумножение)", "см(контекст(вид(e дробь(умножение($x6$ степень($x10$ $x7$)) $x8$)) не(известно($x10$)) известно($x6$) известно($x7$) известно($x8$) единица(1 $x6$ $x8$) заменазнака(минус $x6$)) известно(b) известно(d))".

3. Группировка посылок и применение нормализатора приведения к заданным заголовкам для вывода следствия, допускающего декомпозицию относительно неизвестных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы приема

$$\forall_{abcde}(e = a + c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a = b \ \& \ c = d \rightarrow e = b + d)$$

из шаблона

$$xy = n$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a = b \rightarrow c = d \leftrightarrow a + c = b + d)$$

Этот шаблон уже встречался выше. Он указывает на возможность декомпозиции уравнения с произведением неизвестных множителей в левой части и целочисленной константой в другой. Характеристика "минимум(n)" указывает на предпочтительность варианта срабатывания с наименьшим возможным значением модуля целочисленного параметра n .

Программа данного приема практически полностью совпадает с программой предыдущего приема. Отличия - лишь в других значениях переменных в рассматриваемом примере. Значением $x9$ служит терм " $xy = n$ ", $x12$ - символ "умножение", значением переменной $x20$ служит переменная n . В данном случае шаблон имеет характеристику "минимум", поэтому результат $x35$ формируется иначе, чем выше. Однако, способ его построения уже был описан в предыдущем пункте. Он сопровождается характеристиками "Разложмн(6 7)" (номера идентифицируемых с посылками antecedентов), "оператор(видумножение)", "см(контекст(вид(e умножение($x9$ $x10$)) не(известно($x9$)) не(известно($x10$)) легковидеть(целое($x9$)) легковидеть(целое($x10$))) контекст(обл($x6$) заголовок($x6$ целое натуральное) первыйсимвол($x6$ $x7$) неизвестная($x7$) входит($x7$ корень)) не(заголовок(терм($b + d$ 0))целое(b) целое(d))".

Использование дополнительного тождества для извлечения теоремы приема из шаблона

1. Использование тождества приведения к заданным заголовкам и перегруппировки констант между частями двуместного отношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы приема

$$\forall_{abcde}(a\text{—целое} \ \& \ b\text{—целое} \ \& \ c\text{—целое} \ \& \ d\text{—целое} \ \& \ e\text{—целое} \rightarrow e = ad+bc+bd \leftrightarrow (a+b)(c+d) = e+ac)$$

из шаблона

$$xy = n$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcd}(a\text{—число} \ \& \ b\text{—число} \ \& \ c\text{—число} \ \& \ d\text{—число} \rightarrow (a+b)(c+d) = ac+bc+ad+bd)$$

Шаблон тот же, что в предыдущем пункте.

Проверяется, что шаблон неповторный и имеет ровно два корневых операнда, один из которых - переменная x11. Среди характеристик шаблона находится элемент "Тип(T)". В нашем случае T - символ "целое". Другой корневой операнд шаблона - операция от двух переменных. Ее символ присваивается переменной x14. В нашем случае - "умножение". На этом символе предпринимается обращение к справочнику "нормзаголовков", определяющему список нормализаторов приведения к заголовкам, одним из которых служит символ x14. Выбирается конкретный такой нормализатор x18. В нашем случае - "видумножение". Определяется раздел, к которому относится символ x14 ("элементарная алгебра"), и просматриваются всевозможные теоремы x23 этого раздела, имеющие характеристику "нормзаголовков(x18 ...)". В нашем случае x23 - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x27 присваивается заменяющая часть дополнительной теоремы, переменной x28 - заменяемая. В нашем случае x27 - $(a+b)(c+d)$, x28 - $ac+bc+ad+bd$. При помощи справочника "тип" определяется тип x30 значений операции x14. В нашем случае - "число". Справочник "перегруппировка" по типу x30 находит тройку (плюс минус 0), указывающую, что для равенств с суммой возможно перенесение слагаемых в противоположную часть с изменением их знака, причем 0 - единица операции "плюс". Первый элемент тройки присваивается переменной x32. Проверяется, что x28 имеет своим заголовком операцию x32. Переменной x33 присваивается набор корневых операндов терма x28. Проверяется, что он имеет не менее трех элементов, но не более пяти. Проверяется, что если все параметры выражений x27, x28 имеют тип T, то и сами эти выражения имеют данный тип. Выбирается элемент x34 списка x33. В нашем случае - ac . Переменной x35 присваивается остаток данного списка. Проверяется, что каждый элемент списка x35 имеет переменную, не входящую в x34. Выбирается новая переменная x36. В нашем случае - e . Переменной x37 присваивается результат соединения выражений x35 операцией x32. В нашем случае - $bc+ad+bd$. Проверяется, что результат применения к x37 оператора x18 тоже имеет заголовок x32. Переменной x38 присваивается равенство x37 и x36, переменной x39 - равенство x27 результату соединения операцией x32 переменной x36 и выражения x34. В

нашем случае x_{38} имеет вид $bc + ad + bd = e$, $x_{39} - (a + b)(c + d) = e + ac$. Переменной x_{40} присваивается эквивалентность утверждений x_{38} и x_{39} . Формируется список x_{43} , получаемый добавлением к антецедентам теоремы x_{23} утверждений " $T(x)$ ", где x - параметр эквивалентности x_{40} . В нашем случае добавляются утверждения "целое(a)", "целое(b)", "целое(c)", "целое(d)", "целое(e)". Наконец, формируется импликация с антецедентами x_{43} и конsequentом x_{40} . Результат обработки ее оператором "нормтеорема" присваивается переменной x_{44} . При регистрации в списке вывода эта теорема снабжается единственной характеристикой "уравнвариант(и(контекст(обл(x_6) заголовок(x_6 целое натуральное) первыйсимвол(x_6 x_7) неизвестная(x_7 входит(x_7 корень)) не(известно(b)) не(известно(d)) не(заголовок(терм($e + ac$) 0)) целое(a) целое(c) целое(e)) второйтерм)".

3.23 Характеристика "декомпозиция"

Характеристикой "декомпозиция" снабжаются тождества, декомпозирующие выражения со сложным заголовком.

Логические следствия теоремы

1. Перегруппировка членов заменяющей части в заменяемую для получения тождества общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a(b + c) - ac = ab)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

Характеристика исходной теоремы - "декомпозиция(первыйтерм)". Проверяется отсутствие у этой теоремы характеристики "нормализация(...)". Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть, переменной x_{11} - заменяющая. Соответственно, $a(b + c)$ и $ab + ac$. Проверяется совпадение их оценок сложности. Переменной x_{12} присваивается заголовок заменяющей части. Определяется тип x_{14} значения этой части. В нашем случае - символ "число". Справочник "перегруппировка" выдает по символу x_{14} тройку (плюс минус 0), означающую, что возможна перегруппировка слагаемых из одной части равенства в другую с изменением их знака, а 0 - единица операции "плюс". Проверяется, что заголовок заменяющей части - первый элемент данной тройки. Переменной x_{16} присваивается набор подвыражений терма x_{11} , имеющих максимальную сложность. В нашем случае - ab и ac . Проверяется, что этих подвыражений более одного. Переменной x_{17} присваивается набор корневых операндов заменяющей части (те же два подвыражения). В этом наборе выбирается элемент x_{18} . В нашем случае - ab . Проверяется, что этот элемент имеет ровно одно вхождение термов набора x_{16} . Формируется выражение x_{19} , полученное соединением операцией x_{12} выражения x_{10} и группы отличных от x_{18} элементов набора x_{17} , у которых изменен знак. В нашем случае x_{19} имеет вид $a(b + c) - ac$. Переменной x_{20} присваивается равенство x_{19} и x_{18} , после чего формируется импликация

x21 с консеквентом x20 и антецедентами исходной теоремы. При регистрации в списке вывода проверяется, что данная импликация получает характеристику "нормализация(...)".

Склейка теорем

1. Склейка двух теорем, отличающихся альтернативными антецедентами.

Две импликации отличаются только группами антецедентов, дизъюнкция которых тождественно истинна. Они объединяются в одну импликацию, получаемую из исходных отбрасыванием указанных антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABaj}(a - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \rightarrow \ (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABaj}(a - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a \leq 0 \ \rightarrow \ (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABaj}(a - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ 0 \leq j \ \rightarrow \ (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$$

Переменной x9 присваивается консеквент теоремы, переменной x10 - список ее антецедентов. В списке вывода находится дополнительная теорема x12, отличающаяся от текущей, у которой набор антецедентов x14, консеквент x15 и связывающая приставка x17 имеют такую же длину, как у текущей теоремы. В нашем случае эта теорема указана выше. Находится такой антецедент x18 дополнительной теоремы, что исходная теорема не имеет антецедента той же длины, представляющего собой результат некоторой подстановки в терм x18 вместо его параметров. В нашем случае это антецедент $0 \leq j$. Аналогичным образом выделяется антецедент x19 исходной теоремы. В нашем случае это $a \leq 0$. Переменным x20, x21 присваиваются результаты исключения в списке x10 элемента x19 и исключения в списке x14 элемента x18. Проверяется, что список x21 непуст. Переменной x22 присваивается набор параметров утверждений x20. В нашем случае - A, B, a, j . Проверяется, что он охватывает все переменные утверждений x20. Находится подстановка S термов x23 вместо переменных x20, преобразующая конъюнкцию утверждений x20 в конъюнкцию утверждений x21. В нашем случае данная подстановка меняет местами переменные a, j . Переменной x24 присваивается результат применения S к терму x19. В нашем случае - $j \leq 0$. Переменной x25 присваивается дизъюнкция утверждений x24, x28. В нашем случае - $j \leq 0 \vee 0 \leq j$. Переменной x26 присваивается результат применения подстановки S к утверждению x9. В нашем случае он отличается лишь изменением порядка слагаемых. Проверяется, что x26 и x9 отличаются лишь порядком операндов в коммутативных операциях и симметричных отношениях. При помощи задачи на доказательство проверяется, что x25 - следствие утверждений

x21. Наконец, формируется итоговая импликация с антецедентами x20 и консеквентом x9. Исходная и дополнительная теоремы помечаются в списке вывода элементом "исключение", чтобы блокировать дальнейшие выводы из них.

2. Склейка нескольких теорем с одинаковым консеквентом.

Несколько импликаций отличаются только антецедентами. Формируется дизъюнкция конъюнкций тех фрагментов антецедентов, по которым наблюдается отличие. Она разрешается относительно одного из параметров, причем после этого число альтернатив оказывается меньшим. Для каждой альтернативы создается своя версия теоремы.

В качестве примера рассмотрим одновременный вывод двух теорем

$$\forall_{ABaj}(a - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a \leq 0 \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$$

и

$$\forall_{ABaj}(a - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ 0 \leq j \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABaj}(a - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a \leq 0 \ \& \ j \leq 0 \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{ABaj}(a - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a + j \leq 0 \ \& \ 0 \leq j \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$$

$$\forall_{ABaj}(a - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a \leq 0 \ \& \ 0 \leq a + j \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$$

$$\forall_{ABaj}(a - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq j \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$$

Переменной x10 присваивается консеквент исходной теоремы. Составляется список x11 всех наборов списка вывода, не помеченных символом "исключение", у которых теорема имеет тот же самый консеквент. Проверяется, что список x11 более чем одноэлементен. Переменной x12 присваивается список теорем списка x11. В нашем случае он состоит из исходной теоремы и трех указанных выше дополнительных теорем. Составляется список x14 наборов антецедентов теорем списка x12. Проверяется, что ни один из этих наборов не является собственным поднабором другого. Переменной x15 присваивается пересечение всех наборов списка x14. В нашем случае оно состоит из утверждений $a - \text{число}$, $j - \text{число}$, $A - \text{точка}$, $B - \text{точка}$. Переменной x16 присваивается дизъюнкция конъюнкция остальных частей наборов антецедентов. В нашем случае - $a \leq 0 \ \& \ j \leq 0 \ \vee \ a + j \leq 0 \ \& \ 0 \leq j \ \vee \ a \leq 0 \ \& \ 0 \leq a + j \ \vee \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq j$. Переменной x17 присваивается список переменных утверждения x16. В нашем случае - a, j . Переменной x18 присваивается список всех утверждений набора

x15, имеющих параметр из списка x17. В нашем случае - a - число, j - число. Проверяется, что все эти утверждения не имеют других параметров. Решается задача на описание, имеющая единственную посылку "истина". Ее условиями служат дизъюнкция x16 и утверждения списка x18. В качестве единственной неизвестной x20 берется какой-либо элемент списка x17. В нашем случае - a . Ответ присваивается переменной x22. В нашем случае он имеет вид " $(a \leq 0 \vee 0 \leq j) \& a$ - число $\& j$ - число". Проверяется, что после преобразования данного ответа к виду д.н.ф. число дизъюнктивных членов меньше, чем длина набора x12. Составляется список x23, образованный не зависящими от переменных x17 утверждениями списка x15, а также конъюнктивными членами ответа x22. Создается импликация с антецедентами x23 и консеквентом x10. Она обрабатывается нормализатором "нормтеорема", и конъюнктивные члены результата регистрируются в списке вывода. В нашем случае получаем две указанные выше теоремы. Исходные теоремы помечаются в списке вывода элементом "исключение".

Обобщение теоремы

1. Отбрасывание избыточного отрицания равенства в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABaj}(a - \text{число} \& j - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& a \leq 0 \& j \leq 0 \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABaj}(\neg(A = B) \& a - \text{число} \& j - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& a \leq 0 \& j \leq 0 \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$$

Переменной x8 присваивается набор антецедентов теоремы, переменной x9 - ее консеквент. В списке x8 находится отрицание равенства x11, не используемое для сопровождения консеквента по о.д.з. В нашем случае x11 - утверждение " $\neg(A = B)$ ". Переменной x12 присваивается остаток списка x8. Проверяется, что утверждение x11 не используется для сопровождения по о.д.з. конъюнкции утверждений x12. Переменной x14 присваивается результат добавления к списку x12 равенства $A = B$ из термина x11. Решается задача на доказательство консеквента из посылок x14. Перед ее решением все блокировки приемов отменяются, а после решения - восстанавливаются. Наконец, формируется теорема с антецедентами x12 и консеквентом x9.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Поглощение константного операнда заменяющего выражения внешним константным операндом.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы приема

$$\forall_{abcd}(d - \text{число} \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \rightarrow a(b + c) + d = ab + ac + d)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

Выводимая теорема предназначена для того, чтобы вычислять константное значение $ab + d$, если a, b, d - десятичные константы.

Переменным x_{10} и x_{11} присваиваются заменяемый и заменяющий термы. В нашем случае - $a(b + c)$ и $ab + ac$. Проверяется, что заголовок x_{12} заменяющего терма ассоциативен и коммутативен. Справочник "вычпрог" определяет по символу x_{12} наборы $(A \ B_1 \ \dots \ B_n)$, где B_1, \dots, B_n - типы значений константных термов x_1, \dots, x_n , для которых компилятор ГЕНОЛОГа предусматривает вычисление значения операции $f(x_1 \ \dots \ x_n)$, приводящее к константному терму типа A . Переменной x_{15} присваивается один из таких наборов. В нашем случае - набор (десчисло десчисло десчисло). Проверяется, что все его элементы равны друг другу. Переменной x_{16} присваивается первый элемент набора. Выбирается корневой операнд x_{17} заменяющего терма. В нашем случае - ab . Проверяется, что он имеет ровно два операнда, и эти операнды суть различные переменные. Переменной x_{19} присваивается набор данных переменных, переменной x_{18} - символ операции x_{17} . В нашем случае - "умножение". Снова используется справочник "вычпрог", но на этот раз для символа x_{18} . Он определяет набор x_{22} , совпадающий в нашем случае с указанным выше набором x_{15} . Проверяется, что началом набора x_{22} служит символ x_{16} . Выбирается переменная x_{23} , не входящая в исходную теорему. В нашем случае - переменная d . Переменной x_{24} присваивается результат соеденения операцией x_{12} выражений x_{10} и x_{23} , а переменной x_{25} - результат соединения этой же операций выражений x_{11} и x_{23} . В нашем примере x_{24} имеет вид " $a(b + c) + d$ ", x_{25} - вид " $ab + ac + d$ ". Переменной x_{26} присваивается конъюнкция утверждений, указывающих типы значений переменных x_{19} согласно окончанию набора x_{22} , и тип x_{16} значения переменной x_{23} . В нашем случае имеем "и(десчисло(a) десчисло(b) десчисло(d))". Формируется итоговая импликация с теми же антецедентами, что у исходной теоремы, и равенством выражений x_{24} , x_{25} в консеквенте. Она сопровождается характеристикой "вычпрог(второйтерм, и(десчисло(a) десчисло(b) десчисло(d)), $ab + d$)".

Создание квазипротоколов

1. Стандартизация операнда с помощью нормализатора стандартной формы.

В качестве примера рассмотрим получение квазипротокола

$$\forall_{abcdefn}(f = (a + b)^n c/d + e \rightarrow \sin((a + b)^n c/d + e) = \sin f)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$$

Данный квазипротокол указывает, что аргумент синуса следует стандартизировать с помощью нормализатора стандартной формы "стандплюс", выполняющего раскрытие скобок. Это объясняется наличием декомпозирующего тождества для синуса суммы и отсутствием его аналогов для операций умножения и деления. Хотя данное решение относится к предметной области "в целом", его принятие в данном случае иницируется одной конкретной теоремой.

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм. В нашем случае - $\sin(a + b)$. Проверяется, что он неповторен. Переменной x_{11} присваивается заменяющий терм. Проверяется, что он не имеет переменных, не входящих в заменяемый. Проверяется, что самый сложный подтерм заменяемого термина - он сам. Проверяется, что заменяющий терм имеет более одного подтерма максимальной сложности. Рассматривается корневой операнд v заменяемого термина, имеющий вид $f(x, y)$, где x, y - различные переменные. Проверяется, что ни один из подтермов заменяющего термина, имеющих максимальную сложность, не содержит обеих этих переменных. Затем переменной x_{14} присваивается заголовок заменяемого термина, переменной x_{15} - номер корневого операнда v , переменной x_{16} - операция f . В нашем случае x_{14} - "синус", x_{15} - 1, x_{16} - "плюс".

Справочник "стандформа" определяет по символу x_{16} название x_{17} нормализатора стандартной формы. В нашем случае - "стандплюс". Определяется раздел, к которому относится символ x_{16} (в нашем случае - "элементарная алгебра", и просматриваются теоремы этого раздела. Проверяется отсутствие тождеств для операции x_{14} , обеспечивающих декомпозицию выражения $g(x, y)$, где g отлично от x_{16} , а x, y - различные переменные. Это выражение должно представлять собой корневой операнд операции x_{14} , номер которого (с учетом возможной коммутативности) равен x_{15} . Проверяется также отсутствие тождеств общей стандартизации для операции x_{14} с таким операндом. По ходу просмотра находится шаблон S для указания вида термов, обеспечивающего невырожденные преобразования к стандартной форме x_{17} . Он распознается по наличию характеристики "стандхаракт". Переменной x_{18} присваивается пара (шаблон S - список его характеристик). В нашем случае шаблон имеет вид $(a+b)^n c/d+e$. Его характеристики - "теорема приема", "стандхаракт", "оператор(стандплюс)", "указатель(единица(1 c d n) единица(0 e))", "см(натуральное(n) или(не(заголовок(c 1)) не(заголовок(d 1)) не(заголовок(n 1))))".

Проверяется, что среди характеристик шаблона S имеется элемент "оператор(x_{17})". Сам шаблон присваивается переменной x_{19} . Переменной x_{20} присваивается арифность операции x_{14} . Проверяется, что эта арифность равна 1 либо 2. В случае арифности 1 переменной x_{21} присваивается выражение $x_{14}(x_{19})$. Иначе - выбирается новая переменная x_{22} , и переменной x_{21} присваивается выражение " $x_{14}(x_{19} x_{22})$ " либо " $x_{14}(x_{22} x_{19})$ " - в зависимости от x_{15} . В нашем случае x_{21} имеет вид " $\sin((a+b)^n c/d+e)$ ". Определяется вхождение x_{22} подтерма x_{19} в x_{21} . Выбирается новая переменная x_{23} . В нашем случае - f . Переменной x_{24} присваивается равенство x_{23} и x_{19} , переменной x_{25} - равенство x_{21} результату замены вхождения x_{22} на x_{23} . Соответственно, x_{24} имеет вид " $f = (a+b)^n c/d+e$ ", а x_{25} - вид " $\sin((a+b)^n c/d+e) = \sin f$ ". Наконец, формируется импликация с единственным антецедентом x_{24} и консеквентом x_{25} . При регистрации она сопровождается характеристиками "теорема приема", "операнд", "стандравно", "оператор(стандплюс)", "см(натуральное(n) или(не(заголовок(c 1)) не(заголовок(d 1)) не(заголовок(n 1))))", "указатель(единица(1 c d n) единица(0 e))".

Индуктивное обобщение тождества

1. Переход от тождества для операции типа умножения к операции типа степени.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac} (c - \text{комплексное} \ \& \ a - \text{натуральное} \rightarrow \text{сопряженное}(c^a) = (\text{сопряженное}(c))^a)$$

из теоремы

$$\forall_{cf} (c - \text{комплексное} \ \& \ f - \text{комплексное} \rightarrow \text{сопряженное}(cf) = \text{сопряженное}(c) \cdot \text{сопряженное}(f))$$

Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x11 присваивается заменяемый терм, переменной x12 - заменяющий. В заменяемом терме берется вхождение x13 двуместной операции x16, примененной к двум различным переменным x14 и x15. В нашем примере x13 - вхождение cf , x16 - символ "Умножение" комплексного умножения. Справочник "степень" определяет по x16 пару (Степень 2), указывающую на наличие степенного обобщения операции x16 и на номер операнда, по которому размещается натуральный показатель степени. Эта пара присваивается переменной x17. Проверяется, что переменные x14, x15 не имеют других вхождений в терм x11. Переменным x18 и x19 присваиваются результаты замены вхождения x13 на переменные x14 и x15 соответственно. В нашем случае x18 - "сопряженное(c)", x19 - "сопряженное(f)". Переменным x20, x21 присваиваются вхождения термов x18 и x19 в заменяющий терм x12. Проверяется, что оба они - операнды одной и той же двуместной операции x24, вхождение которой присваивается переменной x23. Проверяется, что переменные x14 и x15 имеют ровно одно вхождение в x12. Справочник "степень" определяет по x24 пару (Степень 2). Переменной x26 присваивается первый элемент этой пары, переменной x27 - второй. Составляются списки x28 и x29 антецедентов, содержащих, соответственно, переменную x14 и переменную x15. Проверяется, что они не пересекаются, имеют равные длины и переходят друг в друга при переобозначении x14 на x15. Если вхождение x23 не корневое, то проверяется корректность перехода к степенной версии тождества: вводится третий операнд произведения в заменяемом терме и проверяется, что произведение в заменяющем терме после упрощения будет иметь три соответствующих операнда.

Выбирается новая переменная x32 (в нашем случае - переменная a). Переменной x33 присваивается операция - первый элемент пары x17. В нашем примере - символ "Степень". Этой операцией (с учетом второго элемента пары x17) соединяются переменные x32 и x14. В нашем случае получается терм x34 вида c^a . Аналогично, с помощью x26 и x27 по термам x32, x18 строится выражение $\text{сопряженное}(c)^a$, присваиваемое переменной x35. Переменной x36 присваивается равенство результатов замены вхождения x13 на x34, а вхождения x23 - на x35. В нашем примере имеем " $\text{сопряженное}(c^a) = \text{сопряженное}(c)^a$ ". Переменной x37 присваивается символ "натуральное". Предпринимается попытка усмотреть, что натуральный параметр допускает замену на целочисленный. Для этого используется вспомогательная задача на решение уравнения, в одной части которого находится единица операции x16, а в другой - подтерм x13. Если ответ не сопровождается дополнительными ограничениями, то символ x37 заменяется на "целое". В нашем примере этого не происходит (появляется условие на отличие c от нуля). Переменной x38 присваивается результат исключения из антецедентов исходной теоремы утверждений x29 и добавления утверждения " $x37(x32)$ ". В нашем примере получается " $c - \text{комплексное}$ ", " $a - \text{натуральное}$ ". Наконец, формируется импликация с антецедентами x38 и

консеквентом x36. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", дополнительно использующим для упрощений имеющиеся на текущий момент в списке вывода теоремы.

3.24 Характеристика "дизъюнкция"

Характеристикой "дизъюнкция" сопровождаются теоремы, у которых консеквент имеет вид дизъюнкции.

Логические следствия теоремы

1. Из дизъюнкции с более чем двумя альтернативами выводится эквивалентность для свертки поддизъюнкции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a < b \vee b < a \leftrightarrow \neg(a = b))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a < b \vee b < a \vee a = b)$$

Переменной x8 присваивается набор дизъюнктивных членов консеквента. Проверяется, что все они суть элементарные утверждения и что их не менее трех. Переменной x10 присваивается какое-либо из данных утверждений. В нашем случае - утверждение $a = b$. Переменной x11 присваивается эквивалентность дизъюнкции оставшихся утверждений списка x8 отрицанию утверждения x10. Затем строится импликация, антецеденты которой такие же, как у исходной теоремы, а консеквент - x11. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

2. Попытка ослабления дизъюнктивного члена.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow d \leq c \vee c \leq d)$$

из теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow d < c \vee c \leq d)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \rightarrow a \leq b)$$

Переменной x8 присваивается набор дизъюнктивных членов консеквента. Просматриваются элементы этого набора. Для текущего такого элемента x11 справочник поиска теорем "ослабление" определяет дополнительную теорему, указанную выше. В нашем случае x11 - " $d < c$ ". Предпринимается замена x11 в списке x8 на $d \leq c$. По окончании просмотра проверяется, что имела место хотя бы одна замена. Далее формируется результирующая импликация, антецеденты у которой прежние, а консеквент - дизъюнкция утверждений списка x8.

3. Конъюнкция двух дизъюнкций с альтернативными членами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы приема

$$\forall_{abcdefgh}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow (a < b \ \& \ c \vee b < a \ \& \ d \vee a = b \ \& \ e) \ \& \ (a < b \ \& \ f \vee b < a \ \& \ g \vee a = b \ \& \ h) \leftrightarrow a < b \ \& \ c \ \& \ f \vee b < a \ \& \ d \ \& \ g \vee a = b \ \& \ e \ \& \ h)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a < b \vee b < a \ \& \ a = b)$$

Проверяется, что исходная теорема имеет характеристику "альтернатива", указывающую на несовместность дизъюнктивных членов ее консеквента. Переменной x8 присваивается набор этих дизъюнктивных членов. Переменной x9 присваивается набор не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x8. В нашем случае это переменные c, d, e . Переменной x10 присваивается набор не входящих в исходную теорему и в список x9 переменных, имеющий ту же длину. В нашем случае - f, g, h . Переменной x11 присваивается дизъюнкция конъюнкций утверждений x8 с соответствующими переменными x9. Переменной x12 присваивается аналогичная дизъюнкция, в которой вместо переменных x9 берутся переменные x10. Переменной x13 присваивается дизъюнкция конъюнкций утверждений x8 с парами соответствующих переменных список x9 и x10. Затем формируется результирующая импликация, antecedentes которой - такие же, как у исходной теоремы, а консеквентом служит эквивалентность конъюнкции утверждений x11 и x12 утверждению x13. Эта импликация снабжается единственной характеристикой "нормдн". Она порождает прием нормализатора "склейканеравенств", используемого для редактирования ответов задач на описание.

4. Дизъюнкция двух конъюнктивно-дизъюнктивных термов с альтернативными членами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы приема

$$\forall_{abcdefghij}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow (a < b \ \& \ c \vee b < a \ \& \ d \vee a = b \ \& \ e) \ \& \ i \vee (a < b \ \& \ f \vee b < a \ \& \ g \vee a = b \ \& \ h) \ \& \ j \leftrightarrow a < b \ \& \ (c \ \& \ i \vee f \ \& \ j) \vee b < a \ \& \ (d \ \& \ i \vee g \ \& \ j) \vee a = b \ \& \ (e \ \& \ i \vee h \ \& \ j))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a < b \vee b < a \vee a = b)$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства повторим его.

Проверяется, что исходная теорема имеет характеристику "альтернатива", указывающую на несовместность дизъюнктивных членов ее консеквента. Переменной x8 присваивается набор этих дизъюнктивных членов. Переменной x9 присваивается набор не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x8. В нашем случае это переменные c, d, e . Переменной x10 присваивается набор не входящих в исходную теорему и в список x9 переменных, имеющий ту же длину. В нашем случае - f, g, h . Переменной x11

присваивается дизъюнкция конъюнкций утверждений x_8 с соответствующими переменными x_9 . Переменной x_{12} присваивается аналогичная дизъюнкция, в которой вместо переменных x_9 берутся переменные x_{10} .

Далее начинаются различия. Переменной x_{13} присваивается пара переменных, не входящих в исходную теорему и в списки x_9, x_{10} . В нашем случае - пара i, j . Переменной x_{16} присваивается дизъюнкция конъюнкций утверждений x_8 с дизъюнкциями пар конъюнкций, где первая конъюнкция образована переменной списка x_9 и началом пары x_{13} , а вторая - переменной списка x_{10} и концом пары x_{13} . В нашем примере эта дизъюнкция - заменяющая часть приведенной выше выводимой теоремы приема. Сама эта теорема строится с теми же антецедентами, что и исходная теорема. Ее заменяемая часть - дизъюнкция конъюнкций утверждения x_{11} с началом пары x_{13} и конъюнкций утверждения x_{12} с концом пары x_{13} .

Использование дополнительной импликации для преобразования теоремы

1. Использование дополнительной импликации для исключения одного из дизъюнктивных членов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(C - \text{точка} \ \& \ B \in \text{прямая}(AC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ 0 < -l(AB) + l(AC) \rightarrow B \in \text{отрезок}(AC) \ \vee \ A \in \text{отрезок}(BC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ B \in \text{прямая}(AC) \rightarrow B \in \text{отрезок}(AC) \ \vee \ C \in \text{отрезок}(AB) \ \vee \ A \in \text{отрезок}(BC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ 0 < -l(AB) + l(AC) \rightarrow \neg(C \in \text{отрезок}(AB)))$$

Переменной x_8 присваивается набор дизъюнктивных членов консеквента. Выбирается элемент x_{10} набора x_8 . В нашем случае - " $C \in \text{отрезок}(AB)$ ". Проверяется, что утверждение x_{10} элементарное. Переменной x_{11} присваивается набор его подтермов, имеющих максимальную сложность. Проверяется, что этот набор одноэлементный. Находится результат x_{13} упрощения отрицания x_{11} относительно антецедентов теоремы при помощи задачи на преобразование. В нашем случае это " $\neg(C \in \text{отрезок}(AB))$ ". Переменной x_{14} присваивается элемент набора x_{11} . В нашем случае - " $\text{отрезок}(AB)$ ". Переменной x_{15} присваивается заголовок терма x_{14} . Проверяется, что он встречается в терме x_{13} . Находится раздел, к которому относится символ x_{15} (в нашем случае - "геометрия"). Просматриваются теоремы x_{21} этого раздела, имеющие характеристику "спуск(...)" или "легковидеть(...)". В нашем случае x_{21} - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x_{22} присваивается консеквент теоремы x_{21} . Проверяется, что его заголовок тот же, что у x_{13} и что в нем встречается символ x_{15} . Переменной x_{23} присваивается список свободных переменных терма x_{22} . Проверяется, что теорема x_{21} не имеет других переменных. Усматривается, что x_{13} является результатом подстановки набора термов

x_{24} вместо переменных x_{23} в терм x_{22} . Учитывается возможность изменения порядка операндов коммутативных операций и симметричных отношений. Переменной x_{25} присваивается результат объединения списка антецедентов исходной теоремы с антецедентами теоремы x_{21} , в которые вместо переменных x_{23} подставлены термы x_{24} . Переменной x_{26} присваивается результат соединения дизъюнкцией утверждений набора x_8 , отличных от x_{10} . В нашем случае это $B \in \text{отрезок}(AC) \vee A \in \text{отрезок}(BC)$. Утверждения x_{25} обрабатываются оператором "нормантецеденты" относительно параметров термина x_{26} . Полученный набор x_{27} имеет в нашем примере вид " C – точка", " $B \in \text{прямая}(AC)$ ", " A – точка", " B – точка", " $0 < -l(AB) + l(AC)$ ". Проверяется, что x_{27} не содержит константы "ложь", противоположных утверждений и не содержит утверждения x_{26} . Затем строится результирующая импликация с антецедентами x_{27} и консеквентом x_{26} .

Обобщение теоремы

1. Попытка перехода к ослабленным отношениям в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(C \text{ – точка} \ \& \ B \in \text{прямая}(AC) \ \& \ A \text{ – точка} \ \& \ B \text{ – точка} \ \& \ 0 \leq l(AC) - l(AB) \ \& \ \neg(A = C) \rightarrow B \in \text{отрезок}(AC) \ \vee \ A \in \text{отрезок}(BC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(C \text{ – точка} \ \& \ B \in \text{прямая}(AC) \ \& \ A \text{ – точка} \ \& \ B \text{ – точка} \ \& \ 0 < l(AC) - l(AB) \rightarrow B \in \text{отрезок}(AC) \ \vee \ A \in \text{отрезок}(BC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a \text{ – число} \ \& \ b \text{ – число} \ \& \ a < b \rightarrow a \leq b)$$

Переменной x_8 присваивается набор антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Просматриваются элементы списка x_8 . Для текущего такого элемента x_{12} (в нашем случае - неравенства) выполняется на его заголовке обращение к справочнику поиска теорем "ослабление". В нашем случае переменной x_{14} присваивается указанная выше дополнительная теорема. Переменной x_{18} присваивается результат замена в списке x_8 элемента x_{12} на его отрицание, а также добавления ослабленной версии x_{17} предиката x_{12} . В нашем случае - $0 \leq l(AB) - l(AC)$. Решается задача на доказательство x_9 из посылок x_{18} . В случае успеха x_{12} заменяется в списке x_8 на x_{17} . По окончании обработки списка x_8 , если имели место изменения, находится результат x_{12} обработки процедурой "нормантецеденты" объединения списка x_8 со списком всех необходимых для сопровождения по о.д.з. утверждений. Затем создается результирующая импликация с антецедентами x_{12} и консеквентом x_9 . Исходная теорема сопровождается в списке вывода пометкой "исключение".

2. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства в антецедентах с помощью задачи на доказательство.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = C) \& B - \text{точка} \& A - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{точкалуча}(C, A, B) \rightarrow B \in \text{отрезок}(AC) \vee A \in \text{отрезок}(BC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(- \text{точка} \& \neg(A = C) \& \neg(B = C) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& \text{точкалуча}(C, A, B) \rightarrow B \in \text{отрезок}(AC) \vee A \in \text{отрезок}(BC))$$

Переменной x8 присваивается набор антецедентов теоремы. Среди них выбирается утверждение x10 вида $\neg(t_1 = t_2)$, где либо один из операндов равенства - переменная, не входящая в другой операнд, либо один из операндов константный. В нашем случае это $\neg(B = C)$. Переменной x16 присваивается результат удаления x10 из x8, пополненный утверждениями, необходимыми для сопровождения этого результата по о.д.з. Переменной x17 присваивается результат добавления равенства $t_1 = t_2$ к x16. Решается задача на доказательство консеквента исходной теоремы относительно посылок x17. При этом блокировка приемов, основанных на исходных теоремах списка вывода, отменяется. Затем формируется результат - импликация с антецедентами x16 и прежним консеквентом.

3. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства в антецедентах с помощью задачи на преобразование.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \neg(B = C) \& \neg(B = D) \& \neg(A = B) \& C \in \text{прямая}(AB) \rightarrow B \in \text{отрезок}(AC) \& \angle(ABD) = \pi - \angle(CBD) \vee \text{точкалуча}(B, A, C) \& \angle(ABD) = \angle(CBD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \neg(B = C) \& \neg(B = D) \& \neg(A = B) \& B \in \text{прямая}(AC) \& \neg(A = C) \rightarrow B \in \text{отрезок}(AC) \& \angle(ABD) = \pi - \angle(CBD) \vee \text{точкалуча}(B, A, C) \& \angle(ABD) = \angle(CBD))$$

Переменной x8 присваивается набор антецедентов теоремы, переменной x9 - консеквент. Среди антецедентов выбирается утверждение x10 вида $\neg(x = t)$, где x - переменная, не входящая в t . В нашем случае это $\neg(A = C)$. Проверяется, что x10 не используется для сопровождения консеквента, но используется для сопровождения по о.д.з. единственного антецедента x17. В нашем случае это " $B \in \text{прямая}(AC)$ ". Переменной x18 присваивается список антецедентов, отличных от x10 и x17. Решается задача на преобразование x17 относительно утверждений x18, имеющая цель "нормодз". Она предпринимает попытку так переформулировать утверждение x17, чтобы все необходимое для его сопровождения по о.д.з. содержалось в списке x18. В нашем случае получается утверждение x20 вида " $C \in \text{прямая}(AB)$ ". Составляется список утверждений x21, включающий в себя x18, x20 и равенство $x = t$. Относительно этого списка доказывается утверждение x9. Наконец, формируется импликация, антецеденты которой - x18 и x20, а консеквент - x9.

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Попытка реализовать рефлексивное отношение в антецедентах отождествлением его операндов и исключить почти вырожденную альтернативу.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(B = C) \ \& \ l(AB) = l(AC) \ \& \ A \in \text{прямая}(BC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow A \in \text{отрезок}(BC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(B - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ B \in \text{прямая}(AC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ 0 \leq l(AB) - l(AC) \rightarrow C \in \text{отрезок}(AB) \ \vee \ A \in \text{отрезок}(BC))$$

Переменной x8 присваивается набор антецедентов. В нем выбирается утверждение x10, не являющееся равенством и имеющее два корневых операнда. В нашем случае - " $0 \leq l(AB) - l(AC)$ ". Переменной x11 присваивается заголовков выбранного утверждения. Проверяется, что отношение x11 рефлексивно. Переменной x12 присваивается результат замены в списке x8 утверждения x10 на равенство его корневых операндов. В нашем случае - на равенство $l(AB) - l(AC) = 0$. Рассматривается дизъюнктивный член консеквента x14. В нашем случае - " $C \in \text{отрезок}(AB)$ ". Переменной x15 присваивается результат добавления его к списку x12. Решается задача на исследование, посылками которой служат утверждения x15. Она имеет цель "известно"; неизвестными служат все параметры списка x15. В итоговом списке посылок данной задачи находится равенство x17 двух переменных - x18 и x19. В нашем случае это равенство $C = B$. Проверяется, что обе эти переменные входили в утверждение x10. Переменной x20 присваивается результат добавления к списку x12 отрицания утверждения x17. В нашем случае список x20 состоит из утверждений " $B - \text{точка}$ ", " $\neg(A = C)$ ", " $B \in \text{прямая}(AC)$ ", " $A - \text{точка}$ ", " $C - \text{точка}$ ", " $l(AB) - l(AC) = 0$ ", " $\neg(B = C)$ ". Переменной x21 присваивается дизъюнкция дизъюнктивных членов консеквента, отличных от x14. В нашем случае - утверждение " $A \in \text{отрезок}$ ". Переменной x23 присваивается импликация с антецедентами x22 и консеквентом x21. Если x21 - не дизъюнкция, то она обрабатывается оператором "Нормтеорема", передающим вспоогательной задаче на преобразование комментариев "равныетермы". Это обеспечивает группировку расстояний $l(AB)$, $l(AC)$ в разных частях равенства и переход от антецедента $B \in \text{прямая}(AC)$ к антецеденту $A \in \text{прямая}(BC)$.

3.25 Характеристика "дизъюнкциявсех"

Характеристикой "дизъюнкциявсех" сопровождаются эквивалентности для развертки квантора существования в дизъюнкцию.

Использование дополнительной эквивалентности для упрощения заменяемой части

1. Попытка использовать разделяющую эквивалентность для самого сложного подутверждения в заменяемом кванторе.

par

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы приема

$$\forall_{bde}(d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \rightarrow \exists_c(b(c) \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ c \leq e \ \& \ d \leq c) \leftrightarrow \exists_a(a \in \{0, \dots, e - d\} \ \& \ b(a + d)))$$

из теоремы приема

$$\forall_{bmn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow \exists_c(c \in \{m, \dots, n\} \ \& \ b(c)) \leftrightarrow \exists_a(a \in \{0, \dots, n - m\} \ \& \ b(a + m)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{mnx}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow x \in \{m, \dots, n\} \leftrightarrow x - \text{целое} \ \& \ 0 \leq x - m \ \& \ 0 \leq n - x)$$

Переменной x10 присваивается вхождение корня заменяемой части. В нашем случае - утверждения " $\exists_c(c \in \{m, \dots, n\} \ \& \ b(c))$ ". Проверяется, что по этому вхождению расположен квантор существования. Переменной x11 присваивается набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения, переменной x12 - подсписок списка x11, образованный утверждениями, не содержащими символа "значение". Проверяется, что список x12 непуст. В нем находится самый сложный подтерм x14. Проверяется, что такой подтерм единственный. В нашем случае имеем выражение " $\{m, \dots, n\}$ ". Переменной x15 присваивается его заголовок (символ "номера"). Справочник поиска теорем "разделить" определяет по символу x15 указанную выше дополнительную теорему x16. Переменной x21 присваивается ее заменяемый терм. В нашем случае - " $x \in \{m, \dots, n\}$ ". Внутри подтерма x10 рассматривается вхождение x23 подтерма с тем же заголовком, что у x21. В нашем примере - " $c \in \{m, \dots, n\}$ ". Проверяется, что в подтерме x23 встречается символ x15. Процедура "тождвывод" определяет результат x24 преобразования вхождения x23 при помощи эквивалентности x16. В нашем примере имеем теорему " $\forall_{bde}(d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \rightarrow \exists_c((c - \text{целое} \ \& \ 0 \leq c - d \ \& \ 0 \leq e - c) \ \& \ b(c)) \leftrightarrow \exists_a(a \in \{0, \dots, e - d\} \ \& \ b(a + d)))$ ". Переменной x26 присваивается заменяемая часть этой теоремы. Проверяется, что она имеет заголовок "существует". Переменной x27 присваивается связывающая приставка квантора существования, переменной x28 - набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Решается задача на описание, посылками которой служат антецеденты импликации x24, а условиями - утверждения x28. Цели задачи - "полный", "прямойответ", "попыткаспуска", "неизвестные x27". В нашем примере получается ответ x31 вида " $c \leq e \ \& \ d \leq c \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ b(c)$ ". Переменной x32 присваивается результат навешивания на x31 квантора существования по x27. Далее формируется импликация, антецеденты которой - те же, что у x24, а консеквент - эквивалентность утверждения x32 заменяющей части теоремы x24. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и сопровождается единственной характеристикой "дизъюнкциявсех(второйтерм)".

2. Попытка использовать эквивалентность, ослабляющую ограничение на тип значения двуместного отношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bfg}(f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \rightarrow \exists_c(c < g \ \& \ b(c) \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ f \leq c) \leftrightarrow \exists_a(a \in \{0, \dots, -1 - [-g] + [-f]\} \ \& \ b(a - [-f])))$$

из теоремы

$$\forall_{bdg}(g - \text{число} \ \& \ d - \text{целое} \rightarrow \exists_c(c < g \ \& \ b(c) \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ d \leq c) \leftrightarrow \exists_a(a \in \{0, \dots, -d - 1 - [-g]\} \ \& \ b(a + d)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ax}(a - \text{целое} \ \& \ x - \text{число} \rightarrow x \leq a \leftrightarrow -[-x] \leq a)$$

Переменной x10 присваивается набор антецедентов исходной теоремы, переменной x11 - вхождение заменяемой части. Проверяется, что по вхождению x11 расположен квантор существования. Переменной x13 присваивается связывающая приставка квантора, переменной x14 - вхождение некоторого конъюнктивного члена подкванторного утверждения, имеющего ровно два операнда. В нашем случае - неравенства $d \leq c$. Переменной x15 присваивается символ по вхождению x14, переменной x16 вхождение некоторого корневого операнда терма x14, переменной x17 - символ по данному вхождению. Проверяется, что x17 - переменная, не входящая в связывающую приставку x13. В нашем примере это d . Рассматривается содержащий x17 и имеющий длину 2 антецедент x18. В нашем примере - " d - целое". Переменной x19 присваивается заголовок терма x18. Проверяется, что x17 имеет единственное вхождение в заменяемую часть. Справочник поиска теорем "типзначения" находит по символу x15 указанную выше дополнительную теорему x20. Рассматривается ее характеристика "подтип(...)". В нашем случае - "подтип(целое второйтерм)". Проверяется, что первый операнд данной характеристики - символ x19; переменной x23 присваивается указывающий направление замены второй операнд. Процедура "тождвывод" определяет результат преобразования вхождения x14 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы, применяемой в направлении, обратном x23. Получается следующая теорема приема x24:

$$\forall_{bfg}(g - \text{число} \ \& \ -[-f] - \text{целое} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \forall_c(c < g \ \& \ b(c) \ \& \ c - \text{целое} \rightarrow c - \text{целое}) \rightarrow \exists_c(c < g \ \& \ b(c) \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ f \leq c) \leftrightarrow \exists_a(a \in \{0, \dots, - -[-f] - 1 - [-g]\} \ \& \ b(a - [-f])))$$

Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и снабжается единственной характеристикой "дизъюнкциявсех(...)" - той же, что была у исходной теоремы.

3.26 Характеристика "дистрибразвертка"

Характеристикой "дистрибразвертка(x1)" сопровождаются тождества вида $f(g(x, y), g(x, z)) = g(x, h(y, z))$, где f, h ассоциативны и коммутативны. x1 - направление замены от заголовка g к заголовку f .

Логические следствия теоремы

1. Вывод из дистрибутивности простейших формул типа "разложения на множители".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abdef}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow ad + ae + af + bd + be + bf = (a + b)(d + e + f))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

Заметим, что теоремы такого вида являются отправными пунктами циклов вывода менее тривиальных формул для разложения на множители. Соответствующие приемы пытаются унифицировать пару слагаемых заменяемой части таким образом, чтобы они взаимно уничтожались. Например, из указанной выше теоремы можно после ряда переходов извлечь формулу для суммы либо разности кубов. В случае произведения двух сумм по три слагаемых возникают еще более любопытные разложения, например, для $a^5 - b^5 - ab^4$.

Прежде всего, проверяется отсутствие существенных посылок. Переменной x10 присваивается заменяемый терм. В нашем случае - $a(b+c)$. Переменной x11 присваивается его заголовок. Переменной x12 присваивается вхождение неоднобуквенного корневого операнда терма x10. В нашем случае - $b+c$. Переменной x13 присваивается символ по вхождению x12. Проверяется, что он совпадает с заголовком заменяющей части. Проверяется, что операции x11 и x13 ассоциативны и коммутативны. Переменной x14 поочередно присваиваются выражения, полученные соединением двух либо трех первых переменных операцией x13. В нашем случае x14 - $a+b$. Аналогично, переменной x15 поочередно присваиваются выражение, полученные соединением двух либо трех следующих переменных операцией x13. В нашем случае x15 - $d+e+f$. Проверяется, что x15 не короче, чем x14. Переменной x16 присваивается равенство результата соединения операцией x13 всевозможных попарных результатов соединения операцией x11 операндов термов x14 и x15 результату соединения операцией x11 термов x14 и x15. В нашем примере получаем консеквент результирующей теоремы. Для получения самой теоремы используется оператор "Полныепосылки", добавляющий в antecedentes указатели типов значений переменных. Для сопровождения данной теоремы характеристиками "нормзаголовок(видумножение второйтерм)" и "дистрибутивно(первыйтерм)" используется справочник "нормзаголовок".

Использование тождества для варьирования дополнительной теоремы

1. Попытка использовать декомпозирующее тождество для варьирования декомпозирующей эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(b, a \times (c \cup d)) \leftrightarrow \text{непересек}(b, a \times c) \ \& \ \text{непересек}(b, a \times d))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \times (b \cup c) = (a \times b) \cup (a \times c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bef}(b - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(b, (e \cup f)) \leftrightarrow \text{непересек}(b, e) \ \& \ \text{непересек}(b, f))$$

Переменной x10 присваивается заменяющая часть тождества. В нашем случае - $(a \times b) \cup (a \times c)$. Переменной x11 присваивается заголовок терма x10. Справочник поиска теорем "разделяет" определяет по символу x11 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x15 присваивается ее направление замены. В нашем случае - "второйтерм". Переменной x17 присваивается вхождение заменяемой части дополнительной теоремы, а переменной x18 - расположенное внутри вхождения x17 вхождение символа x11. В нашем случае x18 - вхождение подтерма $(e \cup f)$. Процедура "тождвывод" определяет результат x19 преобразования вхождения x18 в дополнительную теорему при помощи текущего тождества, применяемого в обратную сторону. Он обрабатывается оператором "нормтеорема" и затем - оператором "Исклант", предпринимающим попытку отбросить избыточные антецеденты. В нашем примере ничего не отбрасывается.

Использование дополнительного тождества для упрощения заменяемой части

1. Попытка варьирования декомпозирующего тождества с помощью перегруппировочного тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abf}(\{; a\} \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ b \in \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a - \text{слово} \rightarrow \{f(b)\} \cup \text{образ}(f, \{; a\}) = \text{образ}(f, \{b; a\}))$$

из теоремы

$$\forall_{def}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ d \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ e \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{образ}(f, d) \cup \text{образ}(f, e) = \text{образ}(f, d \cup e))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{слово} \rightarrow \{; c\} \cup \{d\} = \{d; c\})$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части, а переменной x11 - вхождение неоднобуквенного собственного ее подтерма. В нашем случае - $d \cup e$. Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по этому символу указанную выше дополнительную теорему. Переменной x16 присваивается тот операнд ее консеквента, который имеет заголовок x12. В нашем случае - $\{; c\} \cup \{d\}$. Оператор "тождвывод" находит результат преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы, у которой x16 рассматривается как заменяемая часть. Получается теорема x18 следующего вида:

$$\forall_{abf}(\{; a\} - \text{set} \ \& \ \{b\} - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \{; a\} \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \{b\} \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ a - \text{слово} \rightarrow \text{образ}(f, \{; a\}) \cup \text{образ}(f, \{b\}) = \text{образ}(f, \{b; a\}))$$

Эта теорема последовательно обрабатывается операторами "Спускоперандов", "демодификация" и "нормтеорема". Характеризатору разрешается вводить любые ее характеристики с заголовками "префикснаярекурсия", "дистрибразвертка", "декомпозиция", "свертка", "сокращ", "склейка". При этом проверяется наличие характеристики с заголовком "префикснаярекурсия" либо "декомпозиция".

2. Попытка разделения сокращаемых операндов при дистрибутивной развертке.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdef}(0 < ef \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 \leq de \rightarrow (d/e)^c \cdot (e/f)^c = (d/f)^c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq b \rightarrow a^c b^c = (ab)^c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow (a/b) \cdot (b/c) = a/c)$$

В заменяемой части теоремы выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - подтерма ab . Переменной x12 присваивается заголовок данного подтерма. Проверяется, что число корневых операндов подтерма равно 2, причем эти операнды - переменные. Справочник поиска теорема "Сокращение" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что среди ее антецедентов нет равенства. Процедура "тождвывод" выполняет преобразование вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы, ориентированной в направлении общей стандартизации. Результат обрабатывается оператором "нормтеорема".

Использование дополнительного тождества для упрощения заменяющей части

1. Использование тождества исключения сложных операций для преобразования заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdefg}(e + f = 1 \ \& \ 0 < e \ \& \ 0 < f \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ 0 \leq d \rightarrow cd^e + dg = (c + gd^f)d^e)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ b + c = 1 \rightarrow a^b a^c = a)$$

Фактически, выводится теорема приема, позволяющего упрощать выражения с радикалами путем раскрытия скобок.

Рассматривается вхождение x_{11} корневого операнда заменяющей части. В нашем случае - операнда ab . Переменной x_{12} присваивается символ по вхождению x_{11} . Проверяется, что x_{11} - двуместная операция. Справочник поиска теорем "Сокращение" определяет по x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{15} присваивается результат замены связанных переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в текущую теорему. Если заменяемая часть теоремы x_{15} имеет заголовок x_{12} , причем он ассоциативен и коммутативен, то обе части консеквента теоремы x_{15} домножаются на новую переменную. В нашем случае x_{15} приобретает следующий вид:

$$\forall_{defg}(g - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 \leq d \ \& \ 0 < e \ \& \ 0 < f \ \& \ e + f = 1 \rightarrow d^e d^f g = dg)$$

Далее оператор "тождвывод" преобразует вхождение x_{11} в исходную теорему при помощи тождества x_{15} . Результат x_{20} обрабатывается процедурой "нормтеорема". Он регистрируется в списке вывода, причем допускаются только характеристики "свертка" и "вычпрог".

Индуктивное обобщение тождества

1. Индуктивное обобщение тождества с двумя переменными, связанными симметричным отношением в антецедентах - переход к конечному множеству.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aC}(\text{конечное}(a) \ \& \ \text{классмножеств}(a) \ \& \ \text{Разделимы}(a) \ \& \ \text{Подмнож}(a, \text{элементы}(C))) \rightarrow \text{вероятность}(\bigcup_{A, A \in a} A, C) = \sum_{A, A \in a} \text{вероятность}(A, C)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \& \ A \subseteq \text{элементы}(C) \ \& \ B \subseteq \text{элементы}(C) \ \& \ \text{непересек}(A, B) \rightarrow \text{вероятность}(A \cup B, C) = \text{вероятность}(A, C) + \text{вероятность}(B, C))$$

Переменной x_{10} присваивается вхождение заменяющей части. Проверяется, что по этому вхождению расположена двуместная операция. Переменной x_{11} присваивается ее заголовок. Проверяется, что он ассоциативный и коммутативный. Переменной x_{12} присваивается пара операндов операции x_{10} . Переменной x_{13} присваивается вхождение заменяемой части. Проверяется, что по этому вхождению расположена двуместная операция, один из операндов которой - переменная x_{16} , а другой - двуместная ассоциативная и коммутативная операция x_{14} от переменных x_{17} и x_{18} . Переменной x_{19} присваивается символ по вхождению x_{14} . В нашем случае x_{11} - "плюс", x_{19} - "объединение". Переменные x_{16} , x_{17} , x_{18} - " C, A, B ". Переменной x_{20} присваивается символ по вхождению x_{13} . В нашем случае - "вероятность". Проверяется, что все выражения набора x_{12} имеют заголовок x_{20} . По символу x_{11} справочник "сумма-всех" определяет символ "суммавсех" соответствующей операции над конечными семействами. По символу x_{19} этот же справочник определяет символ x_{22} (в нашем случае - "объединениевсех"). Переменной x_{23} присваивается то выражение пары x_{12} , которое содержит x_{17} , переменной x_{24} - то выражение, которое содержит x_{18} . В нашем случае имеем выражения "вероятность(A, C)"

и "вероятность(B, C)". Переменной x_{25} присваивается результат подстановки в x_{23} подтерма x_{14} вместо x_{17} . Проверяется, что он совпадает с подтермом x_{13} . Проверяется также, что с подтермом x_{13} совпадает результат подстановки в x_{24} подтерма x_{14} вместо x_{18} . Переменной x_{27} присваивается список антецедентов текущей теоремы. В нем имеется единственное утверждение x_{29} , содержащее как x_{17} , так и x_{18} . Для нашего примера - "непересек(A, B)". Переменной x_{30} присваивается список результатов обработки процедурой "станд" всех утверждений списка x_{27} , содержащих переменную x_{17} и не содержащих x_{18} . Переменной x_{31} присваивается список всех утверждений списка x_{27} , содержащих переменную x_{18} и не содержащих переменную x_{17} . Проверяется, что x_{30} и x_{31} имеют равные длины. Переменной x_{32} присваивается список результатов подстановки x_{17} вместо x_{18} в утверждения набора x_{31} , обработанных процедурой "станд". Проверяется, что x_{32} включается в x_{30} . Находится результат x_{33} перестановки местами в терме x_{29} переменных x_{17} и x_{18} . Проверяется, что результаты обработки процедурой "станд" термов x_{29} и x_{33} совпадают. Выбирается переменная x_{34} , не входящая в исходную теорему. Для нашего примера - переменная a . Переменной x_{35} присваивается набор результатов подстановки в термы набора x_{31} переменной x_{34} вместо x_{18} . Для нашего примера имеем утверждения " $a - \text{set}$ " и " $a \subseteq \text{элементы}(C)$ ". Переменной x_{36} присваивается список всех утверждений набора x_{27} , не содержащих ни x_{17} , ни x_{18} . В нашем примере - единственное утверждение "верпространство(C)". Переменной x_{37} присваивается объединение списков x_{36} , x_{30} , x_{31} и x_{35} . Находятся результат x_{38} подстановки в x_{29} переменной x_{34} вместо x_{18} , а также результат x_{40} подстановки в x_{29} вместо x_{18} терма " $x_{19}(x_{18}, x_{34})$ ". В нашем примере x_{38} имеет вид "непересек(A, a)", а x_{40} - вид "непересек($A, B \cup a$)". Решается задача на доказательство утверждения x_{40} относительно посылок x_{37} , пополненных утверждениями x_{29} и x_{38} . Переменной x_{42} присваивается список, образованный утверждениями "множество(x_{34})", "конечное(x_{34})", всевозможными импликациями "длялюбого(x_{17} если принадлежит($x_{17} x_{34}$) то R)" для утверждений R из x_{30} , а также импликацией "длялюбого($x_{17} x_{18}$ если принадлежит($x_{17} x_{34}$) принадлежит($x_{18} x_{34}$) не(равно($x_{17} x_{18}$)) то x_{29})". В нашем примере имеем утверждения " $a - \text{set}$ ", "конечное(a)", " $\forall_A(A \in a \rightarrow a - \text{set})$ ", " $\forall_A(A \in a \rightarrow A \subseteq \text{элементы}(C))$ ", " $\forall_{AB}(A \in a \ \& \ B \in a \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{непересек}(A, B))$ ". Переменной x_{43} присваивается равенство результата замены в подтерме x_{13} входящего x_{14} на терм " $x_{22}(\text{отображение}(x_{17} \text{ принадлежит}(x_{17} x_{34}) x_{17}))$ " терму " $x_{21}(\text{отображение}(x_{17} \text{ принадлежит}(x_{17} x_{34}) x_{23}))$ ". В нашем примере это равенство следующего вида:

$$\text{"вероятность}(\bigcup_{A, A \in a} A, C) = \sum_{A, A \in a} \text{вероятность}(A, C)\text{"}$$

Список x_{42} обрабатывается процедурой "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x_{43} . Затем формируется импликация с антецедентами x_{44} и консеквентом x_{43} , которая обрабатывается оператором "нормтеорема". Проверяется, что все антецеденты результата суть элементарные утверждения.

- Индуктивное обобщение тождества с двумя переменными, связанными симметричным отношением в антецедентах - переход к конечному семейству.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{aC}(a - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(a) \ \& \ \text{конечное}(\text{Dom}(a)) \ \& \ \text{разделимы}(a) \ \& \ \text{подмнож}(a, \text{элементы}(C)) \rightarrow \text{вероятность}(\bigcup(a), C) = \sum_{A, A \in \text{Dom}(a)} \text{вероятность}(a(A), C))$

из теоремы

$\forall_{ABC}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \& \ A \subseteq \text{элементы}(C) \ \& \ B \subseteq \text{элементы}(C) \ \& \ \text{непересек}(A, B) \rightarrow \text{вероятность}(A \cup B, C) = \text{вероятность}(A, C) + \text{вероятность}(B, C)$

Начало программы совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства повторим его.

Переменной x10 присваивается входение заменяющей части. Проверяется, что по этому входению расположена двуместная операция. Переменной x11 присваивается ее заголовок. Проверяется, что он ассоциативный и коммутативный. Переменной x12 присваивается пара операндов операции x10. Переменной x13 присваивается входение заменяемой части. Проверяется, что по этому входению расположена двуместная операция, один из операндов которой - переменная x16, а другой - двуместная ассоциативная и коммутативная операция x14 от переменных x17 и x18. Переменной x19 присваивается символ по входению x14. В нашем случае x11 - "плюс", x19 - "объединение". Переменные x16, x17, x18 - "C, A, B". Переменной x20 присваивается символ по входению x13. В нашем случае - "вероятность". Проверяется, что все выражения набора x12 имеют заголовок x20. По символу x11 справочник "суммавсех" определяет символ "суммавсех" соответствующей операции над конечными семействами. По символу x19 этот же справочник определяет символ x22 (в нашем случае - "объединениевсех"). Переменной x23 присваивается то выражение пары x12, которое содержит x17, переменной x24 - то выражение, которое содержит x18. В нашем случае имеем выражения "вероятность(A, C)" и "вероятность(B, C)". Переменной x25 присваивается результат подстановки в x23 подтерма x14 вместо x17. Проверяется, что он совпадает с подтермом x13. Проверяется также, что с подтермом x13 совпадает результат подстановки в x24 подтерма x14 вместо x18. Переменной x27 присваивается список антецедентов текущей теоремы. В нем имеется единственное утверждение x29, содержащее как x17, так и x18. Для нашего примера - "непересек(A, B)". Переменной x30 присваивается список результатов обработки процедурой "станд" всех утверждений списка x27, содержащих переменную x17 и не содержащих x18. Переменной x31 присваивается список всех утверждений списка x27, содержащих переменную x18 и не содержащих переменной x17. Проверяется, что x30 и x31 имеют равные длины. Переменной x32 присваивается список результатов подстановки x17 вместо x18 в утверждения набора x31, обработанных процедурой "станд". Проверяется, что x32 включается в x30. Находится результат x33 перестановки местами в терме x29 переменных x17 и x18. Проверяется, что результаты обработки процедурой "станд" термов x29 и x33 совпадают. Выбирается переменная x34, не входящая в исходную теорему. Для нашего примера - переменная a. Переменной x35 присваивается набор результатов подстановки в термы набора x31 переменной x34 вместо x18. Для нашего примера имеем утверждения "a - set" и "a ⊆ элементы(C)". Переменной x36 присваивается список всех утверждений набора x27, не содержащих ни x17, ни x18. В нашем примере - единственное

утверждение "верпространство(C)". Переменной x_{37} присваивается объединение списков x_{36} , x_{30} , x_{31} и x_{35} . Находятся результат x_{38} подстановки в x_{29} переменной x_{34} вместо x_{18} , а также результат x_{40} подстановки в x_{29} вместо x_{18} терма " $x_{19}(x_{18}, x_{34})$ ". В нашем примере x_{38} имеет вид "непересек(A, a)", а x_{40} - вид "непересек($A, B \cup a$)". Решается задача на доказательство утверждения x_{40} относительно посылок x_{37} , пополненных утверждениями x_{29} и x_{38} .

Далее начинаются различия. Выбирается переменная x_{42} , не входящая в исходную теорему и отличная от x_{34} . В нашем случае - переменная b . Находится результат x_{43} подстановки в утверждение x_{29} вместо переменных x_{17} , x_{18} выражений " $x_{34}(x_{17})$ " и " $x_{34}(x_{18})$ ". В нашем случае x_{43} имеет вид "непересек($a(A), a(B)$)". Переменной x_{44} присваивается набор результатов подстановки в утверждения x_{30} выражения " $x_{34}(x_{17})$ " вместо переменной x_{17} . В нашем примере получают утверждения " $a(A) - \text{set}$ " и " $a(A) \subseteq \text{элементы}(C)$ ". Переменной x_{45} присваивается объединение тройки утверждений "функция(x_{34})", "равно(область(x_{34}) x_{42})", "конечное(x_{42})" с всевозможными кванторами импликациями "длялюбого(x_{17} если принадлежит(x_{17} x_{42}) то x_{46})" для утверждений x_{46} из списка x_{44} , а также с импликацией "длялюбого(x_{17} x_{18} если принадлежит(x_{17} x_{42}) принадлежит(x_{18} x_{42}) не(равно(x_{17} x_{18}))то x_{43})". В нашем примере x_{45} состоит из утверждений " $a - \text{функция}$ ", " $\text{Dom}(a) = b$ ", "конечное(b)", "семействомножеств(a)", " $\forall_A(A \in b \rightarrow a(A) \subseteq \text{элементы}(C))$ ", " $\forall_{AB}(\neg(A = B) \& A \in b \& B \in b \rightarrow \text{непересек}(a(A), a(B)))$ ". Переменной x_{46} присваивается результат подстановки в выражение x_{23} терма " $x_{34}(x_{17})$ " вместо переменной x_{17} . Переменной x_{47} присваивается равенство результата замены в подтерме x_{13} вхождения x_{14} на терм " $x_{22}(\text{отображение}(x_{17}$ принадлежит(x_{17} x_{42}) $x_{34}(x_{17})))$ " терму " $x_{21}(\text{отображение}(x_{17}$ принадлежит(x_{17} x_{42}) $x_{46}))$ ". В нашем примере x_{47} имеет следующий вид: вероятность($\bigcup_{A, A \in b} a(A), C$) = $\sum_{A, A \in b}$ вероятность($a(A), C$). Переменной x_{48} присваивается результат обработки списка x_{45} процедурой "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x_{47} . Наконец, создается импликация с антецедентами x_{48} и консеквентом x_{47} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема". Проверяется, что все антецеденты результата суть элементарные утверждения. Полученная теорема сопровождается характеристикой "развязка(второйтерм)".

3.27 Характеристика "дистрибутивно"

Характеристикой "дистрибутивно(N)" сопровождаются простейшие обобщения тождества дистрибутивности, получающиеся при переходе к нескольким "скобкам". Направление N - в сторону раскрытия скобок.

Использование дополнительного тождества для упрощения заменяющей части

1. Использование тождества исключения сложных операций для преобразования заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcfgij}(f + g = 1 \& 0 < f \& 0 < g \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& e - \text{число} \& f - \text{число} \& g - \text{число} \& 0 \leq c \rightarrow be + bjc^g + cij + eic^f = (b + ic^f)(e + jc^g))$$

из теоремы

$$\forall_{abde}(a\text{—число} \ \& \ b\text{—число} \ \& \ d\text{—число} \ \& \ e\text{—число} \ \rightarrow \ ad+ae+bd+be = (a+b)(d+e))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a\text{—число} \ \& \ b\text{—число} \ \& \ c\text{—число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ b + c = 1 \ \rightarrow \ a^b a^c = a)$$

Заметим, что выводимая теорема порождает прием для упрощения произведений с константными радикалами. При этом b, c, e, i, j идентифицируются с десятичными константами.

Во избежание получения чрезмерно громоздких результатов, проверяется, что исходная теорема имеет не более 4 переменных. При необходимости это ограничение можно снять. Переменной x11 присваивается вхождение двуместной операции x12 в заменяющую часть. Для нашего примера - вхождение произведения ad . Справочник поиска теорем "Сокращение" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. После переобозначения ее связанных переменных на переменные, не входящие в исходную теорему, получаем результат x15. В нем переменные a, b, c заменены на c, f, g . Переменной x16 присваивается набор антецедентов теоремы x15. Проверяется, что консеквент теоремы x15 имеет вид равенства переменной x18 некоторому выражению x19. В нашем случае x18 - c , x19 - $c^f c^g$. Если заголовок терма x19 - ассоциативная и коммутативная операция, равная x12, то выбирается новая переменная, на которую домножаются обе части консеквента теоремы x15. В нашем примере x15 приобретает следующий вид:

$$\forall_{cfgh}(h\text{—число} \ \& \ c\text{—число} \ \& \ f\text{—число} \ \& \ g\text{—число} \ \& \ 0 \leq c \ \& \ 0 < f \ \& \ 0 < g \ \& \ f + g = 1 \ \rightarrow \ c^f c^g h = ch)$$

Далее оператор "тождвывод" определяет результат преобразования вхождения x11 в исходную теорему при помощи тождества x15, применяемого слева направо. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема". Проверяется, что число операндов у заменяемой части итоговой теоремы равно 2, причем число ее подтермов, имеющих максимальную сложность, тоже равно 2. При регистрации теоремы в списке вывода допускаются только характеристики вида "вычпрог(...)".

3.28 Характеристика "допконтекст"

Характеристикой "допконтекст" сопровождаются кванторные импликации, консеквентом которых служит квантор существования от конъюнкции элементарных утверждений.

Логические следствия теоремы

1. Попытка усмотрения однозначной определенности нового объекта по части условий.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDEFG}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC)) \& \\ l(AD) = l(BD) \& l(AF) = l(CF) \& l(BE) = l(CE) \& D \in \text{прямая}(AB) \& \\ E \in \text{прямая}(BC) \& F \in \text{прямая}(AC) \& G \in \text{отрезок}(AE) \& G \in \text{отрезок}(BF) \\ \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& F - \text{точка} \\ \& G - \text{точка} \rightarrow G \in \text{отрезок}(CD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEFG}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \\ F - \text{точка} \& \neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC)) \& \\ D \in \text{отрезок}(AB) \& l(AD) = l(BD) \& E \in \text{отрезок}(BC) \& l(BE) = l(CE) \& \\ F \in \text{отрезок}(AC) \& l(AF) = l(CF) \rightarrow \exists_G(G - \text{точка} \& G \in \text{отрезок}(CD) \& \\ G \in \text{отрезок}(AE) \& G \in \text{отрезок}(BF)))$$

Из факта пересечения трех медиан в одной точке выводится принадлежность точки пересечения двух медиан третьей.

Переменной x9 присваивается связывающая приставка консеквента. Проверяется, что она состоит из единственной переменной x10 (в нашем примере - G). Переменной x11 присваивается набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения в консеквенте. В нем выбирается утверждение x12, содержащее переменную x10 и какую-либо еще переменную. В нашем случае - утверждение $G \in \text{отрезок}(CD)$. Выбирается новая переменная x13. В нашем случае - a . Переменной x15 присваивается набор результатов замены переменной x10 на переменную x13 в отличных от x12 утверждениях списка x11. Переменной x16 присваивается объединение списка antecedентов исходной теоремы со списками x14 и x15. Решается задача на доказательство равенства x10 и x13 из посылок x16. После этого создается импликация, antecedентами которой служат antecedенты исходной теоремы и утверждения x14, а консеквентом - x12. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Вывод элементарных следствий из обеих частей определения элементарного утверждения и условий на новые объекты.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDE}(E \in \text{прямая}(AC) \& E \in \text{прямая}(BD) \& \text{параллелограмм}(ABCD) \& \\ A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \rightarrow l(DE) = l(BE))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \text{параллелограмм}(ABCD) \\ \rightarrow \exists_E(E - \text{точка} \& E \in \text{отрезок}(BD) \& E \in \text{отрезок}(AC)))$$

Проверяется, что текущая теорема была получена в текущем цикле вывода из определения. Это определение присваивается переменной x11. В нашем случае оно имеет вид

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow \\ \text{параллелограмм}(ABCD) \leftrightarrow \text{четыреугольник}(ABCD) \& \text{прямая}(AB) \parallel \\ \text{прямая}(CD) \& \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD))$$

Переменной x_{12} присваивается набор антецедентов текущей теоремы, переменной x_{13} - набор антецедентов теоремы x_{11} . Проверяется, что x_{12} получается из x_{13} добавлением одного из операндов консеквента теоремы x_{11} . Переменной x_{17} присваивается объединение списка x_{13} , набора конъюнктивных членов противоположного операнда x_{15} консеквента теоремы x_{11} и набора конъюнктивных членов утверждения под квантором существования в консеквенте текущей теоремы. В нашем случае x_{17} состоит из следующих утверждений: "A-точка", "B-точка", "C-точка", "D-точка", "четырёхугольник(ABCD)", "прямая(AB) || прямая(CD)", "прямая(BC) || прямая(AD)", "E - точка", "E ∈ отрезок(BD)", "E ∈ отрезок(AC)". Создается задача на исследование x_{18} , имеющая посылки x_{17} и цели "известно", "теорема", "исключ X", где X - связывающая приставка квантора существования. Ее неизвестными являются все параметры посылок. Переменной x_{19} присваивается объединение списка x_{13} и набора конъюнктивных членов операнда x_{15} . Создается задача на исследование x_{20} , посылками которой служат утверждения x_{19} . Она имеет цели "известно", "теорема". Неизвестными служат все параметры ее посылок. Просматривается текущий список вывода. Если в нем встречается теорема, антецеденты которой включаются в список x_{12} , то ее консеквент присоединяется к посылкам задачи x_{18} и помечается в ней комментарием "теорвывод".

Далее предпринимается последовательное решение задач x_{18} и x_{20} . Уровни обращения в обоих случаях равны 5. После решения выбирается элементарная посылка x_{23} задачи x_{18} , не имеющая комментария "теорвывод", не входящая в список посылок задачи x_{20} и не имеющая заголовков "актив", "пассив". В нашем примере это посылка " $l(DE) = l(BE)$ ". Проверяется выполнение хотя бы одного из следующих условий:

- (a) В x_{23} входит переменная связывающей приставки квантора существования в консеквенте текущей теоремы.
- (b) x_{23} - равенство, каждый операнд которого - либо константа, либо невырожденный числовой атом.
- (c) x_{23} не имеет численных корневых операндов.

Переменной x_{26} присваивается результат обработки процедурой "нормантецеденты" списка антецедентов текущей теоремы, пополненного конъюнктивными членами утверждения подквантором существования, если его кванторная приставка пересекается с x_{23} . Обработка ведется относительно параметров утверждения x_{23} . Наконец, формируется импликация с антецедентами x_{26} и консеквентом x_{23} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема". Перед регистрацией предпринимается проверка того, что консеквент не является следствием собственного подмножества антецедентов. Используется задача на доказательство.

2. Добавление к подкванторным утверждениям следствий, выведенных во вспомогательной задаче на исследование и содержащих только переменные консеквента источника.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCEFG}(\neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AC) = \text{прямая}(BC)) \ \& \ l(AF) = l(CF) \ \& \ l(BE) = l(CE) \ \& \ E \in \text{прямая}(BC) \ \& \ F \in \text{прямая}(AC) \ \& \ G \in \text{отрезок}(AE) \ \& \ G \in \text{отрезок}(BF) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ G - \text{точка} \rightarrow \exists_D(2l(DG) = l(CG) \ \& \ 3l(DG) = l(CD) \ \& \ l(AD) = l(BD) \ \& \ D \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ G \in \text{отрезок}(CD) \ \& \ D - \text{точка}))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCEFG}(\neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AC) = \text{прямая}(BC)) \ \& \ l(AF) = l(CF) \ \& \ l(BE) = l(CE) \ \& \ E \in \text{прямая}(BC) \ \& \ F \in \text{прямая}(AC) \ \& \ G \in \text{отрезок}(AE) \ \& \ G \in \text{отрезок}(BF) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ G - \text{точка} \rightarrow \exists_D(l(AD) = l(BD) \ \& \ D \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ G \in \text{отрезок}(CD) \ \& \ D - \text{точка}))$$

Проверяется, что текущая теорема была получена при помощи приема "Вывод утверждения существования путем усмотрения реализуемости группы антецедентов, содержащих заданный параметр". Этот прием инициируется характеристикой "отношение" и будет описан впоследствии. В нашем случае исходной теоремой для него была следующая теорема:

$$\forall_{ABCDEFG}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC)) \ \& \ l(AD) = l(BD) \ \& \ l(AF) = l(CF) \ \& \ l(BE) = l(CE) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ E \in \text{прямая}(BC) \ \& \ F \in \text{отрезок}(AC) \ \& \ G \in \text{отрезок}(AE) \ \& \ G \in \text{отрезок}(BF) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ G - \text{точка} \rightarrow G \in \text{отрезок}(CD))$$

Она присваивается переменной x11. Переменной x12 присваиваются параметры консеквента теоремы x11. В нашем примере - C, D, G . Проверяется, что заголовком консеквента текущей теоремы служит квантор существования. Переменной x13 присваивается его связывающая приставка, переменной x14 - набор конъюнктивных членов консеквента. Рассматривается объединение x15 набора антецедентов текущей теоремы и набора x14. Решается задача на исследование x16 с посылками x15. Ее цели - "известно", "теорвывод". Неизвестными служат все параметры списка посылок. Перед обращением выполняется разблокировка приемов, основанных на уже выведенных в текущем цикле теоремах. По окончании решения переменной x18 присваивается список всех посылок задачи x16, не имеющих заголовка "актив", содержащих хотя бы одну переменную связывающей приставки x13 и не имеющих переменных, не входящих в список x12. Эти посылки обрабатываются нормализатором "станд" упорядочения операндов коммутативных операций и симметричных отношений. В нашем примере x18 состоит из утверждений " $2l(DG) = l(CG)$ ", " $3l(DG) = l(CD)$ ", " $G \in \text{отрезок}(CD)$ ", " $D - \text{точка}$ ". Проверяется, что x18 не включается в набор x19 результатов обработки оператором "станд" термов списка x14. Формируется импликация, антецеденты которой такие же, как у исходной теоремы, а консеквент - квантор существования по переменным x13, навешенный на конъюнкцию утверждений списков x18 и x19. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема".

3. Добавление к подкванторным утверждениям консеквента равенств, каждый числовой атом которых содержит переменную связывающей приставки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(A\text{—точка} \& B\text{—точка} \& C\text{—точка} \& D\text{—точка} \& \text{параллелограмм}(ABCD) \\ \rightarrow \exists_E(E\text{—точка} \& E \in \text{отрезок}(BD) \& E \in \text{отрезок}(AC) \& l(BE) = l(DE) \& \\ l(AE) = l(CE)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A\text{—точка} \& B\text{—точка} \& C\text{—точка} \& D\text{—точка} \& \text{параллелограмм}(ABCD) \\ \rightarrow \exists_E(E\text{—точка} \& E \in \text{отрезок}(BD) \& E \in \text{отрезок}(AC)))$$

Среди источников текущей теоремы находится теорема x11, имеющая характеристику "определение(...)". В нашем примере она имеет следующий вид:

$$\forall_{ABCD}(A\text{—точка} \& B\text{—точка} \& C\text{—точка} \& D\text{—точка} \rightarrow \\ \text{параллелограмм}(ABCD) \leftrightarrow \text{четыреугольник}(ABCD) \& \text{прямая}(AB) \parallel \\ \text{прямая}(CD) \& \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD))$$

Переменной x12 присваивается набор антецедентов текущей теоремы, переменной x13 - набор антецедентов теоремы x11. Проверяется, что x13 включается в x12. Среди операндов консеквента теоремы x11 находится то утверждение x16, которое входит в список 12. Вхождение противоположного операнда присваивается переменной x15. Проверяется, что после добавления x16 к x13 получается полный список антецедентов x12. Переменной x17 присваивается объединение списка x13, набора конъюнктивных членов операнда x15 и набора конъюнктивных членов подкванторного утверждения консеквента текущей теоремы. В нашем примере x17 состоит из утверждений "A — точка", "B — точка", "C — точка", "D — точка", "четыреугольник(ABCD)", "прямая(AB) || прямая(CD)", "прямая(BC) || прямая(AD)", "E — точка", "E ∈ отрезок(BD)", "E ∈ отрезок(AC)". Решается задача на исследование x18, посылками которой служат утверждения x17. Она имеет цели "известно", "теорема", "исключ...", где исключаемыми переменными служат переменные связывающей приставки квантора существования. В нашем примере - E. Неизвестные суть все параметры посылок. К посылкам задачи x18 добавляются все консеквенты теорем списка вывода, антецеденты которых содержатся в списке x12. Заметим, что данная задача x18 уже встречалась выше в первом приеме данного подраздела. Она используется сразу в двух приемах.

Переменной x23 присваивается связывающая приставка квантора существования, переменной x24 - объединение ее с параметрами антецедентов x12. Составляется список x25 всех равенств R из посылок задачи x18 (после ее решения), параметры которых пересекаются со списком x23 и включаются в список x24, причем все числовые атомы равенства R имеют в нем единственное вхождение и содержат переменную списка x23. При занесении в список равенства обрабатываются оператором "станд". В нашем примере x25 состоит из равенств $l(BE) = l(DE)$ и $l(AE) = l(CE)$. Проверяется, что список x25 непуст. Составляется список x26 обработанных оператором "станд" конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. Проверяется, что x25 не включается в x26. После этого формируется результат, получаемый добавлением под квантор существования исходной теоремы равенств x25.

Варьирование антецедентов

1. Использование определения для устранения многоместного предиката в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(cd) \ \& \ \text{прямая}(ad) \parallel \text{прямая}(bc) \ \& \ \text{четырёхугольник}(abcd) \rightarrow \exists_E(l(aE) = l(cE) \ \& \ l(bE) = l(dE) \ \& \ E \in \text{отрезок}(ac) \ \& \ E \in \text{отрезок}(bd) \ \& \ E - \text{точка}))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{параллелограмм}(ABCD) \rightarrow \exists_E(E - \text{точка} \ \& \ E \in \text{отрезок}(BD) \ \& \ E \in \text{отрезок}(AC) \ \& \ l(BE) = l(DE) \ \& \ l(AE) = l(CE)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{параллелограмм}(ABCD) \leftrightarrow \text{четырёхугольник}(ABCD) \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD))$$

Сразу отметим, что итоговая теорема - лишь промежуточное звено в цепочке выводов. Следующим шагом будет повторное применение того же самого приема для исключения антецедента "четырёхугольник(*abcd*)".

Рассматривается вхождение х8 антецедента, имеющего более двух корневых операндов. Переменной х9 присваивается его заголовок. В нашем случае - символ "параллелограмм". При помощи справочника поиска теорем "определение" по символу х9 находится указанная выше дополнительная теорема. Проверяется, что определяющее утверждение не является дизъюнкцией, а все его конъюнктивные члены элементарны. Процедура "тождвывод" определяет результат преобразования вхождения х8 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Результат обрабатывается сначала процедурой "нормтеорема", а затем - процедурой "сокращаент", удаляющей антецеденты, являющиеся следствиями других антецедентов.

3.29 Характеристика "единствсущ"

Характеристикой "единствсущ(*x1*)" сопровождаются тождества, преобразующие терм с несколькими вхождениями операции максимальной сложности, хотя бы одно из которых содержит все переменные заменяемой части, в выражение с единственным вхождением этой операции максимальной сложности. *x1* - направление замены.

Обобщение теоремы

1. Обобщение тождества путем ввода неповторного дополнительного параметра операнда.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdf}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow d(f + bc)/(ac) = d(b + f/c)/a)$$

из теоремы

$$\forall_{abcf}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow (f + bc)/(ac) = (b + f/c)/a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bde}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow b/(d/e) = (be)/d)$$

Исходная теорема имеет характеристику "единствсущ(первыйтерм)". Она переводит выражение с двумя дробями в выражение с одной дробью.

Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. В заменяемой части рассматривается вхождение x12 двуместной операции. В нашем случае - корневое вхождение дроби. Переменной x13 присваивается символ по вхождению x12. Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "нормализация(N)". В нашем примере N - "второйтерм". Переменной x19 присваивается заменяемое выражение дополнительной теоремы. Проверяется, что оно имеет заголовок x13. Рассматривается корневой операнд x20 выражения x19, представляющий собой двуместную операцию от переменных. В нашем случае - "d/e". Проверяется, что эта операция имеет единицу по некоторому своему операнду. Переменной x22 присваивается первый операнд операции x20, переменной x23 - второй. Проверяется, что эти переменные различны. В нашем случае x22 - d, x23 - e. Находится корневой операнд выражения x19, представляющий собой переменную x25. В нашем случае - переменную b. Переменной x26 присваивается вхождение операнда операции x12, расположенного так же, как x20 в x19. В коммутативном случае берется любой операнд. Для нашего примера x26 - вхождение переменной a. Проверяется, что по вхождению x26 расположена переменная, и эта переменная присваивается переменной x27. Проверяется, что она имеет единственное вхождение в x10. Переменной x28 присваивается другой операнд операции x12. В нашем примере - b + f/c. Переменной x30 присваивается та из переменных x22, x23, по которой операция x20 имеет единицу, переменной x29 - другая из них. В нашем примере x29 - d, x30 - e. Переменной x31 присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет заголовок x13. Переменной x32 присваивается вхождение корневого операнда выражения x31, расположенного так же, как операнд x20 операции x19. В нашем примере x32 - вхождение переменной d. Проверяется, что по вхождению x32 расположена переменная x29. Переменной x33 присваивается вхождение корневого операнда выражения x31, отличное от x32. Проверяется, что этот операнд неоднобуквенный и его заголовком служит коммутативный символ x34. В нашем примере x33 имеет вид be. Проверяется, что если терм x26 имеет заголовок x34, то у него отсутствует корневой операнд, являющийся неповторной переменной. Выбирается новая переменная x35. В нашем примере - d. Переменной x36 присваивается результат соединения операций x34 термов x35, x28. Переменной x37 присваивается результат замены вхождения x28 в терм x10 на терм x36. В нашем случае он

имеет вид $d(b + f/c)/a$. Находится результат х38 подстановки в терм х20 переменных х27 и х35 вместо переменных х29 и х30. В нашем случае - a/d . Переменной х39 присваивается результат подстановки терма х38 вместо переменной х27 в выражение х11. В нашем примере - $(f + bc)/((a/d) \cdot c)$. Переменной х41 присваивается набор результатов подстановки в antecedentes дополнительной теоремы выражений х27, х35, х28 вместо переменных х29, х30, х25. В нашем примере имеем набор утверждений " $\neg(a = 0)$ ", " $\neg(d = 0)$ ", " $b + f/c$ - число", " a - число", " d - число". Переменной х42 присваивается объединение списка х41 с результатами подстановки в antecedentes исходной теоремы терма х38 вместо переменной х27. В нашем примере к указанным выше утверждениям добавляются утверждения " $\neg(a/d = 0)$ ", " $\neg(c = 0)$ ", " a/d - число", " b - число", " c - число", " f - число". Если х28 - не переменная и имеет своим заголовком символ, отличный от х34, то находится результат х43 обработки терма х36 оператором "норм" относительно посылки х42. Проверяется, что переменная d в терме х43 не является операндом ассоциативно-коммутативной операции, уже имеющей среди своих операндов и другую неповторную переменную. Затем формируется импликация с antecedентами х42 и равенством термов х39, х37 в консеквенте. Она обрабатывается оператором "нормтеорема". Проверяется, что новая теорема имеет большую длину связывающей приставки, чем исходная, причем в ней отсутствуют "сдвоенные" переменные, допускающие замену на одну новую переменную. Выведенная теорема регистрируется в списке вывода с пометкой "обобщение".

3.30 Характеристика "значениепеременной"

Характеристикой "значениепеременной" снабжаются тождества, у которых в одной части находится переменная, не входящая в противоположную часть.

Склейка теорем

1. Восстановление характеристического набора по его разрядам.

Несколько теорем определяют по отдельности параметры некоторого терма. Они склеиваются в теорему, определяющую данный терм.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDKcdehi} (\neg(c = D) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ \text{коорд}(c, K) = (d, e) \ \& \ c \text{ - точка} \ \& \ D \text{ - точка} \ \& \ \text{прямая}(cD) \parallel \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \neg(h = D) \ \& \ \text{коорд}(h, K) = (i, j) \ \& \ h \text{ - точка} \ \& \ \text{прямая}(hD) \parallel \text{прямая}(AC) \rightarrow \text{коорд}(D, K) = (i, e))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDKcde} (\neg(c = D) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ \text{коорд}(c, K) = (d, e) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \ \& \ c \text{ - точка} \ \& \ D \text{ - точка} \ \& \ \text{прямая}(cD) \parallel \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow b = e)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDKcde}(\neg(c = D) \& K = (A, B, C) \& \text{коорд}(c, K) = (d, e) \& \text{коорд}(D, K) = (a, b) \& c - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \text{прямая}(cD) \parallel \text{прямая}(AB) \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow a = d)$$

Переменной x8 присваивается список antecedентов теоремы. Переменной x12 присваивается переменная, являющаяся одной из частей равенства в консеквенте, переменной x11 - вхождение противоположной части равенства. В нашем примере x12 - b . В antecedентах теоремы находится равенство x13, правая часть которого имеет заголовок "набор", причем переменной x14 присваивается список операндов этого набора. В нашем примере x13 - утверждение " $\text{коорд}(D, K) = (a, b)$ ". Проверяется, что элементы списка x14 суть однобуквенные термы, образованные различными переменными, и число их менее 3. Переменной x15 присваивается список этих переменных. В нашем случае - a, b . Проверяется, что x11 - элемент списка x15. Проверяется, что отличные от x13 antecedенты не содержат переменных x15 и что первый операнд равенства x13 тоже не содержит этих переменных. Переменной x16 присваивается подтерм по вхождению x11. В нашем примере - e . Проверяется, что он не содержит переменных x15. Создается накопитель x17, длина которого равна длине набора x15. Первоначально он заполнен нулями. Тот его разряд, который соответствует позиции переменной x12 в списке x15, заменяется на терм x16. В нашем случае это второй разряд.

Переменной x18 присваивается одноэлементный набор, образованный текущей теоремой, переменной x19 - результат отбрасывания из списка antecedентов равенства x13. Составляется список x20 параметров равенства x13. Просматриваются отличные от x13 равенства в antecedентах. Если у некоторого такого равенства одна из частей - переменная, входящая в x20, то к x20 добавляются параметры другой части равенства. В итоге x20 оказывается состоящим из переменных A, B, C, D, K, a, b . Переменной x21 присваивается подмножество antecedентов, все параметры которых содержатся в списке x20. Для нашего случая имеем antecedенты " $K = (A, B, C)$ ", " $\text{коорд}(D, K) = (a, b)$ ", " $D - \text{точка}$ ", " $\text{систкоорд}(K)$ ". В списке вывода находится отличная от исходной теоремы дополнительная теорема x23 (см. выше). Она имеет характеристику "значениеперемнной" и не помечена символом "исключение". Сразу же ее переменные переобозначаются на переменные, не входящие в исходную теорему. Получаем результат следующего вида:

$$\forall_{fghijklmnp}(\neg(h = n) \& p = (k, l, m) \& \text{коорд}(h, p) = (i, j) \& \text{коорд}(n, p) = (f, g) \& h - \text{точка} \& n - \text{точка} \& \text{прямая}(hn) \parallel \text{прямая}(km) \& \text{систкоорд}(p) \rightarrow f = i)$$

Переменной x26 присваивается список antecedентов дополнительной теоремы, переменной x27 - вхождение равенства в ее консеквенте. Проверяется, что в одной части равенства расположена переменная x30. В нашем случае - переменная f . В списке x26 находится равенство x31, правая часть которого имеет заголовок "набор". В нашем примере - " $\text{коорд}(n, p) = (f, g)$ ". Переменной x32 присваивается список операндов этого набора. Проверяется, что все они суть различные однобуквенные термы, образованные переменными, а число их равно числу элементов набора x14. Переменной x33 присваивается набор данных переменных. Проверяется, что он содержит переменную x30, причем прочие

элементы набора x_{26} и левая часть равенства x_{31} не имеют переменных из x_{33} . Переменной x_{34} присваивается операнд консеквента, отличный от x_{30} . В нашем случае это однобуквенный терм i . Проверяется, что он не содержит переменных x_{33} . Находится разряд x_{36} накопителя x_{17} , номер которого равен номеру вхождения переменной x_{30} в набор x_{33} . В нашем случае это первый разряд. Проверяется, что он нулевой.

Переменной x_{37} присваивается набор параметров терма x_{31} . Для каждого входящего в x_{26} равенства, одна из частей которого - переменная списка x_{37} , к списку x_{37} добавляются все переменные этого равенства. В результате x_{37} становится равно f, g, n, p, k, l, m . Определяется список x_{38} элементов списка x_{26} , параметры которых включаются в список x_{37} . В нашем примере он состоит из утверждений " $p = (k, l, m)$ ", " $\text{коорд}(n, p) = (f, g)$ ", " n - точка", " $\text{систкоорд}(p)$ ". Проверяется, что длины списков x_{21} и x_{38} равны. Процедура "подборзначений" определяет такие термы x_{39} , что при подстановке их вместо переменных x_{37} в утверждения x_{38} получается (с точностью до изменения порядка операндов в коммутативных операциях и симметричных отношениях) список утверждений x_{21} . В нашем примере x_{39} - однобуквенные термы a, b, D, K, A, B, C . К списку x_{19} присоединяются результаты подстановки термов x_{39} вместо переменных x_{37} в утверждения набора x_{26} , отличные от x_{38} . К списку x_{18} присоединяется теорема x_{23} . По вхождению x_{36} в накопитель x_{17} заносится результат подстановки термов x_{39} вместо переменных x_{37} в операнд равенства x_{27} , отличный от переменной x_{30} . В нашем случае - i . Если накопитель x_{17} уже заполнен (т.е. в нем не осталось нулевых разрядов), то переменной x_{43} присваивается равенство первого операнда равенства x_{13} результату соединения операцией "набор" элементов списка x_{17} . В нашем примере - " $\text{коорд}(D, K) = (i, e)$ ". Формируется импликация с антецедентами x_{19} и консеквентом x_{43} , которая и регистрируется в списке вывода. Если накопитель x_{17} заполнен не полностью - откат к выбору из списка вывода другой версии дополнительной теоремы, и продолжение заполнения накопителя.

3.31 Характеристика "значпарам"

Характеристикой "значпарам(x_1)" снабжаются тождества, выражающие невырожденный числовой атом через параметры координат. x_1 - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Попытка преобразования консеквента для получения соотношения с исключенными сложными операциями.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abpqABK} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (p, q) \rightarrow l(AB)^2 = (a - p)^2 + (b - q)^2)$$

из теоремы

$$\forall_{abpqABK} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (p, q) \rightarrow l(AB) = \sqrt{(a - p)^2 + (b - q)^2})$$

К консеквенту x_9 исходной теоремы относительно списка x_8 ее антецедентов применяется нормализатор "нормчисл". Этот нормализатор создан для эквивалентного преобразования утверждений с переходом к более простым понятиям. Пока в нем имеются лишь приемы для исключения радикалов и знаменателей, а также группировка ненулевых членов равенства в левой части. Нормализатор выдает результат x_{10} . В нашем примере он имеет вид " $l(AB)^2 = (a - p)^2 + (b - q)^2$ ". Проверяется, что x_{10} не равно x_9 . Составляется список x_{11} оценок сложности операций в x_{10} , а также список x_{12} оценок сложности операций в x_9 . В этих списках допускаются повторения. Переменной x_{13} присваивается разность списков x_{11} и x_{12} , а переменной x_{14} - разность списков x_{12} и x_{11} . При определении разности повторяющиеся элементы рассматриваются как различные. Проверяется, что для любого элемента списка x_{13} существует больший его элемент списка x_{14} . Среди конъюнктивных членов утверждения x_{15} выбирается равенство x_{16} . Затем формируется результат - импликация с антецедентами x_8 и консеквентом x_{16} .

Использование дополнительной теоремы для преобразования антецедента

1. Попытка декомпозиции антецедента, имеющего вид равенства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{defhijklm} (k = \text{крд}(l, m, 3) \ \& \ j = \text{крд}(l, m, 2) \ \& \ \text{Вектор}(l) \ \& \ \text{Вектор}(d) \ \& \ \text{прямокоорд}(m) \ \& \ i = \text{крд}(l, m, 1) \ \& \ \text{коорд}(d, m) = (e, f, h) \rightarrow \text{скалумнож}(l, d) = ie + jf + kh)$$

из теоремы

$$\forall_{Kabcdefgh} (\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(d) \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(a, K) = (b, c, g) \ \& \ \text{коорд}(d, K) = (e, f, h) \rightarrow \text{скалумнож}(a, d) = be + cf + gh)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{AKabc} (\text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Вектор}(A) \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \leftrightarrow \text{крд}(A, K, 1) = a \ \& \ \text{крд}(A, K, 2) = b \ \& \ \text{крд}(A, K, 3) = c)$$

Переменной x_{10} присваивается антецедент исходной теоремы, имеющий заголовок "равно". В нашем случае - "коорд(a, K) = (b, c, g)". Находятся подтермы терма x_{10} , имеющие наибольшую оценку сложности. Проверяется, что такой подтерм единственный. Он присваивается переменной x_{12} . В нашем примере - "коорд(a, K)". Переменной x_{13} присваивается заголовок подтерма x_{12} . Справочник поиска теорем "равнозначны" находит по x_{13} указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" определяет результат x_{18} преобразования антецедента x_{10} при помощи дополнительной теоремы. В нашем случае он имеет следующий вид:

$$\forall_{defhijklm} (\text{Вектор}(l) \ \& \ \text{Вектор}(d) \ \& \ \text{прямокоорд}(m) \ \& \ (\text{крд}(l, m, 1) = i \ \& \ \text{крд}(l, m, 2) = j \ \& \ \text{крд}(l, m, 3) = k) \ \& \ \text{коорд}(d, m) = (e, f, h) \rightarrow \text{скалумнож}(l, d) = ie + jf + kh)$$

Набор антецедентов теоремы x18 обрабатывается оператором "нормантецен- ты" относительно параметров ее консеквента, после чего переменной x23 присваивается окончательный результат. Он получается из x18 заменой ее антецедентов на результат указанной обработки. Итоговая теорема снабжается характеристикой "идентификация(1,2,6)", указывающей номера непосредственно идентифицируемых антецедентов, а также характеристикой "значпа- рам(второйтерм)".

2. Попытка сгруппировать несколько антецедентов, хотя бы один из которых - равенство, в определяемое понятие.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{defhK}(\text{коорд}(d, K) = (e, f, h) \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(d) \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \ \& \ \text{вертикалнпр}(a, K) \rightarrow \text{скалумнож}(a, d) = h\text{крд}(a, K, 3))$$

из теоремы

$$\forall_{defhijklm}(k = \text{крд}(l, m, 3) \ \& \ j = \text{крд}(l, m, 2) \ \& \ \text{Вектор}(l) \ \& \ \text{Вектор}(d) \ \& \ \text{прямокоорд}(m) \ \& \ i = \text{крд}(l, m, 1) \ \& \ \text{коорд}(d, m) = (e, f, h) \rightarrow \text{скалумнож}(l, d) = ie + jf + kh)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{aK}(\text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Вектор}(a) \rightarrow \text{вертикалнпр}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 1) = 0 \ \& \ \text{крд}(a, K, 2) = 0)$$

Проверяется, что теорема имеет не менее двух антецедентов. Среди них находится равенство x10. Оно имеет единственное подвыражение x12 максимальной сложности. В нашем примере x10 - $k = \text{крд}(l, m, 3)$, x12 - $\text{крд}(l, m, 3)$. Переменной x13 присваивается заголовок выражения x12. Справочник поиска теорем "опред" находит по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что ее консеквент - эквивалентность, одним из операндов которой служит конъюнкция x18. Переменной x20 присваивается набор ее конъюнктивных членов. Переменной x21 присваивается набор заголовков самых сложных подвыражений этих членов. В нашем случае - (крд, крд). Для каждого символа набора x21 выбирается содержащее его и еще не выбранное равенство списка x8, регистрируемое в наборе x22. Проверяется, что такой выбор возможен; само x22 не используется. В нашем случае выбираются антецеденты $k = \text{крд}(l, m, 3)$, $j = \text{крд}(l, m, 2)$. Переменной x23 присваивается импликация, получаемая из исходной теоремы группировкой всех антецедентов в одну конъюнкцию. Процедура "тождвывод" преобразует этот антецедент при помощи дополнительной теоремы, причем используется указатель "модификатор", добавляющий к каждой части дополнительной теоремы новый конъюнктивный член - вспомогательную переменную. Полученная импликация x24 обрабатывается оператором "нормтеорема".

Использование задачи на описание для вывода следствий теоремы

1. Попытка выражения характеристики атомарного выражения через его координаты.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdfgK}(\text{коорд}(\text{вектор}(cd), K) = (f, g) \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(cd)) = \sqrt{f^2 + g^2})$$

из теоремы

$$\forall_{ABabpqK}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (p, q) \rightarrow l(AB) = \sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(AB)) = l(AB))$$

Переменной x11 присваивается заменяемое выражение, переменной x12 - его заголовок. В нашем случае - символ "расстояние". Справочник поиска теорем "опратом" находит по данному символу указанную выше дополнительную теорему. Переменной x15 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере получаем: " $\forall_{cd}(c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(cd)) = l(cd))$ ".

Рассматривается та часть x19 равенства в консеквенте теоремы x15, заголовок которой равен x12. В нашем случае - $l(cd)$. Переменной x20 присваивается список параметров термов x11 и x19, т.е. c, d, A, B . Определяется унифицирующая подстановка S для термов x11, x19 относительно переменных x20. В нашем примере она подставляет термы c, d, c, d . Определяется набор x22 результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и теоремы x15. В нашем примере он состоит из утверждений " $c - \text{точка}$ ", " $d - \text{точка}$ ", " $\text{прямоорд}(K)$ ", " $\text{коорд}(c, K) = (a, b)$ ", " $\text{коорд}(d, K) = (p, q)$ ". Переменной x23 присваивается результат применения подстановки S к той части консеквента теоремы x15, которая отлична от x19. Получаем в нашем примере " $\text{длина}(\text{вектор}(cd))$ ". В терме x23 определяется неоднобуквенный подтерм x27, тип значения которого отличен от "число". В нашем случае - " $\text{вектор}(cd)$ ". Проверяется, что x27 - атомарное выражение, содержащее все переменные термина x23. В списке x22 рассматривается равенство x28, один из операндов которого имеет заголовок "набор", а другой - имеет вид " $T(x, Q)$ ", где T - название координат. В нашем случае x28 - " $\text{коорд}(c, K) = (a, b)$ ", T - символ "коорд". Переменной x32 присваивается подтерм Q . Формируется терм x33 вида " $T(x27, Q)$ ". В нашем примере - " $\text{коорд}(\text{вектор}(cd, K))$ ". Переменной x34 присваивается список параметров правых частей всех равенств набора x22, имеющих вид " $T(y, Q) = \text{набор}(\dots)$ ". В нашем случае - список a, b, p, q . Выбирается новая переменная x35 (в нашем примере - e), после чего решается задача на описание с посылками x22 и единственным условием "равно(x33 x35)". Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x35". "известно x34". Получается ответ x37, имеющий заголовок "равно". В нашем случае - $e = (p - a, q - b)$. Проверяется, что первый операнд равенства - переменная x35, а второй операнд x38 имеет заголовок "набор". Переменной x39 присваивается набор корневых операндов этого набора. Выбирается набор x40 переменных, не входящих в термы x22 и в x23, имеющий ту же длину, что набор x39. В нашем примере

- f, g . Переменной x_{41} присваивается результат пополнения набора x_2 равенствами элементов набора x_{39} переменным x_{40} . В нашем случае x_{41} состоит из утверждений " c – точка", " d – точка", "прямокоорд(K)", "коорд(c, K) = (a, b)", "коорд(d, K) = (p, q)", " $p - a = f$ ", " $q - b = g$ ". Определяется результат x_{42} применения подстановки S к заменяющему терму исходной теоремы. В нашем примере этот результат имеет вид $\sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2}$. Решается задача на описание с посылками x_{41} и условиями "равно(x_{42} x_{35})", "число(x_{35})". В нашем примере - " $\sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2} = e$ ", " e – число". Задача имеет цели "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{35} ", "известно x_{40} ". Ответ присваивается переменной x_{44} . В нашем случае - " $e = \sqrt{f^2 + g^2}$ ". Проверяется что x_{44} - равенство с первым операндом x_{35} . Переменной x_{45} присваивается его второй операнд. Составляется список x_{46} , получаемый добавлением к x_{22} равенства выражения x_{33} результату соединения операцией "набор" переменных списка x_{40} . Формируется импликация с антецедентами x_{46} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{23} и x_{45} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

2. Попытка выражения числового атома через характеристику атомарного выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdfgK}(\text{коорд}(\text{вектор}(cd), K) = (f, g) \ \& \ c \text{ – точка} \ \& \ d \text{ – точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \rightarrow l(cd) = \sqrt{f^2 + g^2})$$

из теоремы

$$\forall_{ABabpqK}(A \text{ – точка} \ \& \ B \text{ – точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (p, q) \rightarrow l(AB) = \sqrt{(a-p)^2 + (b-q)^2})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{AB}(A \text{ – точка} \ \& \ B \text{ – точка} \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(AB)) = l(AB))$$

Программа приема дословно воспроизводит программу предыдущего приема, вплоть до момента формирования итоговой импликации. Однако, она формируется теперь по-другому. Находится результат применения подстановки S к выражению x_{11} . В нашем случае он имеет вид " $l(cd)$ ". Далее создается импликация с антецедентами x_{46} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{47} и x_{45} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Использование текущего тождества для варьирования дополнительной теоремы

1. Использование выражения числового атома через координаты для получения выражения более сложного числового атома через координаты из дополнительной теоремы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{efghABCK}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (f, g) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(AC), K) = (e, h) \ \& \ A \text{ – точка} \ \& \ B \text{ – точка} \ \& \ C \text{ – точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \rightarrow ef + gh = \sqrt{e^2 + h^2} \sqrt{f^2 + g^2} \cos(\angle(BAC)))$$

из теоремы

$$\forall_{cdfgK}(\text{коорд}(\text{вектор}(cd), K) = (f, g) \ \& \ c\text{-точка} \ \& \ d\text{-точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \rightarrow l(cd) = \sqrt{f^2 + g^2})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow 2l(AB)l(AC) \cos(\angle(BAC)) = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)$$

Переменной x11 присваивается заменяемый терм, переменной x12 - его заголовок. В нашем случае - символ "расстояние". Справочник "раздел" определяет по символу x12 раздел x13, к которому он относится. В нашем случае - "геометрия". Предпринимается просмотр теорем x17 данного раздела, имеющих характеристику "числовой атом" и не имеющих существенных посылок, в частности, посылок с заголовком "равно". В нашем случае x17 - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x19 присваивается консеквент теоремы x17. Проверяется, что x12 встречается в терме x19. Переменной x20 присваивается набор числовых атомов консеквента x19. Проверяется, что все они невырожденные и каждый представляет собой операцию над группой переменных. Переменной x21 присваивается список всех элементов набора x20, имеющих заголовки x12. В нашем случае это $l(AB)$, $l(AC)$, $l(BC)$. Проверяется, что список x21 непуст и что в него не вошел единственный элемент x23 списка x20. В нашем случае - $\angle(BAC)$. Проверяется, что оценка сложности терма x23 больше оценки сложности любого из термов x21. Вводится пустой накопитель x25 вхождений символа x12 в терм x19, а также пустой накопитель выражений, на которые эти вхождения будут заменяться. Переменной x28 присваивается набор теорем, которые будут использоваться приемом. Изначально в него заносится сама теорема x17. Далее в этот набор будут заноситься лишь копии исходной теоремы, с помощью которых изменяются вхождения набора x25.

Начинается просмотр вхождений x29 символа x12 в терм x19. Определяется результат x30 переобозначения переменных исходной теоремы на переменные, не использованные в теоремах списка x28. Заменяемый терм теоремы x30 унифицируется относительно своих переменных с подтермом x29. К списку x18, инициализированному антецедентами теоремы x17, добавляются результаты применения унифицирующей подстановки к антецедентам теоремы x30. В список x28 заносится теорема x30, в список x25 заносится вхождение x29, а в список x26 - результат применения унифицирующей подстановки к заменяющему терму теоремы x30. Попутно происходит отождествление обозначений системы координат в копиях исходной теоремы. В нашем примере вместо вхождений атомов $l(AB)$, $l(AC)$, AB , AC , $l(BC)$ (слева направо по консеквенту теоремы x17) будут подставляться выражения $\sqrt{f^2 + g^2}$, $\sqrt{e^2 + h^2}$, $\sqrt{l^2 + m^2}$, $\sqrt{r^2 + s^2}$, $\sqrt{w^2 + x^2}$. Список x18 будет состоять из утверждений A - точка, B - точка, C - точка, $\neg(A = C)$, $\neg(A = B)$, $\text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (f, g)$, $\text{прямоорд}(K)$, $\text{коорд}(\text{вектор}(AC), K) = (e, h)$, $\text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (l, m)$, $\text{коорд}(\text{вектор}(AC), K) = (r, s)$, $\text{коорд}(\text{вектор}(BC), K) = (w, x)$.

Находится результат x29 замены вхождений x25 в терме x19 на термы x26. Формируется импликация с антецедентами x18 и консеквентом x29, которая обрабатывается оператором "нормтеорема".

3.32 Характеристика "и"

Характеристикой "и(x1)" снабжаются эквивалентности, выполняющие декомпозицию элементарного утверждения в конъюнкцию бескванторных утверждений. x1 - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Фиксация переменной посредством равенства из декомпозирующей части эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{BC}(B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \neg(\Delta(BBC)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \Delta(ABC) \leftrightarrow \neg(A = B) \ \& \ \neg(C \in \text{прямая}(AB)))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть эквивалентности, переменной x11 - заменяющая. Находится конъюнктивный член терма x11, имеющий вид $\neg(x = t)$, где x - переменная, не входящая в выражение t . В нашем примере x - A , t - B . Определяется результат x19 подстановки t вместо x в заменяемую часть. В нашем случае - $\Delta(BBC)$. Переменной x20 присваивается отрицание утверждения x19. Формируется импликация x23, антецеденты которой получены из антецедентов исходной теоремы подстановкой t вместо x , а консеквентом служит x20. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

2. Перенесение в антецеденты всех конъюнктивных членов, кроме одного.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ d \subseteq c \rightarrow d \subseteq b \cap c \leftrightarrow d \subseteq b)$$

из теоремы

$$\forall_{bcd}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow \subseteq b \cap c \leftrightarrow d \subseteq b \ \& \ d \subseteq b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть эквивалентности, переменной x11 - заменяющая. Выбирается конъюнктивный член x14 утверждения x11. В наше случае - $d \subseteq b$. Переменной x15 присваивается набор остальных конъюнктивных членов утверждения x11. Проверяется, что в нем нет равенства, содержащего не менее двух параметров либо имеющего вид $x = t$, где x - переменная, не входящая в t . Проверяется, что все утверждения списка x15 элементарны. Переменной x16 присваивается объединение списка антецедентов теоремы и x15. Проверяется, что x14 не является сопровождающим по о.д.з. утверждением для x16 и что приемы проверочных операторов, не основанные на теоремах текущего списка вывода, не усматривают, что x14 - следствие x16. Тогда выводится импликация с антецедентами x16, консеквентом которой служит эквивалентность x10 и x14.

3. Перенесение в antecedentes всех конъюнктивных членов заменяющей части, относящихся к условию на о.д.з. этой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow b \subseteq \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow \text{образ}(f, b) \subseteq a)$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow b \subseteq \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow b \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \text{образ}(f, b) \subseteq a)$$

Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов заменяющей части, переменной x14 - набор утверждений, необходимых для сопровождения ее по о.д.з. Пересечение x15 этих наборов непусто. Переменной x16 присваивается разность списков x13 и x15. Формируется импликация, antecedentes которой получаются добавлением утверждений x15 к antecedентам исходной теоремы. Консеквент - эквивалентность заменяемой части исходной теоремы и конъюнкции утверждений x16. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема".

4. Попытка разрешения заменяющей части относительно переменной, глубина которой в заменяемой части равна 1.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{mnx}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow x - \text{целое} \ \& \ m \leq x \ \& \ x \leq n \leftrightarrow x \in \{m, \dots, n\})$$

из теоремы

$$\forall_{mnx}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow x \in \{m, \dots, n\} \leftrightarrow x - \text{целое} \ \& \ 0 \leq x - m \ \& \ 0 \leq n - x)$$

Проверяется, что исходная теорема - стартовая в текущем списке вывода. Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий. Проверяется, что утверждение x10 элементарно. Выбирается переменная x13 утверждения x10, глубина которой равна 1. В нашем случае - переменная x . Переменной x14 присваивается набор конъюнктивных членов заменяющей части. Проверяется, что в одном из них глубина переменной x13 больше 1, причем все эти члены содержат переменную x13. Проверяется, что antecedенты не содержат переменной x13 и что их список непуст. Решается задача на описание, посылками которой служат antecedенты теоремы, а условиями - утверждения x14. Задача имеет цели "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x13". На нее получается ответ x16, отличный от символа "отказ". В нашем примере - " $x - \text{целое} \ \& \ m \leq x \ \& \ x \leq n \ \& \ m \leq n$ ". Переменной x17 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x16. Для каждого утверждения этого набора, не зависящего от x13, предпринимается попытка доказать его как следствие antecedентов и остальных утверждений набора x17. При успехе эти утверждения исключаются из набора x17. В нашем примере исключается $m \leq n$. Наконец, формируется импликация, antecedенты которой - те же, что у исходной теоремы, а консеквент - эквивалентность конъюнкции утверждений x17 и заменяемой части исходной теоремы.

5. Попытка разрешения заменяющей части относительно переменной - операнда самой сложной операции неповторной заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow |a| \leq b \leftrightarrow a \leq b \ \& \ -b \leq a)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a \leq b \ \& \ -a \leq b \leftrightarrow |a| \leq b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая, переменной x12 - список антецедентов. Проверяется, что x10 неповторно и имеет единственное подвыражение x14 максимальной сложности. В нашем примере x14 имеет вид $|a|$. Выбирается переменная x16 - корневой операнд выражения x14, имеющая в терме x10 глубину, большую единицы. В нашем случае это переменная a . Переменной x17 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x11. Проверяется, что хотя бы в одном из них глубина переменной x16 больше единицы. Переменной x18 присваивается набор всех антецедентов, содержащих x16, переменной x19 - набор остальных антецедентов. Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения x19, а условиями - утверждения x18 и x17. Она имеет цели "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x16". Переменной x22 присваивается ответ. В нашем примере - " $a - \text{число} \ \& \ a \leq b \ \& \ -b \leq a$ ". Переменной x23 присваивается результат отбрасывания у списка конъюнктивных членов утверждения x22 всех антецедентов исходной теоремы. Затем формируется импликация с антецедентами x12, у которой в консеквенте расположена эквивалентность x10 и конъюнкции утверждений x23. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

6. Попытка рассмотреть константную функцию.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cB}(B - \text{set} \rightarrow \text{последовательность}(\lambda_b(c, b - \text{натуральное}), B) \leftrightarrow c \in B)$$

из теоремы

$$\forall_{aB}(B - \text{set} \rightarrow \text{последовательность}(a, B) \leftrightarrow a - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(a) = \mathbb{N} \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq B)$$

Переменной x10 присваивается заменяемое утверждение, переменной x11 - заменяющее, переменной x12 - набор антецедентов. Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x11. Среди них выбирается утверждение x14 с заголовком "функция". Корневой операнд - переменная, присваиваемая переменной x15. В нашем примере это " a ". В наборе x13 имеется также утверждение x16 вида " $\text{Dom}(x15) = t$ ". Выражение t присваивается переменной x19. Проверяется, что в него не входит переменная x15. Выбираются две переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем случае это b, c . Переменной x21 присваивается выражение "отображение(b с принадлежит($b t$))". В нашем примере - " $\lambda_b(c, b \in \mathbb{N})$ ". Находится результат x22 подстановки в x10 выражения x21 вместо переменной x15. В нашем случае - "последовательность($\lambda_b(c, b -$

натуральное), B ". Переменной x_{23} присваивается конъюнкция результатов подстановки x_{21} вместо x_{15} в элементы набора x_{13} , отличные от x_{14} , x_{16} . В нашем случае - $\text{Val}(\lambda_b(c, b \in \mathbb{N})) \subseteq B$. Переменной x_{24} присваивается эквивалентность x_{22} и x_{23} , переменной x_{25} - набор результатов подстановки x_{21} вместо x_{15} в antecedentes теоремы. Наконец, формируется импликация с antecedентами x_{25} и консеквентом x_{24} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

7. Попытка извлечения параметрического описания из декомпозирующей эквивалентности для равенства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c(\text{Dom}(c) = \{1, 2\} \ \& \ c \text{ — функция} \leftrightarrow \exists_{ab}(c = (a, b)))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(c = (a, b) \leftrightarrow a = c(1) \ \& \ b = c(2) \ \& \ \text{Dom}(c) = \{1, 2\} \ \& \ c \text{ — функция})$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм, переменной x_{11} - заменяющий. Проверяется, что x_{10} имеет вид равенства переменной x_{14} элементарному выражению x_{15} , не содержащему x_{14} . Переменной x_{16} присваивается набор переменных терма x_{15} . В нашем примере x_{14} - c , x_{15} - (a, b) . Переменной x_{17} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{11} . В поднабор x_{18} набора x_{17} отбираются все утверждения, имеющие переменную списка x_{16} . Этот поднабор короче набора x_{17} . Переменной x_{19} присваивается оставшая часть набора x_{17} .

Переменной x_{20} присваивается набор antecedентов исходной теоремы, переменной x_{21} - поднабор набора x_{20} , состоящий из утверждений, содержащих переменную списка x_{16} . Переменной x_{22} присваивается оставшая часть набора x_{20} . Составляются конкатенация x_{23} наборов x_{19}, x_{22} , а также конкатенация x_{24} наборов x_{18}, x_{21} . В нашем примере x_{23} состоит из утверждений " $\text{Dom}(c) = \{1, 2\}$ ", " c - функция". x_{24} состоит из утверждений " $a = c(1)$ ", " $b = c(2)$ ". Переменной x_{25} присваивается результат связывания квантором существования по переменным x_{16} конъюнкции утверждений x_{24} . В нашем случае - " $\exists_{ab}(a = c(1) \ \& \ b = c(2))$ ". При помощи задачи на доказательство проверяется, что x_{25} - следствие утверждений x_{23} . Переменной x_{27} присваивается эквивалентность конъюнкции утверждений x_{19} результату связывания квантором существования по x_{16} конъюнкции утверждений x_{10} и x_{21} . Далее формируется результат - импликация с antecedентами x_{22} и консеквентом x_{27} .

8. Попытка кванторной расшифровки конъюнктивного члена заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aABCD}(\neg(C = D) \ \& \ \neg(A \in \text{прямая}(CD)) \ \& \ \neg(B \in \text{прямая}(CD)) \ \& \ A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ D \text{ — точка} \ \& \ \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \ \& \ a \in \text{прямая}(CD) \rightarrow \neg(a \in \text{отрезок}(AB)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(C = D) \& \neg(A \in \text{прямая}(CD)) \& \neg(B \in \text{прямая}(CD)) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \leftrightarrow B \in \text{плоскость}(ACD) \& \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{прямая}(AB)))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, x11 - заменяющий. Переменной x12 присваивается результат добавления x10 к списку антецедентов. Переменной x14 присваивается некоторый конъюнктивный член заменяющей части. В нашем примере - "непересек(прямая(CD), прямая(AB))". Решается задача на описание, имеющая своими посылками утверждения x12, а условием - утверждение x14. Ее цели суть "редакция", "редуцирование", "развертка". Последняя цель заставляет систему использовать расшифровки по определениям. Получается ответ x16, который в нашем случае имеет вид " $\forall_a(a \in \text{прямая}(CD) \rightarrow \neg(a \in \text{отрезок}(AB)))$ ". Проверяется, что утверждение x16 имеет заголовок "длялюбого". Переменной x17 присваивается консеквент импликации x16. Находится результат x18 обработки процедурой "нормантецеденты" объединения x12 со списком антецедентов импликации x16. Обработка выполняется относительно параметров терма x17. Наконец, создается итоговая импликация с антецедентами x18 и консеквентом x17.

9. Перенесение указателя типа в заменяющую часть определения равенства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \rightarrow \arctg(a) = b \leftrightarrow b - \text{число} \& a = \text{tg } b \& 0 < \pi + 2b \& 0 < \pi - 2b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \& b - \text{число} \rightarrow \arctg(a) = b \leftrightarrow a = \text{tg } b \& 0 < \pi + 2b \& 0 < \pi - 2b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, x11 - заменяющий, x12 - набор антецедентов. Проверяется, что x10 имеет вид $x = t$, где x - переменная, не входящая в t . В списке x12 находится утверждение x17 вида $P(x)$, причем справочник "тип" усматривает, что выражение t имеет типом своего значения логический символ P . Создается итоговая импликация, антецеденты которой получаются отбрасыванием из списка x12 утверждения x17. Консеквентом служит эквивалентность x10 и конъюнкции утверждений x17, x11.

10. Реализация равенства переменной в заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{fB}(B - \text{set} \& f - \text{функция} \rightarrow \text{Отображение}(f, \text{Dom}(f), B) \leftrightarrow \text{Val}(f) \subseteq B)$$

из теоремы

$$\forall_{fAB}(\text{Отображение}(f, A, B) \leftrightarrow f - \text{функция} \& \text{Dom}(f) = A \& B - \text{set} \& \text{Val}(f) \subseteq B)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, x11 - заменяющий. Проверяется, что утверждение x10 элементарно. Переменной x12 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x11. В нем находится равенство x13 вида $x = t$, где x - переменная, имеющая единственное вхождение в x11. В нашем

примере x13 - равенство " $\text{Dom}(f) = A$ ". Находится результат x18 подстановки t вместо x в терм x10. В нашем случае - "Отображение($f, \text{Dom}(f), B$)". Переменной x20 присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы и пересечения списка x12 с утверждениями, сопровождающими по о.д.з. для x18. В нашем примере - " $B - \text{set}$ ", " $f - \text{функция}$ ". Переменной x21 присваивается результат исключения из x12 равенства x13 и утверждений, сопровождающих по о.д.з. для x18. В нашем примере x21 имеет единственный элемент " $\text{Val}(f) \subseteq B$ ". Наконец, формируется импликация с антецедентами x20, консеквентом которой служит эквивалентность x18 и конъюнкции утверждений x21. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

11. Извлечение из эквивалентности конъюнктивной декомпозиции, заменяемая часть которой есть равенство, тождества общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{точкалуча}(B, A, C) \rightarrow \angle(ABC) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \angle(ABC) = 0 \leftrightarrow C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \neg(B \in \text{интервал}(AC)))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, x11 - заменяющий, x12 - набор антецедентов. Проверяется, что x10 элементарно. Переменной x13 присваивается x10 либо отрицание x10. В первом случае индикатор x14 равен 0, во втором - 1. Проверяется, что x13 - равенство. Рассматривается объединение списка x12 и набора конъюнктивных членов утверждения x11 (при x14 = 0) либо отрицания утверждения x11 (при x14 = 1). Это объединение обрабатывается процедурой "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x13; результат присваивается переменной x15. В нашем примере x15 состоит из утверждений " $A - \text{точка}$ ", " $B - \text{точка}$ ", " $C - \text{точка}$ ", " $\neg(B = C)$ ", " $\neg(A = B)$ ", " $\text{точкалуча}(B, A, C)$ ". Проверяется, что x15 не содержит равенства переменной не включающему ее терму. Проверяется, что оператор "норм" не отождествляет обе части равенства x13. Затем формируется импликация с антецедентами x15 и консеквентом x13. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

12. Попытка альтернативной свертки заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \angle(ABC) = 0 \leftrightarrow \text{точкалуча}(B, A, C))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \angle(ABC) = 0 \leftrightarrow C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \neg(B \in \text{интервал}(AC)))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, x11 - заменяющий, x12 - набор антецедентов. Проверяется, что x12 непусто. Решается задача на описание,

посылками которой служат утверждения x_{12} , а условиями - конъюнктивные члены утверждения x_{11} . Эта задача имеет цели "прямойответредакция", "редуцирование", "свертка". Ответ присваивается переменной x_{15} . В нашем примере это "точкалуча(B, A, C)". Проверяется, что x_{15} элементарно. Формируется импликация с антецедентами x_{12} , консеквентом которой служит эквивалентность x_{10} и x_{15} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема", а затем - оператором "Исклант", предпринимающим попытку отбросить избыточные антецеденты. В нашем случае он ничего не изменяет.

13. Попытка подстановки нуля.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acd}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow a = c + di \leftrightarrow a = c \ \& \ d = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow a + bi = c + di \leftrightarrow a = c \ \& \ b = d)$$

На первый взгляд, этот переход кажется искусственным. Однако, в итоге он позволит получить, например, теорему $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \text{Im}(a) = 0)$.

В заменяющей части рассматривается вхождение операции x_{12} , одним из корневых операндов которой служит переменная x_{14} . Справочник "ноль" указывает для операции x_{12} пару (значение x_{16} операнда этой операции, играющее для нее роль нуля - номер данного операнда). В нашем примере x_{12} - символ комплексного умножения "Умножение"; справочник выдает пару (0,2); x_{14} - переменная b . Проверяется, что переменная b расположена на том месте, куда допустима подстановка нуля. Переменной x_{17} присваивается результат добавления к списку антецедентов равенства " $x_{14} = x_{16}$ ". Затем формируется импликация с антецедентами x_{17} и прежним консеквентом. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

14. Переход от эквивалентности для равенства терма переменной к эквивалентности для свойства этого терма.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow c + di - \text{число} \leftrightarrow d = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{acd}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow a = c + di \leftrightarrow a = c \ \& \ d = 0)$$

Проверяется, что заменяемое утверждение x_{10} - равенство переменной x_{13} выражению x_{14} , не содержащему этой переменной. Переменной x_{16} присваивается список антецедентов, содержащих переменную x_{13} . Проверяется, что он состоит из единственного утверждения x_{17} , причем переменная x_{13} входит в него однократно. В нашем примере x_{17} - " $a - \text{число}$ ". Переменной x_{18} присваивается результат подстановки выражения x_{14} вместо переменной x_{13} в терм x_{17} . В нашем случае это " $c + di - \text{число}$ ". Переменной x_{19} присваивается результат исключения x_{17} из списка антецедентов. Проверяется, что он непуст. Переменной

x20 присваивается результат навешивания квантора существования по x13 на заменяющую часть исходной теоремы. В нашем примере - " $\exists_a(a = c \ \& \ d = 0)$ ". Решается задача на преобразование терма x20 относительно посылок x19. Проверяется, что ответ x22 не имеет связанных переменных и не является логическим символом. Формируется итоговая импликация x23 с антецедентами x19, консеквентом которой служит эквивалентность x18 и x22.

15. Попытка извлечь эквивалентность кванторной свертки при усмотрении однозначно определимого операнда подтерма заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abde}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ e \in a \times b \rightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow \neg(e = (c, d))) \leftrightarrow \neg(d = e(2)))$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow (c, d) \in a \times b \leftrightarrow c \in a \ \& \ d \in b)$$

Переменной x10 присваивается набор конъюнктивных членов заменяющей части, переменной x11 - заменяемая часть. Выбирается утверждение x12 из списка x11, и переменной x13 присваивается список его параметров. В нашем примере x12 - " $c \in a$ ". Переменной x14 присваивается набор антецедентов, переменной x15 - список отличных от x12 элементов набора x10, переменной x16 - список параметров утверждений x15. В нашем примере - " b, d ". Выбирается переменная x17 списка x13, не входящая в x16 и имеющая единственное вхождение в заменяемую часть. В нашем случае - переменная c . Находится вхождение x18 переменной x17 в терм x11. Рассматривается вхождение x19 символа операции, внутри которой расположено x18. Переменной x21 присваивается подтерм по вхождению x19. В нашем случае - (c, d) . Переменной x22 присваивается список параметров терма x21. Выбирается переменная x23, входящая в x22 и в x16. В нашем случае - d . Проверяется, что она имеет единственное вхождение в x11. Выбирается новая переменная x24. В нашем примере - e . Переменной x25 присваивается результат замены вхождения x19 в терм x11 на переменную x24. Получается терм " $e \in a \times b$ ". Проверяется, что x25 не имеет общих параметров с x21. Переменной x26 присваивается результат добавления к антецедентам теоремы, содержащим переменную x23, равенства x24 и x21. В нашем примере - равенства " $e = (c, d)$ ". Переменной x27 присваивается список остальных антецедентов. Решается задача на описание, имеющая посылки x27 и условия x26. Цели ее суть "полный", "явное", "прямой ответ", "неизвестные x23". Ответ присваивается переменной x29. В нашем примере он имеет вид " $\text{Dom}(e) = \{1, 2\} \ \& \ d = e(2) \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ c = e(1)$ ". Среди конъюнктивных членов этого ответа выбирается равенство x30, определяющее значение переменной x23. В нашем примере - $d = e(2)$. Рассматривается утверждение R , полученное навешиванием квантора существования по x2 на конъюнкцию антецедентов, параметры которых пересекаются с x22, и равенства переменной x24 терму x21. В нашем примере оно имеет вид " $\exists_{cd}(e = (c, d))$ ". Решается задача на доказательство этого утверждения из списка остальных антецедентов, пополненного утверждением x25. В нашем случае - из одноэлементного списка " $e \in a \times b$ ". Далее переменной x31 присваивается импликация "для любого(x17 если x12 то не(равно(x24 x21)))". В нашем случае она имеет вид

" $\forall_c(c \in a \rightarrow \neg(e = (c, d)))$ ". Наконец, формируется итоговая импликация, антецеденты которой получены добавлением утверждения x25 к списку x14, а консеквентом служит эквивалентность x31 и отрицания утверждения x30.

Вывод импликации из эквивалентности

1. Перенесение заменяемого термина в антецеденты и развязка его по транзитивности для получения простой импликации, используемой в проверочном операторе.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ e \subseteq a \times b \ \& \ (c, d) \in e \rightarrow c \in a)$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow (c, d) \in a \times b \leftrightarrow c \in a \ \& \ d \in b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq b \ \& \ c \in a \rightarrow c \in b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий, переменной x12 - набор антецедентов. Переменной x16 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x11. Среди них выбирается утверждение x17. В нашем случае - $c \in a$. Рассматривается импликация x19, антецедентами которой служат антецеденты исходной теоремы и заменяемый терм x10, а консеквентом - утверждение x17. В нашем примере она имеет вид:

$$\forall_{abcd}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ (c, d) \in a \times b \rightarrow c \in a).$$

Переменной x20 присваивается вхождение антецедента x10 в теорему x19. Проверяется, что список параметров термина x10 не включается в список параметров термина x17. Переменной x23 присваивается пересечение этих списков. В нашем примере - a, c . Проверяется, что оно имеет не менее двух элементов. Если заголовков термина x10 - отрицание, то переменной x24 присваивается символ под этим отрицанием, иначе - заголовок термина x10. В нашем случае - символ "принадлежит". Справочник поиска теорем "транзитпереход" определяет по x24 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "выводпосылки" определяет результат использования ее для замещения антецедента x10 теоремы x19. В качестве комментарий ему передается элемент (разбиение x23), означающий, что переменные антецедентов дополнительной теоремы после унификации должны обеспечивать разбиение набора x23 переменных термина x10. Результатом служит следующая импликация:

$$\forall_{abcde}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ a \times b - \text{set} \ \& \ e \subseteq a \times b \ \& \ (c, d) \in e \rightarrow c \in a)$$

Она обрабатывается оператором "Спускоперандов" (в данном примере ничего не изменяющим). Затем ее список антецедентов обрабатывается оператором "нормантецеденты" относительно параметров ее консеквента. При помощи проверочных операторов проверяется неизбыточность результата, и он регистрируется в списке вывода.

2. Извлечение из декомпозирующей эквивалентности импликации для проверочного оператора.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ \neg(a \in b) \rightarrow \neg(a \in b \cap c))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий, переменной x12 - набор антецедентов. Поочередно рассматриваются случаи, когда x13 равно x10, и когда x13 равно отрицанию x10. Соответственно, переменной x14 присваивается 0 либо 1. В первом случае переменной x19 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x11, во втором - набор, образованный отрицанием какого-либо конъюнктивного члена утверждения x11. В нашем примере x13 - $\neg(a \in b \cap c)$, x19 - набор, образованный утверждением $\neg(a \in b)$. Проверяется, что для усмотрения истинности x13 имеется проверочный оператор. Переменной x23 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" объединения списков x12 и x19 относительно параметров терма x13. Проверяется, что в x23 нет равенства переменной выражению, не содержащему этой переменной. Формируется импликация x24 с антецедентами x23 и консеквентом x13. При помощи проверочного оператора проверяется ее избыточность. Затем x24 регистрируется в списке вывода.

3. Извлечение из декомпозирующей эквивалентности импликации для приема вывода (вывод конъюнктивного члена заменяющего утверждения).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{наименьший}(a, b) \rightarrow \text{нижнягрань}(a, b))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{наименьший}(a, b) \leftrightarrow a \in b \ \& \ \text{нижнягрань}(a, b))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий, переменной x12 - набор антецедентов. Проверяется, что оценка сложности утверждения x10 не меньше оценки сложности утверждения x11. Переменной x14 присваивается один из конъюнктивных членов утверждения x11. В нашем примере - "нижнягрань(a, b)". Формируется импликация, антецеденты которой получают добавлением к набору x12 утверждения x10, а консеквентом служит x14. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

4. Извлечение из декомпозирующей эквивалентности импликации для приема вывода (вывод заменяемого утверждения).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ A \in \text{прямая}(CD) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD) \leftrightarrow A \in \text{прямая}(CD) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий, переменной x12 - набор antecedентов. Проверяется, что оценка сложности утверждения x10 не меньше оценки сложности утверждения x11 и что x10 неповторно. Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x11. Проверяется, что либо исходная теорема имеет характеристику с заголовком "определение", либо ни одно из утверждений списка x13 не имеет всех параметров утверждения x10. Затем формируется импликация, antecedенты которой суть antecedенты исходной теоремы и элементы списка x13, а консеквент - x10. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

5. Извлечение из декомпозирующей эквивалентности импликации для вывода с использованием контрапозиции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ \neg(a \in b \cap c) \ \& \ a \in c \rightarrow \neg(a \in b))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий, переменной x12 - набор antecedентов. Проверяется, что оценка сложности утверждения x10 не меньше оценки сложности утверждения x11 и что x10 неповторно. Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x11. Проверяется, он имеет длину 2. Переменной x14 присваивается набор отрицаний утверждений x13, к которому добавлено отрицание утверждения x10. Элементы набора x14 упрощаются относительно посылок x12 задачами на преобразование. Поочередно переменной x17 присваивается первый либо второй элемент набора x14, переменной x19 - элемент набора x13 с другим номером. Переменной x20 присваивается результат добавления к набору x12 последнего утверждения набора x14 и утверждения x19. Затем формируется итоговая импликация с antecedентами x20 и консеквентом x17.

6. Развязка импликации для вывода равенства, извлеченной из декомпозирующей эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCD}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ A \in \text{прямая}(ab) \ \& \ A \in \text{прямая}(CD) \ \& \ B \in \text{прямая}(ab) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(CD) = \text{прямая}(ab))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD) \leftrightarrow A \in \text{прямая}(CD) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм, переменной x_{11} - заменяющий, переменной x_{12} - набор антецедентов. Проверяется, что x_{10} - равенство. Переменной x_{13} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{11} . Переменной x_{14} присваивается пара корневых операндов равенства x_{10} . Проверяется, что эти операнды не имеют общих переменных. Рассматривается элемент x_{15} пары x_{14} . В нашем примере - "прямая(CD)". Переменной x_{16} присваивается список параметров терма x_{15} . Проверяется, что каждая переменная списка x_{16} входит в утверждения набора x_{13} только внутри терма, равного x_{15} . Переменной x_{17} присваивается элемент пары x_{14} , отличный от x_{15} . Проверяется, что терм x_{17} не встречается в утверждениях x_{13} . Выбирается список x_{18} переменных, не входящих в исходную теорему, длина которого равна длине списка x_{16} . В нашем случае x_{18} состоит из переменных a, b . Переменной x_{19} присваивается набор результатов замены переменных x_{16} на переменные x_{18} в термах списка x_{13} . В нашем случае - " $A \in \text{прямая}(ab)$ ", " $B \in \text{прямая}(ab)$ ". Переменной x_{20} присваивается результат замены переменных x_{16} на x_{18} в терме x_{15} . В нашем случае - " $\text{прямая}(ab)$ ". Переменной x_{21} присваивается набор результатов замены переменных x_{16} на x_{18} в тех утверждениях списка x_{12} , которые имеют параметр из x_{16} . В нашем примере - " a - точка", " b - точка", " $\neg(a = b)$ ". Формируется импликация, антецеденты которой - конкатенация списков x_{12} , x_{21} , x_{13} и x_{19} . Консеквентом служит равенство x_{15} и x_{20} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема".

7. Извлечение из декомпозирующей эквивалентности импликации для вывода равенства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ l(AB) = l(AD) \ \& \ A \text{ - точка} \ \& \ B \text{ - точка} \ \& \ D \text{ - точка} \rightarrow \text{окружность}(AB) = \text{окружность}(CD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A \text{ - точка} \ \& \ B \text{ - точка} \ \& \ C \text{ - точка} \ \& \ D \text{ - точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{окружность}(AB) = \text{окружность}(CD) \leftrightarrow A = C \ \& \ l(AB) = l(CD))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм, переменной x_{11} - заменяющий, переменной x_{12} - набор антецедентов. Проверяется, что x_{10} - равенство. Переменной x_{13} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{11} . Формируется импликация, антецедентами которой служат утверждения x_{12} и x_{13} , а консеквентом - x_{10} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

8. Попытка извлечь из декомпозирующей эквивалентности простую импликацию для проверочного оператора путем реализации заменяемого утверждения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a \text{ - число} \ \& \ b \text{ - число} \rightarrow a \leq \max(a, b))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a \text{ - число} \ \& \ b \text{ - число} \ \& \ c \text{ - число} \rightarrow a \leq c \ \& \ b \leq c \leftrightarrow \max(a, b) \leq c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a \leq a)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть теоремы, переменной x11 - заменяющая. Проверяется, что x10 элементарно. Переменной x12 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x11. Среди них выбирается утверждение x14. В нашем примере - $a \leq c$. Переменной x16 присваивается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к списку антецедентов исходной теоремы утверждения x10, а консеквентом служит x14. В нашем примере она имеет следующий вид:

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& \max(a, b) \leq c \rightarrow a \leq c).$$

Рассматривается вхождение x17 в импликацию x16 антецедента x10. Переменной x18 присваивается либо его заголовок, либо, если этот заголовок - "не", заголовок его первого операнда. В нашем случае x18 - символ "меньшеилиравно". Справочник поиска теорем "пример" определяет по x18 указанную выше дополнительную теорему. Процедура "выводпосылки" использует ее для реализации антецедента x17. К тому, что получается, применяется оператор "нормтеорема".

Использование дополнительного тождества для преобразования заменяемой части

1. Варьирование заменяемой части декомпозирующей эквивалентности с помощью перегруппировочного тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcde}(d - \text{set} \& e - \text{set} \& b - \text{слово} \rightarrow d \cap \{c; b\} \subseteq e \leftrightarrow d \cap \{; b\} \subseteq e \& d \cap \{c\} \subseteq e)$$

из теоремы

$$\forall_{adef}(a - \text{set} \& d - \text{set} \& e - \text{set} \& f - \text{set} \rightarrow d \cap (a \cup f) \subseteq e \leftrightarrow a \cap d \subseteq e \& d \cap f \subseteq e)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{слово} \rightarrow \{; c\} \cup \{d\} = \{d; c\})$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий, переменной x12 - набор антецедентов. Внутри заменяемой части выбирается вхождение x14 неоднобуквенного подтерма, отличного от этой части. Переменной x15 присваивается символ по этому вхождению. В нашем примере x14 - $a \cup f$. Справочник поиска теорем "перестановки" находит по символу x15 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "нормализация(...)", причем заголовок заменяемой части - x15. Оператор "тождвывод" определяет результат x22 преобразования вхождения x14 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид $\forall_{bcde}(\{; b\} - \text{set} \& d - \text{set} \& e - \text{set} \& \{c\} - \text{set} \& b - \text{слово} \rightarrow d \cap \{c; b\} \subseteq e \leftrightarrow d \cap \{; b\} \subseteq e \& d \cap \{c\} \subseteq e)$. Находится результат x24 последовательной обработки теоремы x22 операторами "Спускоперандов", "демодификация" и "нормтеорема". Проверяется, что длина связывающей приставки теоремы x24

не больше, чем у исходной теоремы. Проверяется, что заменяемый терм теоремы x24 не получен подстановкой в заменяемый терм исходной теоремы. Затем x24 регистрируется в списке вывода.

2. Упрощение заменяемой части для получения перегруппировочной эквивалентности общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ae}(e - \text{set} \rightarrow \neg(a \in e) \leftrightarrow \text{непересек}(e, \{a\}))$$

из теоремы

$$\forall_{bce}(e - \text{set} \ \& \ c - \text{слово} \rightarrow \neg(b \in e) \ \& \ \text{непересек}(e, \{; c\}) \leftrightarrow \text{непересек}(e, \{b; c\}))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{префикс}(a, \text{пустоеслово}) = (a))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий, переменной x12 - набор antecedентов. Внутри заменяемой части выбирается вхождение x14 неоднобуквенного подтерма, отличного от этой части. Переменной x15 присваивается символ по этому вхождению. В нашем примере x14 - "префикс(b, c)". Справочник поиска теорем "констнабор" находит по символу x15 указанную выше дополнительную теорему. Та часть равенства в ее консеквенте, которая имеет заголовок x15, рассматривается как заменяемая. В этом предположении оператор "тождвывод" преобразует вхождение x14 при помощи дополнительной теоремы. Получается теорема x21 следующего вида:

$$\forall_{ae}(e - \text{set} \ \& \ \text{пустоеслово} - \text{слово} \rightarrow \neg(a \in e) \ \& \ \text{непересек}(e, \{; \text{пустоеслово}\}) \leftrightarrow \text{непересек}(e, \{a\}))$$

Она последовательно обрабатывается операторами "Спускоперандов" и "демонификация". В нашем примере результат x22 совпадает с x21. Переменной x25 присваивается результат обработки списка antecedентов импликации x22 оператором "нормантецеденты" относительно параметров консеквента. В нашем примере получается одноэлементный набор "e - set". Переменной x26 присваивается результат упрощения обеих частей консеквента теоремы x22 при помощи задач на преобразование. В нашем примере получаются утверждения " $\neg(a \in e)$ " и " $\text{непересек}(e, \{a\})$ ". Проверяется, что они различны. Затем формируется результат - импликация с antecedентами x25, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений пары x26.

3. Варьирование декомпозирующей эквивалентности с помощью тождества свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{adef}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow d \subseteq f \cup (a \cap e) \leftrightarrow d \subseteq a \cup f \ \& \ d \subseteq e \cup f)$$

из теоремы

$$\forall_{bcd}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow d \subseteq b \cap c \leftrightarrow d \subseteq b \ \& \ d \subseteq c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cef}(c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow (c \cup f) \cap (e \cup f) = f \cup (c \cap e))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий, переменной x12 - набор антецедентов. Внутри заменяемой части выбирается вхождение x14 двуместной операции x15. В нашем примере - $b \cap c$. Проверяется, что она не является заголовком утверждения. Справочник поиска теорем "свертки" определяет по символу x15 указанную выше дополнительную теорему. В качестве заменяемой ее части рассматривается та часть консеквента, которая имеет заголовком символ x15. В нашем примере - $(c \cup f) \cap (e \cup f)$. Проверяется, что дополнительная теорема не имеет характеристики "нормализация", указывающей противоположное направление замены. Затем процедура "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождения x14 при помощи дополнительной теоремы. Он имеет вид:

$$\forall_{adef}(a \cup f - \text{set} \ \& \ e \cup f - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow d \subseteq f \cup (a \cap e) \leftrightarrow d \subseteq a \cup f \ \& \ d \subseteq e \cup f)$$

К теореме x21 последовательно применяются операторы "Спускоперандов", "демодификация" и "нормтеорема".

4. Упрощение заменяемой части для варьирования декомпозирующей эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ d \leq 0 \rightarrow 0 \leq b + cd \ \& \ 0 \leq b - cd \leftrightarrow 0 \leq b + d|c|)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a \leq b \ \& \ -a \leq b \leftrightarrow |a| \leq b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ b \leq 0 \rightarrow -b|a| = |ab|)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий, переменной x12 - набор антецедентов. Внутри заменяемой части выбирается вхождение x14 неоднобуквенного подтерма с заголовком x15. В нашем примере - $|a|$. Справочник поиска теорем "упрощимп" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. В качестве заменяемой ее части рассматривается та часть консеквента, которая имеет заголовком символ x15. В нашем примере - $|ab|$. Процедура "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождения x14 при помощи дополнительной теоремы. Он имеет вид:

$$\forall_{bcd}(cd - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ d \leq 0 \rightarrow cd \leq b \ \& \ -cd \leq b \leftrightarrow -d|c| \leq b)$$

Переменной x22 присваивается результат обработки теоремы x21 операторами "Спускоперандов" и "демодификация". В нашем примере они ее не изменяют.

Переменной x25 присваивается результат обработки процедурой "нормантецеденты" списка антецедентов теоремы x22 относительно параметров ее консеквента. В нашем примере имеем результат: " b – число", " c – число", " d – число", " $d \leq 0$ ". Обе части консеквента теоремы x22 упрощаются вспомогательными задачами на преобразование. Результаты упрощения образуют пару x26. Проверяется, что они различны. Затем формируется импликация с антецедентами x25, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x26. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Использование дополнительной эквивалентности для преобразования заменяемой части

1. Попытка упростить заменяемую часть эквивалентности при помощи стандартизирующей эквивалентности двух элементарных неповторных утверждений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abce}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \rightarrow \ a \subseteq e \cup (b \setminus c) \leftrightarrow a \subseteq b \cup e \ \& \ a \cap c \subseteq e)$$

из теоремы

$$\forall_{bcd}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \rightarrow \ d \subseteq b \setminus c \leftrightarrow d \subseteq b \ \& \ \text{непересек}(c, d))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \rightarrow \ b \subseteq c \cup e \leftrightarrow b \setminus c \subseteq e)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - список входящих в нее предикатных символов. В нашем случае - единственный символ "содержится". При помощи справочника поиска теорем "упрощэkv" по символам списка x11 определяются пары (дополнительная теорема - список ее характеристик). Эти пары регистрируются в наборе x12. В заменяемой части теоремы рассматривается вхождение x14 неоднобуквенного подтерма - отношения с заголовком x15. В списке x12 выбирается пара x16, из которой извлекается указанная выше дополнительная теорема. Она используется для преобразования вхождения x14 в исходную теорему. Получается результат x21, имеющий в нашем примере следующий вид:

$$\forall_{abce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ a \setminus e - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ b \setminus c - \text{set} \ \rightarrow \ a \subseteq e \cup (b \setminus c) \leftrightarrow a \subseteq b \cup e \ \& \ a \cap c \subseteq e)$$

Этот результат последовательно обрабатывается операторами "Спускоперандов", "демодификация", "нормтеорема".

Использование дополнительного тождества для преобразования заменяемой части и извлечение импликации из эквивалентности

1. Извлечение импликации для проверочного оператора из результата варьирования декомпозирующей эквивалентности с помощью тождества свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(b\text{-set} \ \& \ a\text{-set} \ \& \ c\text{-set} \ \& \ d\text{-set} \ \& \ \text{непересек}(b, a \setminus c) \ \& \ \text{непересек}(b, a \setminus d) \rightarrow \text{непересек}(b, a \setminus (c \cap d)))$$

из теоремы

$$\forall_{bef}(b\text{-set} \ \& \ e\text{-set} \ \& \ f\text{-set} \rightarrow \text{непересек}(b, e \cup f) \leftrightarrow \text{непересек}(b, e) \ \& \ \text{непересек}(b, f))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bcf}(b\text{-set} \ \& \ c\text{-set} \ \& \ f\text{-set} \rightarrow b \setminus c \cup b \setminus f = b \setminus (c \cap f))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий, переменной x12 - набор антецедентов. Внутри заменяемой части выбирается вхождение x14 двуместной операции x15. В нашем примере - $e \cup f$. Справочник поиска теорем "свертки" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. В качестве заменяемой ее части рассматривается та часть консеквента, которая имеет заголовком символ x15. В нашем примере - $b \setminus c \cup b \setminus f$. Проверяется, что дополнительная теорема не имеет характеристики "нормализация", указывающей противоположное направление замены. Затем процедура "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождения x14 при помощи дополнительной теоремы. Он имеет вид:

$$\forall_{abcd}(b\text{-set} \ \& \ a \setminus c\text{-set} \ \& \ a \setminus d\text{-set} \ \& \ a\text{-set} \ \& \ c\text{-set} \ \& \ d\text{-set} \rightarrow \text{непересек}(b, a \setminus (c \cap d)) \leftrightarrow \text{непересек}(b, a \setminus c) \ \& \ \text{непересек}(b, a \setminus d))$$

Переменной x22 присваивается результат последовательной обработки терма x21 операторами "Спускоперандов", "демодификация", а переменной x23 - результат обработки теоремы x22 оператором "нормтеорема". В нашем случае это логическая константа "истина". Проверяется, что либо теорема x23 не имеет заголовка "длялюбого", либо ее заменяемый терм отличается от заменяемого терма теоремы x22. Переменной x25 присваивается заменяемый терм теоремы x22 (в нашем примере она совпадает с теоремой x21), а переменной x26 - набор ее антецедентов. Проверяется, что корневые операнды терма x25 (после отбрасывания внешнего отрицания, если оно есть) устойчивы к обработке нормализаторами общей стандартизации. Переменной x27 присваивается результат обработки утверждений x26 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x25. Затем находится результат x28 добавления к x27 конъюнктивных членов заменяющей части теоремы x22. Проверяется, что параметры утверждений x28 включаются в список параметров утверждения x25, и создается результирующая импликация с антецедентами x28 и консеквентом x25. Проверяется избыточность ее использования в проверочном операторе. При регистрации данной импликации в списке вывода пропускаются только характеристики с заголовками "спуск", "легковидеть", "Спуск".

Использование дополнительной эквивалентности для преобразования заменяющей части

1. Попытка извлечь из декомпозирующей эквивалентности упрощающую эквивалентность с дополнительным антецедентом, используя встречную свертку.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bde}f(e - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ f(1) \in e \rightarrow f \in (d \cap e) \times b \leftrightarrow f \in d \times b)$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$$

Проверяется, что теорема - исходная в списке вывода. Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий. Переменной x12 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x11. Среди них выбирается утверждение x14 с заголовком x15, по которому справочник поиска теорем "упрощкн" находит указанную выше дополнительную теорему. В нашем примере x14 - $f(1) \in a$. Переменной x18 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. Получается следующее утверждение:

$$\forall_{cde}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow c \in d \cap e \leftrightarrow c \in d \ \& \ c \in e).$$

Переменной x22 присваивается набор членов конъюнктивной части консеквента теоремы x18, переменной x23 - противоположная часть консеквента. В нашем случае x22 - " $c \in d$ ", " $c \in e$ "; x23 - " $c \in d \cap e$ ". Выбирается утверждение x24 списка x22, имеющее тот же заголовок, что и x23. В нашем случае x24 - " $c \in d$ ". Усматривается, что x23 получается из x24 некоторой подстановкой S вместо параметров терма x24. Проверяется, что эта подстановка изменяет единственную переменную x28, подставляя вместо нее терм x29. В нашем примере x28 - d , x29 - $d \cap e$. Усматривается, что x14 - результат подстановки T в x24 вместо параметров терма x24. Находится терм x31, подставляемый подстановкой T вместо переменной x28, и проверяется, что он является переменной. В нашем случае - a . Проверяется, что эта переменная не входит в элементы списка x12, отличные от x14. Переменной x32 присваивается конъюнкция утверждений списка x22, отличных от x24. В нашем примере - $c \in e$. Определяется результат x33 применения подстановки T к терму x32. В нашем примере - " $f(1) \in e$ ". Переменной x34 присваивается набор результатов применения подстановки T к антецедентам теоремы x18. В нашем примере - " $a - \text{set}$ ", " $e - \text{set}$ ". Переменной x36 присваивается объединение списка x34 с набором результатов подстановки в антецеденты исходной теоремы терма x29 вместо переменной x31 и с набором результатов подстановки в антецеденты исходной теоремы терма x27. Определяются также результат x37 подстановки в утверждение x10 терма x29 вместо переменной x31 и результат x38 подстановки в x10 терма x27 вместо x31. Переменной x39 присваивается эквивалентность x37 и x38. Переменной x41 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x39 результата добавления к списку x36 утверждения x33. Наконец, создается итоговая импликация с антецедентами x41 и консеквентом x39.

2. Попытка извлечь из декомпозирующей эквивалентности упрощающую эквивалентность для дополнительного ограничения, используя встречную свертку.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acdn}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \rightarrow \text{Val}(a) \subseteq d \ \& \ \text{кортеж}(a, n, c) \leftrightarrow \text{кортеж}(a, n, c \cap d)$$

из теоремы

$$\forall_{abn}(b - \text{set} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \rightarrow \text{кортеж}(a, n, b) \leftrightarrow a - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(a) = \{1, \dots, n\} \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bcd}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow d \subseteq b \cap c \leftrightarrow d \subseteq b \ \& \ d \subseteq c)$$

Данный прием почти полностью совпадает с предыдущим. Пример другой, так что теперь x14 - $\text{Val}(a) \subseteq b$, x18 - $\forall_{cde}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow e \subseteq c \cap d \leftrightarrow e \subseteq c \ \& \ e \subseteq d)$, x32 - " $e \subseteq d$ ", x33 - " $\text{Val}(a) \subseteq d$ ", x34 - список " $b - \text{set}$ ", " $d - \text{set}$ ", " $\text{Val}(a) - \text{set}$ ". Отличие возникает в самом конце. Переменной x39 присваивается эквивалентность конъюнкции утверждений x33 и x38 утверждению x37. Затем создается импликация с антецедентами x36 и консеквентом x39. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

3. Попытка упрощения конъюнктивного члена заменяющей части и обратной свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abdf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ f \in a \times b \rightarrow d = f(1) \leftrightarrow f \in \{d\} \times b)$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a = b \leftrightarrow a \in \{b\})$$

Переменной x10 присваивается набор конъюнктивных членов заменяющей части, переменной x11 - заменяемый терм. В списке x10 выбирается утверждение x12. В нашем примере - " $f(1) \in a$ ". Переменной x13 присваивается список параметров терма x12, переменной x14 - список параметров утверждений x11, не входящих в x13. в нашем примере x13 - a, f ; x14 - b . Проверяется, что список x14 непуст. Переменной x15 присваивается остаток набора x10, переменной x16 - список переменных набора x13, не входящих в x15. В нашем случае x15 состоит из утверждений " $l(f) = 2$ ", " $f(2) \in b$ ", " $f - \text{слово}$ "; x16 - переменная a . Проверяется, что список x16 непуст. Переменной x17 присваивается заголовок утверждения x12, и справочник поиска теорем "упрощэвк" находит по нему указанную выше дополнительную теорему. Переменной x21 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем случае имеем:

$$\forall_{cd}(c = d \leftrightarrow c \in \{d\}).$$

Переменной x24 присваивается заменяемый терм теоремы x21, переменной x25 - объединение списка x16 с параметрами терма x24. Для пары термов x12, x24

находится унифицирующая подстановка S вместо переменных x_{25} . Переменной x_{27} присваивается результат применения S к заменяющему терму теоремы x_{21} . В нашем случае он имеет вид $f(1) = d$. Переменной x_{28} присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы с результатами применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и теоремы x_{21} . В нашем случае получаем утверждения " $a - \text{set}$ ", " $b - \text{set}$ ", " $\{d\} - \text{set}$ ". Определяется результат x_{29} применения подстановки S к утверждению x_{11} . В нашем случае - " $f \in \{d\} \times b$ ". Наконец, находится результат обработки оператором "нормтеорема" импликации, антецедентами которой служат утверждения x_{28} и x_{11} , а консеквентом - эквивалентность x_{27} и x_{29} .

Использование дополнительной импликации для упрощения заменяющей части

1. Попытка реализации конъюнктивного члена заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abB}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = B) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(aB) = \text{прямая}(aB) \leftrightarrow B \in \text{прямая}(ab))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD) \leftrightarrow A \in \text{прямая}(CD) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow A \in \text{прямая}(AB)).$$

Переменной x_{10} присваивается вхождение заменяющей части. Проверяется, что по этому вхождению расположен символ "и", после чего переменной x_{11} присваивается вхождение некоторого конъюнктивного члена. В нашем примере - " $A \in \text{прямая}(CD)$ ". Переменной x_{12} присваивается заголовок этого конъюнктивного члена, с отбрасыванием корневого отрицания, если оно есть. Справочник поиска теорем "пример" определяет по символу x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Для каждого логического символа дополнительной теоремы, не входящего в основную теорему, существует такой символ основной теоремы, что оба эти символа относятся к одному и тому же разделу. По теореме x_{13} создается вспомогательное кванторное тождество x_{15} , получаемое заменой консеквента теоремы x_{13} на равенство этого консеквента константе "истина". Оператор "тождвывод" определяет результат x_{16} преобразования вхождения x_{11} в основную теорему при помощи теоремы x_{15} . В нашем примере получается следующая импликация:

$$\forall_{AbB}(a - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \neg(a = B) \rightarrow \text{прямая}(aB) = \text{прямая}(ab) \leftrightarrow \text{истина} \ \& \ B \in \text{прямая}(ab)).$$

Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Использование задачи на описание для получения новой теоремы

1. Попытка исключить параметрическое описание объектов заданного типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdz}(z - \text{комплексное} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow z = c + di \leftrightarrow c = \text{Re}(z) \ \& \ d = \text{Im}(z))$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow a + bi = c + di \leftrightarrow a = c \ \& \ b = d)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy)).$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий, переменной x12 - список антецедентов теоремы. В утверждении x10 рассматривается вхождение x13 символа операции x14; справочник "тип" присваивает переменной x16 тип значения операции x15. В нашем примере x13 - $a + bi$, x14 - символ "Плюс", x16 - "комплексное". Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по символу x16 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем случае x17 не изменяется. Проверяется, что консеквент теоремы x17 - эквивалентность квантора существования x21 утверждению x20 вида $x16(x24)$, где x24 - переменная. Проверяется также, что x17 не имеет антецедентов. Переменной x22 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором x21. Среди них выбирается равенство x23 переменной x24 некоторому выражению x25. В нашем случае x23 имеет вид $z = x + iy$. Переменной x26 присваивается терм по вхождению x13, а переменной x27 - список свободных переменных этого терма. Усматривается, что x25 - результат применения к x26 некоторой подстановки S вместо переменных x27. Переменной x29 присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы. В нашем примере - " x - число", " y - число", " c - число", " d - число". Переменной x30 присваивается список свободных переменных терма x25. В нашем примере x, y . Переменной x31 присваивается список всех утверждений из x29, содержащих переменные списка x30. Проверяется, что он является подсписком списка x22. Выбирается список x32 переменных, не входящих в исходную теорему и теорему x17, длина которого равна длине списка x30. В нашем случае - e, f . Переменной x33 присваивается набор равенств переменных списка x32 соответствующим переменным списка x30, переменной x34 - результат добавления утверждения x20 к списку x22. В нашем примере x34 состоит из утверждений " x - число", " y - число", " $z = x + iy$ ", " z - комплексное". Список x33 состоит из равенств $x = e, y = f$. Решается задача на описание с посылками x34 и условиями x33. Эта задача имеет цели "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x32", "известно x24". В нашем примере неизвестными служат e, f , причем их необходимо выразить через z . Проверяется, что ответ отличен от "отказ", и он присваивается переменной x36. В нашем примере - " $e = \text{Re}(z), f = \text{Im}(z)$ ".

Переменной x_{37} присваивается набор конъюнктивных членов ответа. Проверяется, что для каждой переменной списка x_{32} в наборе x_{37} имеется равенство ее некоторому выражению. Список таких выражений присваивается переменной x_{38} . Переменной x_{39} присваивается результат замены в утверждении x_{10} вхождения x_{13} на переменную x_{24} . В нашем примере он имеет вид " $z = c + di$ ". Переменной x_{40} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_{11} . В нашем случае - " $x = c \ \& \ y = d$ ". Переменной x_{41} присваивается результат подстановки в x_{40} термов x_{38} вместо переменных x_{30} . В нашем случае - " $Re(z) = c \ \& \ Im(z) = d$ ". Формируется импликация, антецеденты которой получаются исключением из списка x_{29} утверждений x_{31} и добавлением утверждения x_{20} . Консеквентом служит эквивалентность x_{39} и x_{41} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема".

Обобщение теоремы

1. Отбрасывание избыточного указателя на тип объекта в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bef}(e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{нижняягрань}(b, e \cup f) \leftrightarrow \text{нижняягрань}(b, e) \ \& \ \text{нижняягрань}(b, f))$$

из теоремы

$$\forall_{bef}(e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ f \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{нижняягрань}(b, e \cup f) \leftrightarrow \text{нижняягрань}(b, e) \ \& \ \text{нижняягрань}(b, f)).$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм, переменной x_{11} - заменяющий, переменной x_{12} - список антецедентов теоремы. В списке x_{12} находится утверждение x_{13} длины 2, содержащее переменную x_{14} . В нашем примере - " b - число". Проверяется, что утверждение x_{13} не входит в о.д.з. заменяемого терма, а переменная x_{14} не встречается в других антецедентах. Проверяется, что утверждение x_{13} является следствием как утверждения x_{10} , так и утверждения x_{11} , при использовании остальных антецедентов. При проверке блокировки приемов отменяются. Затем формируется теорема, полученная из исходной теоремы отбрасыванием антецедента x_{12} .

2. Исключение операции типа "отрицание", если она встречается над всеми вхождениями заданной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow 0 \leq a + c \ \& \ 0 \leq b + c \leftrightarrow 0 \leq c + \min(a, b))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow 0 \leq a - c \ \& \ 0 \leq b - c \leftrightarrow 0 \leq -c + \min(a, b)).$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм. В нем усматривается вхождение x_{11} одноместной операции x_{13} от переменной x_{12} . В нашем случае - вхождение " $-c$ ". Справочник "отрицание" усматривает, что двукратное применение операции x_{13} не изменяет исходного значения. Проверяется, что переменная

x12 встречается в заменяемом терме только под операцией x13. Проверяется, что переменная x12 встречается в антецедентах только под операцией x13, за возможным исключением антецедентов с единственным параметром - переменной x12, имеющей в них единственное вхождение. В антецедентах и консеквенте переменная x12 заменяется на подтерм x11. Результат обрабатывается сначала оператором "полныепосылки", а затем - оператором "нормтеорема".

Попытка варьирования дополнительной эквивалентности с помощью определения

1. Переформулировка импликации, выражающей характеристику одного объекта через характеристику другого.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ghi}(g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(i) \rightarrow \text{крд}(\text{вектор}(hg), i, 1) = \\ - \text{крд}(\text{вектор}(gh), i, 1))$$

из теоремы

$$\forall_{abcAK}(\text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Вектор}(A) \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \leftrightarrow \text{крд}(A, K, 1) = \\ a \ \& \ \text{крд}(A, K, 2) = b \ \& \ \text{крд}(A, K, 3) = c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABKabc}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = \\ (a, b, c) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(BA), K) = (-a, -b, -c))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий, переменной x12 - список антецедентов теоремы. Проверяется, что стартовая теорема ячейки вывода - определение терма с заголовком x15. В нашем примере - символа "крд". Проверяется, что x15 входит в x11 и не входит в x10. Усматривается, что заменяемый терм имеет единственное подвыражение x17 максимальной сложности. В нашем примере это "коорд(A, K)". Проверяется, что все корневые операнды терма x17 - переменные. Переменной x18 присваивается список параметров заменяемого терма. В нашем примере - a, b, c, A, K . Проверяется, что они охватывают все переменные исходной теоремы. Просматриваются все теоремы того раздела, к которому относится заголовок x19 терма x17. В нашем случае - раздела "системыкоординат". В нем выбирается указанная выше дополнительная теорема. Проверяется, что заголовок консеквента дополнительной теоремы - тот же, что у заменяемого терма x10. Проверяется, что в консеквенте дополнительной теоремы встречается символ x19 (в нашем примере - "коорд"). Проверяется, что дополнительная теорема имеет антецедент с тем же заголовком, что и x10, содержащий символ x19. Проверяется, что среди антецедентов дополнительной теоремы нет равенства, либо не содержащего символа x19, либо имеющего вид $x = t$, где x - переменная, не входящая в терм t . Переменной x26 присваивается результат переобозначения переменных в дополнительной теореме на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем случае имеем:

$$\forall_{ghidef}(g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(i) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(gh), i) = (d, e, f) \rightarrow \\ \text{коорд}(\text{вектор}(hg), i) = (-d, -e, -f))$$

Усматривается, что консеквент теоремы x26 получается подстановкой S вместо переменных x18 в утверждение x10. В нашем примере вместо переменных a, b, c, A, K подставляются термы " $-d$ ", " $-e$ ", " $-f$ ", "вектор(hg)", " i ". Переменной x29 присваивается список antecedентов теоремы x26. Переменной x30 присваивается набор результатов применения подстановки S к утверждениям x12. В нашем примере - "Трехмерн(i)", "Вектор(вектор(hg))". Просматриваются утверждения x32 списка x29, заголовок которых совпадает с заголовком утверждения x10 (в нашем примере - с символом "равно"). Если x32 - результат применения к x10 некоторой подстановки S' вместо переменных x18, то к x30 присоединяются все результаты применения подстановки S' к утверждениям x12. Кроме того, находится результат применения подстановки S' к утверждению x11, и все конъюнктивные члены этого результата тоже присоединяются к x30. При этом x32 удаляется из списка x29. По окончании просмотра списка x29 проверяется, что его длина уменьшилась. Остаток списка x29 присоединяется к списку x30. Определяется результат применения подстановки S к утверждению x11. Выбирается конъюнктивный член x33 этого результата, после чего формируется импликация с antecedентами x30 и консеквентом x33. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Создание протоколов

Протоколы создаются в обычном цикле вывода теорем. Попытка их создания инициируется единственной теоремой, однако после ее усмотрения начинается многократное сканирование теорем текущего раздела, а при необходимости - и других разделов. Таким образом создается "интегральное" представление о целесообразности создания протокола и о его деталях. Регистрация протокола в списке вывода происходит таким же образом, как и для обычной теоремы. Он снабжается характеристикой "протокол", к которой могут быть добавлены другие характеристики. Они никак не связаны с характеристиками обычных теорем, а ориентированы на протоколы конкретного вида.

1. Создание оператора преобразования к заданным заголовкам.

В качестве примера рассмотрим создание протокола

"нормзаголовок(объединение видобъединение)"

при рассмотрении теоремы

$$\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ - \ \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \rightarrow b \cup c \subseteq e \leftrightarrow b \subseteq e \ \& \ c \subseteq e)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он элементарный. Проверяется отсутствие у теоремы antecedентов, не входящих в о.д.з. утверждения x10 и не имеющих вида "четное(...)", "рациональное(...)", "не(четное(...))". Внутри x10 находится вхождение x11 двуместной операции от переменных x12 и x13. В нашем примере - $b \cup c$. Находится список x14 атомарных подутверждений заменяющей части x9. В нашем случае - " $b \subseteq e$ " и " $c \subseteq e$ ". Проверяется, что ни одно из них не содержит одновременно и x12, и x13. Проверяется, что каждая из переменных x12, x13 имеет единственное вхождение в терм x10. Переменной x15 присваивается результат замены в x10 вхождения x11 на символ "фикс". В нашем примере - "содержится(фикс e)". Создается

накопитель x17, изначально содержащий единственный элемент - символ x16 операции x11. Определяется раздел x18, к которому относится символ x16. В нашем случае - "теориямножеств".

Просматриваются все теоремы x22 этого раздела, имеющие характеристику x24 с заголовком "и", "или" либо "общнорм". Переменной x27 присваивается заменяемое утверждение теоремы x22 согласно характеристике x24. Проверяется, что все отличные от "фикс" символы терма x15 встречаются в x27. Проверяется, что теорема x22 не имеет antecedентов, не входящих в о.д.з. утверждения x27 и не имеющих вида "четное(...)", "рациональное(...)", "не(четное(...))". В утверждении x27 находится вхождение x28 двуместной операции x31 от переменных x29 и x30. Эта операция отсутствует в накопителе x17. Либо ни одно из атомарных подутверждений заменяющей части теоремы x22 не содержит одновременно переменных x29 и x30, либо x24 имеет заголовок "общнорм", а оценка заменяющей части теоремы x22 меньше оценки заменяемой. Проверяется, что каждая переменная x29, x30 имеет единственное вхождение в терм x27. Рассматривается результат x33 замены в x27 вхождения x28 на символ "фикс". Проверяется, что он отличается от x15 лишь переобозначением переменных. Тогда к накопителю x17 присоединяется символ x31.

По окончании просмотра теорем раздела вводится пустой накопитель x20 групп логических символов списка x17, рассматриваемых как "эквивалентные". Затем раздел просматривается снова. На этот раз выбираются теоремы x25 с характеристикой x23, имеющей заголовок "нормализация". Проверяется, что теорема не имеет существенных посылок, а консеквент ее - равенство заменяемого терма x26 неповторному заменяющему терму x27. Первый из них имеет заголовок x28, второй - отличный от x28 заголовок x29. Оба заголовка содержатся в x17. Оба терма x26, x27 имеют одни и те же переменные; число этих переменных равно 3, причем наиболее сложный подтерм заменяющего терма - он сам. Тогда заголовки x28, x29 рассматриваются как "эквивалентные" и соответствующим образом регистрируются в списке x20. Для характеристики "и" примера с непустым x20 пока нет, но зато для характеристики "или" будет такой пример с "эквивалентными" символами "умножение", "дробь", "степень", которые одновременно являются целевыми для оператора разложения на множители "видумножение".

По окончании просмотра переменной x21 присваивается одноэлементный набор, образованный символом x16. Если в x20 имеет класс, содержащий x16, то x21 заменяется на такой класс. В нашем примере x17 состоит из символов "объединение", "разность", "симметричразность". Утверждения с этими операциями допускают "похожие" декомпозиции. x20 в нашем примере пусто; x21 состоит из единственного символа "объединение".

Далее вводится пустой накопитель x22, и раздел просматривается в третий раз. Выделяются тождества без существенных antecedентов, имеющие характеристику "свертка", но не имеющие характеристик "нормализация", "упрощение". Если одна из частей тождества имеет своим заголовком символ x29 списка x21, а другая - символ, не принадлежащий x21, то символ x29 заносится в накопитель x22. Смысл просмотра - отобрать такие символы x29, для которых существуют

тождества, обеспечивающие преобразование к заголовку x29. Например, в случае нормализатора разложения на множители - тождество дистрибутивности, формулы квадрата суммы, формула сложения дробей и т.п.

По завершении просмотра из списка x21 отбрасываются все элементы, не попавшие в список x22. Предпринимается попытка усмотреть, что что для приведения к заголовкам x21 уже создан нормализатор. Тогда переменной x23 присваивается его название. Иначе значением этой переменной становится терм "Название(нормзаголовков x21)". Далее создается протокол "нормзаголовков(x21 x23)".

Замена переменных в теореме

1. Попытка исключения параметрического задания объекта.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_z (z - \text{комплексное} \rightarrow |z| = 0 \leftrightarrow z = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{cd} (c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow |c + di| = 0 \leftrightarrow c = 0 \ \& \ d = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_z (z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy} (x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий, переменной x12 - список antecedентов теоремы. Внутри утверждения x10 находится вхождение x13 символа операции x14. Справочник "тип" определяет тип x16 значения символа x14. В нашем примере x13 - " $c + di$ ", x14 - символ "Плюс" комплексного сложения, x16 - "комплексное". Справочник поиска теорем "парамописание" находит по символу x16 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается вхождение символа "эквивалентно" - заголовка ее консеквента. Переменной x20 присваивается вхождение той части эквивалентности, которая имеет вид " $x16(x24)$ ", где x24 - переменная. Переменной x21 присваивается вхождение той части, заголовком которой служит квантор существования. Проверяется, что дополнительная теорема не имеет antecedентов. Переменной x22 присваивается набор конъюнктивных членов под квантором существования, переменной x23 - равенство из этого набора, в одной части которого расположена переменная x24. Переменной x25 присваивается противоположная часть равенства x23. Переменной x26 присваивается подтерм по вхождению x13, переменной x27 - список его параметров. В нашем примере x25 - " $x + iy$ ", x26 - " $c + di$ ", x27 - " c, d ". Усматривается, что x25 - результат применения к x26 некоторой подстановки S вместо переменных x27. Определяется список x29 результатов применения подстановки S к antecedентам исходной теоремы. В нашем примере - " $x - \text{число}$ ", " $y - \text{число}$ ". Проверяется, что все переменные исходной теоремы содержатся в списке x27 и что список x29 включается в список x22. Проверяется, что каждое вхождение переменных списка x27 в терм x10 расположено внутри подтерма, равного x26. Переменной x31 присваивается результат замены всех вхождений термина

x_{26} в x_{10} на переменную x_{24} . В нашем случае - " $|z| = 0$ ". Переменной x_{32} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_{11} . В нашем примере - " $x = 0 \ \& \ y = 0$ ". Переменной x_{33} присваивается объединение списка x_{22} и набора конъюнктивных членов утверждения x_{32} . В нашем примере имеем утверждения " x - число", " y - число", " $z = x + iy$ ", " $x = 0$ ", " $y = 0$ ". Решается задача на исследование с посылками x_{33} , имеющая цель "упростить". После этого в ее списке посылок выбирается утверждение x_{36} , единственным параметром которого служит переменная x_{24} . В нашем примере - $z = 0$. Переменной x_{37} присваивается результат пополнения набора x_{22} утверждением x_{36} , после чего решается задача на доказательство утверждения x_{32} из посылок x_{37} . Наконец, формируется импликация с единственным антецедентом " $x_{16}(x_{24})$ ", консеквентом которой служит эквивалентность x_{31} и x_{36} .

3.33 Характеристика "или"

Характеристикой "или(x_1)" снабжаются эквивалентности, выполняющие декомпозицию элементарного утверждения в дизъюнкцию бескванторных утверждений. x_1 - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Получение эквивалентности свертки конъюнкции из дизъюнктивной декомпозирующей эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow \neg(a \in b \cup c) \leftrightarrow \neg(a \in b) \ \& \ \neg(a \in c))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм, переменной x_{11} - заменяющий, переменной x_{12} - список антецедентов теоремы. Переменной x_{13} присваивается набор дизъюнктивных членов утверждения x_{11} . Проверяется, что все они элементарны. Переменной x_{14} присваивается набор отрицаний утверждений списка x_{13} . Формируется импликация с антецедентами x_{12} , консеквентом которой служит эквивалентность отрицания утверждения x_{10} конъюнкции утверждений x_{14} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

2. Перенесение в антецеденты всех альтернативных подутверждений, кроме одного.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow ab = 0 \leftrightarrow a = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм, переменной x_{11} - заменяющий, переменной x_{12} - список антецедентов теоремы. Переменной x_{13} присваивается набор дизъюнктивных членов утверждения x_{11} . В нем выбирается утверждение x_{14} . В нашем случае - " $a = 0$ ". Переменной x_{16} присваивается набор отрицаний оставшихся элементов списка x_{13} . В нашем примере - " $\neg(b = 0)$ ". Проверяется, что все утверждения списка x_{16} элементарны. Затем формируется результирующая импликация, антецеденты которой получены добавлением к антецедентам исходной теоремы утверждений x_{16} , а консеквент - эквивалентность утверждений x_{10} и x_{14} .

3. Попытка перехода от дизъюнктивной декомпозиции к конъюнктивной путем перенесения в антецеденты отрицания конъюнктивного члена одной из альтернатив.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow 0 < ab \leftrightarrow 0 < a \ \& \ 0 < b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 < ab \leftrightarrow a < 0 \ \& \ b < 0 \ \vee \ 0 < a \ \& \ 0 < b)$$

Переменной x_{11} присваивается набор дизъюнктивных членов заменяющей части. Проверяется, что он двухэлементный. Выбирается элемент x_{12} списка x_{11} . В нашем примере - $0 < a \ \& \ 0 < b$. Переменной x_{13} присваивается другой элемент набора x_{11} . Проверяется, что x_{13} имеет заголовок "и". Выбирается элементарный конъюнктивный член x_{14} утверждения x_{13} . В нашем примере - " $a < 0$ ". Переменной x_{15} присваивается набор антецедентов теоремы, дополненный отрицанием утверждения x_{14} , переменной x_{16} - эквивалентность заменяемой части теоремы утверждению x_{12} . Переменной x_{17} присваивается результат обработки списка x_{15} процедурой "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x_{16} . Формируется импликация, антецедентами которой служат утверждения x_{17} , а консеквентом - x_{16} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

4. Попытка перехода от дизъюнктивной декомпозиции к конъюнктивной либо к эквивалентности общей стандартизации путем перенесения в антецеденты конъюнктивного члена одной из альтернатив.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 < ab \leftrightarrow 0 < b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 < ab \leftrightarrow a < 0 \ \& \ b < 0 \ \vee \ 0 < a \ \& \ 0 < b)$$

Переменной x_{11} присваивается набор дизъюнктивных членов заменяющей части. Проверяется, что он двухэлементный. Выбирается элемент x_{12} списка x_{11} . В нашем примере - $a < 0 \ \& \ b < 0$. Переменной x_{13} присваивается другой элемент набора x_{11} . Проверяется, что x_{13} имеет заголовок "и". Выбирается элементарный конъюнктивный член x_{14} утверждения x_{13} . В нашем примере -

" $0 < a$ ". Переменной x_{15} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{12} , переменной x_{16} - результат добавления к антецедентам теоремы утверждения x_{14} . Выбирается элемент x_{17} списка x_{15} , и при помощи задачи на доказательство усматривается, что из x_{16} вытекает его отрицание. В нашем примере x_{17} - " $a < 0$ ". Переменной x_{19} присваивается конъюнкция элементов списка x_{13} , отличных от x_{14} . В нашем примере - " $0 < b$ ". Переменной x_{20} присваивается эквивалентность заменяемого терма теоремы утверждению x_{19} . Формируется результирующая импликация с антецедентами x_{16} и консеквентом x_{20} .

5. Попытка отождествления двух переменных в заменяемой части эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{BCD}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ D \in \text{прямая}(BC) \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ D\text{-точка} \rightarrow \text{однаправлены}(\text{вектор}(CB), \text{вектор}(CD)) \leftrightarrow \text{точкалуча}(C, B, D))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD) \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ D\text{-точка} \rightarrow \text{однаправлены}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD)) \leftrightarrow A \in \text{отрезок}(BC) \ \& \ \text{точкалуча}(C, D, B) \vee C \in \text{отрезок}(AD) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, D))$$

Переменной x_9 присваивается набор антецедентов теоремы, переменной x_{11} - заменяемое утверждение, переменной x_{12} - список его параметров. В нашем примере - A, B, C, D . Проверяется, что x_{12} имеет не менее 2 и не более 4 элементов. Рассматривается пара x_{15}, x_{16} переменных списка x_{12} . В нашем примере - A, C . Проверяется отсутствие антецедента "не(равно($x_{15} \ x_{16}$))". Переменной x_{17} присваивается результат добавления к антецедентам теоремы равенства переменных x_{15} и x_{16} . Список x_{17} обрабатывается процедурой "нормантецеденты" относительно параметров консеквента теоремы. Проверяется, что результат x_{18} не содержит константы "ложь". Формируется импликация с антецедентами x_{18} , консеквент которой - тот же, что у исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема". Проверяется, что результат получает от характеризатора характеристику "общнорм" либо "усиление". Только эти характеристики и регистрируются в списке вывода.

Вывод импликации из эквивалентности

1. Извлечение из декомпозирующей эквивалентности импликации для проверочного оператора.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(b\text{-set} \ \& \ c\text{-set} \ \& \ a \in b \rightarrow a \in b \cup c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b\text{-set} \ \& \ c\text{-set} \rightarrow a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \vee a \in c)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм, переменной x_{11} - заменяющий, переменной x_{12} - набор антецедентов теоремы. Поочередно рассматриваются два случая: переменной x_{13} присваивается x_{10} либо отрицание x_{10} . Соответственно, переменной x_{14} присваивается 0 либо 1. В нашем примере x_{14} равно 0. Если x_{14} равно 1, то переменной x_{19} присваивается набор отрицаний дизъюнктивных членов утверждения x_{11} , иначе - набор, образованный одним из дизъюнктивных членов. Проверяется, что существует проверочный оператор, который мог бы обработать утверждение x_{13} . Переменной x_{23} присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка, получаемого добавлением утверждений x_{19} к списку x_{12} . Проверяется, что в наборе x_{23} отсутствует равенство переменной не содержащему ее терму. Формируется результирующая импликация с антецедентами x_{23} и консеквентом x_{13} . Дополнительно проверяется ее избыточность для проверочного оператора. При регистрации результата в списке вывода пропускаются только характеристики с заголовками "спуск", "Спуск", "легковидеть".

2. Перенесение заменяемого терма в антецеденты и развязка его по транзитивности для получения простой импликации, используемой в проверочном операторе.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bef}(b - \text{set} \ \& \ \neg(f \in e) \ \& \ e - \text{set} \ \& \ b \subseteq e \rightarrow \neg(f \in b))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(c \in b) \ \& \ a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq b \rightarrow \neg(c \in a)).$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм, переменной x_{11} - заменяющий, переменной x_{12} - набор антецедентов теоремы. Переменной x_{13} присваивается отрицание x_{10} , переменной x_{16} - набор отрицаний дизъюнктивных членов утверждения x_{11} . В наборе x_{16} выбирается утверждение x_{17} . В нашем примере - " $\neg(a \in b)$ ". Переменной x_{19} присваивается импликация, антецеденты которой получают добавлением к списку x_{12} утверждения x_{13} , а консеквентом служит x_{17} . В нашем примере эта импликация имеет вид:

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ \neg(a \in b \cup c) \leftrightarrow \neg(a \in b))$$

Проверяется, что параметры терма x_{13} не включаются в параметры терма x_{17} , причем пересечение x_{23} списков этих параметров имеет не менее двух элементов. Переменной x_{24} присваивается заголовок утверждения x_{13} с отброшенным корневым отрицанием. В нашем случае - символ "принадлежит". Справочник поиска теорем "транзитпереход" определяет по x_{24} указанную выше дополнительную теорему. Процедура "выводпосылки" использует ее для реализации антецедента x_{13} теоремы x_{19} . В результате получается следующая импликация x_{27} :

$$\forall_{bcef}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ \neg(f \in e) \ \& \ b \cup c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ b \cup c \subseteq e \rightarrow \neg(f \in b))$$

К ней применяется процедура "Спускоперандов", которая теорему не изменяет. Проверяется, что ее консеквент x_{29} элементарен. Переменной x_{31} присваивается результат обработки набора антецедентов теоремы x_{28} процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{29} . Получается список утверждений " $b - \text{set}$ ", " $\neg(f \in e)$ ", " $e - \text{set}$ ", " $b \subseteq e$ ". Проверяется, что утверждение x_{29} может быть обработано проверочным оператором, и формируется результирующая импликация с антецедентами x_{31} и консеквентом x_{29} . Дополнительно проверяется ее избыточность для проверочного оператора. При регистрации результата в списке вывода пропускаются только характеристики с заголовками "спуск", "Спуск", "блокпроверок", "легковидеть".

3. Фиксация переменной посредством равенства из декомпозирующей части эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(c - \text{слово} \rightarrow b \in \{b; c\})$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(c - \text{слово} \rightarrow a \in \{b; c\} \leftrightarrow a = b \vee a \in \{; c\})$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм, переменной x_{11} - заменяющий, переменной x_{12} - набор антецедентов теоремы. Находится дизъюнктивный член x_{13} утверждения x_{11} , имеющий вид равенства переменной x_{16} не содержащему этой переменной терму x_{17} . Проверяется, что x_{10} элементарно. Переменной x_{18} присваивается результат подстановки терма x_{17} вместо x_{16} в утверждение x_{10} . В нашем примере - " $b \in \{b; c\}$ ". Переменной x_{19} присваивается набор результатов применения этой же подстановки к антецедентам x_{12} . Формируется импликация с антецедентами x_{19} и консеквентом x_{18} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Использование дополнительного тождества для преобразования заменяемой части

1. Упрощение заменяемой части для получения перегруппировочной эквивалентности общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ad}(a \in \{d\} \leftrightarrow a = d)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(c - \text{слово} \rightarrow a \in \{b; c\} \leftrightarrow a = b \vee a \in \{; c\})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{префикс}(a, \text{пустое слово}) = (a))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм, переменной x_{11} - заменяющий, переменной x_{12} - набор антецедентов теоремы. Внутри заменяемой части выбирается некорневое вхождение x_{14} операции x_{15} . В нашем случае -

"префикс(b, c)". Справочник поиска теорем "констнабор" находит по символу x15 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" использует ее для преобразования вхождения x14. Результат присваивается переменной x21. В нашем примере получаем:

$$\forall_{ad}(\text{пустоеслово} - \text{слово} \rightarrow a \in \{d\} \leftrightarrow a = d \vee a \in \{\}; \text{пустоеслово}).$$

Эта теорема обрабатывается операторами "Спускоперандов" и "демодификация", в нашем примере не изменяющими ее. Затем ее antecedentes обрабатываются процедурой "нормантецеденты" относительно параметров консеквента. Результат присваивается переменной x25. В нашем примере получается одноэлементный набор, образованный константой "истина". Корневые операнды консеквента упрощаются задачами на преобразование и регистрируются в списке x26. В нашем примере получаются утверждения $a \in \{d\}$ и $a = d$. Проверяется, что элементы списка x26 различны и не являются логическими константами. Проверяется также, что наборы дизъюнктивных членов элементов списка x26 не включаются один в другой. Затем формируется результирующая импликация с antecedентами x25, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений набора (пары) x26.

2. Варьирование декомпозирующей эквивалентности с помощью тождеств свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ade}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow a \in d \Delta e \leftrightarrow \neg(a \in d) \ \& \ a \in e \vee \neg(a \in e) \ \& \ a \in d)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \vee a \in c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow a \Delta b = a \setminus b \cup b \setminus a).$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий, переменной x12 - набор antecedентов теоремы. Проверяется, что x10 бесспорно. Внутри заменяемой части рассматривается вхождение x14 двуместной операции x15. В нашем примере - $b \cup c$. Справочник поиска теорем "свертки" находит по символу x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается вхождение той части ее консеквента, которая имеет заголовков x15. Если дополнительная теорема оказалась тождеством общей стандартизации (в нашем примере - нет), то проверяется, что x19 - не заменяющая часть. Оператор "тождвывод" находит результат x21 применения дополнительной теоремы для преобразования вхождения x14. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{ade}(d \setminus e - \text{set} \ \& \ e \setminus d - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow a \in d \Delta e \leftrightarrow a \in d \setminus e \vee a \in e \setminus d)$$

Полученная теорема последовательно обрабатывается операторами "Спускоперандов", "демодификация", "нормтеорема".

3. Попытка проварьировать заменяемую часть декомпозирующей эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a = 0 \ \vee \ |b| = |c| \leftrightarrow |ab| = |ca|)$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d = 0 \ \vee \ e = |c| \leftrightarrow e|d| = |cd|)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow |a||b| = |ab|).$$

Проверяется, что теорема имеет не более трех переменных в своей связывающей приставке. В заменяемой части находится вхождение x11 символа операции x12. Если эта часть конъюнктивная, то x11 выбирается в самом сложном конъюнктивном члене. В нашем примере - $e|d|$. Справочник поиска теорем "перестановки" находит по x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет не более двух переменных. Переменной x16 присваивается вхождение той части ее консеквента, которая имеет заголовок x12. Если дополнительная теорема оказалась тождеством общей стандартизации (в нашем примере - да), то проверяется, что x16 - не заменяющая часть. Оператор "тождвывод" находит результат x17 применения дополнительной теоремы для преобразования вхождения x12. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{abc}(c - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ |b| - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a = 0 \ \vee \ |b| = |c| \leftrightarrow |ab| = |ca|).$$

Эта теорема последовательно обрабатывается операторами "Спускоперандов", "демодификация" и "Нормтеорема". В последнем случае вспомогательной задаче передается комментарий "модуль".

Создание протоколов

1. Создание оператора приведения к заданным заголовкам.

В качестве примера рассмотрим создание протокола

"нормзаголовок(умножение дробь степень видумножение)"

при рассмотрении теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ b = 0)$$

Прием почти дословно совпадает с одноименным приемом характеристики "и". Для удобства повторим его описание целиком.

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он элементарный. Проверяется отсутствие у теоремы антецедентов, не входящих в о.д.з. утверждения x10 и не имеющих вида "четное(...)", "рациональное(...)", "не(четное(...))". Внутри x10 находится вхождение x11 двуместной операции

от переменных x_{12} и x_{13} . В нашем примере - ab . Находится список x_{14} атомарных подутверждений заменяющей части x_9 . В нашем случае - " $a = 0$ " и " $b = 0$ ". Проверяется, что ни одно из них не содержит одновременно и x_{12} , и x_{13} . Проверяется, что каждая из переменных x_{12} , x_{13} имеет единственное вхождение в терм x_{10} . Переменной x_{15} присваивается результат замены в x_{10} вхождения x_{11} на символ "фикс". В нашем примере - "равно(фикс 0)". Создается накопитель x_{17} , изначально содержащий единственный элемент - символ x_{16} операции x_{11} . Определяется раздел x_{18} , к которому относится символ x_{16} . В нашем случае - "элементарная алгебра".

Просматриваются все теоремы x_{22} этого раздела, имеющие характеристику x_{24} с заголовком "и", "или" либо "общнорм". Переменной x_{27} присваивается заменяемое утверждение теоремы x_{22} согласно характеристике x_{24} . Проверяется, что все отличные от "фикс" символы терма x_{15} встречаются в x_{27} . Проверяется, что теорема x_{22} не имеет антецедентов, не входящих в о.д.з. утверждения x_{27} и не имеющих вида "четное(...)", "рациональное(...)", "не(четное(...))". В утверждении x_{27} находится вхождение x_{28} двуместной операции x_{31} от переменных x_{29} и x_{30} . Эта операция отсутствует в накопителе x_{17} . Либо ни одно из атомарных подутверждений заменяющей части теоремы x_{22} не содержит одновременно переменных x_{29} и x_{30} , либо x_{24} имеет заголовок "общнорм", а оценка заменяющей части теоремы x_{22} меньше оценки заменяемой. Проверяется, что каждая переменная x_{29} , x_{30} имеет единственное вхождение в терм x_{27} . Рассматривается результат x_{33} замены в x_{27} вхождения x_{28} на символ "фикс". Проверяется, что он отличается от x_{15} лишь переобозначением переменных. Тогда к накопителю x_{17} присоединяется символ x_{31} .

В нашем примере накопитель x_{17} оказывается состоящим из символов "умножение", "вычет", "дробь", "степень", "логарифм". По окончании просмотра теорем раздела вводится пустой накопитель x_{20} групп логических символов списка x_{17} , рассматриваемых как "эквивалентные". Затем раздел просматривается снова. На этот раз выбираются теоремы x_{25} с характеристикой x_{23} , имеющей заголовок "нормализация". Проверяется, что теорема не имеет существенных посылок, а консеквент ее - равенство заменяемого терма x_{26} вторичному заменяющему терму x_{27} . Первый из них имеет заголовок x_{28} , второй - отличный от x_{28} заголовок x_{29} . Оба заголовка содержатся в x_{17} . Оба терма x_{26} , x_{27} имеют одни и те же переменные; число этих переменных равно 3, причем наиболее сложный подтерм заменяющего терма - он сам. Тогда заголовки x_{28} , x_{29} рассматриваются как "эквивалентные" и соответствующим образом регистрируются в списке x_{20} .

В нашем примере накопитель x_{20} оказывается состоящим из единственного набора символов "умножение", "дробь", "степень".

По окончании просмотра переменной x_{21} присваивается одноэлементный набор, образованный символом x_{16} . Если в x_{20} имеет класс, содержащий x_{16} , то x_{21} заменяется на такой класс. В нашем примере x_{21} заменяется на список "умножение", "дробь", "степень".

Далее вводится пустой накопитель x_{22} , и раздел просматривается в третий раз. Выделяются тождества без существенных антецедентов, имеющие характеристику "свертка", но не имеющие характеристик "нормализация", "упрощение".

Если одна из частей тождества имеет своим заголовком символ x_{29} списка x_{21} , а другая - символ, не принадлежащий x_{21} , то символ x_{29} заносится в накопитель x_{22} . Смысл просмотра - отобрать такие символы x_{29} , для которых существуют тождества, обеспечивающие преобразование к заголовку x_{29} . Например, в случае нормализатора разложения на множители - тождество дистрибутивности, формулы квадрата суммы, формула сложения дробей и т.п.

В нашем примере список x_{22} состоит из символов "дробь", "умножение", "степень". По завершении просмотра из списка x_{21} отбрасываются все элементы, не попавшие в список x_{22} . Предпринимается попытка усмотреть, что что для приведения к заголовкам x_{21} уже создан нормализатор. Тогда переменной x_{23} присваивается его название. Иначе значением этой переменной становится терм "Название(нормзаголовок x_{21})". Далее создается протокол "нормзаголовок(x_{21} x_{23})".

2. Создание протокола обращения к оператору приведения к заданным заголовкам с целью конъюнктивной декомпозиции.

В качестве примера рассмотрим создание протокола

"нормразделение(не(равно(c 0)) c видумножение)"

при рассмотрении теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0)$$

Переменной x_9 присваивается набор антецедентов, переменной x_{11} - заменяемый терм. Проверяется, что этот терм неповторный и имеет ровно два параметра. В нем выбирается вхождение x_{13} двуместной операции x_{14} , операнды которой - переменные. В нашем примере - ab . По символу x_{14} предпринимается обращение к справочнику "нормзаголовок". Среди результатов обращения к нему выбирается элемент x_{17} . Переменной x_{18} присваивается заголовок пары x_{17} - название оператора приведения к заданным заголовкам. В нашем случае x_{17} - пара (видумножение набор(умножение степень дробь)). Выбирается переменная x_{19} , не встречающаяся в теореме. В нашем случае - c . Переменной x_{20} присваивается результат замены в терме x_{11} вхождения x_{13} на переменную x_{19} . В нашем примере - " $c = 0$ ". Переменной x_{21} присваивается отрицание утверждения x_{20} . Проверяется, что задача на упрощение выражения x_{21} , решаемая в о.д.з. этого выражения, не изменяет его. Затем создается протокол "нормразделение(x_{21} x_{19} x_{18})".

3.34 Характеристика "исключ"

Характеристикой "исключ" снабжаются простые импликации с существенными посылками, у которых консеквент содержит не все параметры антецедентов, но каждый параметр консеквента встречается в антецедентах.

1. Попытка вывести из простой импликации, консеквент которой не содержит некоторых параметров антецедентов, эквивалентность для свертки квантора существования

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ae}(a - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow \exists_d(a \subseteq d \ \& \ d \subseteq e \ \& \ d - \text{set}) \leftrightarrow a \subseteq e)$$

из теоремы

$$\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ a \subseteq d \ \& \ d \subseteq e \rightarrow a \subseteq e)$$

Переменной x8 присваивается набор антецедентов, переменной x9 - консеквент. Проверяется, что теорема - исходная в списке вывода. Переменной x11 присваивается непустой список ее существенных посылок, переменной x12 - список остальных посылок. В нашем примере x11 состоит из утверждений $a \subseteq d$, $d \subseteq e$; x12 - из утверждений "a - set", "d - set" и "e - set". Переменной x13 присваивается список параметров утверждений x12. Проверяется, что он включает все параметры консеквента. Переменной x14 присваивается разность списков x13 и списка параметров консеквента. В нашем примере x13 - a, d, e , x14 - d . В список x11 из списка x12 переносятся все утверждения, имеющие параметр из x14. В нашем случае - утверждение "d - set". Переменной x15 присваивается результат навешивания квантора существования по x14 на конъюнкцию утверждений x11. В нашем примере - $\exists_d(a \subseteq d \ \& \ d \subseteq e \ \& \ d - \text{set})$. Решается задача на доказательство утверждения x15 из посылок, полученных добавлением к списку x12 консеквента теоремы. Проверяется, что задача на преобразование утверждения x15 относительно посылок x12 не сворачивает его в элементарное утверждение. После этого формируется итоговая импликация с антецедентами x12, консеквентом которой служит эквивалентность x15 и x9.

2. Попытка свернуть часть антецедентов с помощью ранее выведенной эквивалентности кванторной развертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(\text{перестановка}(b, \{1, \dots, a\}) \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow \text{перестановка}(\text{обрфункция}(b), \{1, \dots, a\}))$$

из теоремы

$$\forall_{Aab}(\text{Dom}(b) = A \ \& \ \{1, \dots, a\} = \text{Val}(b) \ \& \ b - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(b) \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow \text{перестановка}(\text{обрфункция}(b), A))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{Af}(A - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(A) \rightarrow \text{перестановка}(f, A) \leftrightarrow \exists_a(\text{Dom}(f) = \{1, \dots, a\} \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ 0 \leq a) \ \& \ A = \text{Val}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. В списке вывода выбирается теорема, имеющая характеристику "развертка(существует N)". Направление развертки N присваивается переменной x11, а переменные выбранной теоремы переобозначаются на переменные, не входящие в сходную теорему. Результат переобозначения присваивается переменной x12. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{de}(e - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(e) \rightarrow \text{перестановка}(d, e) \leftrightarrow \exists_c(\text{Dom}(d) = \{1, \dots, c\} \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ 0 \leq c) \ \& \ e = \text{Val}(d) \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(d))$$

Переменной x_{14} присваивается заменяемая часть теоремы x_{12} . Проверяется, что она элементарна. Переменной x_{15} присваивается набор конъюнктивных членов заменяющей части теоремы x_{12} , переменной x_{16} - подсписок списка x_{15} , образованный элементарными утверждениями. В нашем примере - " $e = \text{Val}(d)$ ", " d - функция", "взаимнооднозначно(d)". Проверяется, что он непуст. Проверяется, что остаток списка x_{16} одноэлементен и образован утверждением x_{18} , имеющим своим заголовком квантор существования. Переменной x_{19} присваивается список параметров утверждений x_{16} . В нашем случае - d, e . Процедура "подборзначений" пытается подобрать такие термы x_{20} , подстановка которых вместо переменных x_{19} в утверждения x_{16} дает подсписок списка антецедентов x_8 . В нашем примере x_{20} - выражения " b " и " $\{1, \dots, a\}$ ". Переменной x_{22} присваивается список тех утверждений списка x_8 , которые не были использованы при реализации утверждений списка x_{16} . В нашем примере - " $\text{Dom}(b) = A$ ", " a - целое", " $0 \leq a$ ". Переменной x_{23} присваивается список параметров термов x_{20} , переменной x_{24} - остальные параметры утверждений x_{22} . В нашем случае x_{23} - a, b ; x_{24} - A . Переменной x_{25} присваивается связывающая приставка квантора существования x_{18} .

Переменной x_{26} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования x_{18} , переменной x_{27} - набор результатов подстановки в утверждения x_{26} термов x_{20} вместо переменных x_{19} . В нашем примере x_{27} состоит из утверждений " $\text{Dom}(b) = \{1, \dots, c\}$ ", " c - целое", " $0 \leq c$ ". Переменной x_{28} присваивается объединение списков переменных x_{25} и x_{24} . В нашем случае - c, A . Переменной x_{29} присваивается список утверждений набора x_{22} , параметры которых пересекаются со списком x_{28} . В нашем примере - единственное утверждение " $\text{Dom}(b) = A$ ". Переменной x_{30} присваивается результат удаления утверждений x_{29} из набора антецедентов x_8 . В нашем примере - список " $\{1, \dots, a\} = \text{Val}(b)$ ", " b - функция", "взаимнооднозначно(b)", " a - целое", " $0 \leq a$ ". Переменной x_{31} присваивается объединение списков x_{29} и x_{27} . Затем решается задача на описание, послылками которой служат утверждения x_{30} , а условиями - утверждения x_{31} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "смтеор", "упростить", "равно", "неизвестные x_{28} ". Ответ задачи присваивается переменной x_{33} . В нашем случае он имеет вид " $\text{Dom}(b) = \{1, \dots, a\} \ \& \ c = a \ \& \ A = \{1, \dots, a\}$ ". Переменной x_{34} присваивается набор конъюнктивных членов ответа, переменной x_{35} - подсписок равенств в x_{34} , определяющих значения переменных x_{28} . Проверяется, что для каждой переменной набора x_{28} имеется соответствующее равенство. Переменной x_{36} присваивается остаток набора x_{34} . В нашем примере - единственное утверждение " $\text{Dom}(b) = \{1, \dots, a\}$ ". Переменной x_{37} присваивается набор термов - правых частей равенств списка x_{35} . Определяется результат x_{38} подстановки этих термов вместо переменных x_{28} в консеквент исходной теоремы. В нашем примере - "перестановка(обрфункция(b), $\{1, \dots, a\}$)". Переменной x_{39} присваивается набор результатов такой же подстановки в утверждения списка x_{27} . Решается задача на преобразование (упрощение) конъюнкции утверждений x_{36} относительно объединения списков x_{39} и x_{21} . Результат присваивается переменной x_{42} . В нашем примере - константа "истина". Определяется результат x_{43} подстановки термов x_{20} вместо переменных x_{19} в утверждение x_{14} . В нашем примере - "перестановка(b , $\{1, \dots, a\}$)". Переменной x_{44} присваивается список, в который включаются: утверждение x_{43} , разность списков x_{22} и x_{29} , набор

конъюнктивных членов утверждения x_{42} , набор результатов подстановки термов x_{20} вместо переменных x_{19} в antecedentes теоремы x_{12} . Затем формируется импликация с antecedентами x_{44} и консеквентом x_{38} , которая обрабатывается оператором "нормтеорема".

3.35 Характеристика "исключнеизв"

Характеристикой "исключнеизв(x_1)" снабжаются тождества, позволяющие заменить неизвестные подтермы на известные с помощью равенств из посылок. x_1 - список номеров antecedентов, идентифицируемых с посылками.

Обобщение теоремы

1. Обобщение тождества "исключнеизв" путем исключения знака перед двуместной операцией в antecedенте, идентифицируемом с посылкой.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abdf}(\neg(d=0) \ \& \ \neg(f=0) \ \& \ af + bd = 0 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow a/d = -b/f)$$

из теоремы

$$\forall_{abdf}(\neg(d=0) \ \& \ \neg(f=0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ af - bd = 0 \rightarrow a/d = b/f)$$

Переменной x_8 присваивается номер antecedента, идентифицируемого с посылкой согласно текущему комментарию "исключнеизв(7)". Переменной x_9 присваивается набор antecedентов теоремы, переменной x_{11} - antecedент с номером x_8 . В нашем случае - " $af - bd = 0$ ". Проверяется, что число параметров терма x_{11} не менее 2. Переменной x_{12} присваивается левая часть равенства в консеквенте. В нашем примере - " a/d ". В antecedенте x_{11} находится вхождение x_{13} одноместной операции от двуместной операции, вхождение которой - x_{14} . Переменной x_{15} присваивается символ по вхождению x_{14} . В нашем примере по вхождению x_{13} расположен терм " $-bd$ ", x_{15} - умножение. Справочник "знаменатель" по символу x_{15} определяет пару x_{18} ; в нашем случае - (минус, 1), где второй элемент - номер операнда, из которого возможно вынесение знака наружу. Так как в данном примере операция коммутативная, его значение несущественно. Первый элемент пары x_{18} присваивается переменной x_{19} . Справочник "отрицание" усматривает, что x_{19} - операция типа "отрицание", т.е. ее двукратное применение не изменяет исходного значения. Рассматривается операнд x_{21} операции x_{14} , представляющий собой переменную. В нашем примере - b . Проверяется, что эта переменная не входит в терм x_{12} и что она имеет единственное вхождение в терм x_{11} . Проверяется, что переменная x_{21} не встречается в отличных от x_{11} antecedентах, имеющих более одного параметра. Переменной x_{22} присваивается терм " $x_{19}(x_{21})$ ". В нашем случае - " $-b$ ". Переменной x_{23} присваивается результат подстановки x_{22} вместо x_{21} в консеквент теоремы. В данном примере - " $a/d = (-b)/f$ ". Переменной x_{24} присваивается набор результатов подстановки x_{22} вместо x_{21} в antecedенты теоремы. Формируется

теорема с антецедентами x24 и консеквентом x23. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. При регистрации определяется новый номер x29 преобразованного антецедента x11, и теорема сопровождается характеристикой "исключнеизв(x29)".

2. Обобщение тождества "исключнеизв" путем домножения обеих частей на новую переменную и перемещения ее внутрь заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdefgh}(\neg(h = 0) \ \& \ ch = dg \ \& \ 0 < g \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \rightarrow ec^f/g^f = e(d/h)^f)$$

из теоремы

$$\forall_{abcdf}(a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 < d \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ af = bd \rightarrow a^c/d^c = (b/f)^c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \cdot (a/b) = ae/b)$$

Переменной x9 присваивается левая часть равенства в консеквенте исходной теоремы. В нашем примере - " a^c/d^c ". По заголовку x10 терма x9 справочник поиска теорем "перестановки" определяет указанную выше дополнительную теорему. Переменной x16 присваивается вхождение заменяемой части дополнительной теоремы. Проверяется, что число корневых операндов этой части равно 2, причем один из них - переменная x19, а другой операнд x18 - вхождение символа x10. Переменной x20 присваивается заголовок заменяемой части x16. В нашем примере x16 имеет вид " $e \cdot (a/b)$ ", x19 - переменная e , x20 - "умножение". Справочник "единица" определяет, что операция x16 имеет единицу по переменной x19. Переменной x22 присваивается заменяющая часть дополнительной теоремы. Рассматривается корневой операнд x23 этой части, по которому расположен логический символ x24. В нашем примере - операнд ae . Проверяется, что либо число корневых операндов терма x9 равно 1, либо символ x24 коммутативен, а операция x23 имеет одним из своих операндов переменную x19.

Предпринимается проверка того, что прием не будет вводить переменные, дублирующие уже имеющиеся. Для этого рассматривается операнд терма x9, расположенный соответственно операнду x23 терма x22 (в нашем примере - числитель), и проверяется, что он не является уникальной переменной терма x9 либо операцией x24, имеющей своим операндом уникальную переменную.

Применяется оператор "тождвывод", преобразующий вхождение x18 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Получается теорема x25 вида:

$$\forall_{cdefgh}(\neg(g^f = 0) \ \& \ c^f - \text{число} \ \& \ g^f - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \ \& \ 0 < g \ \& \ \neg(h = 0) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ ch = dg \rightarrow e(d/h)^f = c^f e/g^f)/$$

Она обрабатывается оператором "нормтеорема", который и определяет указанную выше итоговую теорему x26. Проверяется, что если x9 было неповторно,

то заменяемая часть теоремы x26 тоже неповторна. Чтобы направление замены было таким же, как у исходной теоремы, при необходимости выполняется перестановка частей равенства в консеквенте. Затем теорема x26 регистрируется в списке вывода. Она сопровождается характеристикой "исключнеизв(...)", ссылающейся на новую позицию равенства в антецедентах.

3. Обобщение тождества "исключнеизв" путем ввода неповторного внешнего параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ \neg(d = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c = |a| \rightarrow |ab/d| = c|b/d|)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c = |a| \rightarrow |ab| = c|b|)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e(a/b) = ae/b)$$

Переменной x10 присваивается набор антецедентов теоремы, переменной x11 - антецедент, выделенный характеристикой "исключнеизв". В нашем примере - $c = |a|$. Переменной x12 присваивается левая часть равенства в консеквенте, переменной x13 - правая. В выражении x12 рассматривается вхождение x14 двуместной операции x15. В нашем примере - ab . По символу x15 справочник поиска теорем "перестановки" находит указанную выше дополнительную теорему. Переменной x21 присваивается ее заменяемая часть. В нашем примере - $e \cdot (a/b)$. Проверяется, что заголовком терма x21 служит символ x15. Находится корневой операнд x22 терма x21, представляющий собой двуместную операцию от двух различных переменных x24 и x25. В нашем примере x22 имеет вид a/b . Проверяется, что операция x22 имеет единицу по некоторому своему операнду. Находится другой корневой операнд терма x21. Проверяется, что он представляет собой некоторую переменную x27. В нашем случае - переменную e . Переменной x28 присваивается операнд операции x14, расположенный так же, как операнд x22 операции x21 (в коммутативном случае - любой операнд операции x14). В нашем случае x28 - вхождение переменной b . Проверяется, что по вхождению x28 расположена переменная x29, не входящая в антецедент x11 и имеющая единственное вхождение в терм x12. Переменной x31 присваивается тот операнд операции x22, по которому она не имеет единицы; переменной x32 - тот, по которому она ее имеет. В нашем случае x31 - a , x32 - b . Переменной x30 присваивается операнд операции x14, отличный от x28. В нашем примере - a . Переменной x33 присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. В нашем случае - ae/b . Проверяется, что этот терм имеет два корневых операнда; сам он не имеет заголовка x15, но имеет корневой операнд x34 с таким заголовком. В нашем случае - операнд ae . Проверяется, что x34 - двуместная операция, один из операндов которой равен x27, а другой - x31. Проверяется, что операнд x31 расположен в операции x34 так же, как операнд x22 - в операции x21 (если x15 коммутативно, проверка отменяется).

Переменной x37 присваивается корневой операнд заменяющего терма дополнительной теоремы, отличный от x34. В нашем случае - b . Проверяется, что этот

операнд - переменная x32. Переменной x38 присваивается заголовок терма x33. В нашем примере - "дробь".

Проверяется избыточность ввода нового параметра. В нашем примере - устанавливается, что x14 - не числитель дроби, знаменателем которой служит переменная.

Выбирается переменная x39, не входящая в исходную теорему. в нашем случае - переменная d . Термы x14 и x39 соединяются операцией x38, причем x39 расположено в получаемом терме x40 так же, как x37 расположено в x33. В нашем примере x40 имеет вид " ab/d ". Переменной x41 присваивается результат замены вхождения x14 в терм x12 на x40. В нашем примере - " $|ab/d|$ ". Переменной x42 присваивается результат замены в терме x22 переменных x31 и x32 на x29 и x39. В нашем примере - b/d . Переменной x43 присваивается результат подстановки выражения x42 вместо переменной x29 в терм x13. В нашем примере - " $c|b/d|$ ". Переменной x45 присваивается набор результатов подстановки в antecedentes дополнительной теоремы термов x29, x39 и x30 вместо переменных x31, x32 и x27. В нашем примере получают утверждения " $\neg(d = 0)$ ", " $b - \text{число}$ ", " $d - \text{число}$ ", " $a - \text{число}$ ". Переменной x46 присваивается добавление набора результатов подстановки терма x42 вместо переменной x29 в отличные от x11 antecedentes исходной теоремы к списку x45. В нашем примере добавляются " $a - \text{число}$ ", " $b/d - \text{число}$ ".

Еще раз проверяется избыточность вводимого параметра: терм x41 обрабатывается нормализаторами общей стандартизации относительно x46, и устанавливается отсутствие ассоциативно- коммутативной операции, операндами которой являются хотя бы две различные неповторные переменные.

Переменной x47 присваивается равенство выражений x41 и x43, переменной x48 - результат добавления к обработанному оператором "нормантеценды" списку x46 утверждения x11. Затем формируется результирующая импликация с antecedентами x48 и консеквентом x47. При ее регистрации в списке вывода создается характеристика "исключнеизв(...)", указывающая на последний antecedент (т.е. на x11).

4. Обобщение тождества "исключнеизв" путем ввода неповторного дополнительного параметра операнда.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(d = 0) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a = |d| \rightarrow |c/(bd)| = |c/b|/a)$$

из теоремы

$$\forall_{acd}(\neg(d = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a = |d| \rightarrow |c/d| = |c|/a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ade}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d/(ae) = (d/e)/a)$$

Вначале действия те же, что у предыдущего приема. Для удобства повторим их. Переменной x_{10} присваивается набор антецедентов теоремы, переменной x_{11} - антецедент, выделенный характеристикой "исключнеизв". В нашем примере - $a = |d|$. Переменной x_{12} присваивается левая часть равенства в консеквенте, переменной x_{13} - правая. В выражении x_{12} рассматривается вхождение x_{14} двуместной операции x_{15} . В нашем примере - c/d . По символу x_{15} справочник поиска теорем "перестановки" находит указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{21} присваивается ее заменяемая часть. В нашем примере - $(d/e)/a$. Проверяется, что заголовком терма x_{21} служит символ x_{15} . Находится корневой операнд x_{22} терма x_{21} , представляющий собой двуместную операцию от двух различных переменных x_{24} и x_{25} . В нашем примере x_{22} имеет вид d/e . Проверяется, что операция x_{22} имеет единицу по некоторому своему операнду. Находится другой корневой операнд терма x_{21} . Проверяется, что он представляет собой некоторую переменную x_{27} . В нашем случае - переменную e . Переменной x_{28} присваивается операнд операции x_{14} , расположенный так же, как операнд x_{22} операции x_{21} (в коммутативном случае - любой операнд операции x_{14}). В нашем случае x_{28} - вхождение переменной c . Проверяется, что по вхождению x_{28} расположена переменная x_{29} , не входящая в антецедент x_{11} и имеющая единственное вхождение в терм x_{12} . Переменной x_{31} присваивается тот операнд операции x_{22} , по которому она не имеет единицы; переменной x_{32} - тот, по которому она ее имеет. В нашем случае x_{31} - d , x_{32} - e . Переменной x_{30} присваивается операнд операции x_{14} , отличный от x_{28} . В нашем примере - d . Переменной x_{33} присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. В нашем случае - d/ae .

Далее начинаются отличия от предыдущего приема. Проверяется, что терм x_{33} имеет заголовок x_{15} . Переменной x_{34} присваивается корневой операнд терма x_{33} , расположенный так же, как операнд x_{22} - в операции x_{21} . В нашем примере - операнд d . Проверяется, что он совпадает с переменной x_{31} . Переменной x_{35} присваивается другой корневой операнд терма x_{33} . В нашем примере - " ae ". Проверяется, что его заголовком x_{36} служит коммутативный символ.

Проверяется избыточность вводимого параметра: если по вхождению x_{30} расположена операция x_{36} , некоторый операнд которой - переменная, имеющая единственное вхождение в терм x_{12} , то дальнейшие действия не выполняются.

Выбирается переменная x_{37} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b . Переменной x_{38} присваивается результат соединения операцией x_{36} термов x_{37} и x_{30} . В нашем примере - " bd ". Переменной x_{39} присваивается результат замены вхождения x_{30} в терм x_{12} на терм x_{38} . В нашем случае - " $|c/(bd)|$ ". Переменной x_{40} присваивается результат замены в терме x_{22} переменных x_{31} , x_{32} на переменные x_{29} , x_{37} . В нашем случае - " c/b ". Переменной x_{41} присваивается результат подстановки в терм x_{13} выражения x_{40} вместо переменной x_{29} . В нашем примере - " $|c/b|/a$ ". Переменной x_{43} присваивается набор результатов подстановки термов x_{29} , x_{37} , x_{30} вместо переменных x_{31} , x_{32} , x_{27} в антецеденты дополнительной теоремы. В нашем случае - утверждения " $\neg(d = 0)$ ", " $\neg(b = 0)$ ", " d - число", " c - число", " b - число". Проверяется, что они не содержат в качестве своих параметров связанных переменных терм x_{12} . Переменной x_{44} присваивается объединение списка x_{43} с набором результатов подстановки терма x_{40} вместо переменной x_{29} в отличные от x_{11} антецеденты исходной

теоремы. К x43 в нашем примере добавляется утверждение " b — число".

Далее, как и в предыдущем приеме, проверяется избыточность ввода нового параметра - что он не окажется еще одним неповторным параметром у коммутативной операции.

Наконец, формируется импликация, у которой antecedentes состоят из результатов обработки оператором "нормантеденты" утверждений списка x44 и утверждения x11. Ее консеквент - равенство термов x41 и x39 - с той же ориентацией, что у исходной теоремы. Проверяется, что эта импликация имеет больше связанных переменных, чем исходная теорема. Затем она регистрируется в списке вывода с соответствующей характеристикой "исключнеизв(...)".

5. Усмотрение в заменяемом терме операции с уникальным параметром, переменные которой не встречаются в antecedente - равенстве, и замена этой операции на новую переменную.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abdef}(\neg(\text{знаменатель}(a) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \ \& \ be = d \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ a - \text{rational} \ \& \ f - \text{rational} \rightarrow b^f e^a = d^f e^{a-f})$$

из теоремы

$$\forall_{bdefg}(\neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(g) - \text{even}) \ \& \ be = d \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{rational} \ \& \ g - \text{rational} \rightarrow b^f e^{f+g} = d^f e^g)$$

Переменной x10 присваивается набор antecedентов теоремы, переменной x11 - antecedent, выделенный характеристикой "исключнеизв". В нашем примере - " $be = d$ ". Переменной x12 присваивается левая часть равенства в консеквенте, переменной x13 - правая. В выражении x12 рассматривается вхождение x14 операции x15. В нашем примере - " $f + g$ ". Выбирается ее операнд x17, представляющий собой переменную. В нашем примере - " g ". Проверяется, что она имеет единственное вхождение в терм x12. Проверяется, что параметры термов x14 и x11 не пересекаются. Выбирается переменная x19, не входящая в теорему. В нашем примере - " a ". При помощи справочника "тип" определяется тип значения x20 выражения с заголовком x15. В нашем случае - "число". Переменной x21 присваивается терм " $x20(x19)$ ". Набор antecedентов разбивается на два поднабора: x22 - утверждения, содержащие переменную x17, и x23 - утверждения, не содержащие ее. В нашем примере x22 - " $\neg(\text{знаменатель}(g) - \text{even})$ ", " $g - \text{rational}$ "; x23 - " $\neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even})$ ", " $be = d$ ", " $b - \text{число}$ ", " $e - \text{число}$ ", " $f - \text{rational}$ ". Переменной x24 присваивается результат добавления к x22 равенства термов x14 и x19. В нашем случае - равенства " $f + g = a$ ". Переменной x25 присваивается результат добавления к x23 утверждения x21. В нашем случае - " $\text{число}(a)$ ".

Решается задача на описание с посылками x25 и условиями x24. Незвестной служит переменная x17 (т.е. g). Получается ответ x27. В нашем примере он имеет вид " $\neg(\text{знаменатель}(a - f) - \text{even}) \ \& \ (a - f) - \text{rational} \ \& \ g = a - f$ ". Переменной x28 присваивается набор конъюнктивных членов ответа, и в наборе x28 выбирается равенство переменной x17 выражению x30. В нашем случае -

" $a - f$ ". Переменной x_{31} присваивается набор результатов подстановки x_{30} вместо x_{17} в antecedentes теоремы, к которому присоединяется утверждение x_{21} . Определяется также результат x_{32} подстановки x_{30} вместо x_{17} в консеквент теоремы. Далее формируется импликация с antecedентами x_{31} и консеквентом x_{32} , которая обрабатывается оператором "Нормтеорема". Вспомогательной задаче на преобразование, используемой данным оператором, передается комментарий "равны". Результат регистрируется в списке вывода и сопровождается комментарием "исключнеизв(...)".

Использование дополнительного тождества для преобразования заменяемой части

1. Варьирование теоремы путем сильного упрощения заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcfeij}(\neg(c = 0) \ \& \ \neg(j = 0) \ \& \ j|a| = fi \ \& \ 0 < i \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow ea^b/(ci^b) = ef^b/(cj^b))$$

из теоремы

$$\forall_{cdefhij}(\neg(c = 0) \ \& \ \neg(j = 0) \ \& \ dj = fi \ \& \ 0 < i \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ 0 \leq d \rightarrow ed^h/(ci^h) = e(f/j)^h/c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \rightarrow |a|^b = a^b)$$

Переменной x_{10} присваивается antecedент, выделенный характеристикой "исключнеизв". В нашем примере - " $dj = fi$ ". В левой части равенства - консеквента теоремы - выбирается вхождение x_{12} операции x_{13} , имеющей общую переменную с x_{10} . В нашем примере - " d^h ". Справочник поиска теорем "упрощстанд" находит по символу x_{13} указанную выше дополнительную теорему. Процедура "тождвывод" преобразует вхождение x_{12} при помощи этой теоремы. Результат x_{18} имеет следующий вид:

$$\forall_{abcfeij}(\neg(c = 0) \ \& \ \neg(j = 0) \ \& \ |a|j = fi \ \& \ 0 < i \ \& \ c - \text{число} \ \& \ |a| - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ 0 \leq |a| \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \rightarrow ea^b/(ci^b) = e(f/j)^b/c)$$

После обработки процедурой "нормтеорема" получается указанная выше результирующая теорема. При регистрации в списке вывода она снабжается соответствующей характеристикой "исключнеизв(...)".

2. Варьирование теоремы путем свертки заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bdefg}(\neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(g) - \text{even}) \ \& \ be = d \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{rational} \ \& \ g - \text{rational} \rightarrow b^f e^{f+g} = d^f e^g)$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ ab = d \rightarrow a^c b^c = d^c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$$

Переменной x10 присваивается антецедент, выделенный характеристикой "исключнеизв". В нашем примере - " $ab = d$ ". В левой части равенства - консеквента теоремы - выбирается вхождение x12 операции x13, имеющей общую переменную с x10. В нашем примере - " $a^c b^c$ ". Справочник поиска теорем "свертки" находит по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Процедура "тождвывод" преобразует вхождение x12 при помощи этой теоремы. Результат x18 имеет следующий вид:

$$\forall_{bdeffg}(e - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ f - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \ \& \ eb = d \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ g - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(g) - \text{even}) \rightarrow e^{f+g} b^f = d^f e^g)$$

Проверяется, что длина связывающей приставки в теореме x1 увеличилась по сравнению с исходной теоремой ровно на единицу. После обработки процедурой "Нормтеорема" (с дополнительным комментарием "равны") получается указанная выше результирующая теорема. При регистрации в списке вывода она снабжается соответствующей характеристикой "исключнеизв(...)".

3. Варьирование тождества "исключнеизв" с помощью навешивания внешней операции и перемещения ее вглубь заменяемого термина "по дистрибутивности".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdf}(a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 < d \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ af = bd \rightarrow a^c/d^c = (b/f)^c)$$

из теоремы

$$\forall_{abdf}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ af = bd \rightarrow a/d = b/f)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 < b \rightarrow (a/b)^c = a^c/b^c)$$

Переменной x9 присваивается антецедент, выделенный характеристикой "исключнеизв". В нашем примере - " $af = bd$ ". Переменной x11 присваивается левая часть консеквента, переменной x12 - правая. Соответственно, " a/d " и " b/f ". Проверяется, что терм x11 имеет два корневых операнда. Переменной x13 присваивается его заголовок, и справочник поиска теорем "раздпарам" находит по x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается та из частей равенства, являющегося консеквентом дополнительной теоремы,

которая неповторна. В нашем примере это $(a/b)^c$. Переменной x19 присваивается заголовок терма x18. Проверяется, что одним из корневых операндов терма x18 является переменная x22 (в нашем примере - "c"), а другой операнд x21 имеет заголовок x13. При помощи справочника "единица" проверяется, что операция x19 имеет единицу по переменной c. Переменным x24 и x25 присваиваются, соответственно, первый и второй операнды операции x21. В нашем примере - "a, b". Выбирается новая переменная x26. В нашем случае - c. Переменной x27 присваивается корневой операнд консеквента исходной теоремы, отличный от x18. В нашем примере - a^c/b^c . Переменной x28 присваивается результат подстановки в x27 вместо переменных x22, x24 и x25 переменной x26 и корневых операндов терма x11. В нашем примере получается выражение a^c/d^c . Переменной x29 присваивается объединение набора результатов такой же подстановки в антецеденты дополнительной теоремы с набором антецедентов исходной теоремы, из которого исключено равенство x9. Переменной x30 присваивается результат соединения операцией x19 термов x26 и x12, причем переменная x26 располагается так же, как переменная x22 располагалась в терме x18. В нашем случае получаем $(b/f)^c$. Переменной x31 присваивается результат добавления равенства к обработанному процедурой "нормантецеденты" списку x29. Проверяется, что нормализаторы общей стандартизации, применяемые относительно посылок x31, не изменяют терма x28. Определяется результат x33 упрощения задачей на преобразование выражения x30. В нашем примере он совпадает с x30. Наконец, создается итоговая импликация с антецедентами x31, консеквентом которой служит равенство x28 и x33.

3.36 Характеристика "квантимплик"

Характеристикой "квантимплик" снабжаются такие кванторные импликации, у которых в консеквенте расположена кванторная импликация, представляющая собой расшифровку антецедента.

Логические следствия теоремы

1. Переход к простой импликации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{fgx}(f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{первообразная}(f, g) \ \& \ x \in \text{Dom}(g) \rightarrow \text{дифференцируема}(g, x))$$

из теоремы

$$\forall_{fg}(f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{первообразная}(f, g) \rightarrow \forall_x(x \in \text{Dom}(g) \rightarrow \text{дифференцируема}(g, x) \ \& \ \text{производная}(g, x) = f(x))).$$

Переменной x8 присваивается вхождение консеквента. Проверяется, что на этом вхождении расположен квантор общности. Переменной x9 присваивается набор антецедентов кванторной импликации x8. Проверяется, что все они суть элементарные утверждения. Переменной x10 присваивается набор конъюнктивных

членов консеквента импликации x_8 . В нем выбирается элементарное утверждение x_{11} . В нашем примере - "дифференцируема(g, x)". Переменной x_{12} присваивается объединение набора антецедентов теоремы и списка x_9 . Это объединение обрабатывается процедурой "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x_{11} . Затем создается итоговая импликация с антецедентами x_{13} и консеквентом x_{11} .

3.37 Характеристика "кванторная свертка"

Характеристикой "кванторная свертка(x_1)" снабжаются кванторные эквивалентности, выполняющие исключение квантора. x_1 - направление замены для такого исключения.

Логические следствия теоремы

1. Реализация кванторной импликации в эквивалентности кванторной свертки путем подбора значений функциональных переменных, отождествляющих антецедент с консеквентом.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \rightarrow \text{взаимнооднозначно}(\lambda_x(x, x \in a)))$$

из теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \rightarrow \text{взаимнооднозначно}(f) \leftrightarrow \forall_{xy}(f(x) = f(y) \ \& \ x \in \text{Dom}(f) \ \& \ y \in \text{Dom}(f) \rightarrow x = y))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок "длялюбого". Переменной x_{11} присваивается набор антецедентов теоремы, переменной x_{12} - консеквент импликации x_{10} . Проверяется, что утверждение x_{12} элементарно. В нашем примере оно имеет вид " $x = y$ ". Переменной x_{13} присваивается связывающая приставка импликации x_{10} . В нашем случае - " x, y ". Рассматривается такой антецедент x_{14} импликации x_{10} , что он одновременно с консеквентом имеет либо не имеет заголовок "не", причем после отбрасывания данного "не" заголовки утверждений x_{14} и x_{12} совпадают. Переменной x_{15} присваивается подтерм по вхождению x_{14} . В нашем примере - " $f(x) = f(y)$ ". Находится список x_{16} параметров терма x_{15} , не входящих в x_{13} . Проверяется, что он непуст. В нашем примере x_{16} состоит из переменной f . Переменной x_{17} присваивается подсписок списка x_1 , состоящий из переменных, для которых в антецедентах теоремы указано, что их значением служит функция. Проверяется, что x_{17} состоит из единственной переменной x_{18} . В нашем случае - f . Переменной x_{19} присваивается набор вхождений подтермов вида "значение($x_{18} \dots$)" в терм x_{15} . Проверяется, что он непуст. Переменной x_{20} присваивается набор самих этих подтермов. В нашем примере - " $f(x)$ ", " $f(y)$ ". Проверяется, что все аргументы функции x_{18} в списке x_{20} суть переменные из x_{13} . Переменной x_{21} присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему, длина которого равна длине списка x_{20} . В нашем примере - " a, b ". Переменной x_{23} присваивается результат замены вхождений x_{19} в терм x_{15} на соответствующие переменные x_{21} . В нашем примере - " $a = b$ ". Переменной x_{24}

присваивается список параметров терма x_{23} , не входящих в x_{13} . В нашем примере - " a, b ". Определяется унифицирующая подстановка S для термов x_{12} и x_{23} вместо переменных x_{24} . Подставляемые ею термы образуют набор x_{25} . В нашем примере - " x, y ". Рассматривается аргумент x_{26} первого функционального выражения списка x_{20} . В нашем случае - " x ". Рассматривается терм x_{27} , подставляемый согласно S вместо x . В нашем примере он совпадает с x . Проверяется, что если подставить в x_{27} вместо x_{26} аргумент любого из последующих функциональных выражений списка x_{20} , то получится терм, подставляемый S вместо соответствующей переменной списка x_{24} .

Выбирается переменная x_{28} , не входящая в теорему. В нашем примере - " a ". Переменной x_{29} присваивается список равенств переменных x_{24} , не принадлежащих списку x_{21} , соответствующим выражениям x_{25} . В нашем случае этот список пуст. Проверяется, что его параметры не пересекаются со списком x_{13} . К списку x_{29} добавляются антецеденты x_{11} и утверждение "множество(x_{28})". Переменной x_{30} присваивается выражение "отображение(x_{26} принадлежит(x_{28}) R)", где R - результат обработки нормализаторами общей стандартизации выражения x_{27} . В нашем случае - " $\lambda_x(x, x \in a)$ ". Переменной x_{31} присваивается набор результатов подстановки в утверждения списка x_{29} терма x_{30} вместо переменной x_{18} . Переменной x_{32} присваивается результат подстановки терма x_{30} вместо переменной x_{18} в заменяющее утверждение теоремы. Переменной x_{33} присваивается результат обработки утверждений x_{31} процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{32} . Наконец, формируется импликация с антецедентами x_{33} и консеквентом x_{32} .

2. Извлечение из явного параметрического описания простой импликации путем перенесения в антецеденты условий на параметры и подстановки вместо параметризуемого значения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{km}(m - \text{целое} \ \& \ k - \text{целое} \rightarrow m|km)$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(k - \text{целое} \ \& \ n = mk))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая (кванторная) часть. Если заголовком x_{10} служит квантор существования, то переменной x_{11} присваивается набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения, иначе - набор антецедентов импликации x_{10} , пополненный отрицанием ее консеквента. Переменной x_{12} присваивается кванторная приставка терма x_{10} . Среди утверждений x_{11} выбирается равенство x_{13} переменной x_{16} терму x_{17} . Проверяется, что x_{16} не входит в x_{12} и в терм x_{17} . В нашем примере x_{13} - равенство " $n = mk$ ", x_{16} - переменная n . Переменной x_{18} присваивается заменяющий терм теоремы. Проверяется, что x_{16} входит в x_{18} . Переменной x_{19} присваивается набор результатов подстановки в антецеденты теоремы выражения x_{17} вместо переменной x_{16} . В нашем случае получается: " $m - \text{целое}$ ", " $mk - \text{целое}$ ". Переменной x_{20} присваивается результат такой же подстановки в терм x_{18} . Получается: " $m|mk$ ". Переменной x_{21} присваивается результат обработки процедурой "нормантецеденты" списка x_{19} , к которому добавляются все отличные от x_{13} элементы

списка x_{11} . Если заголовок терма x_{10} - квантор существования, то рассматривается утверждение x_{20} , иначе - его отрицание. Оно обрабатывается сначала оператором "норм", запускающим нормализаторы общей стандартизации, а затем - оператором "нормравно". Результат присваивается переменной x_{22} . В нашем примере x_{22} и x_{20} совпадают. Создается импликация с антецедентами x_{21} и консеквентом x_{22} . Она обрабатывается процедурой "нормтеорема".

3. Попытка отождествить подутверждения квантора путем подстановки вместо свободных переменных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(b, b) \leftrightarrow b = \emptyset)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(a, b) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow \neg(c \in b)))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть (кванторная), переменной x_{11} - список ее свободных переменных. Проверяется, что этот список состоит не более чем из трех элементов. В заменяемой части выбирается вхождение x_{12} неодноэлементного подтерма. В нашем примере - " $c \in a$ ". Переменной x_{13} присваивается заголовок этого подтерма. В том же терме x_{10} находится еще одно вхождение x_{14} символа x_{13} . В нашем случае - " $c \in b$ ". Переменным x_{15} , x_{16} присваиваются, соответственно, подтермы по вхождениям x_{12} и x_{14} . Находится унифицирующая подстановка S для термов x_{15} , x_{16} относительно переменных x_{11} . При ее нахождении учитываются указатели (независит . . .), запрещающие подстановку вместо переменных списка x_{11} выражений, содержащих связанные в x_{10} переменные. Определяется список x_{20} результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы, а также результат x_{23} применения ее к заменяющему терму. Далее создается импликация с антецедентами x_{20} и консеквентом x_{23} , которая обрабатывается оператором "нормтеорема".

4. Попытка альтернативной кванторной свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(a, b) \leftrightarrow a \cap b = \emptyset)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(a, b) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow \neg(c \in b)))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть теоремы, переменной x_{11} - набор антецедентов. Проверяется, что заголовком x_{10} служит квантор общности. Переменной x_{12} присваивается его кванторная приставка. Переменной x_{13} присваивается набор антецедентов квантора x_{10} , к которому присоединено отрицание его консеквента. Решается задача на описание с посылками x_{11} и условиями x_{13} . Ее цели - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{12} ". Ответ присваивается переменной x_{15} . В нашем случае - " $c \in a \cap b$ ". Решается задача на преобразование, посылками которой служат утверждения x_{11} , а условием - отрицание результата навешивания квантора существования по x_{12}

на утверждение x_{15} . Задача имеет единственную цель "свертка". Ответ присваивается переменной x_{17} . В нашем примере - " $a \cap b = \emptyset$ ". Проверяется, что утверждение x_{17} элементарное. Создается импликация с антецедентами x_{11} , консеквентом которой служит эквивалентность заменяющего термина теоремы утверждению x_{17} . Она обрабатывается нормализатором "нормлог".

5. Развязка антецедента заменяемой кванторной импликации, имеющего вид принадлежности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(\forall_c(c \in a \rightarrow d(c) - \text{число}) \& b - \text{число} \rightarrow \text{нижняягрань}(b, \text{set}_e(\exists_c(e = d(c) \& c \in a))) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq d(c)))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \& a \subseteq \mathbb{R} \& b - \text{число} \rightarrow \text{нижняягрань}(b, a) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$$

Здесь целью вывода является "развязка" переменной c в эквивалентности, позволяющей переходить от кванторного утверждения к бескванторному за счет применения описателя.

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он имеет своим заголовком символ "длялюбого". Переменной x_{11} присваивается его связывающая приставка. Переменной x_{12} присваивается набор антецедентов теоремы. Проверяется, что оба набора x_{11} , x_{12} одноэлементные. Соответственно, переменной x_{13} присваивается элемент набора x_{12} , переменной x_{14} - элемент набора x_{11} . В нашем примере x_{13} имеет вид " $c \in a$ ", x_{14} - c . Проверяется, что x_{13} - утверждение принадлежности, причем первым аргументом служит x_{14} , а вторым - некоторая переменная x_{15} , отличная от x_{14} и имеющая единственное вхождение в x_{10} . Выбирается переменная x_{16} , не входящая в теорему. В нашем примере - " d ". Переменной x_{18} присваивается результат подстановки термина "фикс($x_{16}(x_{14})$)" в консеквент импликации x_{10} вместо переменной x_{14} . В нашем примере получаем " $b \leq \text{фикс}(d(c))$ ". Переменной x_{19} присваивается результат замены в терме x_{10} его консеквента на терм x_{18} . В нашем случае - " $\forall_c(c \in a \rightarrow b \leq \text{фикс}(d(c)))$ ". Выбирается отличная от x_{16} переменная x_{20} , не входящая в теорему. В нашем примере - " e ". Переменной x_{21} присваивается терм "класс(x_{20} существует(x_{14} и (x_{13} равно(x_{20} x_{17}))))". Определяется результат x_{22} подстановки в заменяющий терм теоремы термина x_{21} вместо переменной x_{15} . В нашем примере - " $\text{нижняягрань}(b, \text{set}_e(\exists_c(c \in a \& e = \text{фикс}(d(c))))))$ ". Определяется также набор x_{23} результатов подстановки x_{21} вместо x_{15} в антецеденты теоремы. Создается импликация с антецедентами x_{23} , консеквентом которой служит эквивалентность x_{22} и x_{19} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема", после чего из нее удаляется символ "фикс". Этот символ был введен, чтобы оператор "нормтеорема" не испортил первый антецедент и параметрическое описание, исключив из них выражение $d(c)$. В действительности переменная d у приема станет функциональной, так что $d(c)$ будет идентифицироваться с произвольным выражением, а никакой функции d в задаче рассматриваться не будет.

Использование дополнительной эквивалентности для преобразования заменяемой части

1. Варьирование эквивалентности кванторной свертки с помощью простейших дизъюнктивно-конъюнктивных декомпозиций.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bef}(b - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow e \cap f \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in e \ \& \ c \in f \rightarrow c \in b))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow c \in b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$$

Переменной x_{10} присваивается вхождение заменяемой части теоремы. Проверяется, что по этому вхождению расположен квантор общности. Рассматривается либо антецедент x_{11} квантора x_{10} , и тогда переменной x_{12} присваивается 0, либо консеквент x_{11} этого квантора, и тогда переменной x_{12} присваивается 1. В нашем примере x_{11} - вхождение $c \in a$. Если заголовок утверждения x_{11} - символ "не", то переменной x_{13} присваивается его первый операнд, а x_{12} заменяется на 1 - x_{12} . Иначе - переменной x_{13} присваивается x_{11} . Переменной x_{14} присваивается заголовок терма x_{13} . В нашем случае - символ "принадлежит". Составляется список x_{16} названий разделов, к которым относятся символы теоремы. В нашем примере он состоит из символа "теориямножеств". Справочник поиска теорем "упрощкн" в случае $x_{12} = 0$ и справочник "упрощдн" при $x_{12} = 1$ определяет по символу x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что все ее символы относятся к разделам, перечисленным в списке x_{16} . Процедура "тождвывод" определяет результат x_{21} преобразования вхождения x_{13} при помощи дополнительной теоремы. Направление замены определяется по характеристике дополнительной теоремы "и(N)" в случае $x_{12} = 0$, иначе - по характеристике "или(N)". Результат последовательно обрабатывается процедурами "Спускоперандов", "демодификация" и "нормтеорема".

2. Применение дизъюнктивной декомпозирующей эквивалентности к антецеденту заменяемой импликации и последующая свертка подимпликаций.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bef}(e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ f \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{нижнягрань}(b, e \cup f) \leftrightarrow \text{нижнягрань}(b, e) \ \& \ \text{нижнягрань}(b, f))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{нижнягрань}(b, a) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок "длялюбого". Переменной x_{11} присваивается кванторная приставка импликации x_{10} , переменной x_{12} - набор ее антецедентов. В списке x_{12} выбирается элементарное утверждение x_{13} , не имеющее заголовка "не". В нашем случае - " $c \in a$ ". Переменной x_{14} присваивается его заголовок. Справочник поиска теорем "упрощдн" определяет по символу x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{17} присваивается результат переобозначения в ней переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере получается:

$$\forall_{def}(e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow d \in e \cup f \leftrightarrow d \in e \vee d \in f)$$

Переменной x_{21} присваивается та часть эквивалентности в консеквенте теоремы x_{17} , которая имеет своим заголовком символ x_{14} . В нашем примере - " $d \in e \cup f$ ". Переменной x_{22} присваивается список всех параметров термов x_{13} и x_{21} , не входящих в кванторную приставку x_{11} . В нашем примере - " a, d, e, f ". Находится унифицирующая подстановка S для термов x_{21} и x_{13} относительно переменных x_{22} . Переменной x_{24} присваивается результат применения этой подстановки к отличной от x_{21} части эквивалентности в консеквенте теоремы x_{17} . В нашем случае - " $c \in e \vee c \in f$ ". Переменной x_{25} присваивается набор дизъюнктивных членов утверждения x_{24} . Переменной x_{26} присваивается набор результатов применения подстановки S к отличным от x_{13} утверждениям списка x_{12} , переменной x_{27} - результат применения этой подстановки к консеквенту импликации x_{10} . В нашем примере набор x_{26} пуст, x_{27} имеет вид " $b \leq c$ ". Переменной x_{28} присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы, переменной x_{29} - набор результатов ее применения к антецедентам теоремы x_{17} . Переменной x_{30} присваивается набор тех утверждений из x_{29} , параметры которых не пересекаются с x_{11} . Затем набор x_{30} добавляется к списку x_{28} . В итоге x_{28} состоит из утверждений " $e \cup f - \text{set}$ ", " $e \cup f \subseteq \mathbb{R}$ ", " $b - \text{число}$ ", " $e - \text{set}$ ", " $f - \text{set}$ ".

Если x_{26} непусто, то просматриваются утверждения x_{31} набора x_{29} , не входящие в x_{30} , формируются кванторные импликации "длялюбого(x_{11} если x_{26} то x_{31})", с помощью вспомогательной задачи на преобразование эти импликации сворачиваются в элементарные утверждения, которые добавляются к списку x_{28} . Если хотя бы одну из импликаций свернуть в элементарное утверждение не удалось, прием не применяется.

После указанного цикла вводится пустой накопитель x_{31} . Просматриваются утверждения x_{32} списка x_{25} . Для каждого из них вводится кванторная импликация "длялюбого(x_{11} если x_{26} x_{32} то x_{27})". С помощью вспомогательной задачи на преобразование она сворачивается в элементарное утверждение, заносимое в накопитель x_{31} . Если хотя бы в одном случае свертка не удалась, прием не применяется.

После заполнения накопителя x_{31} определяется результат x_{32} применения подстановки S к заменяющему терму исходной теоремы. Определяется результат x_{33} обработки списка x_{28} процедурой "нормантецеденты" относительно параметров утверждений x_{31} и x_{32} . Затем создается импликация с антецедентами x_{33} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждения x_{32} конъюнкции утверждений x_{31} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

3. Применение параметрического описания к антецеденту заменяемой импликации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bef}(e - \text{set} \ \& \ e \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \text{образ}(f, e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{нижняягрань}(b, \text{образ}(f, e)) \leftrightarrow \forall_g(g \in e \rightarrow b \leq f(g)))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{нижняягрань}(b, a) \rightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abf}(f - \text{функция} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow a \in \text{образ}(f, b) \leftrightarrow \exists_x(a = f(x) \ \& \ x \in b))$$

Начало программы данного приема совпадает с программой предыдущего. Однако, для удобства повторим его. Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Он представляет собой кванторную импликацию, и переменной x11 присваивается ее связывающая приставка. Переменной x12 присваивается набор антецедентов импликации x10. В нем выбирается элементарное утверждение x13. В нашем примере - " $c \in a$ ". Заголовок x14 утверждения x13 отличен от отрицания. Проверяется, что в списке x12 отсутствует такое отличное от x13 утверждение, которое имеет параметр, входящий в x13 и не входящий в x11. Справочник поиска теорем "описание" определяет по символу x14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем случае получается:

$$\forall_{def}(f - \text{функция} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ e \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow d \in \text{образ}(f, e) \leftrightarrow \exists_g(d = f(g) \ \& \ g \in e))$$

Переменной x18 присваивается консеквент теоремы x17. Переменной x21 присваивается тот его корневой операнд, который имеет заголовок x14. В нашем примере - " $d \in \text{образ}(f, e)$ ". Переменной x22 присваивается список всех параметров термов x13 и x21, не входящих в кванторную приставку x11. В нашем примере - " a, d, e, f ". Находится унифицирующая подстановка S для термов x21 и x13 относительно переменных x22. Переменной x24 присваивается результат применения этой подстановки к отличной от x21 части эквивалентности в консеквенте теоремы x17. В нашем случае - " $\exists_g(c = f(g) \ \& \ g \in e)$ ".

Далее начинаются отличия от предыдущего приема. Переменной x25 присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы, переменной x26 - набор результатов применения этой подстановки к антецедентам теоремы x17. Переменной x27 присваивается список всех утверждений набора x26, содержащих переменные связывающей приставки x11. В нашем примере он пуст. Переменной x28 присваивается результат добавления к x25 всех утверждений списка x26, не вошедших в x27. Проверяется, что список x28 непуст. В нашем примере он состоит из утверждений

"образ(f, e) - set", "образ(f, e) \subseteq \mathbb{R} ", " b - число", " f - функция", " e - set", " $e \subseteq \text{Dom}(f)$ ".

Переменной x_{29} присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям набора x_{12} , отличным от x_{13} . В нашем примере этот список пуст. Для каждого утверждения из x_{27} проверяется, что оно является следствием утверждений x_{28} , x_{29} . Если какая-либо из этих проверок не удалась, то применение приема отменяется. Иначе определяется результат x_{30} применения подстановки S к консеквенту импликации x_{10} . Переменной x_{31} присваивается импликация с антецедентами x_{24} и x_{29} , консеквентом x_{30} и связывающей приставкой x_{11} . В нашем примере она имеет вид " $\forall_c(\exists_g(c = f(g) \ \& \ g \in e) \rightarrow b \leq c)$ ". После обработки вспомогательной задачей на упрощение данная импликация приобретает вид: " $\forall_g(g \in e \rightarrow b \leq f(g))$ ". Определяется результат x_{32} применения подстановки S к заменяющему терму исходной теоремы. Затем создается импликация с антецедентами x_{28} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{32} и x_{31} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

4. Использование эквивалентности, преобразующей элементарный антецедент заменяемой импликации к виду квантора существования.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{be}(\bigcup(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ e \text{ — функция} \ \& \ b \text{ — число} \ \& \ \text{семействомножеств}(e) \rightarrow \text{нижняягрань}(b, \bigcup(e)) \leftrightarrow \forall_f(f \in \text{Dom}(e) \rightarrow \text{нижняягрань}(b, e(f))))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a \text{ — set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b \text{ — число} \rightarrow \text{нижняягрань}(b, a) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{af}(f \text{ — функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(f) \rightarrow a \in \bigcup(f) \leftrightarrow \exists_x(x \in \text{Dom}(f) \ \& \ a \in f(x)))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она представляет собой кванторную импликацию. Переменной x_{11} присваивается вхождение ее антецедента, имеющего не менее двух параметров. В нашем примере - $c \in a$. Переменной x_{12} присваивается заголовок этого антецедента (с отбрасыванием корневого отрицания, если оно есть). Справочник поиска теорем "Существует" находит по x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Процедура "тождвывод" использует дополнительную теорему для преобразования вхождения x_{11} в исходную теорему. Результат обрабатывается оператором "нормтеорема". Предварительно разблокируются приемы, основанные на уже выведенных в текущем цикле вывода теоремах.

Использование дополнительной кванторной импликации для реализации заменяемой части

1. Попытка обращения в логическую константу заменяемого квантора в эквивалентности кванторной свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b \text{ — set} \rightarrow \emptyset \subseteq b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow c \in b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\neg(a \in \emptyset))$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Проверяется, что ее заголовок - квантор общности либо существования. В случае квантора общности рассматривается либо вхождение x11 антецедента импликации x10, либо вхождение x11 консеквента. В случае квантора существования x11 - конъюнктивный член подкванторного утверждения. Проверяется, что подтерм x11 элементарный. Переменной x12 присваивается результат отбрасывания в утверждении x11 корневого отрицания, если оно есть. Переменной x13 присваивается заголовок терма x12. В нашем примере x11 - " $c \in a$ "; x13 - символ "принадлежит". Справочник поиска теорем "пример" определяет по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Рассматривается вхождение x16 в консеквент дополнительной теоремы константы - логического символа x17. В нашем случае - " \emptyset ". Выбирается новая переменная x18. В нашем примере - b . Переменной x19 присваивается результат замены вхождения x16 в консеквент дополнительной теоремы на переменную x18. В нашем примере получается " $\neg(a \in b)$ ". Переменной x20 присваивается импликация, антецеденты которой получают добавлением к антецедентам дополнительной теоремы равенства x18 и x17. Если заголовком утверждения x19 служит символ "не", то консеквент - эквивалентность корневого операнда терма x19 константе "ложь". Иначе - эквивалентность терма x19 константе "истина". Если заголовок x11 - символ "не", то переменной x21 присваивается вхождение корневого операнда терма x11, иначе - вхождение корня этого терма. Оператор "тождвывод" находит результат x22 преобразования вхождения x21 при помощи теоремы x20. Он обрабатывается оператором "нормтеорема". Проверяется, что результат либо не имеет связанных переменных, либо его консеквент не имеет связанных переменных.

2. Попытка декомпозиции консеквента сворачиваемой кванторной импликации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{afhi}(h - \text{set} \ \& \ i - \text{set} \ \& \ h \subseteq \mathbb{R} \ \& \ i \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{нижняягрань}(d, h) \ \& \ \text{нижняягрань}(f, i) \rightarrow \text{нижняягрань}(d + f, \text{set}_j(\exists_{eg}(j = e + g \ \& \ e \in h \ \& \ g \in i))))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{нижняягрань}(b, a) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a \leq b \ \& \ c \leq d \rightarrow a + c \leq b + d)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок "длялюбого". Переменной x11 присваивается связывающая приставка терма x10. Она состоит из единственной переменной x12. Переменной x13 присваивается набор антецедентов терма x10. Проверяется, что он состоит из

единственного утверждения x_{14} , имеющего своим заголовком символ принадлежности, а первым операндом - переменную x_{12} . Вторым операндом принадлежности служит переменная x_{15} , имеющая единственное вхождение в терм x_{10} . В нашем примере x_{12} - "с", x_{15} - "а". Переменной x_{16} присваивается консеквент импликации x_{10} , переменной x_{17} - его заголовок. В нашем примере - символ "меньшеилиравно". Справочник поиска теорем "сборкамн" определяет по символу x_{17} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{20} присваивается результат переобозначения в ней переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем случае имеем:

$$\forall_{defg}(d\text{-число} \ \& \ e\text{-число} \ \& \ f\text{-число} \ \& \ g\text{-число} \ \& \ d \leq e \ \& \ f \leq g \rightarrow d+f \leq e+g)$$

Переменной x_{21} присваивается консеквент импликации x_{20} , переменной x_{22} - параметры термов x_{16} и x_{21} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{22} , унифицирующая термы x_{16} и x_{21} . Переменной x_{24} присваивается терм, подставляемый этой подстановкой вместо переменной x_{12} . В нашем примере - " $e + g$ ". Проверяется, что x_{24} - не переменная. Переменной x_{25} присваивается список параметров терма x_{24} . В нашем примере - " e, g ". Проверяется, что он непуст. Переменной x_{26} присваивается список отличных от x_{12} параметров терма x_{16} . В нашем случае - единственная переменная b . Проверяется, что термы, подставляемые подстановкой S вместо переменных x_{26} , не содержат переменных x_{25} . Определяется непустой список x_{27} номеров существенных antecedентов теоремы x_{20} . В нашем примере - 5 и 6. Переменной x_{28} присваивается список всех antecedентов импликации x_{20} , переменной x_{29} - список ее существенных antecedентов. Переменной x_{31} присваивается список результатов применения подстановки S к несущественным antecedентам данной импликации. Проверяется, что все утверждения списка x_{31} имеют единственный параметр. Выбирается список переменных x_{32} , имеющий такую же длину, что и список x_{25} , причем не содержащий переменных исходной теоремы и теоремы x_{20} . В нашем случае имеем " h, i ". Переменной x_{33} присваивается конкатенация набора результатов применения подстановки S к antecedентам исходной теоремы и списка утверждений "множество(X)" для переменных X списка x_{32} .

Для каждой переменной x_{34} списка x_{25} рассматривается расположенная в списке x_{32} на позиции с тем же номером переменная Y , и создается импликация "длялюбого(x_{34} если принадлежит($x_{34} Y$)то Q)". Здесь Y - переменная, расположенная в списке x_{32} на позиции с тем же номером, что у переменной x_{34} в списке x_{25} ; Q - конъюнкция всех содержащих x_{34} элементов списка x_{31} . При помощи вспомогательной задачи на преобразование, имеющей цели "упростить", "свертка", предпринимается попытка свернуть данную импликацию в элементарное утверждение. В случае успеха это утверждение присоединяется к списку x_{33} . Иначе - попытка применения приема при данном результате унификации обрывается. В нашем примере таким образом к списку x_{33} добавляются утверждения " $h \subseteq \mathbb{R}$ ", " $i \subseteq \mathbb{R}$ ".

После обработки списка x_{25} начинается просмотр утверждений x_{34} списка x_{29} . Определяется результат x_{35} применения подстановки S к терму x_{34} . Рассматривается пересечение x_{36} списка переменных x_{25} с параметрами терма x_{35} . Если оно пусто, то x_{34} присоединяется к списку x_{33} . Иначе - рассматривается список x_{37} термов, подставляемых подстановкой S вместо переменных x_{36} ,

и формируется импликация "длялюбого(x_{36} если R то x_{35})". Здесь R - конъюнкция условий принадлежности переменных x_{36} соответствующим термам списка x_{37} . Эта импликация упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Если получается элементарное утверждение, то оно заносится в список x_{33} . Иначе - попытка применения приема при данном результате унификации обрывается. В нашем примере таким образом к списку x_{33} добавляются утверждения "нижнягрань(d, h)", "нижнягрань(f, i)".

После обработки антецедентов x_{29} выбирается новая переменная x_{34} . В нашем примере - j . Переменной x_{35} присваивается выражение "класс(x_{34} существует(x_{25} и(H равно(x_{34} x_{24}))))", где H - конъюнкция условий принадлежности переменных x_{25} соответствующим переменным x_{32} . Определяется результат x_{38} подстановки в заменяющую часть исходной теоремы термов x_{23} вместо переменных x_{22} и терма x_{35} вместо переменной x_{15} . Переменной x_{39} присваивается набор результатов подстановки терма x_{35} вместо переменной x_{34} в утверждения набора x_{33} . Затем создается импликация с антецедентами x_{39} и консеквентом x_{38} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

3. Попытка реализации антецедента сворачиваемой импликации с помощью дополнительной простой импликации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d \subseteq a \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{нижнягрань}(b, a) \rightarrow \text{нижнягрань}(b, d))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{нижнягрань}(b, a) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$$

и дополнительной теоремы:

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq b \ \& \ c \in a \rightarrow c \in b)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм, представляющий собой кванторную импликацию. Переменной x_{11} присваивается ее кванторная приставка. Переменной x_{12} присваивается набор антецедентов импликации x_{10} . В нем выбирается элементарное утверждение x_{13} , заголовок x_{14} которого отличен от символа "не". В нашем примере x_{13} - " $c \in a$ ". По символу x_{14} справочник поиска теорем "транзитоперанд" определяет указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{17} присваивается результат переобозачения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере имеем:

$$\forall_{def}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ d \subseteq e \ \& \ f \in d \rightarrow f \in e)$$

Переменной x_{18} присваивается консеквент теоремы x_{17} ., переменной x_{19} - объединение его параметров с переменными утверждения x_{13} , отличными от переменных списка x_{11} . В нашем примере - " e, f, a ". Определяется подстановка S вместо переменных x_{19} , унифицирующая для термов x_{13} и x_{18} . Переменной x_{21} присваивается набор результатов применения S к антецедентам теоремы x_{17} . Подсписок списка x_{21} , образованный всеми утверждениями, содержащими переменные связывающей приставки x_{11} , присваивается переменной x_{22} .

Переменной x_{23} присваивается набор результатов применения S к утверждениям списка x_{12} , отличным от x_{13} . Переменной x_{24} присваивается результат применения S к консеквенту импликации x_{10} . В нашем примере x_{21} - " $d - \text{set}$ ", " $a - \text{set}$ ", " $d \subseteq a$ ", " $c \in d$ ", x_{22} - " $c \in d$ ", x_{23} - пустой список, x_{24} - " $b \leq c$ ". Формируется импликация x_{25} вида "длялюбого(x_{11} если x_{23} x_{22} то x_{24})". В нашем примере она имеет вид " $\forall_c(c \in d \rightarrow b \leq c)$ ". Переменной x_{26} присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы. Решается задача на преобразование для упрощения импликации x_{25} относительно посылок x_{25} . На время ее решения блокировки снимаются. Проверяется, что результат x_{28} - элементарное утверждение. В нашем примере - "нижняягрань(b, d)". Определяется результат x_{29} применения подстановки S к заменяющей части исходной теоремы. Затем создается импликация, антецеденты которой получаются объединением списка x_{26} с разностью списков x_{21} и x_{22} и добавлением утверждения x_{29} . Консеквентом является утверждение x_{28} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема".

Вывод импликации из эквивалентности

1. Получение импликации, выводящей утверждение существования.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{огрсверху}(a) \rightarrow \exists_b(\text{верхняягрань}(b, a)))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{огрсверху}(a) \leftrightarrow \exists_b(\text{верхняягрань}(b, a)))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть, имеющая своим заголовком квантор существования. Проверяется, что заменяющая часть x_{11} элементарна. Создается итоговая импликация, антецеденты которой получены добавлением к антецедентам теоремы ее заменяющей части, а консеквентом служит заменяемая часть.

2. Развязка консеквента по транзитивности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abe}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \text{нижняягрань}(e, a) \ \& \ b \leq e \rightarrow \text{нижняягрань}(b, a))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{нижняягрань}(b, a) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ a \leq b \ \& \ b \leq c \rightarrow a \leq c)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть, имеющая заголовок "длялюбого"; переменной x_{11} - связывающая приставка импликации x_{10} , переменной

x12 - ее набор антецедентов. Переменной x13 присваивается вхождение консеквента импликации x10. Проверяется, что он имеет ровно два операнда - переменные x16 и x17, причем x16 имеет единственное вхождение в терм x10, а x17 - элемент связывающей приставки x11. Переменной x18 присваивается заголовок консеквента импликации x10. В нашем примере - "меньшеилиравно". Справочник поиска теорем "транзитоперанд" определяет по x18 указанную выше дополнительную теорему. Определяется результат x21 переобозначения переменных теоремы x19 на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере получаем:

$$\forall_{def}(d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ d \leq e \ \& \ e \leq f \rightarrow d \leq f)$$

Переменной x22 присваивается вхождение консеквента теоремы x21. Проверяется, что по этому вхождению расположен символ x18. Находится антецедент x23 теоремы x21, имеющий заголовок x18 и два корневых операнда. В нашем случае - $e \leq f$. Переменной x24 присваивается вхождение операнда операции x22, имеющего тот же номер, что и операнд x16 операции x13. Переменной x25 присваивается аналогичным образом расположенный операнд операции x23. Проверяется, что на вхождениях x24 и x25 расположены одинаковые подтермы. В нашем примере - "f". Переменной x26 присваивается символ по вхождению x24. Проверяется, что это переменная. Переменной x27 присваивается список отличных от x23 антецедентов теоремы x21, содержащих переменную x26. В нашем случае - единственное утверждение "f - число". Проверяется, что каждое утверждение списка x27 имеет единственный параметр x26. Проверяется, что все утверждения списка x27 являются следствиями антецедентов теоремы x21.

Рассматривается отличный от x24 операнд операции x22. Проверяется, что он представляет собой некоторую переменную x29. В нашем случае - "d". Переменной x31 присваивается набор результатов подстановки переменной x16 вместо x29 в не содежащие переменной x26 антецеденты теоремы x21. В нашем примере получаем набор "b - число", "e - число", "b ≤ e". Переменной x34 присваивается результат подстановки отличного от x25 операнда операции x23 вместо переменной x16 в заменяющую часть исходной теоремы. В нашем случае - "нижняягрань(e, a)". Формируется импликация, антецеденты которой получены добавлением к антецедентам исходной теоремы списка x31 и утверждения x34, а консеквентом служит заменяющая часть исходной теоремы. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема".

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Получение эквивалентности, использующей описатель "класс" для свертки кванторной импликации с неизвестной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \forall_y(c(y) \ \& \ f(y) \in b \rightarrow d(y)) \leftrightarrow \text{непересек}(b, \text{образ}(f, \text{set}_y(c(y) \ \& \ \neg(d(y))))))$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \text{непресек}(b, \text{образ}(f, a)) \leftrightarrow \forall_y(y \in a \rightarrow \neg(f(y) \in b)))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - набор антецедентов. Проверяется, что заголовком утверждения x10 служит квантор "длялюбого", и переменной x12 присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она состоит из единственной переменной x13. В нашем примере - y . Переменной x14 присваивается набор антецедентов импликации x10. Проверяется, что он состоит из единственного утверждения x15, заголовком которого служит символ "принадлежит", первым операндом - переменная x13, а вторым - переменная x16, имеющая единственное вхождение в терм x10. Переменной x17 присваивается заменяющий терм исходной теоремы, переменной x18 - консеквент импликации x10. Проверяется, что утверждение x18 элементарное. Выбирается параметр x19 утверждения x18, отличный от x13. В нашем примере x18 - " $\neg(f(y) \in b)$ ", x19 - b . Выбирается пара x20 переменных, не входящих в исходную теорему. В нашем случае - переменные c, d . Переменной x21 присваивается импликация "длялюбого(x13 если значение(c x13) отрицание(x18) то значение(d x13))". В нашем примере - " $\forall_y(c(y) \ \& \ f(y) \in b \rightarrow d(y))$ ". Определяется результат x22 подстановки в утверждение x17 выражения "класс(x13 и(c (x13)не(d (x13))))" вместо переменной x16. В нашем примере он имеет вид "непресек(b , образ(f , set $_y(c(y) \ \& \ \neg(d(y)))$))". Переменной x24 присваивается итоговая импликация с антецедентами x11, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x21 и x22. Она сопровождается характеристикой "неизвмнож(x19 второйтерм)".

Специальная стандартизация теоремы

1. Группировка в левых частях всех ненулевых членов для двуместных отношений под квантором.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(n - km = 0 \ \& \ k - \text{целое}))$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(k - \text{целое} \ \& \ n = mk))$$

Смысл данного перехода заключается в необходимости обобщить теорему для приема кванторной свертки. Обычно при решении задачи под квантором выполняется группировка ненулевых слагаемых в одной части, и для соответствующего приема нужна коррекция теоремы. Заметим, что данный переход - промежуточный. Следующим шагом будет устраняться минус в коэффициенте при k .

Рассматривается тот операнд консеквента теоремы, который представляет собой квантор. В нем усматривается вхождение x13 двуместного отношения x14. Если x14 - равенство, то определяется тип значения его операндов, и переменной x14 переписывается данный тип. Затем находится результат x15 обращения к справочнику "перегруппировка" на символе x14. Если возможна перегруппировка A - членов операндов отношения x14 либо равенства объектов типа

x_{14} из одной части в другую с изменением знака B , то x_{15} - тройка (A, B, C) , где C - единица операции A . Проверяется, что отношение x_{13} не имеет операнда C , и выполняется соответствующая перегруппировка всех "ненулевых" членов в одной части отношения. Данное преобразование выполняется вплоть до исчерпания возможностей. Итоговая импликация обрабатывается операторами "Полныепосылки" и "нормтеорема".

Обобщение теоремы

1. Изменение знака варьируемой переменной для исключения знака перед двуместной операцией под квантором существования.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow \exists_a(n + am = 0 \ \& \ a - \text{целое}) \leftrightarrow m|n)$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(n - km = 0 \ \& \ k - \text{целое}))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть, имеющая своим заголовком квантор существования. Переменной x_{11} присваивается связывающая приставка квантора x_{10} , переменной x_{12} - ее элемент. В нашем примере - переменная k . Переменной x_{13} присваивается набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения, переменной x_{14} - элемент этого набора. В нашем примере - элемент " $n - km = 0$ ". Рассматривается вхождение x_{15} переменной x_{12} в терм x_{14} , являющееся операндом двуместной операции x_{17} . x_{16} - вхождение этой операции. В нашем случае x_{16} - вхождение подтерма km . Справочник "заменазнака" определяет по x_{17} , что внешний знак Z (в нашем примере - "минус") перед операцией x_{16} может быть перенесен вглубь, на переменную x_{12} . Проверяется, что все отличные от x_{14} элементы набора x_{13} , содержащие переменную x_{12} , не имеют других переменных, причем в терме x_{14} эта переменная имеет единственное вхождение. Выбирается не входящая в исходную теорему переменная x_{23} . В нашем примере - переменная a . Определяется тип x_{25} значений операции Z . В нашем случае - "число". Проверяется, что список x_{24} антецедентов исходной теоремы непуст. Переменной x_{26} присваивается результат добавления к списку x_{13} с отброшенным утверждением x_{14} утверждений "равно($x_{23} \ Z(x_{12})$)" и " $x_{25}(x_{23})$ ". В нашем примере x_{26} состоит из утверждений " $k - \text{целое}$ ", " $a = -k$ ", " $a - \text{число}$ ". Решается задача на описание x_{27} , посылками которой служат антецеденты исходной теоремы, а условиями - утверждения x_{26} . Эта задача имеет цели "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{12} ". Переменной x_{29} присваивается набор конъюнктивных членов ответа. В нашем примере - " $a - \text{целое}$ ", " $k = -a$ ", " $a - \text{число}$ ". В списке x_{29} находится равенство x_{30} переменной x_{12} выражению x_{31} . В нашем примере - выражению " $-a$ ". Определяется результат x_{32} подстановки в утверждение x_{14} терма x_{31} вместо переменной x_{12} . В нашем примере - " $n - (-a)m$ ". Переменной x_{33} присваивается результат удаления из списка x_{29} равенства x_{30} и добавления утверждения x_{32} . Переменной x_{34} присваивается результат навешивания квантора существования по переменной x_{23} и отличным от x_{12} переменным списка x_{11} на конъюнкцию утверждений x_{33} . Затем формируется импликация, антецеденты которой - те же, что у исходной теоремы, а консеквент - эквивалентность

утверждения x_{34} заменяющему терму исходной теоремы. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема".

3.38 Характеристика "коммутатор"

Характеристикой "коммутатор" снабжаются кванторные эквивалентности, преобразующие бесповторное утверждение так, чтобы выявилась симметрия по переменным.

1. Перестановка несимметричных переменных заменяемого утверждения, имеющих симметричные вхождения в заменяющем утверждении.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(0 < b \ \& \ 0 < d \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow b < c/d \leftrightarrow d < c/b)$$

из теоремы

$$\forall_{bcd}(0 < d \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow b < c/d \leftrightarrow bd < c)$$

Переменной x_9 присваивается пара операндов консеквента - некоторой эквивалентности. Рассматривается утверждение x_{11} из этой пары; в нем выбирается вхождение x_{12} коммутативной операции x_{13} . В нашем примере - вхождение произведения bd в неравенство $bd < c$. Проверяется, что первый операнд операции x_{12} - некоторая переменная x_{14} , второй операнд - некоторая переменная x_{15} , отличная от x_{14} . Проверяется, что x_{11} бесповторно. Рассматривается противоположный операнд x_{17} консеквента теоремы. Переменной x_{18} присваивается результат перестановки в нем переменных x_{14} и x_{15} . В нашем случае x_{17} имеет вид $b < c/d$, x_{18} - вид $d < c/b$. Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" термов x_{17} и x_{18} различны. Переменной x_{19} присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы со списком утверждений, получаемых из них перестановкой переменных x_{14} и x_{15} . Далее формируется импликация с антецедентами x_{19} , консеквентом которой служит эквивалентность x_{17} и x_{18} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема".

3.39 Характеристика "конечное"

Характеристикой "конечное(N)" снабжаются кванторные эквивалентности, имеющие в одной части одноместный предикат $P(x)$, а в другой - дизъюнкцию равенств вида $x = t$, где t - константа. N - направление перехода к дизъюнкции.

1. Вывод эквивалентности, преобразующей квантор существования в дизъюнкцию.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(\exists_a(a - \text{boolean} \ \& \ b(a)) \leftrightarrow b(0) \ \vee \ b(1))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{boolean} \leftrightarrow a = 0 \ \vee \ a = 1)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он элементарен. Переменной x_{11} присваивается набор дизъюнктивных членов заменяющей части. Проверяется, что все они суть равенства, имеющие в одной из своих частей одну и ту же переменную x_{15} . В нашем примере - переменную a . Проверяется, что переменная x_{15} входит в x_{10} . Выбирается переменная x_{16} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b . Переменной x_{17} присваивается результат навешивания квантора существования по x_{15} на конъюнкцию x_{10} и терма "значение(x_{16} x_{15})". В нашем случае - утверждение " $\exists_a(a - \text{boolean} \ \& \ b(a))$ ". Переменной x_{18} присваивается дизъюнкция выражений вида $b(t)$, где t - отличная от x_{15} часть равенства из списка x_{11} . В нашем примере x_{18} имеет вид " $b(0) \vee b(1)$ ". Проверяется, что x_{15} не входит в x_{18} . Затем формируется итоговая импликация. Ее антецеденты те же, что у исходной теоремы, а консеквент - эквивалентность x_{17} и x_{18} .

3.40 Характеристика "конст"

Характеристикой "конст" снабжаются утверждения без переменных.

1. Вывод утверждения существования.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\exists_a(a - \text{set})$$

из теоремы

$$\emptyset - \text{set}$$

Проверяется, что исходная теорема представляет собой элементарное утверждение, заголовок x_8 которого отличен от символа "не". Проверяется, что число корневых операндов равно 1. Тогда выводится теорема - результат навешивания квантора существования по переменной a на терм $x_8(a)$.

3.41 Характеристика "конъюнкция"

Характеристикой "конъюнкция" снабжаются кванторные импликации с элементарными антецедентами и консеквентом, имеющим вид конъюнкции элементарных утверждений.

Логические следствия теоремы

1. Переход к импликации, консеквентом которой служит конъюнктивный член исходного консеквента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(l(AE) = l(BE) \ \& \ l(CF) = l(DF) \ \& \ E \in \text{прямая}(AB) \ \& \\ F \in \text{прямая}(CD) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \\ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \text{трапеция}(ABCD) \rightarrow \text{прямая}(AD) \parallel \text{прямая}(EF))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ F - \text{точка} \ \& \ \text{трапеция}(ABCD) \ \& \ E \in \text{прямая}(AB) \ \& \ l(BE) = l(AE) \ \& \\ F \in \text{прямая}(CD) \ \& \ l(CF) = l(FD) \rightarrow \text{прямая}(EF) \parallel \text{прямая}(AD) \ \& \ 2l(EF) = \\ l(BC) + l(AD))$$

Переменной x_9 присваивается набор конъюнктивных членов консеквента. В нем выбирается утверждение x_{10} . Проверяется, что все антецеденты исходной теоремы - элементарные утверждения. Создается импликация, антецеденты которой те же, что у исходной теоремы, а консеквент - x_{10} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

2. Конъюнктивная расшифровка по определению одного из антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(\neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC)) \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ F - \text{точка} \ \& \ D \in \text{отрезок}(BC) \ \& \ l(CD) = l(BD) \ \& \ E \in \text{отрезок}(AC) \ \& \\ l(CE) = l(AE) \ \& \ F \in \text{прямая}(BE) \ \& \ F \in \text{прямая}(AD) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \\ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \rightarrow F \in \text{отрезок}(BE) \ \& \\ 2l(FE) = l(BF))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(\Delta(ABC) \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ D \in \text{отрезок}(BC) \\ \& \ l(BD) = l(CD) \ \& \ E \in \text{отрезок}(AC) \ \& \ l(AE) = l(EC) \ \& \ F \in \text{прямая}(BE) \ \& \\ F \in \text{прямая}(AD) \rightarrow F \in \text{отрезок}(BE) \ \& \ 2l(FE) = l(BF))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \Delta(ABC) \leftrightarrow \neg(A = B) \ \& \\ \neg(C \in \text{прямая}(AB)))$$

Переменной x_9 присваивается набор антецедентов исходной теоремы. Выбирается ее антецедент x_{10} . В нашем случае - " $\Delta(ABC)$ ". Проверяется, что заголовок x_{11} этого антецедента отличен от символов "равно", "не". Справочник поиска теорем "определение" находит по x_{11} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{14} присваивается результат переобозначения в ней переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере получаем:

$$\forall_{abc}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \rightarrow \Delta(abc) \leftrightarrow \neg(a = b) \ \& \ \neg(c \in \text{прямая}(ab))).$$

Проверяется, что консеквент импликации x_{14} - эквивалентность. Переменной x_{16} присваивается вхождение той ее части x_{19} , которая имеет заголовок x_{11} , переменной x_{18} - набор конъюнктивных членов другой части. Проверяется, что все утверждения набора x_{18} элементарны. Переменной x_{20} присваивается набор параметров терма x_{19} . Проверяется, что x_{10} - результат подстановки в x_{19} некоторых термов вместо переменных x_{20} . Обозначим эту подстановку S . Переменной x_{22} присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_{14} , Переменной x_{23} - объединение x_{22} с отличными от x_{10} элементами списка x_9 . Переменной x_{24} присваивается объединение

списка x23 с результатами применения подстановки S к утверждениям x18. Переменной x26 присваивается результат обработки списка x24 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров консеквента исходной теоремы. Затем создается итоговая импликация, антецедентами которой служат утверждения x26, а консеквент - тот же, что у исходной теоремы.

3. Расшифровка членов консеквента в дизъюнкции, перенесение отрицаний дизъюнктивных членов в антецеденты и исключение невырожденных числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)) \ \& \ A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \rightarrow 0 < \angle(ABC) \ \& \ \angle(ABC) < \pi)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \rightarrow 0 \leq \angle(ABC) \ \& \ \angle(ABC) \leq \pi)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a \text{ — число} \ \& \ b \text{ — число} \rightarrow a < b \ \vee \ a = b \leftrightarrow a \leq b)$$

Переменной x8 присваивается набор конъюнктивных членов консеквента, переменной x9 - набор антецедентов. Рассматривается заголовок x11 одного из утверждений списка x8. В нашем примере - "меньшеилиравно". Справочник поиска теорем "определение" определяет по x11 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x14 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере дополнительная теорема не изменяется. Проверяется, что теорема x14 - эквивалентность. Переменной x16 присваивается вхождение той части эквивалентности, которая имеет заголовок x11. Другая часть x17 данной эквивалентности - дизъюнкция с двумя операндами. Переменной x18 присваивается подтерм по вхождению x16, переменной x19 - список его параметров. Проверяется, что x19 содержит все переменные теоремы x14. Переменной x20 присваивается набор дизъюнктивных членов дизъюнкции x17. Рассматривается элементарное утверждение x21 списка x20, отличное от равенства. В нашем случае - " $a < b$ ". Рассматривается также другое утверждение x22 списка x20. В нашем случае - " $a = b$ ". Проверяется, что оно элементарно.

Переменной x23 присваивается копия списка x8, переменной x24 - копия списка x9. Просматриваются элементы x27 списка x23, имеющие заголовок x11. Находится подстановка S вместо переменных x19, унифицирующая термы x27 и x18. К списку x24 присоединяется набор результатов применения S к антецедентам теоремы x14. Находится результат x29 применения S к утверждению x21. Проверяется, что он имеет невырожденный числовой атом. Находится результат x30 применения подстановки S к утверждению x22. Отрицание x30 присоединяется к списку x24, а вхождение утверждения x27 в список x23 заменяется на x29.

По окончании указанного цикла х24 оказывается состоящим из следующих утверждений: "A – точка", "B – точка", "C – точка", " $\neg(A = B)$ ", " $\neg(B = C)$ ", "0 – число", " $\angle(ABC)$ – число", " $\neg(0 = \angle(ABC))$ ", " $\angle(ABC)$ – число", " π – число", " $\neg(\angle(ABC) = \pi)$ ". Список х23 преобразуется к следующему виду: " $0 < \angle(ABC)$ ", " $\angle(ABC) < \pi$ ". Переменной х26 присваивается результат обработки списка х24 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров утверждений х23. Проверяется, что х26 не содержит невырожденных числовых атомов. Затем создается импликация с антецедентами х26, консеквентом которой служит конъюнкция утверждений х23. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

4. Переход к эквивалентности, если конъюнкция определяет набор параметров правой части равенства в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{AKabc}(\text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Вектор}(A) \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \leftrightarrow \text{крд}(A, K, 1) = a \ \& \ \text{крд}(A, K, 2) = b \ \& \ \text{крд}(A, K, 3) = c)$$

из теоремы

$$\forall_{AKabc}(\text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Вектор}(A) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \rightarrow \text{крд}(A, K, 1) = a \ \& \ \text{крд}(A, K, 2) = b \ \& \ \text{крд}(A, K, 3) = c)$$

Переменной х8 присваивается набор антецедентов теоремы, переменной х10 – набор конъюнктивных членов консеквента. Переменной х11 присваивается список переменных, для которых в х10 имеется равенство с данной переменной в одной части и не содержащим ее выражением в другой. В нашем примере – "a, b, c". Проверяется, что список х11 непуст и состоит из различных переменных. Среди антецедентов х8 находится равенство х12, одна из частей которого (она присваивается переменной х15) имеет параметры только из списка х11, а другая часть (она присваивается переменной х16) не имеет переменных списка х11. В нашем примере х15 – "(a, b, c)", х16 – "коорд(A, K)". Проверяется, что параметры равенства х12 включаются в параметры консеквента. Переменной х17 присваивается список отличных от х12 антецедентов. Проверяется, что он непуст, а его термы не содержат переменных х11. Переменной х18 присваивается результат навешивания квантора существования по х11 на утверждение х12. В нашем случае – " $\exists_{abc}(\text{коорд}(A, K) = (a, b, c))$ ". Решается задача на доказательство с посылками х17 и условием х18. Если на нее получен ответ "истина", то создается итоговая импликация с антецедентами х17, консеквентом которой является эквивалентность х12 и консеквента исходной теоремы.

5. Переход к обратной импликации, если конъюнкция определяет набор параметров правой части равенства в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{AKabc}(\text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Вектор}(A) \ \& \ \text{крд}(A, K, 1) = a \ \& \ \text{крд}(A, K, 2) = b \ \& \ \text{крд}(A, K, 3) = c \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (a, b, c))$$

из теоремы

$$\forall_{AKabc}(\text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Вектор}(A) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \rightarrow \\ \text{крд}(A, K, 1) = a \ \& \ \text{крд}(A, K, 2) = b \ \& \ \text{крд}(A, K, 3) = c)$$

Программа приема дословно совпадает с программой предыдущего приема, за исключением последнего шага: итоговая импликация имеет своими антецедентами утверждения x17 и конъюнктивные члены консеквента. Консеквентом ее служит утверждение x12.

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Добавление к консеквенту следствий, выведенных во вспомогательной задаче на исследование и не содержащих новых переменных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AC) = \text{прямая}(BC)) \ \& \ l(AE) = \\ l(CE) \ \& \ l(BD) = l(CD) \ \& \ D \in \text{прямая}(BC) \ \& \ E \in \text{прямая}(AC) \ \& \ F \in \\ \text{прямая}(AD) \ \& \ F \in \text{прямая}(BE) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \\ \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \rightarrow 2l(EF) = l(BF) \ \& \ 3l(EF) = l(BE) \ \& \ F \in \\ \text{отрезок}(BE))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\Delta(ABC) \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ D \in \text{отрезок}(BC) \ \& \\ l(BD) = l(DC) \ \& \ E \in \text{отрезок}(AC) \ \& \ l(AE) = l(EC) \ \& \ F \in \text{прямая}(BE) \ \& \ F \in \\ \text{прямая}(AD) \rightarrow F \in \text{отрезок}(BE) \ \& \ 2l(FE) = l(BF))$$

Переменной x8 присваивается набор антецедентов, переменной x9 - консеквент. Составляется непустой список x10 невырожденных числовых атомов консеквента. Переменной x11 присваивается список параметров консеквента, переменной x12 - набор его конъюнктивных членов. Переменной x13 присваивается конкатенация списков x8 и x12. Решается задача на исследование с посылками x13 и целями "известно", "теорвывод", "неизвестные X", где X - параметры списка посылок. После этого составляется список x17 всех посылок задачи, не имеющих заголовка "актив", параметры которых включаются в список x11, причем не входящих ни в x8, ни в утверждения, являющиеся сопровождающими по о.д.з. для x8. В нашем примере данный список состоит из утверждений " $l(BE) = 3l(EF)$ ", " $F \in \text{отрезок}(BE)$ ", " $l(BF) = 2l(EF)$ ". Проверяется, что список x12 короче списка x17. Если список x8 непуст, то просматриваются все утверждения списка x17, не входящие в x12. Если для некоторого такого утверждения при помощи задачи на доказательство удастся установить, что оно является следствием утверждений x8, то это утверждение исключается из списка x17. Снова проверяется, что x12 короче списка x17. Затем создается импликация с антецедентами x8, консеквентом которой служит конъюнкция утверждений x17. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

2. Вывод утверждения существования путем усмотрения реализуемости группы антецедентов, содержащих заданный параметр, с пополнением списка подкванторных утверждений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{ABCDE}(\neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AC) = \text{прямая}(BC)) \ \& \\ & l(AE) = l(CE) \ \& \ l(BD) = l(CD) \ \& \ D \in \text{прямая}(BC) \ \& \ E \in \text{прямая}(AC) \ \& \\ & A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \rightarrow \\ & \exists_F(2l(DF) = l(AF) \ \& \ 2l(EF) = l(BF) \ \& \ 3l(DF) = l(AD) \ \& \ 3l(EF) = l(BE) \ \& \\ & F \in \text{отрезок}(AD) \ \& \ F \in \text{отрезок}(BE) \ \& \ F - \text{точка})) \end{aligned}$$

из теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{ABCDEF}(\Delta(ABC) \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ D \in \text{отрезок}(BC) \ \& \\ & l(BD) = l(DC) \ \& \ E \in \text{отрезок}(AC) \ \& \ l(AE) = l(EC) \ \& \ F \in \text{прямая}(BE) \ \& \ F \in \\ & \text{прямая}(AD) \ \rightarrow \ F \in \text{отрезок}(BE) \ \& \ 2l(FE) = l(BF)) \end{aligned}$$

Переменной x_8 присваивается набор антецедентов теоремы, переменной x_9 - ее консеквент, переменной x_{10} - параметры консеквента. Среди переменных списка x_{10} выбирается переменная x_{11} . В нашем примере - переменная F . Переменной x_{12} присваивается список всех содержащих x_{11} антецедентов. В нашем случае - " F - точка", " $F \in \text{прямая}(BE)$ ", " $F \in \text{прямая}(AD)$ ". Проверяется, что длина списка x_{12} меньше 4. Переменной x_{13} присваивается остаток списка антецедентов. Проверяется, что он не короче списка x_{12} . При помощи задачи на доказательство усматривается, что результат навешивания на конъюнкцию утверждений x_{12} квантора существования по x_{11} является следствием утверждений x_{13} . Переменной x_{15} присваивается результат добавления к списку x_8 конъюнктивных членов консеквента. Переменной x_{16} присваиваются параметры утверждений x_{12} и утверждения x_9 . Решается задача на исследование, посылки которой суть утверждения x_{15} , а цели - "известно", "теорвывод", "неизвестные X ", где X - все параметры посылок. После решения составляется список x_{19} посылок этой задачи, не имеющих заголовка "актив", содержащих переменную x_{11} , причем таких, что их свободные переменные - подмножества списка x_{16} , а заголовок является заголовком хотя бы одного утверждения списка x_{12} либо списка конъюнктивных членов консеквента. В нашем случае x_{19} состоит из утверждений " $l(AF) = 2l(DF)$ ", " $l(AD) = 3l(DF)$ ", " $l(BE) = 3l(EF)$ ", " $F \in \text{отрезок}(AD)$ ", " F - точка", " $F \in \text{прямая}(BE)$ ", " $F \in \text{прямая}(AD)$ ", " $F \in \text{отрезок}(BE)$ ", " $l(BF) = 2l(EF)$ ". Создается импликация с антецедентами x_{13} , консеквентом которой служит результат навешивания квантора существования по x_{11} на конъюнкцию утверждений x_{19} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Использование задачи на описание для получения новой теоремы

1. Расшифровка членов консеквента в дизъюнкции, перенесение конъюнкции основных подслучаев в антецеденты и вывод конъюнкции отрицаний остаточных подслучаев, в которой исключены невырожденные числовые атомы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ 0 < \angle(ABC) \ \& \ \angle(ABC) < \pi \ \& \ A - \text{точка} \ \& \\ & B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \rightarrow \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC))) \end{aligned}$$

из теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \rightarrow \\ & 0 \leq \angle(ABC) \ \& \ \angle(ABC) \leq \pi) \end{aligned}$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a < b \vee a = b \leftrightarrow a \leq b)$$

Начало приема совпадает с началом одного из рассмотренных ранее приемов. Для удобства повторим его.

Переменной x_8 присваивается набор конъюнктивных членов консеквента, переменной x_9 - набор антецедентов. Рассматривается заголовок x_{11} одного из утверждений списка x_8 . В нашем примере - "меньшеилиравно". Справочник поиска теорем "определение" определяет по x_{11} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{14} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере дополнительная теорема не изменяется. Проверяется, что теорема x_{14} - эквивалентность. Переменной x_{16} присваивается вхождение той части эквивалентности, которая имеет заголовок x_{11} . Другая часть x_{17} данной эквивалентности - дизъюнкция с двумя операндами. Переменной x_{18} присваивается подтерм по вхождению x_{16} , переменной x_{19} - список его параметров. Проверяется, что x_{19} содержит все переменные теоремы x_{14} . Переменной x_{20} присваивается набор дизъюнктивных членов дизъюнкции x_{17} . Рассматривается элементарное утверждение x_{21} списка x_{20} , отличное от равенства. В нашем случае - " $a < b$ ". Рассматривается также другое утверждение x_{22} списка x_{20} . В нашем случае - " $a = b$ ". Проверяется, что оно элементарно.

Переменной x_{23} присваивается копия списка x_8 , переменной x_{24} - копия списка x_9 . Вводится пустой накопитель x_{25} . Просматриваются элементы x_{27} списка x_{23} , имеющие заголовок x_{11} . Находится подстановка S вместо переменных x_{19} , унифицирующая термы x_{27} и x_{18} . К списку x_{24} присоединяется набор результатов применения S к антецедентам теоремы x_{14} . Находится результат x_{29} применения S к утверждению x_{21} . Проверяется, что он имеет невырожденный числовой атом. Находится результат x_{30} применения подстановки S к утверждению x_{22} . Отрицание x_{30} присоединяется к списку x_{24} и к списку x_{25} , а вхождение утверждения x_{27} в список x_{23} заменяется на x_{29} .

По окончании указанного цикла x_{24} оказывается состоящим из следующих утверждений: " A - точка", " B - точка", " C - точка", " $\neg(A = B)$ ", " $\neg(B = C)$ ", " 0 - число", " $\angle(ABC)$ - число", " $\neg(0 = \angle(ABC))$ ", " $\angle(ABC)$ - число", " π - число", " $\neg(\angle(ABC) = \pi)$ ". Список x_{23} преобразуется к следующему виду: " $0 < \angle(ABC)$ ", " $\angle(ABC) < \pi$ ". Список x_{25} состоит из утверждений " $\neg(0 = \angle(ABC))$ ", " $\neg(\angle(ABC) = \pi)$ ".

Дальше начинаются отличия. Переменной x_{26} присваивается результат присоединения к списку антецедентов теоремы x_{14} утверждения x_{21} . При помощи задачи на доказательство проверяется, что отрицание утверждения x_{22} является следствием утверждений x_{26} . Переменной x_{28} присваивается результат исключения из списка x_{24} утверждений списка x_{25} . Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения x_{28} , а условиями - утверждения x_{25} . Она имеет цели "редакция", "полный", "редуцирование", "прямойответ", "нормантецеденты". Переменной x_{30} присваивается ответ. В нашем случае -

" $\neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)) \ \& \ \neg(A = C)$ ". Проверяется, что x30 не содержит невырожденных числовых атомов. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списков x28 и x23, а консеквентом - x30. Она обрабатывается оператором "нормтеорема", после чего в списке вывода регистрируются все конъюнктивные члены результата. В нашем примере такой конъюнктивный член единственный.

2. Расшифровка членов консеквента в дизъюнкции и вывод условия, при котором имеет место дизъюнкция частных подслучаев.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \angle(ABC) = 0 \ \vee \ \angle(ABC) = \pi)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \rightarrow 0 \leq \angle(ABC) \ \& \ \angle(ABC) \leq \pi)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a < b \ \vee \ a = b \leftrightarrow a \leq b)$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего пункта, вплоть до момент формирования итоговой импликации. Далее предпринимаются следующие действия:

Переменной x31 присваивается результат добавления к списку x28 отрицания утверждения x30. Переменной x32 присваивается набор отрицаний утверждений списка x25. В нашем примере - пара утверждений " $0 = \angle(ABC)$ ", " $\angle(ABC) = \pi$ ". Проверяется, что все утверждения списка x32 - равенства. Находится такой невырожденный числовой атом x37, что он является одной из частей каждого равенства списка x32. Переменной x38 присваивается набор противоположных частей равенств списка x32. В нашем примере - " $0, \pi$ ". Переменной x39 присваивается результат обработки списка x31 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров утверждений x32. В нашем примере - " $A - \text{точка}$ ", " $B - \text{точка}$ ", " $\neg(A = B)$ ", " $\neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ C - \text{точка} \ \vee \ C = A$ ". Переменной x40 присваивается результат обработки процедурой "нормтеорема" импликации с антецедентами x39 и фиктивным консеквентом " $\text{набор}(x36 \ \text{набор}(x38))$ ". Такой консеквент позволяет проследить за изменением терма x36 и утверждений x38 в процессе стандартизации теоремы. В нашем примере дизъюнкция в антецеденте приводит к появлению конъюнкции из двух импликаций. Среди конъюнктивных членов утверждения x40 выбирается кванторная импликация x41. В нашем примере - " $\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow (\angle(ABC), (0, \pi)))$ ". Переменной x43 присваивается первый элемент набора в консеквенте, переменной x44 - набор разрядов второго элемента. Проверяется, что x43 не входит в x44. Переменной x45 присваивается дизъюнкция равенств выражения x43 выражениям набора x44. Наконец, итоговая теоремы формируется как результат замены консеквента теоремы x41 на дизъюнкцию x45.

3.42 Характеристика "коорд"

Характеристикой "коорд" снабжаются кванторные тождества для координат объектов.

Логические следствия теоремы

1. Отождествление всех пар соответствующих координат двух различных объектов, кроме одной такой пары.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCKbcdxy}(\neg(A = B) \& \text{коорд}(A, K) = (c, b) \& \text{коорд}(B, K) = (c, d) \& \text{коорд}(C, K) = (x, y) \& C \in \text{прямая}(AB) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow x = c)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCKabcdxy}(\neg(A = B) \& \text{коорд}(A, K) = (a, b) \& \text{коорд}(B, K) = (c, d) \& \text{коорд}(C, K) = (x, y) \& C \in \text{прямая}(AB) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow (c - a)(y - b) - (d - b)(x - a) = 0)$$

Переменной x_8 присваивается набор антецедентов, переменной x_{10} - консеквент. В наборе x_8 находится утверждение x_{12} , представляющее собой отрицание равенства переменной x_{14} переменной x_{15} . В нашем примере - " $\neg(A = B)$ ", причем x_{14} - A , x_{15} - B . В x_8 находится также равенство x_{16} выражения x_{18} с заголовком "набор" выражению x_{17} , заголовок x_{19} которого - название какого-либо типа координат, а первый операнд - x_{14} . В нашем примере x_{16} имеет вид " $\text{коорд}(A, K) = (a, b)$ ". Проверяется, что все переменные терма x_{18} входят в терм x_{10} . Переменной x_{20} присваивается набор корневых операндов терма x_{18} . В нашем случае - " a, b ". Проверяется, что эти операнды суть различные переменные. В x_8 находится еще одно равенство x_{21} выражения x_{23} с заголовком "набор" выражению x_{22} , имеющему заголовок x_{19} и первый операнд x_{15} . В нашем примере x_{21} имеет вид " $\text{коорд}(B, K) = (c, d)$ ". Проверяется, что все переменные терма x_{23} входят в терм x_{10} . Переменной x_{24} присваивается набор корневых операндов терма x_{23} . В нашем случае - " c, d ". Проверяется, что длины наборов x_{20} и x_{24} равны, причем x_{24} - набор различных переменных. В наборе x_{20} выбирается переменная x_{25} , в наборе x_{24} - находящаяся на соответствующей позиции переменная x_{26} . В нашем примере x_{25} - " b ", x_{26} - " d ". Переменной x_{29} присваивается набор результатов подстановки в антецеденты теоремы вместо отличных от x_{25} переменных набора x_{20} соответствующих переменных набора x_{24} . Переменной x_{30} присваивается результат такой же подстановки в утверждение x_{10} . Затем создается импликация с антецедентами x_{29} и консеквентом x_{30} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Склейка двух теорем

1. Склейка двух импликаций, отличающихся альтернативными антецедентами - усмотрение уникального заголовка.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{ABCDK} ab(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow b = 0)$

из теоремы

$\forall_{ABCDK} ab(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A \in \text{отрезок}(BD) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow b = 0)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABCDK} ab(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, D) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow b = 0)$

Переменной x_9 присваивается консеквент, переменной x_{10} - набор антецедентов. В списке вывода находится не имеющая в блоке вывода элемента "исключение" дополнительная теорема, отличная от исходной теоремы. Список ее антецедентов x_{14} имеет ту же длину, что и список x_{10} , а консеквент x_{15} - ту же длину, что и x_9 . Переменной x_{16} присваивается связывающая приставка исходной теоремы, переменной x_{17} - связывающая приставка дополнительной теоремы. Проверяется, что они имеют одну и ту же длину. В списке x_{14} находится утверждение x_{18} , заголовок которого отличен от заголовков утверждений списка x_{10} . В нашем примере x_{18} - "точкалуча(A, B, D)". Аналогично, в списке x_{10} находится утверждение x_{19} , заголовок которого отличен от заголовков утверждений списка x_{14} . В нашем примере - " $A \in \text{отрезок}(BD)$ ". Переменной x_{20} присваивается результат удаления утверждения x_{19} из списка x_{10} , переменной x_{21} - результат удаления x_{18} из списка x_{14} . Проверяется, что список x_{21} непуст. Переменной x_{22} присваивается список свободных переменных утверждений x_{20} . В нашем случае - " a, b, A, B, C, D, K ". Проверяется, что он содержит все переменные утверждений x_{20} . Проверяется также, что все параметры утверждения x_{19} входят в список x_{22} . Находится подстановка S вместо переменных x_{22} , переводящая конъюнкцию утверждений x_{20} в конъюнкцию утверждений x_{21} . В нашем случае эта подстановка не изменяет переменных. Переменной x_{24} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_{19} , переменной x_{25} - дизъюнкция утверждений x_{24} и x_{18} . В нашем примере - " $A \in \text{отрезок}(BD) \vee \text{точкалуча}(A, B, D)$ ". Переменной x_{26} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_9 . В нашем примере - " $b = 0$ ". Проверяется, что после стандартного переупорядочения операндов коммутативных символов x_{26} и x_{15} совпадают. При помощи задачи на доказательство проверяется, что утверждение x_{25} - следствие утверждений x_{21} . Затем создается итоговая импликация с антецедентами x_{20} и консеквентом x_9 . Как исходная, так и дополнительная теорема помечаются в своих блоках вывода символом "исключение". Новая теорема помечается элементом "обобщение".

2. Склейка двух импликаций, отличающихся альтернативными антецедентами - случай, не требующий переобозначения переменных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{abc} ABCDEFGHK(G - \text{точка} \ \& \ H - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C, D) \ \& \ E \in \text{плоскость}(ABC) \ \& \ \neg(E = G) \ \& \ \text{прямая}(EG) \parallel \text{прямая}(AB) \ \&$

$$G \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{прямая}(EH) \parallel \text{прямая}(AC) \ \& \ \neg(E = H) \ \& \ H \in \text{прямая}(AB) \\ \& \ \text{коорд}(E, K) = (a, b, c) \rightarrow c = 0$$

из теоремы

$$\forall_{abc} ABCDEFGHK (G - \text{точка} \ \& \ H - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C, D) \ \& \\ E \in \text{плоскость}(ABC) \ \& \ \neg(E = G) \ \& \ \text{прямая}(EG) \parallel \text{прямая}(AB) \ \& \\ G \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{прямая}(EH) \parallel \text{прямая}(AC) \ \& \ \neg(E = H) \ \& \ A \in \text{отрезок}(BH) \\ \& \ H \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{коорд}(E, K) = (a, b, c) \rightarrow c = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc} ABCDEFGHK (G - \text{точка} \ \& \ H - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C, D) \ \& \\ E \in \text{плоскость}(ABC) \ \& \ \neg(E = G) \ \& \ \text{прямая}(EG) \parallel \text{прямая}(AB) \ \& \\ G \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{прямая}(EH) \parallel \text{прямая}(AC) \ \& \ \neg(E = H) \ \& \\ \text{точкалуча}(A, B, H) \ \& \ H \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{коорд}(E, K) = (a, b, c) \rightarrow c = 0)$$

Этот прием похож на предыдущий, и может показаться, что он избыточный. Однако, он бывает необходим, если склеиваемые антецеденты не выделяются по уникальному заголовку.

Переменной x9 присваивается консеквент, переменной x10 - набор антецедентов. В списке вывода находится не имеющая в блоке вывода элемента "исключение" дополнительная теорема, отличная от исходной теоремы. Список ее антецедентов x14 имеет ту же длину, что и список x10, а консеквент x15 - ту же длину, что и x9. Переменной x16 присваивается связывающая приставка исходной теоремы, переменной x17 - связывающая приставка дополнительной теоремы. Проверяется, что они имеют одну и ту же длину. Переменной x18 присваивается разность списков x10 и x14. Проверяется, что она состоит из единственного утверждения P . Переменной x19 присваивается разность списков x14 и x10. Проверяется, что она тоже состоит из единственного утверждения Q . В нашем случае P имеет вид " $A \in \text{отрезок}(CG)$ ", Q - вид " $\text{точкалуча}(A, C, G)$ ". Переменной x20 присваивается пересечение списков x10 и x14. Проверяется, что оно непусто. Переменной x21 присваивается дизъюнкция утверждений P, Q . При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x21 - следствие утверждений x20. Затем создается итоговая импликация с антецедентами x20 и консеквентом x9. Как исходная, так и дополнительная теорема помечаются в своих блоках вывода символом "исключение". Новая теорема помечается элементом "обобщение".

3. Склейка двух теорем, отличающихся склеиваемыми антецедентами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefg} ABCDEK (\neg(g = E) \ \& \ K = (A, B, C, D) \ \& \ \text{коорд}(g, K) = (d, e, f) \ \& \\ \text{коорд}(E, K) = (a, b, c) \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(gE) \parallel \text{прямая}(AB) \ \& \\ \text{систкоорд}(K) \ \& \ g \in \text{плоскость}(ABC) \rightarrow b = e)$$

из теоремы

$$\forall_{abcdefg} ABCDEK (\neg(g = E) \ \& \ K = (A, B, C, D) \ \& \ \text{коорд}(g, K) = (d, e, f) \ \& \\ \text{коорд}(E, K) = (a, b, c) \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(gE) \parallel \text{прямая}(AB) \ \& \\ \text{однасторона}(g, C, \text{прямая}(AB)) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow b = e)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcdefgABCDEK}(\neg(g = E) \& K = (A, B, C, D) \& \text{коорд}(g, K) = (d, e, f) \& \text{коорд}(E, K) = (a, b, c) \& g - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \text{прямая}(gE) \parallel \text{прямая}(AB) \& \text{разныестороны}(C, g, \text{прямая}(AB)) \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow b = e)$$

Переменной x9 присваивается консеквент, переменной x10 - набор антецедентов. В списке вывода находится не имеющая в блоке вывода элемента "исключение" дополнительная теорема, отличная от исходной теоремы. Список ее антецедентов x13 имеет ту же длину, что и список x10, а консеквент совпадает с x9. Переменной x15 присваивается пересечение списков x10 и x13. Проверяется, что оно непусто. Проверяется, что разность списков x10 и x15 состоит из единственного утверждения P , а разность списков x13 и x15 - из единственного утверждения Q . В нашем примере P имеет вид "однасторона($g, C, \text{прямая}(AB)$)", а Q - вид "разныестороны($C, g, \text{прямая}(AB)$)". Переменной x18 присваивается дизъюнкция утверждений P, Q . Она обрабатывается нормализатором "нормили" относительно посылок x15. Проверяется, что результат x19 - элементарное утверждение. В нашем примере оно имеет вид " $g \in \text{плоскость}(ABC)$ ". Создается итоговая импликация, антецеденты которой получаются добавлением к списку x15 утверждения x19, а консеквент - x9. Как исходная, так и дополнительная теорема помечаются в своих блоках вывода символом "исключение". Новая теорема помечается элементом "обобщение".

Обобщение теоремы

1. Удаление избыточного отрицания в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{efghAK}(\text{коорд}(\text{вектор}(Ag), K) = (f, h) \& e - \text{число} \& g - \text{точка} \& A - \text{точка} \& 0 \leq e \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(e \cdot \text{вектор}(Ag), K) = (ef, eh))$$

из теоремы

$$\forall_{efghAK}(\neg(g = A) \& \text{коорд}(\text{вектор}(Ag), K) = (f, h) \& e - \text{число} \& g - \text{точка} \& A - \text{точка} \& 0 \leq e \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(e \cdot \text{вектор}(Ag), K) = (ef, eh))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - консеквент. Переменной x11 присваивается множество утверждений, формулирующих условия на о.д.з. для x10. В списке x8 находится утверждение x12 с заголовком "не", не входящее в x11. Проверяется, что x12 не используется для сопровождения по о.д.з. прочих антецедентов. В нашем примере x12 - " $\neg(g = A)$ ". Переменной x13 присваивается отрицание утверждения x12, переменной x14 - результат замены в наборе x8 утверждения x12 на x13. Решается задача на доказательство x10 из посылок x14. На период ее решения разрешается использовать уже имеющиеся в списке вывода теоремы, а также основанные на них приемы. В случае успеха формируется итоговая импликация, получающаяся из исходной теоремы удалением антецедента x12. Исходная теорема помечается в своем блоке вывода символом "исключение". Новая теорема помечается элементом "обобщение".

2. Первая повторная попытка удаления избыточного отрицания в антецедентах.

Предыдущий прием срабатывал на уровне 1. Иногда к этому моменту еще не выведены теоремы, необходимые для его срабатывания. Поэтому прием продублирован на уровне 6. В качестве примера его применения рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefgABCDEK}(\neg(g = E) \& K = (A, B, C, D) \& \text{коорд}(g, K) = (d, e, f) \& \text{коорд}(E, K) = (a, b, c) \& g\text{-точка} \& E\text{-точка} \& \text{прямая}(gE) \parallel \text{плоскость}(ABC) \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow c = f)$$

из теоремы

$$\forall_{abcdefgABCDEK}(\neg(g = E) \& \neg(E \in \text{плоскость}(ABC)) \& K = (A, B, C, D) \& \text{коорд}(g, K) = (d, e, f) \& \text{коорд}(E, K) = (a, b, c) \& g\text{-точка} \& E\text{-точка} \& \text{прямая}(gE) \parallel \text{плоскость}(ABC) \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow c = f)$$

Помимо уровня срабатывания, отличие от предыдущего пункта состоит лишь в том, что утверждения x12 просматриваются в порядке возрастания длин.

3. Попытка развязки переменной атомарного выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abefglmAK}(\text{коорд}(\text{вектор}(ab), K) = (l, m) \& \text{коорд}(\text{вектор}(Af), K) = (e, g) \& a\text{-точка} \& b\text{-точка} \& f\text{-точка} \& A\text{-точка} \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(ab) + \text{вектор}(Af), K) = (e + l, g + m))$$

из теоремы

$$\forall_{abefglmABK}(\text{коорд}(\text{вектор}(fB), K) = (l, m) \& \text{коорд}(\text{вектор}(Af), K) = (e, g) \& f\text{-точка} \& A\text{-точка} \& B\text{-точка} \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(fB) + \text{вектор}(Af), K) = (e + l, g + m))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A\text{-точка} \& B\text{-точка} \& C\text{-точка} \rightarrow \exists_D(D\text{-точка} \& \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(CD)))$$

Переменной x8 присваивается набор антецедентов. В консеквенте находится атомарное выражение, тип значения которого отличен от "число", "множество", "слово". Этот тип присваивается переменной x10. В нашем примере - "Вектор". Переменной x11 присваивается пара частей равенства в консеквенте, переменной x12 - список атомарных подвыражений левой части, имеющих тип x10. В нашем примере - "Вектор(fB)", "Вектор(Af)". Проверяется, что список x12 непуст. Проверяется, что правая часть не содержит атомарных подвыражений типа x10. В списке x12 выбирается выражение x13; заголовок его присваивается переменной x14. В нашем примере - выражение "вектор(fB)". Проверяется, что число корневых операндов выражения x13 равно 2 и что каждый операнд - переменная. Переменной x15 присваивается список этих переменных. Проверяется, что его длина равна 2, т.е. переменные различные. В списке

x_{15} выбирается переменная x_{16} , имеющая в левой части более одного вхождения. В нашем случае - f . Переменной x_{17} присваивается оставшаяся переменная списка x_{15} . В нашем случае - B . Проверяется, что она имеет единственное вхождение в левую часть. Справочник поиска теорем "незавгруппы" определяет по символу x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{20} присваивается результат переобозначения ее переменных на не входящие в исходную теорему. В нашем примере получаем:

$$\forall_{abc}(a\text{—точка} \ \& \ b\text{—точка} \ \& \ c\text{—точка} \ \rightarrow \ \exists_d(d\text{—точка} \ \& \ \text{вектор}(ab) = \text{вектор}(cd)))$$

Переменной x_{21} присваивается набор антецедентов теоремы x_{20} , переменной x_{22} - вхождение консеквента. Проверяется, что этот консеквент представляет собой квантор существования. Переменной x_{23} присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она состоит из единственной переменной x_{24} . Переменной x_{25} присваивается набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения. В нем выбирается равенство x_{26} . В нашем примере - "вектор(ab) = вектор(cd)". Переменной x_{27} присваивается пара частей этого равенства. В ней выбирается утверждение x_{28} , содержащее переменную x_{24} . Для нашего примера - "вектор(cd)". Переменной x_{29} присваивается список параметров термина x_{28} . Проверяется, что он имеет длину 2. Переменной x_{30} присваивается элемент этого списка, отличный от x_{24} . В нашем случае - " c ". Определяется подстановка S вместо переменных x_{29} , унифицирующая термины x_{13} и x_{28} . Переменной x_{32} присваивается терм, подставляемый ею вместо x_{30} . В нашем примере - " f ". Проверяется, что этот терм совпадает с переменной x_{16} . Переменной x_{34} присваивается конкатенация списка антецедентов исходной теоремы и списка результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_{20} . Переменной x_{36} присваивается элемент списка x_{27} , отличный от x_{28} . В нашем случае - "вектор(ab)". Переменной x_{39} присваивается результат замены в консеквенте исходной теоремы всех вхождений выражения x_{13} на терм x_{36} . В нашем примере - "коорд(вектор(ab) + вектор(Af), K) = ($e + l$, $g + m$)". Такая же замена предпринимается во всех утверждениях списка x_{34} . Затем создается импликация с антецедентами x_{34} и консеквентом x_{39} . Она обрабатывается нормализатором "нормтеорема".

4. Попытка исключения переменной, не используемой для описания координат.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcABCDEK}(\neg(E \in \text{прямая}(AC)) \ \& \ K = (A, B, C, D) \ \& \ \text{коорд}(E, K) = (a, b, c) \ \& \ E \in \text{плоскость}(ACD) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow a = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abcABCDEGK}(G \text{—точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ E \in \text{плоскость}(ACD) \ \& \ \neg(E = G) \ \& \ \text{прямая}(EG) \parallel \text{прямая}(AD) \ \& \ G \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{коорд}(E, K) = (a, b, c) \rightarrow a = 0)$$

Переменной x_8 присваивается набор антецедентов, переменной x_{10} - консеквент, переменной x_{11} - параметры консеквента. Переменной x_{12} присваивается список параметров антецедентов, не входящих в список x_{11} . В нашем примере

он состоит из единственной переменной G . Выбирается переменная x_{13} списка x_{12} . В нашем случае - G . Набор x_8 разбивается на набор x_{14} всех утверждений, содержащих переменную G , и набор x_{15} остальных утверждений. В нашем случае x_{14} - " G - точка", " $\neg(G = E)$ ", " $\text{прямая}(EG) \parallel \text{прямая}(AD)$ ", " $G \in \text{прямая}(AC)$ ". Решается задача на описание с посылками x_{15} и условиями x_{14} . Цели ее - "полный", "прямойответ", "явное", "неизвестные x_{13} ", "параметры x_{13} ", "исключ". Проверяется, что ответ x_{17} отличен от символа "отказ" и не содержит переменной x_{13} . В нашем примере - " $\neg(E \in \text{прямая}(AC))$ ". Создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к списку x_{15} конъюнктивных членов утверждения x_{17} , а консеквент равен x_{10} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Использование задачи на описание для получения новой теоремы

1. Разрешение координат объекта, встречающегося в антецедентах, относительно координат объекта, заданных в консеквенте.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abefABK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (e, f) \rightarrow \text{коорд}(B, K) = (a + e, b + f))$$

из теоремы

$$\forall_{ABKabcd}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (c - a, d - b))$$

Переменной x_9 присваивается консеквент, переменной x_{10} - набор антецедентов. Одна из частей равенства x_9 имеет заголовок "набор". Переменной x_{13} присваивается набор операндов этого набора. В нашем примере - " $c - a$ " и " $d - b$ ". Переменной x_{14} присваивается противоположная часть равенства x_9 . Проверяется, что ее заголовком служит название каких-либо координат. В антецедентах находится равенство x_{15} , в одной из частей которого расположен символ "набор". Переменной x_{19} присваивается набор операндов этого набора, переменной x_{18} - противоположная часть равенства x_{15} . Проверяется, что она имеет тот же заголовок, что и x_{14} . Проверяется, что элементы набора x_{19} суть различные переменные, а длина его равна длине набора x_{13} . Переменной x_{20} присваивается набор не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине набора x_{13} . В нашем случае берутся переменные e, f . Переменной x_{21} присваивается набор параметров термов набора x_{19} . В нашем примере - " c, d ". Переменной x_{22} присваивается список всех не содержащих переменных x_{21} антецедентов. Переменной x_{23} присваивается равенство терма x_{14} набору x_{20} . В нашем примере - " $\text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (e, f)$ ". Переменной x_{24} присваивается результат добавления равенства x_{23} к списку x_{22} . Переменной x_{25} присваивается набор равенств термов набора x_{13} соответствующим переменным набора x_{20} . В нашем случае x_{24} состоит из утверждений " $\text{систкоорд}(K)$ ", " A - точка", " B - точка", " $\text{коорд}(A, K) = (a, b)$ ", " $\text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (e, f)$ ". Список x_{25} состоит из утверждений " $c - a = e, d - b = f$ ". Решается задача на описание с посылками x_{24} и условиями x_{25} . Она имеет цели "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{21} ". Ответ присваивается переменной x_{27} . В нашем случае он имеет вид " $c = a + e \ \& \ d = b + f$ ". Переменной x_{28} присваивается набор

конъюнктивных членов утверждения x27. Переменной x29 присваивается набор правых частей равенств списка x28, определяющих значения переменных x19. В нашем случае - набор " $a + e, b + f$ ". Переменной x30 присваивается равенство выражения x18 набору x29. В нашем примере - " $\text{коорд}(B, K) = (a + e, b + f)$ ". Переменной x31 присваивается результат замены в наборе x10 равенства x15 на утверждение x23. Затем создается итоговая импликация с антецедентами x31 и консеквентом x30.

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Попытка исключить дополнительные параметры антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefgABCDEK}(\neg(g = E) \& \neg(g \in \text{плоскость}(ABC)) \& \neg(E \in \text{плоскость}(ABC)) \\ \& \neg(\text{прямая}(gE) \parallel \text{прямая}(AD)) \& K = (A, B, C, D) \& \text{коорд}(g, K) = (d, e, f) \\ \& \text{коорд}(E, K) = (a, b, c) \& g - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \text{прямая}(gE) \parallel \\ \text{плоскость}(ACD) \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow a = d)$$

из теоремы

$$\forall_{abcdefghABCDEFK}(\neg(g = h) \& \neg(h = F) \& \neg(E = F) \& K = (A, B, C, D) \& \\ \text{коорд}(g, K) = (d, e, f) \& \text{коорд}(E, K) = (a, b, c) \& g - \text{точка} \& h - \text{точка} \& \\ E - \text{точка} \& F - \text{точка} \& \text{прямая}(gh) \parallel \text{прямая}(AD) \& \text{прямая}(gh) \parallel \text{прямая}(EF) \\ \& \text{прямая}(hF) \parallel \text{прямая}(AC) \& \text{систкоорд}(K) \& h \in \text{плоскость}(ABC) \rightarrow a = d)$$

Переменной x9 присваивается консеквент, переменной x10 - набор антецедентов. Теорема имеет характеристику "равно". Среди антецедентов выбирается равенство x11 выражения x12 с заголовком x14, являющимся названием каких-либо координат, некоторому набору. Первый операнд выражения x12 - переменная x15, второй - переменная x16. В нашем примере x11 имеет вид " $\text{коорд}(g, K) = (d, e, f)$ ". x15 - переменная g , x16 - переменная K . Переменной x17 присваивается список параметров терма x11. Если имеется антецедент - равенство с переменной x16 в одной части, то список x17 пополняется параметрами этого равенства. Просматриваются отличные от x11 равенства, у которых в одной части находится терм с заголовком x14, а в другой - набор, и x17 пополняется также и их параметрами. В нашем примере x17 оказывается состоящим из переменных $d, e, f, g, K, A, B, C, D, a, b, c, E$. Переменной x18 присваиваются параметры антецедентов, не вошедшие в список x17. В нашем случае - h, F . Проверяется, что список x18 непуст. Решается задача на исследование, посылками которой служат утверждения x10. Она имеет цели "антецеденты", "неизвестные X", "усиление", "исключ x18". Здесь X - все параметры антецедентов. После решения проверяется, что переменные x18 не встречаются среди параметров посылок задачи. Переменной x23 присваивается список всех ее посылок, не имеющих заголовка "актив". Затем создается импликация с антецедентами x23 и консеквентом x9. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Замена переменных в теореме

1. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ae f K}(\text{коорд}(a, K) = (e, f) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(a) \rightarrow \text{коорд}(-a, K) = (-e, -f))$$

из теоремы

$$\forall_{ef ABK}(\text{коорд}(\text{вектор}(BA), K) = (e, f) \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(-\text{вектор}(BA), K) = (-e, -f))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$$

Переменной x_8 присваивается набор антецедентов. В консеквенте выбирается вхождение x_{10} атомарного подвыражения x_{11} . В нашем примере - "вектор(BA)". Переменной x_{12} присваивается список параметров этого подвыражения. Проверяется, что каждый элемент списка x_{12} встречается в консеквенте и существенных антецедентах только внутри подтерма, равного x_{11} . Переменной x_{14} присваивается заголовок выражения x_{11} , переменной x_{16} - тип его значения. В нашем случае - "Вектор". Справочник поиска теорем "парамописание" находит по x_{16} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{17} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере получаем:

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{bc}(b\text{-точка} \ \& \ c\text{-точка} \ \& \ a = \text{вектор}(bc)))$$

Переменной x_{20} присваивается вхождение консеквента импликации x_{17} . Проверяется, что первый операнд этой эквивалентности имеет заголовок x_{16} , а второй - квантор существования x_{21} . Переменной x_{22} присваивается набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Проверяется, что первый операнд первого операнда эквивалентности - переменная; она присваивается переменной x_{23} . В нашем случае это " a ". Среди утверждений x_{23} находится равенство x_{24} переменной x_{23} терму x_{25} , имеющему заголовок x_{14} . Переменной x_{26} присваивается список параметров терма x_{25} . В нашем примере x_{25} - "вектор(bc)". Проверяется, что все переменные списка x_{26} принадлежат связывающей приставке квантора существования. Усматривается, что терм x_{11} является результатом применения подстановки S вместо переменных x_{26} в терм x_{25} . Переменной x_{28} присваивается набор результатов применения этой подстановки ко всем отличным от x_{24} элементам набора x_{22} . В нашем примере - пара утверждений " B - точка", " A - точка". Переменной x_{29} присваивается список всех таких антецедентов исходной теоремы, в которых имеется переменная списка x_{12} , не расположенная внутри подтерма, равного x_{11} . В нашем примере - пара утверждений " A - точка", " B - точка". Переменной x_{30} присваивается конкатенация списка x_8 с отброшенными утверждениями x_{29} , и списка x_{28} . В нашем примере результат состоит из тех же утверждений, что и список x_8 . Проверяется, что каждое утверждение списка x_{29} усматривается проверочными операторами из списка x_{30} . Определяется результат K замены в консеквенте исходной теоремы всех вхождений подтерма x_{11} на переменную x_{23} , а также результат M такой же замены во всех утверждениях списка x_8 , не вошедших в x_{29} . Затем создается итоговая импликация, антецеденты которой получены добавлением к M левой части эквивалентности x_{20} , а консеквент - K .

Реализация антецедента

1. Антецедент выражает координатный набор, в котором используется далее лишь одна координата. Предпринимается попытка найти теорему, определяющую эту координату из качественных соображений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ghijklrABK}(K = (j, k, l, r) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (g, h, i) \ \& \\ A \in \text{плоскость}(jkr) \ \& \ B \in \text{плоскость}(jkr) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \\ \text{систкоорд}(K) \rightarrow h = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{defghimnpqABK}(K = (m, n, p, q) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (d, e, f) \ \& \\ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (g, h, i) \ \& \ A \in \text{плоскость}(mnq) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \\ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow h = e)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDEKabc}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C, D) \ \& \ \text{коорд}(E, K) = (a, b, c) \ \& \\ E \in \text{плоскость}(ABD) \rightarrow b = 0)$$

Переменной x_9 присваивается консеквент, переменной x_{10} - набор антецедентов. Проверяется, что x_9 - равенство. В списке x_{10} находится равенство x_{11} выражения x_{12} , заголовком которого служит название x_{14} каких-либо координат, набору x_{13} . Проверяется, что первый операнд выражения x_{12} - переменная. В нашем примере x_{11} - равенство "коорд(B, K) = (d, e, f)". Проверяется существование в наборе x_{10} равенства набору координат x_{14} некоторого неоднобуквенного терма. В нашем случае - координат вектора AB . Переменной x_{15} присваивается набор корневых операндов терма x_{13} . В нашем случае - " d ", " e ", " f ". Проверяется, что эти операнды суть различные переменные. Переменной x_{17} присваивается переменная списка x_{15} , входящая в консеквент. В нашем примере - " e ". Проверяется, что остальные переменные списка x_{15} не входят в консеквент и в отличные от x_{11} антецеденты. Просматриваются теоремы того раздела, к которому относится символ x_{14} . В нашем примере - раздела "системыкоординат". В качестве дополнительной выбирается та, которая имеет характеристики "констнорм" и "коорд". Переменной x_{24} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не встречающиеся в исходной теореме. Для нашего примера получаем следующую теорему:

$$\forall_{jklrstabc}(\text{систкоорд}(t) \ \& \ t = (j, k, l, r) \ \& \ \text{коорд}(s, t) = (a, b, c) \ \& \\ s \in \text{плоскость}(jkr) \rightarrow b = 0)$$

Переменной x_{25} присваивается набор антецедентов теоремы x_{24} . Среди них выбирается равенство x_{26} выражения x_{27} с заголовком x_{14} некоторому набору x_{28} . В нашем примере - равенство "коорд(s, t) = (a, b, c)". Переменной x_{29} присваивается набор корневых операндов терма x_{28} . Проверяется, что x_{29} - список однобуквенных слов, образованных различными переменными, а длина его равна длине списка x_{15} . Переменной x_{30} присваивается список переменных, соответствующих словам набора x_{29} . Переменной x_{31} присваивается консеквент теоремы x_{24} . Проверяется, что он представляет собой равенство, левая часть

которого - переменная x_{32} из набора x_{30} . Проверяется, что каждая отличная от x_{32} переменная списка x_{30} не входит в консеквент x_{31} и в отличные от x_{26} antecedentes списка x_{25} . Проверяется, что переменная x_{32} находится в списке x_{30} на позиции с тем же номером, что переменная x_{17} в списке x_{15} . Переменной x_{33} присваивается список свободных переменных равенства x_{26} . Проверяется, что x_{11} - результат применения к терму x_{26} некоторой подстановки S вместо переменных x_{33} . Определяется результат x_{35} применения этой подстановки к консеквенту x_{31} . В нашем примере - " $e = 0$ ". Переменной x_{36} присваивается правая часть равенства x_{35} , и далее находится результат подстановки ее вместо переменной x_{17} в терм x_9 . В нашем случае - " $h = 0$ ". Переменной x_{38} присваивается объединение списка x_{10} , у которого отброшен элемент x_{11} , с набор результатов применения подстановки S к отличным от x_{26} термам списка x_{25} . Создается импликация с antecedентами x_{38} и консеквентом x_{37} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

3.43 Характеристика "координаты"

Характеристикой "координаты" снабжаются кванторные импликации с квантором существования в консеквенте, дающим общий вид уравнения для координат множества объектов.

Использование вспомогательной задачи на описание

1. Фиксация уравнения множества точек, если известны координаты некоторой его точки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acdefgjkqrstwz} (\neg(j = k) \ \& \ \neg(w = z) \ \& \ t = (q, r, s) \ \& \ \text{коорд}(a, t) = (c, g) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(jk), t) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0 \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число}) \ \& \ a \in \text{прямая}(wz) \ \& \ w \in \text{плоскость}(qrs) \ \& \ z \in \text{плоскость}(qrs) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ j - \text{точка} \ \& \ k - \text{точка} \ \& \ w - \text{точка} \ \& \ z - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(jk) \parallel \text{прямая}(wz) \ \& \ \text{систкоорд}(t) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(wz), t) = \text{set}_{np}(dn + ep - cd - eg = 0 \ \& \ n - \text{число} \ \& \ p - \text{число}))$$

из теоремы

$$\forall_{defjkqrstwz} (\neg(j = k) \ \& \ \neg(w = z) \ \& \ t = (q, r, s) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(jk), t) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0 \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число}) \ \& \ w \in \text{плоскость}(qrs) \ \& \ z \in \text{плоскость}(qrs) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ j - \text{точка} \ \& \ k - \text{точка} \ \& \ w - \text{точка} \ \& \ z - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(jk) \parallel \text{прямая}(wz) \ \& \ \text{систкоорд}(t) \rightarrow \exists_b(\text{коорд}(\text{прямая}(wz), t) = \text{set}_{np}(b + dn + ep = 0 \ \& \ n - \text{число} \ \& \ p - \text{число}) \ \& \ b - \text{число}))$$

Переменной x_8 присваивается набор antecedентов, переменной x_9 - вхождение консеквента. Проверяется, что заголовок консеквента - квантор существования. Переменной x_{10} присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она состоит из единственной переменной X . Переменной x_{11} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. В нем выбирается равенство x_{12} выражения x_{13} , имеющего своим заголовком x_{15} название каких-либо координат, выражению x_{14} с заголовком

"класс". В нашем примере $x12$ - "коорд(прямая(wz), t) = $\text{set}_{np}(b + dn + ep = 0 \ \& \ n - \text{число} \ \& \ p - \text{число})$ ". Переменной $x16$ присваивается первый операнд терма $x13$, переменной $x17$ - связывающая приставка описателя "класс". В нашем случае $x13$ - "коорд(прямая(wz), t)", $x17$ - переменные n, p . Переменной $x18$ присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему, длина которого на единицу больше длины списка $x17$. В нашем примере - переменные a, c, g . Переменной $x19$ присваивается первая переменная списка $x18$, переменной $x20$ - остальные переменные этого списка. Переменной $x21$ присваивается результат добавления к списку антецедентов $x8$ утверждений "принадлежит($x19 \ x16$)", "равно($x15(x19 \ R) \ \text{набор}(x20)$)". В нашем примере эти утверждения суть " $a \in \text{прямая}(wz)$ ", "коорд(a, t) = (c, g)". Переменной $x22$ присваивается последний операнд описателя "класс". В нашем случае - утверждение " $b + dn + ep = 0 \ \& \ n - \text{число} \ \& \ p - \text{число}$ ". Определяется результат $x23$ замены переменных $x17$ в терме $x22$ на переменные $x20$. В нашем случае - " $b + dc + eg = 0 \ \& \ c - \text{число} \ \& \ g - \text{число}$ ". Переменной $x24$ присваивается объединение списка $x11$, в котором удалено утверждение $x12$, с набором конъюнктивных членов утверждения $x23$. Переменной $x25$ присваивается подсписок списка $x24$, образованный утверждениями, содержащими переменную X , переменной $x26$ - остальная часть списка $x24$. Переменной $x27$ присваивается результат объединения списков $x21$ и $x27$. Затем решается задача на описание, посылками которой служат утверждения $x27$, а условиями - утверждения $x25$. Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "равно", "неизвестные X ". В нашем случае список $x27$ состоит из утверждений " $\neg(j = k)$ ", " $\neg(w = z)$ ", " $(q, r, s) = t$ ", "коорд(прямая(jk), t) = $\text{set}_{uv}(f + du + ev = 0 \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число})$ ", " $w \in \text{плоскость}(qrs)$ ", " $z \in \text{плоскость}(qrs)$ ", " $d - \text{число}$ ", " $e - \text{число}$ ", " $f - \text{число}$ ", " $j - \text{точка}$ ", " $k - \text{точка}$ ", " $w - \text{точка}$ ", " $z - \text{точка}$ ", "прямая(jk) \parallel прямая(wz)", "систкоорд(t)", " $a \in \text{прямая}(wz)$ ", "коорд(a, t) = (c, g)", " $c - \text{число}$ ", " $g - \text{число}$ ". Список $x25$ содержит утверждения " $b - \text{число}$ ", " $b + dc + eg = 0$ ". Ответ задачи на описание присваивается переменной $x29$. В нашем случае он имеет вид " $b = -(cd + eg)$ ". Проверяется, что данный ответ отличен от символа "отказ", и переменной $x30$ присваивается набор его конъюнктивных членов. Среди них находится равенство с переменной X в левой части. Правая часть равенства присваивается переменной $x32$. Просматриваются отличные от $x12$ элементы E списка $x11$. Проверяется, что результаты подстановки выражения $x32$ вместо переменной X в эти элементы суть следствия утверждений $x21$. После этого определяется результат $x33$ подстановки выражения $x32$ вместо переменной X в равенство $x12$, и создается импликация, антецеденты которой суть утверждения $x21$, а консеквент - $x33$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

2. Попытка перейти от параметрического описания класса к непосредственному.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abce}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \neg(c^2 + e^2 = 0) \rightarrow \\ \text{set}_{xy}(be + cx - ac - ey = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + et \ \& \\ y = b + ct \ \& \ t - \text{число}))$$

из теоремы

$$\forall_{ABK}(\neg(A = B) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow$$

$\exists_{abce}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(\exists t(x = a + et \ \& \ y = b + ct \ \& \ t - \text{число})) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число}))$

Переменной x8 присваивается набор антецедентов, переменной x9 - вхождение консеквента. Проверяется, что по этому вхождению расположен квантор существования. Переменной x10 присваивается его связывающая приставка, переменной x11 - набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения. В списке x11 находится равенство выражения x13, заголовком которого служит название каких-либо координат, выражению x14 с заголовком "класс". Переменной x15 присваивается связывающая приставка описателя "класс", переменной x16 - вхождение его последнего операнда. Проверяется, что по вхождению x16 расположен квантор существования. Переменной x17 присваивается его связывающая приставка, переменной x18 - набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Переменной x19 присваивается результат объединения списка x8 с утверждениями списка x11, отличными от x12. Проверяется, что он непуст. Решается задача на описание с посылками x19 и условиями x18. Цели ее - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x17", "параметры x17". В нашем примере список x19 состоит из утверждений " $\neg(A = B)$ ", " $A - \text{точка}$ ", " $B - \text{точка}$ ", " $\text{систкоорд}(K)$ ", " $a - \text{число}$ ", " $b - \text{число}$ ", " $c - \text{число}$ ", " $e - \text{число}$ ". В списке x18 находятся утверждения " $a + et = x$ ", " $y = b + ct$ ", " $t - \text{число}$ ". Переменной x21 присваивается отличный от символа "отказ" ответ задачи. В нашем случае он имеет вид:

$x - \text{число} \ \& \ (\neg(c = 0) \ \& \ e(y - b)/c = x - a \ \& \ y - \text{число} \ \& \ (y - b)/c - \text{число} \ \vee \ (\neg(e = 0) \ \vee \ e = 0 \ \& \ x - a = 0) \ \& \ c = 0 \ \& \ y = b)$

Переменной x22 присваивается набор дизъюнктивных членов результата приведения утверждения x21 к виду дизъюнктивной нормальной формы. В нашем примере он состоит из утверждений " $x - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ e(y - b)/c = x - a \ \& \ y - \text{число} \ \& \ (y - b)/c - \text{число}$ ", " $x - \text{число} \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ c = 0 \ \& \ y = b$ ", " $x - \text{число} \ \& \ e = 0 \ \& \ x - a = 0 \ \& \ c = 0 \ \& \ y = b$ ". Переменной x23 присваивается набор пар (список конъюнктивных членов элемента списка x22, не содержащих переменных x15 - список остальных его конъюнктивных членов). Напомним, что в нашем примере x15 - пара " x, y ". Пары (P, Q) списка x23 просматриваются, и для каждой из них предпринимается попытка упрощения выражения "класс(x15 Q)". Посылками при этом служат утверждения x19, дополненные утверждениями P . В итоге x23 оказывается состоящим из следующих пар: " $(\neg(c = 0); \text{set}_{xy}(be + cx - ac - ey = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$ ", " $(\neg(e = 0), c = 0; \text{set}_{xy}(y = b \ \& \ x - \text{число}))$ ", " $(e = 0, c = 0; \text{set}_{xy}(y = b \ \& \ x - a = 0 \ \& \ x - \text{число}))$ ".

Далее реализуется цикл попыток поглотить частные случаи набора x23 более общими. Просматриваются пары набора x23. Если некоторая такая пара (P, Q) имеет в списке P равенство $x = t$ переменной x не содержащему ее выражению t , то ищется такая другая пара (P', Q') , у которой P' не имеет равенств, причем усматривается, что равенство $Q = Q'$ является следствием посылок x19, дополненных равенством $x = t$. После этого предпринимается упрощение дизъюнкции $P \vee P'$ относительно посылок x19 и замена первого элемента пары (P', Q') на результат упрощения. Пара (P, Q) из списка x23 исключается.

В нашем примере после указанной расчистки набор x23 имеет всего две пары -

" $(\neg(c = 0) \vee \neg(e = 0); \text{set}_{xy}(be + cx - ac - ey = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$ " и " $(e = 0, c = 0; \text{set}_{xy}(y = b \ \& \ x - a = 0 \ \& \ x - \text{число}))$ ".

Переменной x24 присваивается какая-либо из пар набора x23. В нашем примере - первая пара. Переменной x25 присваивается объединение списка x19 с утверждениями первого элемента пары x24. Переменной x26 присваивается равенство выражения x14 (исходного параметрического описания) второму элементу пары x24. Переменной x27 присваивается результат обработки списка x25 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x26. Затем переменной x29 присваивается результат упрощения терма x26 относительно посылок x27. Наконец, формируется итоговая импликация с антецедентами x27 и консеквентом x29.

Обобщение теоремы

1. Обозначение новым уникальным параметром операции с уникальным параметром.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABK}(\neg(A = B) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \\ \exists_{abce}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + et \ \& \ y = b + ct \ \& \ t - \text{число})) \ \& \\ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число}))$$

из теоремы

$$\forall_{ABK}(\neg(A = B) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \\ \exists_{abde}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + et \ \& \ y = b + t(d - b) \ \& \\ t - \text{число})) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число}))$$

Переменной x8 присваивается набор антецедентов, переменной x9 - вхождение консеквента. Проверяется, что по этому вхождению расположен квантор существования. Переменной x10 присваивается его связывающая приставка, переменной x11 - набор конъюнктивных членов утверждения под квантором. Выбирается элемент x12 списка x10. В нашем случае - переменная d . Переменной x13 присваивается список всех утверждений набора x11, содержащих переменную x12 и имеющих длину более 2. Проверяется, что x13 состоит из единственного утверждения x14. В нашем примере - из утверждения "коорд(прямая(AB), K) = $\text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + et \ \& \ y = b + t(d - b) \ \& \ t - \text{число}))$ ". Проверяется, что вхождение переменной x12 в терм x14 единственное. Переменной x15 присваивается это вхождение. Оно является корневым операндом выражения x18. В нашем примере - выражения " $d - b$ ". Выбирается переменная x19, не входящая в теорему. В нашем случае - переменная c . Переменной x20 присваивается тип значения выражения x18. В нашем случае - "число". Переменной x21 присваивается утверждение " $x20(x19)$ ". В нашем случае - " $c - \text{число}$ ". Затем переменной x23 присваивается объединение списка антецедентов теоремы с утверждениями списка x11, не содержащими переменной x12, и с утверждением x21. Переменной x24 присваивается список отличных от x14 и содержащих переменную x12 утверждений набора 11, к которому добавляется равенство выражения x18 переменной x19. Решается задача на описание с посылками x23 и условиями x24. Цели ее - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x12", "равно". В

нашем примере список x23 состоит из утверждений " $\neg(A = B)$ ", " A – точка", " B – точка", "систкоорд(K)", " a – число", " b – число", " e – число", " c – число". Список x24 состоит из утверждений " d – число", " $d - b = c$ ". Отличный от символа "отказ" ответ на задачу присваивается переменной x26. В нашем случае он имеет вид " $d = b + c$ ". Переменной x27 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x26. В нем выбирается равенство переменной x12 выражению x29. Переменной x30 присваивается остаток набора x27. Переменной x31 присваивается список результатов подстановки в утверждения набора x11 выражения x29 вместо переменной x12. Переменной x32 присваивается объединение списков x31 и x30, к которому добавлено утверждение x21. Переменной x33 присваивается результат навешивания на конъюнкцию утверждений x32 квантора существования по переменным списка x10, в котором x12 заменено на x19. Затем создается импликация с антецедентами x8 и консеквентом x33. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Замена переменных в теореме

1. Использование явного параметрического описания рассматриваемых объектов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ghijBCK}(\neg(B = C) \ \& \ \text{коорд}(g, K) = (h, i, j) \ \& \ g \in \text{прямая}(BC) \ \& \ B \text{ – точка} \ \& \ C \text{ – точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \exists_{def}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{xyz}(x \text{ – число} \ \& \ y \text{ – число} \ \& \ z \text{ – число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (x - h, y - i, z - j))) \ \& \ d \text{ – число} \ \& \ e \text{ – число} \ \& \ f \text{ – число}))$$

из теоремы

$$\forall_{ghijKP}(\text{коорд}(g, K) = (h, i, j) \ \& \ g \in P \ \& \ \text{Прямая}(P) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \exists_{def}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xyz}(x \text{ – число} \ \& \ y \text{ – число} \ \& \ z \text{ – число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (x - h, y - i, z - j))) \ \& \ d \text{ – число} \ \& \ e \text{ – число} \ \& \ f \text{ – число}))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_A(\text{Прямая}(A) \leftrightarrow \exists_{BC}(B \text{ – точка} \ \& \ C \text{ – точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A = \text{прямая}(BC)))$$

Переменной x8 присваивается набор антецедентов. В нем выбирается утверждение x9 длины 2. Переменной x10 присваивается его заголовок, переменной x11 - первый операнд, являющийся переменной. В нашем примере x9 - утверждение "Прямая(P)". Справочник поиска теорем "парамопоисаниe" находит по символу x10 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x14 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере он совпадает с самой дополнительной теоремой. Переменной x16 присваивается входение той части консеквента теоремы x14, которая имеет заголовок x10. Переменной x18 присваивается первый операнд этой части. В нашем примере - переменная A . Проверяется, что противоположная часть x17 консеквента теоремы x14 имеет заголовок "существует". Переменной x19 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. В нем находится равенство x20 переменной x18 некоторому выражению x23. В нашем примере оно имеет вид " $\text{прямая}(BC)$ ".

Переменной x_{24} присваивается результат подстановки в консеквент исходной теоремы выражения x_{23} вместо переменной x_{11} . В нашем примере он имеет вид:

$$\exists_{def}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (x - h, y - i, z - j))) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число})$$

Переменной x_{25} присваивается набор антецедентов теоремы x_{14} . Проверяется, что он не содержит переменной x_{18} . Переменной x_{26} присваивается набор результатов подстановки в отличные от x_9 элементы набора x_8 выражения x_{23} вместо переменной x_{11} . В нашем случае - набор "коорд(g, K) = (h, i, j)", " $g \in \text{прямая}(BC)$ ", "Трехмерн(K)". Создается импликация, антецеденты которой суть элементы наборов x_{26} , x_{25} и отличные от x_{20} элементы набора x_{19} . Консеквентом служит утверждение x_{24} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема".

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Попытка рассмотреть координаты еще одного элемента множества и исключить с их помощью часть параметров уравнения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcghijkK}(\neg(a = g) \ \& \ \text{коорд}(a, K) = (b, c, k) \ \& \ \text{коорд}(g, K) = (h, i, j) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(ag), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((b - h, c - i, k - j), (x - h, y - i, z - j))))$$

из теоремы

$$\forall_{ghijKP}(\text{коорд}(g, K) = (h, i, j) \ \& \ g \in P \ \& \ \text{Прямая}(P) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \exists_{def}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (x - h, y - i, z - j))) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число}))$$

Переменной x_8 присваивается набор антецедентов теоремы, переменной x_9 - вхождение консеквента. Проверяется, что по этому вхождению расположен квантор существования. Переменной x_{10} присваивается его связывающая приставка, переменной x_{11} - набор конъюнктивных членов утверждения под квантором. В списке x_{11} находится равенство x_{12} выражения x_{13} , заголовком которого служит название каких-либо координат, выражению x_{14} с заголовком "класс". В нашем примере равенство x_{12} имеет вид

$$\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (x - h, y - i, z - j)))$$

Проверяется, что утверждение под описателем "класс" не имеет заголовка "существует". Переменной x_{15} присваивается связывающая приставка описателя "класс". Переменной x_{17} присваивается первый операнд выражения x_{13} . Проверяется, что x_{17} - переменная. В нашем случае она равна " P ". Переменной x_{18} присваивается список всех антецедентов, имеющих вид принадлежности множеству x_{17} . В нашем случае - " $g \in P$ ". Проверяется, что этот список непуст.

Переменной x19 присваивается список первых операндов этих отношений принадлежности. Проверяется, что все его элементы - переменные. В нашем примере x19 состоит из переменной "g". Переменной x20 присваивается заголовок выражения x13 (название координат). В нашем примере - "коорд". Переменной x21 присваивается набор всех равенств в антецедентах, определяющих координаты x20 переменных списка x19 относительно той же системы координат, что и в выражении x13. В нашем примере x21 состоит из единственного равенства "коорд(g, K) = (h, i, j)". Проверяется, что для каждого элемента набора x19 такое равенство нашлось, т.е. длины наборов x19 и x21 равны. Выбирается переменная x22, не входящая в исходную теорему. В нашем случае - "a". Переменной x23 присваивается набор отрицаний равенств переменной x22 переменным списка x19. В нашем случае - " $\neg(a = g)$ ". Переменной x24 присваивается набор переменных, отличных от x22 и не входящих в исходную теорему, длина которого равна длине списка x15. В нашем примере x24 состоит из переменных "b, c, k". Переменной x25 присваивается равенство координат x20 переменной x22 в системе координат из выражения x13 набору переменных x24. В нашем примере - "коорд(a, K) = (b, c, k)". Переменной x26 присваивается объединение списка антецедентов теоремы со списками x11, x23 и с утверждением о принадлежности переменной x22 множеству x17. В нашем примере x26 состоит из следующих утверждений:

"коорд(g, K) = (h, i, j)", "g ∈ P", "Прямая(P)", "Трехмерн(K)", " $\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0)$ ", "коорд(P, K) = set_{xyz}(x - число & y - число & z - число & пропорцнаборы((d, e, f), (x - h, y - i, z - j)))", "d - число", "e - число", "f - число", " $\neg(a = g)$ ", "a ∈ P", "коорд(a, K) = (b, c, k)".

Решается задача на исследование, имеющая список посылок x26 и цели "известно", "исключ x10", "неизвестные X", где X - все параметры утверждений x26. В нашем примере x10 - "d, e, f". После решения этой задачи в ее списке посылок находится равенство x29 координат x20 некоторому выражению x30 с заголовком "класс". В нашем случае это равенство имеет вид:

коорд(прямая(ag), K) = set_{xyz}(x - число & y - число & z - число & пропорцнаборы((b - h, c - i, k - j), (x - h, y - i, z - j))).

Переменной x32 присваивается пересечение списка параметров выражения x30 со списком x10, переменной x33 - пересечение списка параметров подтерма x14 с тем же списком x10. В нашем примере x32 - пустой список, x33 - d, e, f. Проверяется, что x32 - собственное подмножество x33. Переменной x34 присваивается результат замены в списке x11 равенства x12 на x29. Переменной x35 присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x10 на конъюнкцию утверждений x34. Переменной x36 присваивается объединение списков x8 и x23 с условием принадлежности x22 множеству x17, а также со всевозможными утверждениями из списка посылок решавшейся задачи на исследование, указывающими тип значения переменных x19 и x22. Переменной x37 присваивается результат обработки списка x36 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x35. Создается импликация с антецедентами x37 и консеквентом x35, которая обрабатывается оператором "нормтеорема".

3.44 Характеристика "крд"

Характеристикой "крд(x1)" снабжаются тождества, в заменяемой части которых расположено выражение для отдельной координаты объекта. x1 - направление замены.

Упрощение выражения для объекта, координата которого рассматривается

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \text{вправо}(\text{вектор}(cd), e) \ \& \ \text{Трехмерн}(e) \rightarrow \text{крд}(d, e, 2) = \text{крд}(c, e, 2))$$

из теоремы

$$\forall_{aK}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{вправо}(a, K) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{крд}(a, K, 2) = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABKi}(A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \ \& \ i \in \{1, 2, 3\} \rightarrow \text{крд}(\text{вектор}(AB), K, i) = \text{крд}(B, K, i) - \text{крд}(A, K, i))$$

Переменной x9 присваивается набор антецедентов, переменной x11 - вхождение заменяемой части консеквента. Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. В нашем примере - "крд". Справочник поиска теорем "компоненты" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Процедура "тождвывод" находит результат x17 преобразования подтерма x11 при помощи дополнительной теоремы. Он обрабатывается процедурой "нормтеорема".

3.45 Характеристика "Крд"

Характеристикой "Крд" снабжаются кванторные импликации, консеквент которых - конъюнкция неравенств либо отрицаний равенств для параметров координат.

Логические следствия теоремы

1. Вывод импликации для контроля противоречий при разборе случаев.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{BCK}(\neg(B = C) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{ложь})$$

из теоремы

$$\forall_{abcBCK}(\neg(B = C) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \neg(a^2 + b^2 = 0))$$

Переменной x8 присваивается набор антецедентов, переменной x9 - вхождение консеквента. Проверяется, что этот консеквент - отрицание равенства x10. Переменной x11 присваивается список параметров терма x10. Решается задача на описание, список посылок которой - набор x8, а единственное условие -

равенство x_{10} . Задача имеет цели "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "равно", "неизвестные x_{11} ". Проверяется, что ответ x_{13} отличен от символа "отказ". В нашем примере он имеет вид " $b = 0 \ \& \ a = 0$ ". Создается импликация, antecedentes которой - утверждения x_8 и x_{13} , а консеквент - терм "фикс(ложь)". Она обрабатывается оператором "нормтеорема". Здесь техническая метка "фикс" блокирует приемы, устраняющие константу "ложь" в консеквенте. Среди конъюнктивных членов результата выбирается кванторная импликация x_{15} , консеквент которой имеет заголовок "фикс". Итоговая теорема получается заменой консеквента импликации x_{15} на символ "ложь".

2. Вывод частного случая при занулении члена уравнения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acKP}(\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{Прямая}(P) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \neg(a = 0))$$

из теоремы

$$\forall_{abcKP}(\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{Прямая}(P) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \neg(a^2 + b^2 = 0))$$

Вывод теоремы для частного случая уравнения полезен здесь из-за того, что он требует процедуры идентификации, отличной от общего случая.

Переменной x_8 присваивается набор antecedентов, переменной x_9 - консеквент. Проверяется, что терм x_9 имеет не менее двух параметров. Среди antecedентов находится равенство x_{10} , в левой части которого расположены какие-либо координаты, а в правой - описатель "класс". В нашем примере - " $\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число})$ ". Переменной x_{12} присваивается набор утверждений под описателем "класс". В нашем случае - " $c + ax + by = 0$ ", " $x - \text{число}$ ", " $y - \text{число}$ ". В этом наборе находится равенство x_{13} . Переменной x_{14} присваивается параметр этого равенства, являющийся также параметром всего термина x_{10} . В нашем примере - переменная b . Проверяется, что она является свободной переменной консеквента и что вхождение x_{14} в x_{10} единственное. Переменной x_{15} присваивается вхождение переменной x_{14} в терм x_{13} . Рассматривается вхождение x_{16} операции x_{17} , которому x_{15} подчинено. В нашем примере x_{16} - вхождение суммы $c + ax + by$. Справочник "единица" выдает для символа x_{17} единичное значение E (в нашем случае - ноль). Находится такой операнд x_{19} операции x_{16} , которому подчинено x_{15} . Проверяется, что он отличен от x_{15} . В нашем примере x_{19} - вхождение операции by . Проверяется существование такого отличного от x_{19} операнда операции x_{16} , параметры которого пересекаются со связывающей приставкой описателя "класс". Проверяется, что операция x_{16} имеет единицу E именно по операнду x_{19} . Переменной x_{20} присваивается результат удаления из списка x_8 равенства x_{10} . Переменной x_{21} присваивается набор всех содержащих переменную x_{14} элементов списка x_{20} , переменной x_{22} - набор остальных элементов этого списка. Переменной x_{23} присваивается результат добавления к списку x_{21} равенства подтерма x_{19} единице E . В нашем примере набор x_{22} состоит из утверждений " $a - \text{число}$ ", " $c - \text{число}$ ", " $\text{Прямая}(P)$ ", " $\text{систкоорд}(K)$ ". Список x_{23} состоит из утверждений " $b - \text{число}$ ", " $by = 0$ ". Затем решается задача на описание, посылками

которой служат утверждения x22, а условиями - утверждения x23. Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "упростить", "неизвестные x14". Переменной x25 присваивается отличный от символа "отказ" ответ данной задачи. В нашем примере - " $\neg(y = 0) \& b = 0 \vee y = 0) \& b$ - число". Переменной x26 присваивается набор дизъюнктивных членов результата приведения утверждения x25 к виду дизъюнктивной нормальной формы. В нашем случае - " $\neg(y = 0) \& b = 0 \& b$ - число", " $y = 0 \& b$ - число". Выбирается элемент x27 набора x26. В нашем примере - первый элемент. Среди его конъюнктивных членов находится равенство x28 с переменной x14 в левой части. В нашем случае - " $b = 0$ ". Проверяется, что в правой его части расположено константное выражение. Затем создается импликация, полученная из исходной теоремы добавлением равенства x28 к антецедентам. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Замена переменных в теореме

1. Использование явного параметрического описания рассматриваемых объектов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcBCK}(\neg(B = C) \& \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \& x - \text{число} \& y - \text{число}) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow \neg(a^2 + b^2 = 0))$$

из теоремы

$$\forall_{abcKP}(\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \& x - \text{число} \& y - \text{число}) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& \text{Прямая}(P) \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow \neg(a^2 + b^2 = 0))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_A(\text{Прямая}(A) \leftrightarrow \exists_{BC}(B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \neg(B = C) \& A = \text{прямая}(BC)))$$

Переменной x8 присваивается набор антецедентов теоремы. В наборе x8 выбирается утверждение x9 длины 2. В нашем примере - "Прямая(P)". Его заголовок присваивается переменной x10; корневой операнд, представляющий собой переменную, присваивается переменной x11. Проверяется, что x11 не встречается в консеквенте. Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по символу x10 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x14 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем случае переобозначение не требуется. Переменной x15 присваивается входжение консеквента теоремы x14. Переменной x16 присваивается входжение той части эквивалентности x15, которая имеет заголовок x10, переменной x17 - входжение другой части. Проверяется, что корневой операнд терма x16 - переменная. Она присваивается переменной x18. В нашем случае - A. Проверяется, что по входжению x17 расположен квантор существования. Переменной x19 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под этим квантором. В нем находится равенство x20 переменной x18 некоторому выражению x23. В нашем примере x23 - "прямая(BC)". Переменной x24 присваивается набор антецедентов теоремы x14. Проверяется, что x18 в них не встречается. Переменной x25 присваивается

набор результатов подстановки в отличные от x9 элементы набора x8 выражения x23 вместо переменной x11. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения наборов x24 и x25, а также отличные от x20 элементы набора x19. Консеквентом тот же, что у исходной теоремы. Эта импликация обрабатывается процедурой "нормтеорема".

Попытка использования дополнительной эквивалентности для преобразования консеквента

1. Усмотрение в консеквенте отрицания конъюнкции подобных утверждений и использование дополнительной эквивалентности для их одновременной декомпозиции с вынесением наружу общей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcghijklKP}(\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((g + x, a + y, b + z), (ch, ci, cj))) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ \text{Прямая}(P) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \neg(c = 0))$$

из теоремы

$$\forall_{abdefgKP}(\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (g + x, a + y, b + z))) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ \text{Прямая}(P) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0)$$

Переменной x8 присваивается набор антецедентов, переменной x9 - консеквент. Проверяется, что он имеет не менее двух параметров, причем заголовок его - отрицание. Переменной x10 присваивается утверждение под этим отрицанием. Проверяется, что список x8 непуст, и решается задача на преобразование с посылками x8 и условием x10. Единственная ее цель - "упростить". Ответ присваивается переменной x12. В нашем примере это " $d = 0 \ \& \ e = 0 \ \& \ f = 0$ ". Проверяется, что утверждение x12 имеет заголовок "и", и переменной x13 присваивается набор его конъюнктивных членов. Проверяется, что утверждения x13 элементарны и имеет не пересекающиеся друг с другом списки переменных. Переменной x14 присваивается первое утверждение списка x13. В нашем случае - " $d = 0$ ". Просматриваются остальные утверждения U списка x13, и проверяется, что x14 получается подстановкой в U некоторых переменных Y вместо параметров X утверждения U . Создается накопитель x15 всевозможных таких пар (X, Y) .

Переменной x16 присваивается заголовок утверждения x14 В нашем случае - символ "равно". Справочник поиска теорем "упрощдн" определяет по x16 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается результат переобозначения переменных этой теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере получаем теорему:

$$\forall_{ch}(c - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \rightarrow ch = 0 \leftrightarrow c = 0 \vee h = 0)$$

Переменной x_{20} присваивается вхождение консеквента теоремы x_{19} . Проверяется, что по этому вхождению расположена эквивалентность. Переменной x_{22} присваивается вхождение той части эквивалентности, которая представляет собой дизъюнкцию, переменной x_{23} - противоположная часть. В нашем примере x_{23} - " $ch = 0$ ". Проверяется, что x_{23} содержит все переменные теоремы x_{19} . Переменной x_{24} присваивается список параметров терма x_{14} , и находится подстановка S вместо переменных x_{24} , унифицирующая термы x_{14} и x_{23} . В нашем примере она подставляет ch вместо d . Переменной x_{25} присваивается набор термов, подставляемых подстановкой S вместо переменных x_{24} . Выбирается операнд x_{27} дизъюнкции x_{22} . В нашем примере - " $c = 0$ ". Переменной x_{28} присваивается список параметров терма x_{27} . Проверяется, что он непуст. Переменной x_{29} присваиваются параметры дизъюнкции x_{22} , переменной x_{30} - разность списков x_{29} и x_{28} . В нашем примере она состоит из единственной переменной h . Проверяется, что список x_{30} непуст. Переменной x_{31} присваивается объединенный список переменных исходной теоремы и теоремы x_{19} , переменной x_{32} - список антецедентов теоремы x_{19} .

Переменным x_{33} , x_{34} присваиваются списки x_{24} и x_{25} , определяющие унифицирующую подстановку S . Эти списки будут доопределяться в процессе просмотра пар x_{35} набора x_{15} до некоторой новой подстановки. Для очередной пары x_{35} выбирается список x_{36} переменных, не входящих в набор x_{31} и имеющий такую же длину, как набор x_{30} . Переменной x_{37} присваивается список результатов применения унифицирующей подстановки S к термам (фактически - переменным) второго элемента пары x_{35} , а переменной x_{38} - список результатов подстановки переменных x_{36} вместо x_{30} в термы набора x_{37} . Затем к концу списка x_{33} добавляется набор переменных, являющийся первым элементом пары x_{35} , а к концу списка x_{34} - набор термов x_{38} . Новые переменные x_{36} регистрируются в списке x_{31} . К утверждениям набора x_{32} применяется подстановка переменных x_{36} вместо переменных x_{30} , и полученные утверждения заносятся в список x_{32} .

В нашем примере x_{32} оказывается состоящим из утверждений " c - число", " h - число", " i - число", " j - число". Список x_{33} состоит из переменных d, e, f , список x_{34} - из выражений " ch ", " ci ", " cj ". Переменной x_{35} присваивается результат объединения списка x_{32} с набором результатов подстановки термов x_{34} вместо переменных x_{33} в антецеденты исходной теоремы. Затем создается импликация с антецедентами x_{35} , консеквентом которой служит отрицание утверждения x_{27} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Использование дополнительного тождества для преобразования уравнения

1. Зануление члена уравнения множества объектов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcgijKP}(\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((g + x, a + y, b + z), (0, ci, cj))) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \&$$

c – число & g – число & i – число & j – число & Прямая(P) & Трехмерн(K) \rightarrow
 $\neg(c = 0)$

из теоремы

$\forall_{abcghi jKP}$ (коорд(P, K) = set $_{xyz}(x$ – число & y – число & z – число & пропорцнаборы($(g + x, a + y, b + z), (ch, ci, cj)$)) & a – число & b – число & c – число & g – число & h – число & i – число & j – число & Прямая(P) & Трехмерн(K) $\rightarrow \neg(c = 0)$)

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a$ – число $\rightarrow a \cdot 0 = 0)$

Рассматривается вхождение х8 антецедента, представляющего собой равенство, первый операнд которого - какие-либо координаты, а второй - описатель "класс". В нашем примере это первый антецедент. Переменной х11 присваивается описатель - второй операнд равенства, переменной х12 - результат добавления к связывающей приставке описателя всех его параметров, имеющих в нем более одного вхождения. В нашем примере х12 - x, y, z, c . Проверяется, что некоторый параметр консеквента имеет более одного вхождения в терм х11. Рассматривается вхождение х13 в описатель "класс" символа операции х14. В нашем случае - вхождение термина "ch". Справочник поиска теорем "констнабор" определяет по х14 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "нормализация(N)". Процедура "тождвывод" определяет результат х22 преобразования вхождения х13 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы, применяемой в направлении N . Этой процедуре передается установка (фикс х12), блокирующая подстановку вместо переменных списка х12. Переменной х23 присваивается результат обработки теоремы х22 оператором "нормтеорема". Проверяется, что х23 - кванторная импликация, имеющая среди своих антецедентов равенство описателю "класс", в который некоторый параметр консеквента входит более одного раза. Тогда теорема х23 регистрируется в списке вывода.

3.46 Характеристика "легковидеть"

Характеристикой "легковидеть($x1$ $x2$)" снабжаются простые импликации, которые можно использовать в проверочном операторе с заголовком х1, причем х2-й антецедент импликации идентифицируется с посылкой, а остальные антецеденты обрабатываются проверочными операторами.

Логические следствия теоремы

1. Контрапозиция для получения импликации, используемой в проверочном операторе.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{ab}(a$ – set & b – set & $b \subseteq a$ & $\neg(\text{конечное}(b)) \rightarrow \neg(\text{конечное}(a))$)

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ b \subseteq a \rightarrow \text{конечное}(b))$$

Переменной x8 присваивается набор antecedентов, переменной x9 - консеквент. Выбирается antecedент x10, и переменной x11 присваивается его отрицание. В нашем примере x10 - "конечное(a)". При помощи справочника "легковидеть" устанавливается существование проверочного оператора, усматривающего истинность утверждений вида x11. В нашем случае - оператор "усмнеконечное". Создается итоговая импликация, полученная заменой antecedента x10 на отрицание консеквента, а консеквента - на утверждение x11.

2. Группировка в левых частях всех ненулевых членов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcf}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 \leq f - a \ \& \ 0 \leq c + \min(a, b) \rightarrow 0 \leq c + \min(b, f))$$

из теоремы

$$\forall_{abcf}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ a \leq f \ \& \ c \leq \min(a, b) \rightarrow c \leq \min(b, f))$$

Переменной x8 присваивается набор antecedентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается результат группировки ненулевых членов в левых частях всех двуместных отношений, допускающих перегруппировку членов из одной части в другую. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{abcf}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ a - f \leq 0 \ \& \ c - \min(a, b) \leq 0 \rightarrow c - \min(b, f) \leq 0)$$

Проверяется, что импликация x10 отлична от исходной теоремы, после чего она последовательно обрабатывается операторами "нормтеорема", "исключотр", "Полныепосылки" и снова "нормтеорема". Напомним, что оператор "исключотр" выполняет исключение в консеквенте отрицаний тех переменных, которые входят в него только под отрицанием.

Варьирование antecedента

1. Развязка по транзитивности antecedента простой импликации, используемой в проверочном операторе.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acefy}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ y \in a \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ \text{образ}(f, a) \subseteq e \ \& \ \text{непересек}(c, e) \rightarrow \neg(f(y) \in c))$$

из теоремы

$$\forall_{abfy}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{непересек}(b, \text{образ}(f, a)) \ \& \ y \in a \rightarrow \neg(f(y) \in b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ d \subseteq e \ \& \ \text{непересек}(a, e) \rightarrow \text{непересек}(a, d))$$

Переменной x_8 присваивается набор антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Проверяется отсутствие антецедента, имеющего более трех параметров. Переменной x_{10} присваивается список параметров консеквента. Выбирается антецедент x_{11} , список параметров x_{12} которого не включается в список x_{10} . В нашем примере - антецедент "непересек(b , образ(f , a))". Переменной x_{13} присваивается пересечение списков x_{12} и x_{10} . В нашем случае - b, f . Проверяется, что длина набора x_{13} не менее 2. Переменной x_{14} присваивается вхождение антецедента x_{11} в теорему. Переменной x_{15} присваивается заголовок антецедента x_{11} , с отбрасыванием корневого отрицания, если оно есть. Справочник поиска теорем "транзитпереход" определяет по символу x_{15} указанную выше дополнительную теорему. Процедура "выводпосылки" определяет результат x_{18} реализации антецедента x_{14} при помощи дополнительной теоремы. Этой процедуре передается установка (разбиение x_{13}), указывающая, что переменные антецедентов дополнительной теоремы после унификации должны обеспечивать разбиение набора переменных x_{13} . В нашем примере x_{18} имеет вид:

$$\forall_{acefy}(a\text{-set} \ \& \ c\text{-set} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f\text{-функция} \ \& \ y \in a \ \& \ c\text{-set} \ \& \ \text{образ}(f, a)\text{-set} \ \& \ e\text{-set} \ \& \ \text{образ}(f, a) \subseteq e \ \& \ \text{непересек}(c, e) \rightarrow \neg(f(y) \in c))$$

Переменной x_{19} присваивается результат обработки теоремы x_{18} оператором "Спускоперандов". В нашем примере теорема x_{18} не изменяется. Проверяется, что консеквент x_{20} теоремы x_{19} - элементарное утверждение. Переменной x_{22} присваивается результат обработки антецедентов теоремы x_{19} оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x_{20} . Проверяется, что истинность консеквента относительно утверждений x_{22} проверочными операторами не усматривается. Тогда создается итоговая импликация с антецедентами x_{26} и консеквентом x_{20} .

2. Попытка реализации антецедента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a\text{-set} \ \& \ \text{непересек}(a, b) \ \& \ b\text{-set} \ \& \ c\text{-set} \rightarrow \text{непересек}(a, b \setminus c))$$

из теоремы

$$\forall_{ade}(a\text{-set} \ \& \ d\text{-set} \ \& \ e\text{-set} \ \& \ d \subseteq e \ \& \ \text{непересек}(a, e) \rightarrow \text{непересек}(a, d))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b\text{-set} \ \& \ c\text{-set} \rightarrow b \setminus c \subseteq b)$$

Переменной x_8 присваивается набор антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Выбирается существенный антецедент x_{12} , каждый параметр которого входит либо в консеквент, либо в другой существенный антецедент. В нашем примере - " $d \subseteq e$ ". Проверяется, что x_{12} не имеет подтерма вида $f(\dots)$ где f - переменная. Переменной x_{14} присваивается заголовок антецедента x_{12} , с отбрасыванием корневого отрицания, если оно имеется. Справочники поиска теорем "пример", "свойства" перечисляют по x_{14} возможные дополнительные теоремы. В нашем примере дополнительная теорема указана выше. Процедура "выводпосылки" находит результат x_{17} реализации антецедента x_{12} при помощи дополнительной теоремы. В нашем случае он имеет вид:

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b \setminus c - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, b) \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \rightarrow \ \text{непересек}(a, b \setminus c))$$

Переменной x18 присваивается результат обработки теоремы x17 оператором "Спускоперандов". В нашем примере этот оператор ничего не изменяет. Переменной x19 присваивается консеквент теоремы x18. Проверяется, что он является элементарным утверждением. Переменной x20 присваивается набор антецедентов теоремы x18. При разблокировке всех приемов решателя выполняется обращение к процедуре "нормантецеденты" для набора x20 относительно параметров утверждения x19. Результат присваивается переменной x21. В нашем примере он состоит из утверждений " $a - \text{set}$ ", " $\text{непересек}(a, b)$ ", " $b - \text{set}$ ", " $c - \text{set}$ ". Проверяется, что в списке x21 нет равенств и что все его параметры включаются в параметры терма x19. Все корневые операнды терма x19 (если он имеет заголовок "не", то - все корневые операнды его корневого операнда) обрабатываются оператором "норм" относительно списка посылок x21. Результат снова присваивается переменной x19. Проверяется, что проверочные операторы не усматривают истинность x19 из посылок x21. Тогда создается итоговая импликация с антецедентами x21 и консеквентом x19.

3. Варьирование непосредственно идентифицируемого антецедента продукции проверочного оператора: разнесение двух ненулевых членов по разным частям двуместного отношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(0 < c - e \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \leq e \ \rightarrow \ 0 < c - d)$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(0 < c - e \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e - d \ \rightarrow \ 0 < c - d)$$

Просматриваются вхождения в теорему двуместных предикатных символов s , для которых справочник "перегруппировка" дает ненулевой результат (A, B, C) . Он означает, что возможна перегруппировка A - членов операндов отношения s из одной части в другую с изменением знака B , причем C - единица операции A . Если s - равенство, то справочник "перегруппировка" применяется к типу значения частей равенства. Составляется список x8 пар (вхождение символа s - тройка (A, B, C)) для тех вхождений отношений s , у которых одна из частей равна C . В нашем случае x8 связано с вхождениями $0 < c - e$, $0 \leq e - d$, $0 < c - d$. Проверяется, что x8 не пусто. Выбирается существенный антецедент x11, представленный в списке x8. В нашем примере - антецедент $0 \leq e - d$. Переменной x13 присваивается сопровождающая его тройка (A, B, C) . В нашем случае - (плюс, минус, 0). Находится отличный от C корневой операнд антецедента x11. Проверяется, что он имеет заголовок A ; число его операндов равно 2, причем один из них имеет заголовок B , а другой - не имеет. Затем операнд с заголовком B переносится в противоположную часть. Результат такого преобразования теоремы регистрируется в списке вывода.

4. Попытка исключения подвыражения антецедента, имеющего более одного параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ c \subseteq b \ \& \ \text{конечное}(b \setminus a) \rightarrow \text{конечное}(c \setminus a))$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ c \subseteq d \cup e \ \& \ \text{конечное}(e) \rightarrow \text{конечное}(c \setminus d))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ce}(c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow (c \cap e) \cup (e \setminus c) = e)$$

Рассматривается вхождение x_8 некоторого антецедента; в нем выбирается вхождение x_9 неоднобуквенного подвыражения, имеющего более одного параметра. Переменной x_{10} присваивается заголовок этого подвыражения. В нашем примере x_8 - вхождение " $c \subseteq d \cup e$ ", x_9 - вхождение " $d \cup e$ ". Проверяется, что в других антецедентах нет подвыражений, имеющих более одного параметра. Справочники поиска теорем "исклпараметр", "конствхожд" определяют по символу x_{10} указанную выше дополнительную теорему. Рассматривается ее характеристика "нормализация(N)". Оператор "тождвывод" определяет результат x_{16} преобразования вхождения x_9 исходной теоремы при помощи дополнительной теоремы, применяемой в направлении N . В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{abc}(c - \text{set} \ \& \ (a \cap b) - \text{set} \ \& \ (b \setminus a) - \text{set} \ \& \ c \subseteq b \ \& \ \text{конечное}(b \setminus a) \ \& \ a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \text{конечное}(c \setminus (a \cap b)))$$

Переменной x_{18} присваивается результат обработки процедурой "нормантецеденты" списка антецедентов теоремы x_{16} относительно параметров ее консеквента. В нашем случае получаются утверждения " $c - \text{set}$ ", " $c \subseteq b$ ", " $\text{конечное}(b \setminus a)$ ", " $a - \text{set}$ ", " $b - \text{set}$ ". Переменной x_{20} присваивается результат упрощения консеквента теоремы x_{16} относительно утверждений x_{18} задачей на преобразование. В нашем случае он имеет вид " $\text{конечное}(c \setminus a)$ ". Проверяется, что терм x_{20} отличен от константы "истина" и имеет не более трех параметров. Если он имеет меньше параметров, чем имел консеквент теоремы x_{16} , то список x_{18} повторно обрабатывается процедурой "нормантецеденты", но уже относительно меньшего списка параметров терма x_{20} . Затем создается импликация с антецедентами x_{18} и консеквентом x_{20} , которая обрабатывается оператором "Нормтеорема". Этому оператору передается комментарий "отрл".

Варьирование консеквента

1. Варьирование консеквента импликации, используемой для проверочного оператора, при помощи стандартизирующей эквивалентности двух элементарных неповторных утверждений либо перегруппировочной эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq b \ \& \ \neg(a = \emptyset) \rightarrow \neg(b = \emptyset))$$

из теоремы

$$\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ a \subseteq d \ \& \ \neg(a \subseteq e) \rightarrow \neg(d \subseteq e))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \rightarrow a = \emptyset \leftrightarrow a \subseteq \emptyset)$$

Переменной x9 присваивается консеквент, переменной x10 - список всех входящих в x9 заголовков утверждений. В нашем примере - "не", "содержится". Переменной x11 присваивается список пар (теорема - ее характеристики), найденных справочниками поиска теорем "упрощэkv", "перестановки" для символов списка x10. Справочник "перестановки" используется лишь в том случае, когда исходная теорема - первая в списке вывода. Если исходная теорема была получена описываемым приемом, то в список x11 отбираются только теоремы, имеющие единственную переменную.

После составления списка x11 выбирается вхождение x12 некоторой логического символа x13 списка x10 в консеквент теоремы. В нашем примере - вхождение подтерма $d \subseteq e$. Выбирается пара списка x11, и в качестве дополнительной теоремы берется ее первый элемент. Процедура "тождвывод" определяет результат x19 преобразования вхождения x12 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Процедуре передается указатель "модификатор". В нашем примере x19 имеет вид:

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \emptyset - \text{set} \ \& \ a \subseteq b \ \& \ \neg(a \subseteq \emptyset) \rightarrow \neg(b = \emptyset))$$

Переменной x20 присваивается результат последовательной обработки теоремы x19 процедурами "Спускоперандов" и "демодификация". В нашем примере он совпадает с теоремой x19. Переменной x21 присваивается набор антецедентов результата обработки теоремы x20 процедурой "Полныепосылки". В нашем примере получаем набор антецедентов теоремы x19. Переменной x22 присваивается результат обработки процедурой "норм" консеквента теоремы x20 относительно посылок x21. В нашем примере снова получается консеквент теоремы x19. Переменной x23 присваивается результат обработки процедурой "нормантецеденты" списка x21 относительно параметров терма x22. В нашем примере получается список " $a - \text{set}$ ", " $b - \text{set}$ ", " $a \subseteq b$ ", " $\neg(a \subseteq \emptyset)$ ". Проверяется, что все элементы списка x23 суть элементарные утверждения, причем ни один из них не имеет вида равенства переменной не содержащему ее терму. Корневые операнды терма x22 (с отбрасыванием внешнего отрицания, если оно есть) обрабатываются процедурой "норм" относительно посылок x23. Проверяется, что проверочные операторы не усматривают, что x22 - следствие x23. Тогда создается итоговая импликация с антецедентами x23 и консеквентом x22. Перед регистрацией ее в списке вывода проверяется отсутствие в ней сдвоенных переменных, встречающихся только вместе, причем под одной и той же ассоциативно-коммутативной операцией.

Попытка частичной свертки импликации, используемой в проверочном операторе

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{af}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \text{прообраз}(f, a) \subseteq \text{Dom}(f))$$

из теоремы

$$\forall_{afx}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ \neg(x \in \text{Dom}(f)) \rightarrow \neg(x \in \text{прообраз}(f, a)))$$

Проверяется, что консеквент является элементарным утверждением. Затем решается задача на преобразование, имеющая единственную посылку "истина". Ее условием служит исходная теорема. Цели задачи - "упростить", "свертка", "редуцирование". Проверяется, что ответ х9 имеет более короткую связывающую приставку, чем исходная теорема. Затем он регистрируется в списке вывода. В нашем примере попытка кванторной свертки привела к усмотрению отношения включения.

3.47 Характеристика "неизвестная"

Характеристикой "неизвестная(х1)" снабжаются кванторные импликации, которые могут быть использованы для подбора значения неизвестной х1.

Обобщение теоремы

1. Обобщение импликации для подбора корня уравнения: выделение невырожденного неконстантного известного подвыражения и замена его на новый параметр.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(b\text{—число} \ \& \ \neg(b=0) \ \& \ d\text{—число} \ \& \ c = -d/(3b)+b \rightarrow cd+c^3 = -d^3/(27b^3)+b^3)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a\text{—число} \ \& \ b\text{—число} \ \& \ c = a + b \rightarrow -3abc + c^3 = a^3 + b^3)$$

Заметим, что указанный переход является одним из звеньев цепочки, приводящей к формуле Кардано. В этой цепочке он применяется восемь раз.

Переменной х8 присваивается переменная, указанная в характеристике. В нашем примере - переменная с. Переменной х9 присваивается консеквент теоремы, переменной х10 - набор антецедентов.

Прежде всего, предпринимаются попытки при помощи справочника "замена-знака" переместить одноместные операции вглубь подтермов консеквента так, чтобы они оказались расположены над термами, не содержащими переменной х8. В нашем примере минус перемещается к сомножителю а, так что х9 приводится к виду " $3(-a)bc + c^3 = a^3 + b^3$ ".

Вводится пустой накопитель х11, и предпринимается просмотр вхождений х12 в терм х9 таких подтермов х13, которые не содержат х8, имеют непустой список параметров, причем являются операндами такой операции либо такого отношения х14, которое содержит х8. Если символ х16 по вхождению х14 не ассоциативен либо не коммутативен, то в х11 заносится пара (х12, х13). Иначе рассматривается список х18 всех не содержащих х8 операндов операции х14, и переменной х19 присваивается результат соединения их операцией х16. Если терм х19 - не переменная и имеет непустой список параметров, то в х11 заносится тройка (х14 А х19), где А - результат соединения операцией х16 всех содержащих х8 операндов операции х14. В нашем примере х11 содержит тройку $(v_1, c, 3(-a)b)$, где v_1 - вхождение подтерма " $3(-a)bc$ ", и пару $(v_2, a^3 + b^3)$.

Выбирается элемент х12 набора х11. В нашем случае - указанная выше тройка. Переменной х13 присваивается последний разряд набора х12. В нашем случае -

" $3(-a)b$ ". Предпочтение при выборе элемента x_{12} отдается такому, у которого терм x_{13} неповторный, а при прочих равных обстоятельствах - тому, у которого терм x_{13} короче. Переменной x_{14} присваивается список таких параметров терма x_{13} , которые внутри x_9 не являются операндами более чем одноместных операций либо отношений R , таких, что все прочие операнды R содержат x_8 . В нашем примере x_{14} состоит из переменных a, b . В списке x_{14} выбирается переменная x_{15} . В нашем примере - a . Предпочтение отдается переменной, имеющей в терме x_{13} единственное вхождение. Переменной x_{17} присваивается тип значения операции - заголовка терма x_{13} . В нашем примере - "число". Выбирается переменная x_{18} , не входящая в исходную теорему. В нашем случае - d . Переменной x_{19} присваивается список всех антецедентов теоремы, не имеющих отличных от x_{15} параметров. В нашем примере - " a - число". Переменной x_{20} присваивается результат добавления к x_{19} утверждений " $\text{равно}(x_{18} x_{13})$ " и " $x_{17}(x_{18})$ ". В нашем случае - добавления утверждений " $d = 3(-a)b$ " и " d - число". Переменной x_{21} присваивается список всех антецедентов, не содержащих переменной x_8 и не входящих в список x_{19} . Проверяется, что он непуст. В нашем случае он содержит единственное утверждение " b - число". Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения x_{21} , а условиями - утверждения x_{20} . Задача имеет цели "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "или", "неизвестные x_{15} ". Ее ответ присваивается переменной x_{23} . В нашем примере имеем:

$$(\neg(b = 0) \ \& \ a = -d/(3b) \ \vee \ b = 0 \ \& \ d = 0) \ \& \ a \text{ - число} \ \& \ d \text{ - число}$$

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x_{24} присваивается набор дизъюнктивных членов результата приведения этого ответа к виду дизъюнктивной нормальной формы. Выбирается элемент x_{25} набора x_{24} . В нашем примере - " $\neg(b = 0) \ \& \ a = -d/(3b) \ \& \ a \text{ - число} \ \& \ d \text{ - число}$ ". Переменной x_{26} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{25} . В нем находится равенство x_{27} , определяющее значение переменной a . В нашем случае - " $a = -d/(3b)$ ". Переменной x_{28} присваивается правая часть данного равенства. Рассматривается символ s , расположенный по вхождению w , являющемуся первым элементом набора x_{12} . Если x_{12} - тройка, то переменной x_{29} присваивается результат соединения операцией s второго элемента набора x_{12} и переменной x_{18} . Иначе x_{29} - терм, состоящий из переменной x_{18} . В нашем примере имеем терм " dc ". Переменной x_{30} присваивается результат замены вхождения w в терм x_9 на терм x_{29} . В нашем примере - " $dc + c^3 = a^3 + b^3$ ". Переменной x_{31} присваивается результат подстановки в x_{30} терма x_{28} вместо переменной x_{15} . В нашем случае - " $dc + c^3 = (-d/(3b))^3 + b^3$ ". Переменной x_{32} присваивается результат исключения из набора x_{10} утверждений x_{19} и последующего добавления утверждений x_{26} . Затем создается импликация с антецедентами x_{32} и консеквентом x_{31} . Она обрабатывается оператором "стандподбор". Этот оператор ориентирован на стандартизацию теорем, у которых антецеденты содержат переменные - вспомогательные обозначения для сложных термов, неоднократно встречающихся в теореме. Обращение к оператору "нормтеорема" привело бы к исключению таких равенств.

Результат регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

2. Обобщение импликации для подбора корня уравнения: подстановка вместо неизвестной выражения с новым параметром.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acdef}(e - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \neg(d = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ 0 \leq 4d^3 + 27a^2 \ \& \\ f = \sqrt{4d^3 + 27a^2} \ \& \ c = -e + (\sqrt[3]{3\sqrt{3}a - f} + \sqrt[3]{3\sqrt{3}a + f})/(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}) \rightarrow \\ c(d + 3e^2) + 3ec^2 + c^3 = a - de - e^3)$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(d - \text{число} \ \& \ \neg(d = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ 0 \leq 4d^3 + 27a^2 \ \& \ c = -d/(3b) + b \ \& \\ b = \sqrt[3]{3\sqrt{3}a - \sqrt{4d^3 + 27a^2}}/(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}) \rightarrow cd + c^3 = a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$$

Переменной x8 присваивается переменная, указанная в характеристике. В нашем примере - переменная c . Переменной x9 присваивается консеквент теоремы. Внутри терма x9 выбирается вхождение x10 неоднобуквенного подтерма, одним из корневых операндов которого служит переменная x8. В нашем примере - вхождение " c^3 ". Переменной x11 присваивается заголовок выражения x10. В нашем случае - "степень". Справочник поиска теорем "дублпарам" определяет по x11 указанную выше дополнительную теорему. По ее характеристике "свертка(...)" определяется направление x15 замены для свертки выражения. В нашем случае - "первыйтерм". Переменной x16 присваивается заменяемый терм дополнительной теоремы при свертке, переменной x17 - заменяющий. В нашем случае x17 - " $(a + b)^3$ ". Проверяется, что заголовком терма x17 служит символ x11. Внутри этого терма выбирается вхождение x18 ассоциативной и коммутативной операции x19. В нашем случае - " $a + b$ ". Проверяется, что операндами выражения x18 служат переменные x22 и x23. В нашем примере - a, b . Переменной x24 присваивается результат замены в терме x17 вхождения x18 на переменную x22. В нашем примере имеем a^3 . Проверяется, что заголовок выражения x16 - символ x19. Находится корневой операнд x25 выражения x16, равный x24. Проверяется, что операция x19 имеет единицу. Переменной x27 присваивается набор antecedентов дополнительной теоремы. Проверяется, что эта теорема не имеет переменных, отличных от x22 и x23 и что выражение x24 не имеет переменной, отличной от x22. Находится такой терм t , подстановка которого вместо x22 в x24 дает выражение x10. В нашем случае это переменная c .

Выбирается переменная x29, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная e . Переменной x30 присваивается результат подстановки терма t и переменной x29 вместо переменных x22 и x23 в терм x16. В нашем случае получаем " $c^3 + 3c^2e + 3ce^2 + e^3$ ". Проверяется, что в x30 имеется такой неоднобуквенный подтерм, имеющий корневой операнд x8 и не имеющий отличных от x8 переменных, который не встречается в консеквенте исходной теоремы. В нашем примере это c^2 . Переменной x31 присваивается набор результатов подстановки в утверждения набора x27 терма x28 и переменной x29 вместо переменных x22 и x23. В нашем примере имеем " $c - \text{число}$ ", " $e - \text{число}$ ". Переменной x32 присваивается результат соединения операцией x19 переменных x8 и x19. В нашем случае - " $c + e$ ". Переменной x33 присваивается объединение списка x31 и набора результатов подстановки в antecedенты исходной теоремы выражения

х32 вместо переменной х8. Переменной х34 присваивается терм, получаемый из консеквента х9 одновременной заменой вхождения х10 на х30 и подстановкой вместо остальных вхождений терма х32 вместо переменной х8. В нашем примере имеем утверждение " $(c + e)d + (c^3 + 3c^2e + 3ce^2 + e^3) = a$ ".

Проверяется, что в списке х33 имеется равенство х35, в левой части которого расположено выражение $c + e$. В нашем примере - равенство " $c + e = -d/(3b) + b$ ". Набор х33 разбивается на поднабор х36 утверждений, содержащих переменную х8, и поднабор х37 остальных утверждений. В нашем случае х36 состоит из указанного равенства х35 и утверждения " c - число". Решается задача на описание с посылками х37 и условиями х36. Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "упростить", "равно", "неизвестные х8". Получается ответ х39, который в нашем примере имеет следующий вид:

$$c = -e + (\sqrt[3]{(3\sqrt{3}a - \sqrt{4d^3 + 27a^2})/2} + \sqrt[3]{(3\sqrt{3}a + \sqrt{4d^3 + 27a^2})/2})/\sqrt{3}$$

Переменной х40 присваивается результат добавления к списку х37 конъюнктивных членов утверждения х39. Затем создается импликация с антецедентами х40 и консеквентом х34. Она обрабатывается оператором "стандподбор", выполняющим необходимые упрощения (в частности, ввод вспомогательных переменных для повторяющихся громоздких подтермов). Результат регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

3. Обобщение импликации для подбора корня уравнения: домножение обеих частей двуместного отношения на новый параметр.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefgh}(0 \leq 4d^3 + 27a^2 \ \& \ b \text{ - число} \ \& \ e \text{ - число} \ \& \ \neg(3e - b^2 = 0) \ \& \ \neg(h = 0) \ \& \ h \text{ - число} \ \& \ g \text{ - число} \ \& \ f = \sqrt{4d^3 + 27a^2} \ \& \ c = b/3 + (\sqrt[3]{3\sqrt{3}a - f} + \sqrt[3]{3\sqrt{3}a + f})/(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}) \ \& \ d = e - b^2/3 \ \& \ a = g + b(9e - 2b^2)/27 \rightarrow bhc^2 + ceh + hc^3 = gh)$$

из теоремы

$$\forall_{abcdefg}(0 \leq 4d^3 + 27a^2 \ \& \ b \text{ - число} \ \& \ e \text{ - число} \ \& \ \neg(3e - b^2 = 0) \ \& \ g \text{ - число} \ \& \ f = \sqrt{4d^3 + 27a^2} \ \& \ c = b/3 + (\sqrt[3]{3\sqrt{3}a - f} + \sqrt[3]{3\sqrt{3}a + f})/(\sqrt[3]{2}\sqrt{3}) \ \& \ d = e - b^2/3 \ \& \ a = g + b(9e - 2b^2)/27 \rightarrow bc^2 + ce + c^3 = g)$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a \text{ - число} \ \& \ b \text{ - число} \ \& \ c \text{ - число} \rightarrow ab = bc \leftrightarrow a = c)$$

$$\forall_{abc}(a \text{ - число} \ \& \ b \text{ - число} \ \& \ c \text{ - число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

Переменной х8 присваивается переменная, указанная в характеристике. В нашем примере - переменная c . Переменной х9 присваивается консеквент теоремы, переменной х10 - набор антецедентов. Проверяется, что консеквент имеет ровно два корневых операнда. Переменной х13 присваивается один из них. Проверяется, что переменная х8 входит в этот операнд и не входит в другой. В нашем примере х13 - " $bc^2 + ce + c^3$ ". Переменной х14 присваивается заголовок консеквента. Если этот заголовок - равенство, то находится тип значений

выражения x_{13} , и переменной x_{14} переприсваивается этот тип. В нашем примере x_{14} - "число". Справочник поиска теорем "коэфф" определяет по символу x_{14} указанную выше первую дополнительную теорему. По ее характеристике "общнорм" определяется направление замены x_{18} . Переменной x_{19} присваивается заменяемая часть первой дополнительной теоремы. В нашем случае - " $ac = bc$ ". Переменной x_{20} присваивается заголовок первого корневого операнда терма x_{19} . Справочник поиска теорем "дистрибразвертка" определяет по x_{20} вторую дополнительную теорему. Переменной x_{25} присваивается заменяющая часть этой теоремы при развертке. В нашем примере - " $ab + ac$ ". Проверяется, что заголовки выражений x_{13} и x_{25} совпадают. Переменной x_{27} присваивается набор корневых операндов выражения x_{13} . В нашем случае - " bc^2 ", " ce ", " c^3 ". Проверяется, что в списке x_{27} имеется такое выражение x_{28} , которое либо совпадает с x_8 , либо не является переменной, причем после отбрасывания корневой одноместной операции, если она есть, оно не имеет вида $x_{20}(\dots X \dots)$, где X - переменная, отличная от x_8 . Иными словами, в нашем примере выражение x_{28} не должно иметь сомножителем отличную от c переменную. Очевидно, на эту роль подходит c^3 .

Выбирается новая переменная x_{28} . В нашем примере - переменная h . Переменной x_{29} присваивается результат соединения корневой операцией терма x_{13} (в нашем случае - "плюс") результатов соединения операцией x_{20} переменной x_{28} и элементов списка x_{27} . В нашем примере x_{29} имеет вид " $bc^2h + ce h + c^3h$ ". Переменной x_{30} присваивается результат соединения операцией x_{20} подтерма x_{12} и переменной x_{28} . В нашем примере - " gh ". Переменной x_{31} присваивается результат соединения корневым отношением консеквента x_9 термов x_{29} и x_{30} , с сохранением исходной ориентации операндов. В нашем примере получаем " $bc^2h + ce h + c^3h = gh$ ". Переменной x_{32} присваивается параметр терма x_{19} , имеющий в нем более одного вхождения. В нашем случае - " b ". Переменной x_{33} присваивается заменяющая часть первой дополнительной теоремы. Переменной x_{34} присваивается ее первый операнд, переменной x_{35} - второй. В нашем примере это переменные a, c . Переменной x_{36} присваивается набор результатов подстановки в antecedentes первой дополнительной теоремы термов x_{28} , первого корневого операнда консеквента x_9 и его второго корневого операнда вместо переменных x_{32}, x_{34}, x_{35} . В нашем примере получаем утверждения " $\neg(h = 0)$ ", " $bc^2 + ce + c^3 - \text{число}$ ", " $h - \text{число}$ ", " $g - \text{число}$ ". Создается импликация, antecedентами которой служат antecedенты исходной теоремы и утверждения x_{36} . Консеквент этой импликации - x_{31} . Данная импликация обрабатывается процедурой "стандподбор". Проверяется, что подстановка в ее antecedенты единицы операции x_{20} вместо переменной x_{28} не приводит к получению противоречия. Затем результат регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

3.48 Характеристика "неизвестные"

Характеристикой "неизвестные($x S N$)" снабжаются эквивалентности, полученные для выражения неизвестной x через неизвестные, входящие в выражения, идентифицированные с переменными списка S . N - направление замены.

Обобщение теоремы

1. Обобщение эквивалентности, позволяющей выразить одну неизвестную через другие: исключение операции типа отрицания.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcef}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ e - \text{число} \ \rightarrow \ acf + bc^2 + ef^2 = 0 \leftrightarrow (c = -f(a + \sqrt{-4be + a^2})/(2b) \ \vee \ c = f(-a + \sqrt{-4be + a^2})/(2b)) \ \& \ 0 \leq -4be + a^2)$$

из теоремы

$$\forall_{abcdf}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ e - \text{число} \ \rightarrow \ acf + bc^2 - df^2 = 0 \leftrightarrow (c = -f(a + \sqrt{4bd + a^2})/(2b) \ \vee \ c = f(-a + \sqrt{4bd + a^2})/(2b)) \ \& \ 0 \leq 4bd + a^2)$$

Здесь характеристика х7 имеет вид "неизвестные(с f второйтерм)". Переменной х10 присваивается заменяемая часть, переменной х11 - параметры характеристики х7. Выбирается неповторный параметр х12 терма х10, не входящий в список х11. В нашем примере - d . Переменной х13 присваивается вхождение х12 в терм х10. Рассматривается вхождение х14 операции х15, операндом которой служит х13. В нашем случае х15 - "умножение". Проверяется, что арность символа х15 равна 2. Находится вхождение х16 операции х17, операндом которой служит х14. В нашем примере - вхождение терма $-df^2$. Проверяется, что эта операция имеет единственный операнд. Справочник "заменазнака" по символу х15 указывает набор указаний на возможность перенесения внешнего знака на операнд операции х14. В этом наборе выбирается элемент х20, соответствующий знаку х17, причем проверяется, что этот знак может быть перенесен именно на операнд х13. Переменной х22 присваивается терм "х17(х12)". В нашем примере - $-d$. Переменной х23 присваивается набор антецедентов теоремы. Справочник "тип" определяет тип х25 значений операции х17. В нашем примере - "число". Выбирается новая переменная х26. В нашем случае - e . Переменной х27 присваивается набор, образованный равенством выражений х26, х22 и утверждением "х25(х26)". В нашем примере - " $e = -d$ ", "число(e)". Решается задача на описание с посылками х23 и условиями х27. Цели ее - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные х12". Ответ присваивается переменной х29. В нашем примере он имеет вид " $d = -e \ \& \ e - \text{число}$ ". Переменной х30 присваивается набор конъюнктивных членов данного ответа. В нем выбирается равенство х31 переменной х12 выражению х32.

Переменной х34 присваивается заменяющая часть исходной теоремы. Определяются результат х35 подстановки в нее терма х32 вместо переменной х12, результат х36 подстановки в подтерм х14 переменной х26 вместо х12, и результат х37 замены в терме х10 вхождения х16 на выражение х36. В нашем примере х37 имеет вид " $acf + bc^2 + ef^2 = 0$ ". Переменной х38 присваивается объединение результатов подстановки выражения х32 вместо переменной х12 в утверждения х23 с результатом удаления из набора х30 равенства х31. Утверждение х35 упрощается относительно посылок х38 вспомогательной задачей на преобразование. Список х38 обрабатывается процедурой "нормантецеденты" относительно параметров термов х35 и х37. Наконец, создается итоговая импликация

с антецедентами х38 и равенством выражений х35, х37 в консеквенте. Ориентация равенства - та же, что в исходной теореме. В списке вывода полученная теорема регистрируется как обобщение исходной теоремы.

2. Обобщение эквивалентности, позволяющей выразить одну неизвестную через другие: исключение отрицания равенства в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcef}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow acf + bc^2 + ef^2 = 0 \leftrightarrow \neg(b = 0) \ \& \ (c = -f(a + \sqrt{-4be + a^2})/(2b) \vee c = f(-a + \sqrt{-4be + a^2})/(2b)) \ \& \ 0 \leq -4be + a^2 \vee = 0 \ \& \ f = 0 \ \& \ -4be + a^2 < 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abcef}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ e - \text{число} \rightarrow acf + bc^2 + ef^2 = 0 \leftrightarrow (c = -f(a + \sqrt{-4be + a^2})/(2b) \vee c = f(-a + \sqrt{-4be + a^2})/(2b)) \ \& \ 0 \leq -4be + a^2)$$

Здесь характеристика х7 имеет вид "неизвестные(c f второйтерм)". Переменной х10 присваивается заменяемая часть, переменной х11 - параметры характеристики х7. Переменной х12 присваивается набор антецедентов теоремы. В нем выбирается отрицание равенства х13. В нашем примере - " $\neg(f = 0)$ ". Переменной х14 присваивается вхождение равенства в это отрицание. Проверяется, что в одной части равенства находится переменная х17, принадлежащая списку х11, но не являющаяся первым операндом характеристики х7, а в другой - выражение х18, не содержащее переменной х17. В нашем случае х17 - переменная f . Переменной х19 присваивается о.д.з. консеквента. Проверяется, что утверждение х13 не встречается в списке утверждений х19. Переменной х20 присваивается результат удаления из списка х12 утверждения х13. Проверяется, что он непуст. Переменной х21 присваивается о.д.з. конъюнкции утверждений х20. Проверяется, что х13 не входит в список х21. Переменной х22 присваивается результат подстановки в утверждение х10 выражения х18 вместо переменной х17. В нашем примере имеем " $ac \cdot 0 + bc^2 + e \cdot 0^2 = 0$ ". Переменной х23 присваивается результат удаления из списка х11 переменной х17. В нашем случае имеем одноэлементный список c . Решается задача на описание c с посылками х20 и с единственным условием х22. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "попыткаспуска", "неизвестные х23". Фактически, она лишь упрощает утверждение х22 относительно переменных х23. Ответ присваивается переменной х25. В нашем случае получаем " $\neg(b = 0) \ \& \ c = 0 \vee b = 0$ ". Переменной х26 присваивается конъюнкция утверждения х25 и равенства из утверждения х13. В нашем примере - " $\neg(b = 0) \ \& \ c = 0 \vee b = 0) \ \& \ f = 0$ ". Переменной х27 присваивается набор дизъюнктивных членов заменяющей части исходной теоремы. В нашем примере - сама заменяющая часть.

Предпринимается цикл просмотра элементов х28 списка х27, содержащих переменную х17. Переменной х30 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения х28, не содержащих переменную х17. В нашем случае - единственное утверждение " $0 \leq -4be + a^2$ ". Проверяется, что этот набор непуст. Переменной х31 присваивается оставшаяся часть конъюнктивных членов утверждения х28. В нашем случае она состоит из единственной дизъюнкции " $(c =$

$-f(a + \sqrt{-4be + a^2})/(2b) \vee c = f(-a + \sqrt{-4be + a^2})/(2b)$ ". Переменной x32 присваивается конкатенация списков x20, x30, а также равенства из утверждения x13 и утверждения x25. При помощи задачи на доказательство проверяется, что x31 - следствие утверждений x32. В нашем примере это очевидно, так как в посылках имеются равенства нулю c и f . При помощи задачи на описание упрощается относительно посылок x20 конъюнкция трех утверждений: равенства из утверждения x13, отрицания конъюнкции утверждений x30 и утверждения x25. Результат переприсваивается переменной x26.

По окончании цикла в нашем случае переменной x26 оказывается присвоено утверждение " $c = 0 \ \& \ -4be + a^2 < 0 \ \& \ f = 0$ ". Переменной x28 присваивается набор дизъюнктивных членов утверждения x26. Формируется дизъюнкция утверждений списков x27 и x28. Результат обработки ее оператором "нормили" относительно посылок x20 присваивается переменной x29. Затем создается итоговая импликация с антецедентами x20, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x10 и x29. В списке вывода полученная теорема регистрируется как обобщение исходной теоремы.

3.49 Характеристика "неизвоценка"

Характеристикой "неизвоценка($N F$)" снабжаются эквивалентности, применение которых в направлении N позволяет получить более простые выражения с неизвестными. F - фильтр, уточняющий контекст.

Логические следствия теоремы

1. Переход к импликации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cfghi}(\neg(f - 1 = 0) \ \& \ 0 < f \ \& \ 0 < g \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ c = h + i \log_f g \rightarrow f^h g^i = f^c)$$

из теоремы

$$\forall_{cfghi}(\neg(f - 1 = 0) \ \& \ 0 < f \ \& \ 0 < g \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \rightarrow f^h g^i = f^c \leftrightarrow c = h + i \log_f g)$$

Здесь из теоремы, порождающей прием эквивалентного преобразования уравнения, выводится теорема, дающая прием вывода следствия в задаче на исследование. В обоих случаях достигается исключение неизвестного логарифма.

В нашем примере характеристика имеет вид "неизвоценка(первыйтерм и(тип(описать) условие не(известно(x7)) известно(x8) известно(x9)))".

Переменной x8 присваивается направление замены, переменной x9 - набор конъюнктивных членов фильтра. Переменной x11 присваивается заменяемая часть, переменной x12 - заменяющая, переменной x13 - список антецедентов теоремы. Проверяется, что заголовок термов x11 и x12 - символ "равно". Затем создается итоговая импликация, антецеденты которой получены добавлением к списку x13 утверждения x11, а консеквент равен x12. Эта импликация сопровождается

единственной характеристикой "сближение", означающей, что теорема предназначена для вывода следствий в задаче на исследование, приводящего к "сближению" различных подвыражений с неизвестными.

Обобщение теоремы

1. Варьирование эквивалентности, исключаяющей сложное подвыражение с неизвестными: вводится дополнительное слагаемое неизвестной части двуместного отношения, включающее все остаточные неизвестные члены, причем специально выделяется подслучай, когда оно нулевое.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abefgh}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{натуральное} \ \& \ h - \text{натуральное} \ \& \ g - \text{even} \ \& \ 0 \leq e \rightarrow e^h f^g - (a - b)^g = 0 \ \& \ 0 \leq f(a - b) \leftrightarrow a = b + f e^{h/g})$$

из теоремы

$$\forall_{aefgh}(\neg(g = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(g) - \text{even} \ \& \ g - \text{rational} \ \& \ 0 \leq e \rightarrow e^h f^g = a^g \ \& \ 0 \leq af \leftrightarrow a = f e^{h/g})$$

В нашем примере характеристика имеет вид "неизвоценка(первыйтерм и(тип(описать) условие известно(g) не(известно(e)) натуральное(h) или(натуральное(g) и(известно(e)известно(a)))))". Переменной x8 присваивается первый операнд характеристики, переменной x9 - набор конъюнктивных членов второго операнда. Переменной x11 присваивается заменяемое утверждение, переменной x12 - заменяющее. Переменной x13 присваивается набор антецедентов. Проверяется, что корневая операция утверждения x11 двуместная, причем один из ее операндов - переменная x17. В нашем примере - a. Переменной x18 присваивается другой операнд. В нашем примере - "fe^{h/g}". Переменной x19 присваивается заголовок утверждения x11. Если это равенство, то он заменяется на тип значения частей данного равенства. Переменной x20 присваивается результат обращения к справочнику "перегруппировка" на символе x19. В нашем случае это (плюс минус 0), т.е. допускается перенесение слагаемых в противоположную часть равенства с изменением их знака, причем 0 - единица допускающей перегруппировку операции. Переменной x21 присваивается первый элемент тройки x20. В нашем примере - символ "плюс". Переменной x22 присваивается набор x21 - членов (в нашем примере - слагаемых) выражения x18. Проверяется, что в этом наборе нет однобуквенных выражений, образованных переменными. Выбирается новая переменная x23. В нашем случае - "b". Переменной x24 присваивается результат соединения операцией x21 выражения x18 и переменной x23. В нашем примере - "fe^{h/g} + b". Переменной x25 присваивается результат соединения операцией x21 выражения x17 и переменной x23, взятой со знаком, указанным в тройке x20. В нашем случае - "a - b". Переменной x26 присваивается результат подстановки выражения x25 вместо переменной x17 в заменяющее утверждение теоремы. В нашем случае - "e^hf^g = (a - b)^g & 0 ≤ (a - b)f". Переменной x27 присваивается тип значений операции x21. В нашем случае - "число". Переменной x28 присваивается объединение набора результатов подстановки выражения x25 вместо переменной x17 в антецеденты теоремы с утверждениями "x27(x23)", "x27(x17)". В нашем

примере - с утверждениями " b – число", " a – число". Переменной x_{29} присваивается результат замены вхождения подтерма x_{18} в x_{11} на x_{24} . В нашем примере - " $a = fe^{h/g} + b$ ". Переменной x_{30} присваивается объединение набора результатов подстановки выражения "терм(x_{25})" вместо переменной x_{17} в термы набора x_9 с термами "известно(x_{17})", "смнеизв(x_{23})". В нашем примере имеем список "тип(описать)", "условие", "известно(g)", "не(известно(e))", "натуральное(h)", "или(натуральное(g)и(известно(f) известно(терм($a - b$))))", "известно(a)", "смнеизв(b)". Здесь фильтр "смнеизв(b)" означает, что переменная b идентифицируется либо с выражением, содержащим неизвестные, либо с единицей внешней операции (в нашем примере - с нулем).

Далее процедура "нормнеизв" определяет результат группировки неизвестных членов утверждения x_{26} в одной части двуместного отношения. Контекст, определяющий известные и не известные термы, задается списком x_{30} . Полученный результат переписывается переменной x_{26} . В нашем примере получаем: " $e^h f^g - (a - b)^g = 0 \ \& \ 0 \leq (a - b)f$ ".

Переменной x_{31} присваивается эквивалентность утверждений x_{26} и x_{29} , с сохранением ориентации исходной теоремы. Переменной x_{32} присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка x_{28} относительно параметров утверждения x_{31} . Переменной x_{33} присваивается результат обработки импликации с антецедентами x_{32} и консеквентом x_{31} оператором "полныепосылки". В нашем примере получаем:

$$\forall_{abefgh} (\neg(g = 0) \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(g) - \text{even} \ \& \ g - \text{rational} \ \& \ 0 \leq e \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow e^h f^g - (a - b)^g = 0 \ \& \ 0 \leq (a - b)f \leftrightarrow a = fe^{h/g} + d)$$

Переменной x_{34} присваивается тройка ((теорема(x_{33}), текпеременные(P), текхожд(x_{29})), x_{30} , пустоеслово), где P - список переменных теоремы x_{33} . Эта тройка представляет собой задачу на преобразование группы фильтров в заданном контексте. Первый ее элемент задает контекст преобразования, второй - группу преобразуемых фильтров, третий - уточняет целевую установку преобразований и хранит вводимые в процессе решения комментарии. Тройка x_{34} преобразуется процедурой "преобрфильтр". Эта процедура фактически представляет собой базу приемов по упрощению фильтров и была описана в разделе монографии, посвященном компилятору спецификаций (седьмой том). После применения ее переменной x_{35} присваивается модифицированный второй разряд набора x_{34} . В нашем примере - "тип(описать)", "условие", "известно(g)", "не(известно(e))", "натуральное(h)", "или(натуральное(g)и(известно(f) заголовок($b \ 0$)))", "известно(a)", "смнеизв(b)". Переменной x_{36} присваивается терм "заголовок($x_{23} \ e$)", где e - последний элемент тройки x_{20} . В нашем примере - "заголовок($b \ 0$)". Проверяется, что этот терм встречается в термах набора x_{35} . Все его вхождения в термы этого набора заменяются на константу "ложь". После этого реализуется повторная обработка тройки x_{34} оператором "преобрфильтр", и переменной x_{35} снова присваивается второй элемент тройки x_{34} . В нашем случае имеем: "тип(описать)", "условие", "известно(g)", "не(известно(e))", "натуральное(h)", "натуральное(g)", "известно(a)", "смнеизв(b)".

Реализуется процедура "учетфильтров", которой передаются теорема и набор фильтров x35. Она предпринимает разбор случаев по дизъюнктивным членам фильтров, фиксирующим вид переменных теоремы. В каждом подслучае выдается скорректированная теорема x37 и соответствующий набор фильтров x38. Теорема x37 регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. Она сопровождается характеристикой "неизвоценка(x8 и(x38))". В нашем примере - "неизвоценка(первыйтерм и(тип(описать) условие не(известно(e)) натуральное(h) натуральное(g) известно(a) смнеизв(b)))".

2. Попытка усилить эквивалентность: если некоторый антецедент является следствием других антецедентов и заменяемого утверждения, то он переносится в конъюнктивные члены заменяющего утверждения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abefgh}(b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{натуральное} \ \& \ h - \text{натуральное} \ \& \ g - \text{even} \ \& \ 0 \leq e \rightarrow e^h f^g - (a - b)^g = 0 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ 0 \leq f(a - b) \leftrightarrow a = b + f e^{h/g})$$

из теоремы

$$\forall_{abefgh}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{натуральное} \ \& \ h - \text{натуральное} \ \& \ g - \text{even} \ \& \ 0 \leq e \rightarrow e^h f^g - (a - b)^g = 0 \ \& \ 0 \leq f(a - b) \leftrightarrow a = b + f e^{h/g})$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - набор антецедентов. Переменной x13 присваивается результат удаления из набора x11 всех утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. терма x10. В нашем примере x13 состоит из единственного утверждения "a - число". Проверяется, что утверждения списка x13 имеют единственный параметр. Переменной x16 присваивается результат присоединения утверждения x10 к не вошедшим в список x13 утверждениям набора x11. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x13 - следствие утверждений x16. Переменной x18 присваивается результат соединения конъюнкцией утверждений x13 и заменяющего терма теоремы. Затем создается импликация, антецедентами которой служат все не вошедшие в список x13 антецеденты исходной теоремы, а консеквентом - эквивалентность x18 и x10. Ориентация эквивалентности - та же, что у исходной теоремы. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется как обобщение исходной теоремы. Ее характеристика "неизвоценка(...)" - та же, что у исходной теоремы.

3. Обобщение эквивалентности: ввод дизъюнкции для учета вырожденного случая.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cijk}(0 < i \ \& \ 0 < k \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \rightarrow \neg(i - 1 = 0) \ \& \ j + \log_i k = \log_i c \ \& \ 0 < c \ \& \ c - \text{число} \ \vee \ c = k \ \& \ i - 1 = 0 \leftrightarrow c = k i^j)$$

из теоремы

$$\forall_{cijk}(\neg(i - 1 = 0) \ \& \ 0 < i \ \& \ 0 < k \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \rightarrow j + \log_i k = \log_i c \ \& \ 0 < c \ \& \ c - \text{число} \leftrightarrow c = k i^j)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм, переменной x_{11} - набор антецедентов. В списке x_{11} выбирается отрицание равенства x_{12} . В нашем примере - " $\neg(i-1=0)$ ". Переменной x_{13} присваивается равенство под этим отрицанием, переменной x_{14} - список параметров терма x_{13} . Проверяется, что список x_{14} состоит из единственной переменной x_{15} . Рассматривается список всех прочих антецедентов, параметры которых содержатся в списке x_{14} , и к нему добавляется равенство x_{13} . Результат разрешается при помощи вспомогательной задачи на описание относительно x_{15} , и результат переприсваивается переменной x_{13} . В нашем случае x_{13} превращается в равенство $i=1$. Проверяется, что x_{13} - равенство переменной x_{15} некоторому выражению x_{16} , не содержащему x_{15} . Проверяется, что переменная x_{15} входит в заменяемый терм x_{10} и что утверждение x_{12} не используется для сопровождения по о.д.з. заменяемого терма и остальных антецедентов. Переменной x_{17} присваивается результат подстановки x_{16} вместо x_{15} в заменяемый терм x_{10} . В нашем случае - " $c=k1^j$ ". Переменной x_{18} присваивается результат обработки утверждения x_{17} нормализаторами общей стандартизации относительно списка x_{11} . В нашем примере - " $c=k$ ". Проверяется, что оценка сложности утверждения x_{18} меньше оценки сложности утверждения x_{10} . Переменной x_{19} присваивается дизъюнкция двух утверждений, первое из которых - конъюнкция терма x_{12} и заменяющего утверждения теоремы, а второе - конъюнкция равенства под отрицанием x_{12} и утверждения x_{18} . Переменной x_{20} присваивается результат удаления из списка x_{11} утверждения x_{12} . Создается импликация с антецедентами x_{20} , конъюнктом которой служит эквивалентность утверждений x_{10} и x_{19} . Ориентация эквивалентности та же, что в исходной теореме. Импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода вместо исходной теоремы. Ее характеристика "неизвоценка(...)" - та же, что у исходной теоремы.

4. Попытка усилить эквивалентность для исключения сложного подвыражения с неизвестными, если заменяемая часть является следствием отрицания некоторого антецедента, не относящегося к ее о.д.з.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bijx}(0 < b \ \& \ 0 < j \ \& \ b - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \rightarrow x < jb^i \leftrightarrow x \leq 0 \vee 0 < x \ \& \ (b = 1 \ \& \ x < j \vee i + \log_b j < \log_b x \ \& \ 0 < -b + 1 \vee 0 < b - 1 \ \& \ \log_b x < i + \log_b j))$$

из теоремы

$$\forall_{bijx}(0 < b \ \& \ 0 < j \ \& \ 0 < x \ \& \ b - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \rightarrow x < jb^i \leftrightarrow b = 1 \ \& \ x < j \vee i + \log_b j < \log_b x \ \& \ 0 < -b + 1 \vee 0 < b - 1 \ \& \ \log_b x < i + \log_b j)$$

В нашем примере характеристика имеет вид "неизвоценка(второйтерм и(тип(описать) условие не(известно(i)) или(и(известно(b) не(контекст(сомножитель(f j) не(известно(f)) не(контекст(вид(f степень(g h))известно(g)))))) не(контекст(сомножитель(c x))не(известно(c)) не(контекст(вид(c степень(d e)) известно(d)))))) и(не(известно(b)) заголовок(j 1) не(контекст(сомножитель(c x) не(заголовок(c 1)) не(контекст(вид(c степень(b d)) единица(1 d))))))))))".

Переменной x11 присваивается заменяемый терм теоремы, переменной x12 - набор антецедентов. Переменной x13 присваивается набор утверждений, образующих условия на о.д.з. для x11. Выбирается антецедент x14, не входящий в список x13 и не являющийся указателем типа значения переменной. В нашем примере - " $0 < x$ ". Переменной x15 присваивается список его параметров. Проверяется, что он состоит из единственной переменной x16. В нашем случае - " x ". Переменной x17 присваивается отрицание утверждения x14, переменной x18 - результат удаления x14 из списка антецедентов. Переменной x19 присваивается результат добавления утверждения x17 к списку x18. При помощи задачи на доказательство проверяется, что x11 - следствие утверждений x19. Переменной x17 переписывается результат упрощения утверждения x17 относительно посылок x18 задачей на преобразование. В нашем примере получаем " $x \leq 0$ ". Переменной x21 присваивается дизъюнкция утверждения x17 и конъюнкции утверждения x14 с заменяющим термом теоремы. Затем создается итоговая импликация с антецедентами x18 и консеквентом - эквивалентность утверждений x11 и x21. Ее характеристика "неизвоценка(...)" - та же, что у исходной теоремы. Исходная теорема помечается в списке вывода пометкой "исключение".

Использование дополнительного тождества для варьирования теоремы

1. Усмотрение частного случая, в котором увеличивается число перегруппируемых корневых членов заменяющей части эквивалентности, исключаяющей сложное выражение с неизвестными.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bdefh}(b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ h - \text{натуральное} \ \& \ 0 \leq e \rightarrow 2bd + e^h f^2 - b^2 = d^2 \ \& \ 0 \leq f(d - b) \leftrightarrow d = b + fe^{h/2})$$

из теоремы

$$\forall_{abefgh}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{натуральное} \ \& \ h - \text{натуральное} \ \& \ g - \text{even} \ \& \ 0 \leq e \rightarrow e^h f^g - (a - b)^g = 0 \ \& \ 0 \leq f(a - b) \leftrightarrow a = b + fe^{h/g})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$$

В нашем примере характеристика имеет вид "неизвоценка(первыйтерм и(тип(описать) условие не(известно(e)) натуральное(h) натуральное(g) известно(a) смнеизв(b)))".

Переменной x8 присваивается направление замены, определяемое характеристикой. Переменной x10 присваивается заменяющий терм, переменной x11 - заменяемый. Переменной x12 присваивается заголовок терма x11. Если этот заголовок - "равно", то определяется тип значения операндов равенства, и x12 заменяется на данный тип. В нашем примере переменной x12 присваивается символ "число". Выбирается конъюнктивный член x13 заменяющего терма, заголовок которого совпадает с заголовком заменяемого терма. В нашем примере x13 - " $e^h f^g - (a - b)^g = 0$ ". Проверяется, что каждый параметр терма

x11 входит в x13. Проверяется, что x13 имеет наибольшую сложность среди конъюнктивных членов заменяющего терма. Переменной x14 присваивается набор конъюнктивных членов второго операнда текущей характеристики (т.е. фильтров, уточняющих контекст). Переменной x15 присваивается список параметров, входящих в элементы списка x14, имеющие вид "смнеизв(...)" либо "не(известно(...))". В нашем примере - список "b, e". Переменной x16 присваивается результат обращения к справочнику "перегруппировка" на символе x12. В нашем примере получается тройка (плюс минус 0). Первый элемент - операция, для которой возможно перенесение из одной части отношения x12 (или, как в нашем примере, - равенства) в другую, второй - указатель на изменяемый при этом знак, третий - единица операции. Переменной x17 присваивается первый элемент данной тройки. Рассматривается операнд x18 терма x13, заголовков которого равен x17. В нашем примере - " $e^h f^g - (a - b)^g = 0$ ". Внутри x18 берется вхождение x19 некоммутативной операции x20. В нашем примере - вхождение " $(a - b)^g$ ". Проверяется, что подтерм x19 имеет параметры списка x15. Справочник поиска теорем "развязка" определяет по символу x20 (в нашем примере - "степень") указанную выше дополнительную теорему. Ее характеристика "коммутативно(...)" определяет направление замены для развязки. В нашем примере - слева направо. Переменной x25 присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. В нашем примере - " $a^2 + 2ab + b^2$ ". Проверяется, что этот терм имеет заголовок x17.

В заменяющей части исходной теоремы находится вхождение x26 терма x19. Составляется список x27 троек (переменная X (X)) для всех переменных X терма x19, не входящих в список x15. Последний элемент тройки - однобуквенный терм. В нашем примере x27 состоит из троек (переменная a (a)), (переменная g (g)). Оператор "тождвывод" определяет результат x28 преобразования вхождения x26 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Ему передаются установки "направл(...)", "новаяпеременная", "(фикс x15)", x27. Соответственно, блокируется ввод новых переменных при унификации, вместо переменных списка x15 подстановка не выполняется. Элемент (переменная X ...) сохраняет в своем последнем разряде терм, подставляемый при унификации вместо X . В нашем примере x28 имеет вид:

$$\forall_{defh}(d - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 2 - \text{натуральное} \ \& \ h - \text{натуральное} \ \& \ 2 - \text{even} \ \& \ 0 \leq e \ \& \ -b - \text{число} \rightarrow e^h f^2 - ((-b)^2 + 2 \cdot (-b)d + d^2) = 0 \ \& \ 0 \leq f(d - b) \leftrightarrow d = b + f e^{h/2})$$

Переменной x29 присваивается результат обработки теоремы x28 оператором "нормтеорема". Переменной x30 присваивается набор переменных X из троек (переменная X T) набора x27, а переменной x31 - набор термов T , подставляемых вместо этих переменных при унификации. Переменной x32 присваивается набор результатов подстановки термов x31 вместо переменных x30 в фильтры набора x14. Процедура "преобрфильтр" упрощает полученный набор фильтров, так что в итоге получается набор "тип(описать)", "условие", "не(известно(e))", "натуральное(h)", "известно(d)", "смнеизв(b)". Заменяющий терм теоремы x29 обрабатывается оператором "нормнеизв" относительно указанного списка фильтров F , чтобы сгруппировать все неизвестные члены в одной части двуместного отношения. Результат снова присваивается переменной x29. Наконец, процедура "учетфильтров" перечисляет результаты x34 упроще-

ния теоремы x29 относительно подслучаев, определяемых фильтрами F , если они фиксируют вид переменных теоремы. Переменной x35 при этом присваивается набор фильтров для текущего подслучая. В нашем случае x34 совпадает с x29. Теоремы x34 регистрируются в списке вывода, сопровождаемые характеристиками "неизвоценка(x8 x35)".

Склейка двух теорем

1. Попытка склейки двух эквивалентностей с подобными заменяемыми частями.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bijx} (\neg(b = 1) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < j \ \& \ 0 < x \ \& \ b - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \rightarrow x \leq jb^i \leftrightarrow 0 < b-1 \ \& \ \log_b x \leq i + \log_b j \vee 0 < -b+1 \ \& \ i + \log_b j \leq \log_b x)$$

из теоремы

$$\forall_{bijy} (0 < b \ \& \ 0 < j \ \& \ 0 < y \ \& \ 0 < -b+1 \ \& \ b - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \rightarrow i + \log_b j \leq \log_b y \leftrightarrow y \leq jb^i)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bijx} (0 < j \ \& \ 0 < x \ \& \ 0 < b-1 \ \& \ b - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \rightarrow \log_b x \leq i + \log_b j \leftrightarrow x \leq jb^i)$$

В нашем примере характеристика имеет вид "неизвоценка(первыйтерм и(тип(описать) условие не(известно(i)) или(и(известно(b) не(контекст(сомножитель(x6 j)не(известно(x6)) не(контекст(вид(x6 степень(x7 x8)) известно(x7)))))) не(контекст(сомножитель(x3 y) не(известно(x3)) не(контекст(вид(x3 степень(x4 x5)) известно(x4)))))) и(не(известно(b)) заголовок(j 1) не(контекст(сомножитель(x3 y) не(заголовок(x3 1)) не(контекст(вид(x3 степень(b x4)) единица(1 x4))))))))))".

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - набор конъюнктивных членов второго операнда характеристики. В этом наборе выбирается элемент x12 вида "не(известно(x13))". В нашем примере x13 - переменная i . В списке вывода выбирается дополнительная теорема, отличная от текущей теоремы. Она не помечена элементом "исключение" и имеет характеристику x16 вида "неизвоценка(x17 ...)". Переменной x19 присваивается заменяемая часть дополнительной теоремы. Проверяется, что ее длина равна длине терма x10. Переменной x20 присваивается корневая связывающая приставка исходной теоремы. В нашем примере - "bijy". Проверяется, что терм x10 содержит все ее переменные. Переменной x21 присваивается корневая связывающая приставка дополнительной теоремы. В нашем примере - "bijx". Проверяется, что терм x19 содержит все ее переменные. Определяется набор x22 термов, подстановка которых вместо переменных x20 переводит терм x10 в терм x19. Проверяется, что x22 - набор однобуквенных термов, образованных различными переменными. В нашем примере - "b, i, j, x". Переменной x23 присваивается набор конъюнктивных членов второго операнда характеристики x16. В этом наборе выбирается элемент x24 вида "не(известно(x25))". В нашем примере x25 - переменная i . Проверяется, что подстановка термов x22 вместо переменных x20

переводит переменную x_{13} в x_{25} . Переменной x_{28} присваивается набор результатов подстановки термов x_{22} вместо переменных x_{20} в antecedentes исходной теоремы, обработанных оператором "станд". Переменной x_{29} присваивается набор antecedentes дополнительной теоремы, обработанных оператором "станд". Переменной x_{30} присваивается разность списков x_{28} и x_{29} , переменной x_{31} - разность списков x_{29} и x_{28} , переменной x_{32} - пересечение списков x_{28} и x_{29} . В нашем примере x_{30} состоит из утверждений " $0 < b$, $0 < -b + 1$ "; x_{31} - из утверждения " $0 < b - 1$ "; x_{32} - из утверждений " $0 < j$ ", " $0 < x$ ", " b - число", " i - число", " j - число", " x - число". Решается задача на описание с посылками x_{32} , единственным условием которой служит дизъюнкция конъюнкции утверждений x_{30} и конъюнкции утверждений x_{31} . Задача имеет цели "полный", "прямойответ", "редакция", "и". Переменной x_{34} присваивается ответ задачи. В нашем примере он имеет вид " $0 < b \ \& \ \neg(b = 1)$ ". Переменной x_{35} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{34} . Проверяется, что все его элементы суть элементарные утверждения. Переменной x_{36} присваивается объединение списков x_{32} и x_{35} . Переменной x_{37} присваивается результат подстановки термов x_{22} вместо переменных x_{20} в заменяющий терм исходной теоремы. В нашем примере он имеет вид " $i + \log_b j \leq \log_b x$ ". Переменной x_{38} присваивается дизъюнкция результата соединения конъюнкцией утверждений x_{30} и x_{37} с результатом соединения конъюнкцией утверждений x_{31} и заменяющего термина дополнительной теоремы. Создается импликация с antecedентами x_{36} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{19} и x_{38} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с характеристикой "неизвоценка(второйтерм $x_{23})$ ".

Ограничение теоремы с учетом протокола "едн"

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cfghi}(\neg(f - 1 = 0) \ \& \ 0 < f \ \& \ 0 < g \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \rightarrow f^h g^i = f^c \leftrightarrow c = h + i \log_f g)$$

из теоремы

$$\forall_{cfghij}(\neg(j = 0) \ \& \ \neg(f - 1 = 0) \ \& \ 0 < f \ \& \ 0 < g \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \rightarrow f^h g^{i/j} = f^c \leftrightarrow c = h + i \log_f g/j)$$

и протокола

$$\text{"едн}(a/b + c = d, a, b)\text{"}$$

Протокол "едн(A, x, y)" указывает на стандартизацию утверждений с неизвестными, шаблон которых задается термом A , делающую избыточной переменную y , так что вместо нее в теоремах приемов следует подставлять единицу. x - список переменных, хотя бы одна из которых должна идентифицироваться с содержащим неизвестные выражением.

В нашем примере характеристика имеет вид "неизвоценка(первыйтерм и(тип(описать) условие не(известно(g)) известно(h)) известно(i)) известно(j))".

Переменной x_8 присваивается первый операнд характеристики, переменной x_9 - набор конъюнктивных членов второго операнда. Переменной x_{11} присваивается заменяемое утверждение. В нем рассматривается вхождение x_{12} неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - " $i \log_f g/j$ ". Переменной x_{13} присваивается заголовок этого

подтерма, и справочник поиска теорем "едн" определяет по символу x13 указанный выше протокол. Переменной x16 присваивается первый операнд протокола. В нашем случае - " $a/b + c = d$ ". Переменной x17 присваивается список параметров этого операнда. Определяется подстановка S вместо переменных x17, унифицирующая термы x11 и x16. Переменной x19 присваивается последний операнд протокола. В нашем случае - переменная b . Переменной x20 присваивается терм, на который подстановка S заменяет переменную x19. Проверяется, что этот терм составлен из переменной. Она присваивается переменной x21. В нашем примере - " j ". Проверяется, что x21 имеет единственное вхождение в терме x11. Проверяется существование такой переменной X термов, подставляемых подстановкой S вместо переменных протокола, расположенных между его первым и последним операндами, что список x9 содержит терм "не(известно(X))".

Определяется вхождение x22 переменной x21 в заменяемое утверждение теоремы. Рассматривается вхождение x23, операндом которого оно является. Переменной x24 присваивается символ по вхождению x23. При помощи справочника "единица" проверяется, что операция x23 имеет единицу по операнду x22. Эта единица присваивается переменной x26. В нашем примере - "1". Рассматривается импликация, полученная из исходной теоремы добавлением к антецедентам равенства переменной x21 символу x26. Переменной x27 присваивается результат обработки ее оператором "нормтеорема". Теорема x27 регистрируется в списке вывода, а исходная теорема помечается в нем символом "исключение". Характеристика "неизвоценка" новой теоремы получается из характеристики старой исключением всех фильтров, содержащих переменную x21.

Варьирование антецедента теоремы с последующим упрощением заменяемой части

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{kcij}(k < 0 \ \& \ 0 < i \ \& \ k - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \rightarrow \neg(i - 1 = 0) \ \& \ j + \log_i(-k) = \log_i(-c) \ \& \ c < 0 \ \vee \ k = c \ \& \ i - 1 = 0 \leftrightarrow c = ki^j)$$

из теоремы

$$\forall_{cij}(0 < i \ \& \ 0 < k \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \rightarrow \neg(i - 1 = 0) \ \& \ j + \log_i k = \log_i c \ \& \ 0 < c \ \& \ c - \text{число} \ \vee \ c = k \ \& \ i - 1 = 0 \leftrightarrow c = ki^j)$$

и дополнительных теорем

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow 0 < -a \leftrightarrow a < 0)$$

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow -b = -a \leftrightarrow b = a)$$

В нашем примере характеристика имеет вид "неизвоценка(первыйтерм и(тип(описать) условие не(известно(j)) или(и(известно(i)) не(контекст(сомножитель(x6 k)) не(известно(x6)) не(контекст(вид(x6 степень(x7 x8)) известно(x7)))))) не(контекст(сомножитель(x4 c)) не(известно(x4)) не(контекст(вид(x4 степень(x5 x6)) известно(x5)))))) и(не(известно(i)) заголовок(k 1) не(контекст(сомножитель(x4 c)) не(заголовок(x4 1)) не(контекст(вид(x4 степень(i x5)) единица(1 x5))))))))".

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она содержит все переменные теоремы. Переменной x11 присваивается набор антецедентов теоремы, переменной x12 - список утверждений, необходимых для сопровождения утверждения x10 по о.д.з. Выбирается утверждение x13 списка x11, не содержащееся в x12

и не используемое для сопровождения по о.д.з. прочих утверждений списка x11. В нашем примере - " $0 < k$ ". Переменной x15 присваивается заголовок утверждения x13. Справочник поиска теорем "упрощэв" определяет по символу x15 указанную выше первую дополнительную теорему. Направление ее замены определяется по характеристике "общнорм". Оператор "тождвывод" определяет результат x20 преобразования антецедента x13 исходной теоремы при помощи первой дополнительной теоремы. В нашем примере получается:

$$\forall_{acij}(0 < i \ \& \ a < 0 \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ (-a) - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow \neg(i - 1 = 0) \ \& \ j + \log_i(-a) = \log_i c \ \& \ 0 < c \ \& \ c - \text{число} \ \vee \ c = -a \ \& \ i - 1 = 0 \leftrightarrow c = (-a)i^j)$$

Переменной x21 присваивается результат обработки теоремы x20 оператором "нормтеор". В нашем примере получаем:

$$\forall_{acij}(a < 0 \ \& \ 0 < i \ \& \ a - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \rightarrow \neg(i - 1 = 0) \ \& \ j + \log_i(-a) = \log_i c \ \& \ 0 < c \ \& \ c - \text{число} \ \vee \ c = -a \ \& \ i - 1 = 0 \leftrightarrow c = -ai^j)$$

Переменной x23 присваивается вхождение заменяемой части теоремы x21. Внутри него находится вхождение x24 одноместной операции x25. В нашем случае - вхождение подтерма " $-ai^j$ ". Справочник поиска теорем "минус" определяет по x25 указанную выше вторую дополнительную теорему. Проверяется, что ее применение может позволить убрать знак x25 в заменяемой части теоремы x21. После этого оператор "тождвывод" определяет результат x32 преобразования заменяемой части теоремы x21 при помощи второй дополнительной теоремы. В нашем примере имеем:

$$\forall_{adij}(a < 0 \ \& \ 0 < i \ \& \ a - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ ai^j - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \neg(i - 1 = 0) \ \& \ j + \log_i(-a) = \log_i(-d) \ \& \ 0 < -d \ \& \ (-d) - \text{число} \ \vee \ -d = -a \ \& \ i - 1 = 0 \leftrightarrow d = ai^j)$$

Переменной x33 присваивается результат обработки теоремы x32 операторами "полныепосылки" и "нормтеорема". В нашем случае имеем:

$$\forall_{adij}(a < 0 \ \& \ 0 < i \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \rightarrow \neg(i - 1 = 0) \ \& \ j + \log_i(-a) = \log_i(-d) \ \& \ d < 0 \ \vee \ a = d \ \& \ i - 1 = 0 \leftrightarrow d = ai^j)$$

Проверяется, что x33 - кванторная эквивалентность. Переменной x35 присваивается заменяемая часть теоремы x33, переменной x36 - набор ее корневых операндов. Проверяется, что он имеет длину 2. Переменной x37 присваивается набор корневых операндов утверждения x10. Проверяется, что его длина тоже равна 2. Переменной x38 присваивается список параметров термов x36. Определяется подстановка S вместо переменных x38, переводящая равенство выражений x36 в равенство выражений x37. Переменной x40 присваивается результат применения подстановки S к теореме x33. Проверяется, что список переменных теоремы x40 включается в список параметров утверждения x10. Затем теорема x40 регистрируется в списке вывода. Ей передается характеристика "неизвоценка(...)" исходной теоремы.

Развязка стандартизируемого операнда операции, возникающей в заменяющей части

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abijk}(\neg(b - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < i \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \rightarrow a + ki^j = 0 \leftrightarrow a = 0 \ \& \ k = 0 \ \vee \ j \log_b i - \log_b a = -\log_b(-k) \ \& \ k < 0 \ \& \ 0 < a \ \vee \ j \log_b i - \log_b(-a) = -\log_b k \ \& \ a < 0 \ \& \ 0 < k)$$

из теоремы

$$\forall_{aijk}(0 < i \ \& \ a - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \rightarrow a + ki^j = 0 \leftrightarrow \\ \neg(1 - i = 0) \ \& \ (j - \log_i a = -\log_i(-k) \ \& \ k < 0 \ \& \ 0 < a \vee j - \log_i(-a) = -\log_i k \ \& \\ a < 0 \ \& \ 0 < k) \vee a = 0 \ \& \ k = 0 \vee k = -a \ \& \ -i + 1 = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ \neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \\ c - \text{число} \rightarrow \log_a b / \log_a c = \log_c b)$$

В нашем примере характеристика имеет вид "неизвоценка(второйтерм и(тип(описать) условие не(известно(j)) смнеизв(a) известно(i) не(контекст(сомножитель(x6 k) не(известно(x6)) не(контекст(вид(x6 степень(x7 x8)) известно(x7)))))) не(контекст(сомножитель(x4 a) не(известно(x4)) не(контекст(вид(x4 степень(x5 x6)) известно(x5))))))))."

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий. Переменной x12 присваивается набор подтермов терма x11, имеющих максимальную сложность. В этом наборе выбирается терм x13. В нашем примере - " $\log_i a$ ". Переменной x14 присваивается заголовок терма x13. Проверяется, что он не входит в терм x10. Проверяется, что все термы списка x12 имеют заголовок x14. Справочник "операндномер" усматривает, что операция x14 имеет снадартизируемый операнд. Он выдает тройку вида (i, A, B) , где i - символьный номер стандартизируемого операнда; A - шаблон операции, имеющий вид $f(x_1 \dots x_n)$; B - конъюнкция фильтров, уточняющих контекст стандартизации. В нашем примере данная тройка имеет вид $(1, \log_a b, \text{истина})$, т.е. стандартизируемым является основание логарифма. Переменной x16 присваивается i . Находится раздел x17, к которому относится символ x14. Просматриваются теоремы этого раздела; текущая теорема присваивается переменной x20. В нашем примере это указанная выше дополнительная теорема. Переменной x21 присваивается ее характеристика "стандлогарифм(X, Y, N)", указывающая на тождество для варьирования операнда. Здесь X - исходная версия операнда, Y - новая версия, N - направление замены. В нашем примере имеем "стандлогарифм($c, a, \text{первыйтерм}$)". Направление N присваивается переменной x22. Переменной x23 присваивается результат переобозначения связанных переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере имеем:

$$\forall_{bcd}(\neg(b - 1 = 0) \ \& \ \neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \\ d - \text{число} \rightarrow \log_b c / \log_b d = \log_d c)$$

Переменной x25 присваивается заменяемый терм теоремы x23. Проверяется, что его заголовком служит символ x14. Переменной x26 присваивается заменяющий терм теоремы x23. Переменной x27 присваивается набор всех вхождений символа x14 в терм x26, переменной x28 - первый элемент набора x27. Переменной x29 присваивается заголовок x16-го (т.е. стандартизируемого) операнда операции x28. В нашем примере - b . Проверяется, что переменная x29 не встречается в терме x25. Проверяется, что у всех операций списка x27 стандартизируемый операнд равен x29. Переменной x30 присваивается набор антецедентов теоремы x23, переменной x31 - набор антецедентов исходной теоремы.

Вводится пустой накопитель x32 преобразуемых вхождений операции x14 в терм x11, а также пустой накопитель x33 заменяющих эти вхождения термов. Переменной x34 присваивается список параметров терма x25.

Просматриваются такие вхождения x35 символа x14 в терм x11, что соответствующий подтерм x36 представляет собой результат некоторой подстановки S вместо

переменных x_{34} в терм x_{25} . Переменной x_{38} присваивается результат применения подстановки S к терму x_{26} . Переменной x_{39} присваивается набор результатов применения подстановки S к утверждениям x_{30} . Переменной x_{41} присваивается результат пополнения списка x_{31} утверждениями из области вхождения x_{35} . Переменной x_{42} присваивается список всех содержащих переменную x_{29} утверждений списка x_{30} . Проверяется, что каждое утверждение списка x_{39} , не входящее в x_{42} , является следствием утверждений x_{41} . Если это не так, то переход к рассмотрению очередной дополнительной теоремы. Иначе - список x_{31} пополняется утверждениями x_{42} , список x_{32} - вхождением x_{35} , список x_{33} - термом x_{38} , и продолжение просмотра вхождений x_{35} .

По окончании просмотра проверяется, что список x_{32} непуст. Переменной x_{35} присваивается результат замены в терме x_{11} вхождений x_{32} на термы x_{33} . Затем формируется импликация с антецедентами x_{31} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{35} и x_{10} . Сохраняется ориентация исходной теоремы. Сформированная импликация обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому передается комментарий "неизводенка". При регистрации в списке вывода теорема сопровождается характеристикой "альтзначения(x_8)", где x_8 - первый операнд характеристики "неизводенка(...)" исходной теоремы, а также характеристикой "Начало(x_{28})".

3.50 Характеристика "неизвпарам"

Характеристикой "неизвпарам(x_1 x_2)" снабжаются эквивалентности, дающие явное параметрическое описание значений неизвестной x_1 . x_2 - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Попытка развертки заменяющего утверждения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ax}(a - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \rightarrow a = \cos x \leftrightarrow (\exists_n(x = 2\pi n - \arccos a \ \& \ n - \text{целое}) \vee \exists_n(x = 2\pi n + \arccos a \ \& \ n - \text{целое}) \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq -a + 1))$$

из теоремы

$$\forall_{xa}(a - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \rightarrow \cos x = a \leftrightarrow |a| \leq 1 \ \& \ \exists_n(n - \text{целое} \ \& \ (x = 2\pi n + \arccos a \ \vee \ x = 2\pi n - \arccos a)))$$

Переменной x_{11} присваивается набор антецедентов, переменной x_{12} - заменяющий терм. Переменной x_{13} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{12} . Решается задача на описание с посылками x_{11} и условиями x_{13} . Цели задачи - "редакция", "развертка". Ответ присваивается переменной x_{15} . В нашем примере он имеет вид:

$$0 \leq -a + 1 \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ \exists_n((x = 2\pi n - \arccos a \ \vee \ x = 2\pi n + \arccos a) \ \& \ n - \text{целое})$$

Создается импликация с антецедентами x_{11} , консеквентом которой служит эквивалентность заменяемого термина теоремы и утверждения x_{15} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

2. Попытка рассмотрения нулевого значения параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(0 < a + \pi/2 \ \& \ 0 < -a + \pi/2 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow b = \text{tg } a \leftrightarrow a = \text{arctg } b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ \neg(\cos a = 0) \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{tg } a = b \leftrightarrow \exists_n(n - \text{целое} \ \& \ a = \text{arctg } b + \pi n))$$

В нашем примере характеристика - "неизвпарам(a второйтерм)".

Переменной x_8 присваивается первый операнд характеристики, переменной x_{11} - набор антецедентов теоремы, переменной x_{12} - набор конъюнктивных членов заменяющего терма. Проверяется, что в x_{12} имеется единственное утверждение x_{14} , не являющееся элементарным. В нашем примере - " $\exists_n(n - \text{целое} \ \& \ a = \text{arctg } b + \pi n)$ ". Переменной x_{15} присваивается набор дизъюнктивных членов утверждения x_{14} . Проверяется, что все они имеют заголовок "существует", причем длина их связывающей приставки равна 1, а среди подкванторных утверждений имеется терм "целое(x)", где x - связанная переменная квантора. Выбирается связанная переменная x_{16} первого утверждения списка x_{15} , и во всех остальных утверждениях этого списка связанная переменная переобозначается на x_{15} . В нашем примере x_{16} - " n ". Просматриваются утверждения U списка x_{15} и составляется список x_{17} , элементами которого служат пары (t, A) , такие, что среди подкванторных утверждений терма U имеется равенство переменной x_8 терму t , а A - остаток подкванторных утверждений. Переменной x_{18} присваивается список параметров утверждений x_{12} , отличных от переменной x_8 . В нашем примере он состоит из единственной переменной b . Проверяется непустота списка x_{18} . Переменной x_{19} присваивается список антецедентов теоремы, содержащих параметры списка x_{18} . В нашем случае - единственное утверждение " $b - \text{число}$ ".

Вводится пустой накопитель x_{20} и начинается просмотр пар x_{21} списка x_{17} . Пусть x_{21} - пара (t, A) . Переменной x_{22} присваивается подмножество утверждений списка A , не имеющих параметров, отличных от x_{16} . Переменной x_{23} присваивается объединение списка x_{19} , результата удаления из списка x_{12} элемента x_{14} , результата удаления из списка A утверждений x_{22} , к которому добавляется равенство переменной x_8 выражению t . Переменной x_{24} присваивается объединение результата удаления из x_{11} утверждений x_{19} и списка x_{22} . Затем решается задача на описание с посылками x_{24} и условиями x_{23} . Она имеет цели "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{18} ", "параметры x_{18} ". В нашем примере список x_{15} одноэлементный, список x_{23} состоит из утверждений " $b - \text{число}$ ", " $a = \text{arctg } b + \pi n$ ", список x_{24} - из утверждений " $a - \text{число}$ ", " $\neg(\cos a = 0)$ ", " $n - \text{целое}$ ". Ответ присваивается переменной x_{26} . В нашем примере он имеет вид:

$$a - \pi n < \pi/2 \ \& \ 0 \leq a - \pi n \vee \pi n - a < \pi/2 \ \& \ 0 < \pi n - a.$$

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x_{27} присваивается набор его конъюнктивных членов. Затем решается задача на описание

с посылками x22 и условиями x27. Цели задачи - "полный", "явное", "прямой-ответ", "упростить", "неизвестные x8". Ответ присваивается переменной x29. В нашем примере он имеет вид " $a < \pi n + \pi/2 \ \& \ \pi n - \pi/2 < a$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x30 присваивается выражение "класс(x8 и(x29 K))", где K - результат удаления из списка x11 элементов списка x19. В нашем случае имеем " $\text{set}_a(a - \text{число} \ \& \ \neg(\cos a = 0) \ \& \ (a < \pi n + \pi/2 \ \& \ \pi n - \pi/2 < a))$ ". Выражение x30 упрощается при помощи задачи на преобразование, и результат присваивается переменной x32. В нашем примере получаем " $((2n - 1)\pi/2, (2n + 1)\pi/2)$ ". Проверяется, что выражение x32 элементарное, после чего оно заносится в список x20. Если x32 не элементарное либо на одну из задач получен "отказ", то применение приема отменяется.

По окончании просмотра элементов x21 списка x17 переменной x21 присваивается теоретико-множественное объединение выражений списка x20. В нашем примере оно совпадает с приведенным выше выражением " $((2n - 1)\pi/2, (2n + 1)\pi/2)$ ". Если бы заголовком x21 был символ "объединение", то была бы предпринята попытка его упрощения вспомогательной задачей на преобразование, имеющей единственную посылку "целое(x16)". При получении выражения, не имеющего своим заголовком символа "объединение", оно было бы подставлено вместо x21.

Проверяется, что заголовок выражения x21 отличен от символа "объединение" и что переменная x16 встречается в этом выражении. Переменной x22 присваивается результат подстановки нуля вместо целочисленной переменной x16 в выражение x21. Решается задача на описание, условиями которой служат утверждения "принадлежит(x8 x22)", "принадлежит(x8 x21)", "не(равно(x16 0))", "целое(x16)". Единственная ее посылка - константа "истина". Цели задачи - "полный", "явное", "прямой-ответ", "и", "неизвестные x16 x8". В нашем случае условия задачи суть: " $a \in ((0 \cdot 2 - 1)\pi/2, (0 \cdot 2 + 1)\pi/2)$ ", " $a \in ((n \cdot 2 - 1)\pi/2, (n \cdot 2 + 1)\pi/2)$ ", " $\neg(n = 0)$ ", " $n - \text{целое}$ ". Ответ присваивается переменной x25. В нашем примере получаем константу "ложь". Переменной x26 присваивается набор наборов конъюнктивных членов дизъюнктивных членов утверждения x25. Переменной x27 присваивается дизъюнкция равенств "равно(x8 t)" по всем первым элементам t пар (t, A) списка x17. В нашем примере - равенство " $a = \arctg b + \pi n$ ". Переменной x28 присваивается результат подстановки нуля вместо x16 в терм x27. Переменной x29 присваивается объединение результата удаления утверждения x14 из списка x12 с утверждениями списка x11, параметры которых содержатся в списке x18. Просматриваются элементы x30 списка x26. Для каждого из них предпринимается попытка усмотреть, что x28 - следствие утверждений x29, x30 и утверждения x27. Если это удастся, то переменной x30 присваивается результат добавления к антецедентам x11 утверждение "принадлежит(x8 x11)", а переменной x31 - эквивалентность заменяемого терма теоремы конъюнкции отличных от x14 утверждений списка x12 и утверждения x28. Затем создается импликация с антецедентами x30 и консеквентом x31. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

3. Попытка усмотрения значений параметров, при которых две серии совпадают.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_x(x - \text{число} \rightarrow \cos x = 1 \leftrightarrow \exists_n(x = 2\pi n \ \& \ n - \text{целое}))$$

из теоремы

$$\forall_{ax}(a - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \rightarrow a = \cos x \leftrightarrow (\exists_n(x = 2\pi n - \arccos a \ \& \ n - \text{целое}) \vee \exists_n(x = 2\pi n + \arccos a \ \& \ n - \text{целое})) \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq -a + 1)$$

В нашем примере характеристика - "неизвпарам(x второйтерм)".

Переменной x_8 присваивается первый операнд характеристики. В нашем случае - переменная " x ". Переменной x_{11} присваивается набор антецедентов, переменной x_{12} - набор конъюнктивных членов заменяющего терма. Среди утверждения списка x_{12} выбирается утверждение x_{13} с заголовком "или". Переменной x_{14} присваивается остаток списка x_{12} после удаления из него утверждения x_{13} . Проверяется, что x_8 не встречается в утверждениях x_{14} . Переменной x_{15} присваивается набор дизъюнктивных членов утверждения x_{13} . Проверяется, что его длина равна 2, заголовок каждого утверждения списка x_{15} - "существует", и это утверждение содержит переменную x_8 . Переменной x_{16} присваивается список отличных от x_8 параметров утверждений x_{15} . В нашем случае он состоит из единственной переменной a . Проверяется, что список x_{16} непуст. Переменной x_{17} присваивается равенство выражений "класс($x_8 \ A_1$)" и "класс($x_8 \ A_2$)", где A_1, A_2 - первый и второй элементы списка x_{15} . Переменной x_{18} присваивается результат объединения списка всех не содержащих x_8 утверждений списка x_{11} , утверждений x_{14} и единственного утверждения x_{17} . В нашем примере получается список " $a - \text{число}$ ", " $0 \leq a + 1$ ", " $0 \leq -a + 1$ ", " $\text{set}_x(\exists_n(x = 2\pi n - \arccos a \ \& \ n - \text{целое})) = \text{set}_x(\exists_n(x = 2\pi n + \arccos a \ \& \ n - \text{целое}))$ ". Решается задача на описание, единственная посылка которой - константа "истина", а условия - утверждения x_{18} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{16} ". Переменной x_{21} присваивается ответ задачи. В нашем примере - " $a = -1 \vee a = 1$ ". Переменной x_{22} присваивается то из утверждений x_{15} , которое короче. В нашем примере - " $\exists_n(x = 2\pi n + \arccos a \ \& \ n - \text{целое})$ ". Переменной x_{23} присваивается конъюнкция утверждений x_{14} и утверждения x_{22} . Создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к списку x_{11} конъюнктивных членов утверждения x_{21} . Консеквент - эквивалентность заменяемого терма теоремы и утверждения x_{23} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема", а затем - оператором "нормдлялюбого". В нашем примере получается:

$$\forall_x(x - \text{число} \rightarrow \cos x = -1 \leftrightarrow \exists_n(x = 2\pi n + \pi \ \& \ n - \text{целое})) \ \& \ \forall_x(x - \text{число} \rightarrow \cos x = 1 \leftrightarrow \exists_n(x = 2\pi n \ \& \ n - \text{целое}))$$

Конъюнктивные члены последнего утверждения регистрируются в списке вывода (в нашем примере рассматриваем второй конъюнктивный член).

4. Попытка использовать справочник "ограничитель" для ограничения ответа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ \neg(\cos a = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq -a + \pi \rightarrow \text{tg } a = b \leftrightarrow a = \pi + \text{arctg } b \ \& \ b \leq 0 \vee a = \text{arctg } b \ \& \ 0 \leq b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ \neg(\cos a = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \rightarrow \operatorname{tg} a = b \leftrightarrow \exists_n(n - \text{целое} \ \& \ a = \operatorname{arctg} b + \pi n))$$

В нашем примере характеристика - "неизвпарам(a второйтерм)".

Переменной x_8 присваивается первый операнд характеристики, переменной x_{11} - набор антецедентов, переменной x_{12} - заменяющий терм. Проверяется, что его заголовок - "существует". Переменной x_{13} присваивается заменяемый терм. В нем берется вхождение x_{14} переменной x_8 , являющееся корневым операндом одноместной операции x_{16} . В нашем примере - тангенса. Справочник "ограничитель" определяет по x_{16} набор утверждений, каждое из которых определяет некоторый типичный контекст использования операции x_{16} . Единственная переменная, встречающаяся в таких утверждениях, рассматривается как аргумент операции. Среди этих утверждений выбирается некоторое утверждение x_{19} . В нашем примере - " $0 \leq x \ \& \ x \leq \pi$ ". Это - обычная ситуация для планиметрии. Определяется результат x_{21} подстановки переменной x_8 в утверждение x_{19} вместо его единственной переменной. В нашем случае - " $0 \leq a \ \& \ a \leq \pi$ ". Переменной x_{22} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{21} . Набор антецедентов разбивается на поднабор x_{23} утверждений, содержащих переменную x_8 , и поднабор x_{24} утверждений, не содержащих ее. Переменной x_{27} присваивается объединение списков x_{23} , x_{22} и утверждения x_{12} . Решается задача на описание с посылками x_{24} и условиями x_{27} . Ее цели - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "неизвестные x_8 ", "упростить". В нашем примере условия задачи суть " $a - \text{число}$ ", " $\neg(\cos a = 0)$ ", " $\exists_n(n - \text{целое} \ \& \ a = \operatorname{arctg} b + \pi n)$ ", " $0 \leq a$ ", " $a \leq \pi$ ". Ответ присваивается переменной x_{29} . В нашем примере он имеет вид " $a = \pi + \operatorname{arctg} b \ \& \ b \leq 0 \ \vee \ a = \operatorname{arctg} b \ \& \ 0 \leq b$ ". Переменной x_{30} присваивается результат обработки процедурой "нормантецеденты" объединения списков x_{11} и x_{22} относительно параметров утверждения x_{29} . Затем создается импликация с антецедентами x_{30} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{13} и x_{29} . Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "глуб(x_8 второйтерм)", т.е. будет использоваться для создания приема, разрешающего уравнение относительно x_8 .

Использование дополнительного тождества для упрощения заменяющей части

1. Попытка уменьшения числа вхождений параметров путем зануления операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_x(x - \text{число} \ \rightarrow \sin x = 0 \leftrightarrow \exists_n(x = \pi n \ \& \ n - \text{целое}))$$

из теоремы

$$\forall_{ax}(a - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \ \rightarrow \sin x = a \leftrightarrow |a| \leq 1 \ \& \ \exists_n(n - \text{целое} \ \& \ x = \pi n + (-1)^n \operatorname{arcsin} a))$$

и дополнительной теоремы

$$\operatorname{arcsin} 0 = 0$$

В нашем примере характеристика - "неизвпарам(x второйтерм)".

Переменной x_8 присваивается первый операнд характеристики, переменной x_{11} - набор антецедентов, переменной x_{12} - заменяющий терм. Внутри него усматривается вхождение x_{13} квантора существования. Переменной x_{14} присваивается связывающая приставка этого квантора. Внутри подкванторного утверждения рассматривается вхождение x_{15} неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - подтерма " $(-1)^n \arcsin a$ ". Переменной x_{16} присваивается заголовок этого подтерма, переменной x_{17} - сам подтерм. Проверяется, что он содержит переменную связывающей приставки. Справочник "ноль определяет по символу операции x_{16} ее нулевое значение x_{19} и указание номера i операнда, по которому оно располагается. В нашем примере - соответственно, 0 и 2 (ввиду коммутативности операции, это значение берется произвольным). Рассматривается вхождение x_{20} соответствующего операнда (в случае коммутативной операции - любого операнда). Для нашего примера - вхождение арксинуса. Переменной x_{21} присваивается подтерм по вхождению x_{20} . В нашем случае - " $\arcsin a$ ". Проверяется, что он неоднобуквенный и не содержит переменных списка x_{14} . Переменной x_{22} присваивается его заголовок. Справочник поиска теорем "констцелое" находит по символу x_{22} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что ее заменяющий терм равен x_{19} . Процедура "тождвывод" определяет результат преобразования вхождения x_{20} при помощи дополнительной теоремы. Он обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.51 Характеристика "неизвтермы"

Характеристикой "неизвтермы($x_1 x_2 x_3 x_4$)" снабжаются эквивалентности, подготавливающие возможность разрешения относительно заданного подвыражения x_1 с неизвестными при помощи нормализатора уравнений x_2 . x_3 - список переменных, идентифицируемых с неизвестными подтермами, x_4 - направление замены. Если заменяющий терм устойчив к общей стандартизации, то ссылка на нормализатор x_2 может отсутствовать.

Данная характеристика сопровождается характеристикой "следтеорема($A_1 A_2$)", ссылающейся на теорему в базе теорем - эквивалентность, которая будет далее использоваться для разрешения относительно неизвестных.

Обобщение теоремы

1. Обобщение эквивалентности, подготавливающей возможность разрешения относительно неизвестного подвыражения: выделение невырожденного известного подвыражения с уникальным параметром и замена его на новый параметр.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow a \sin b - c(\cos b)^2 = d \leftrightarrow a \sin b + c(\sin b)^2 = c + d)$$

из теоремы

$$\forall_{abce}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \rightarrow a \sin b - c(\cos b)^2 = e - c \leftrightarrow e = a \sin b + c(\sin b)^2)$$

Характеристика исходной теоремы - "неизвтермы($\sin b$, квадратурн, b , второй-терм)". Характеристика "следтеорема(...)" ссылается на эквивалентность для решения квадратного уравнения.

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм, переменной x_{11} - переменная, идентифицируемая с неизвестным выражением (в нашем случае - b). Выбирается отличный от x_{11} параметр x_{12} терма x_{10} , имеющий единственное вхождение в x_{10} . В нашем примере - e .

Переменной x_{13} присваивается вхождение переменной x_{12} в терм x_{10} , переменной x_{14} - подтерм по этому вхождению. Затем предпринимается цикл попыток расширить терм x_{14} путем перехода к его надтермам. Расширение продолжается, пока не встречается терм, содержащий переменную x_{11} . Если такой терм имеет ассоциативно-коммутативный заголовок s , причем не менее двух его операндов не содержат переменной x_{11} , то в качестве x_{14} берется результат соединения операцией s всех таких операндов. В процессе расширения терма x_{14} корректируется и вхождение x_{13} , так что в итоге оно оказывается либо вхождением самого терма x_{14} , либо вхождением той операции s , часть операндов которой была выделена в терм x_{14} .

По завершении цикла расширения терма x_{14} проверяется, что результат неоднобуквенный. В нашем примере x_{14} - " $e - c$ ". Переменной x_{15} присваивается набор антецедентов. Переменной x_{17} присваивается тип значения операции - заголовок терма x_{14} . Выбирается переменная x_{18} , не входящая в теорему. В нашем примере - переменная d . Решается задача на описание с посылками x_{15} , условиями которой служат равенство переменной x_{18} терму x_{14} и терм " $x_{17}(x_{18})$ ". В нашем примере - " $d = e - c$ " и " $d - \text{число}$ ". Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{12} ". Переменной x_{21} присваивается ответ. В нашем примере - " $e = c + d \ \& \ d - \text{число}$ ". Переменной x_{22} присваивается набор конъюнктивных членов ответа. В нем выбирается равенство x_{23} переменной x_{12} некоторому выражению x_{24} . Переменной x_{25} присваивается переменная x_{18} , причем если x_{14} представляло собой лишь часть операндов некоторой операции s , то переменная x_{18} дополняется остальными операндами указанной операции. В нашем примере x_{25} - переменная d . Переменной x_{27} присваивается результат подстановки выражения x_{24} вместо переменной x_{12} в заменяющий терм теоремы. В нашем примере - " $c + d = a \sin b + (\sin b)^2$ ". Переменной x_{28} присваивается результат замены вхождения x_{13} в терм x_{10} на выражение x_{25} . В нашем примере - " $a \sin b - c(\cos b)^2 = d$ ". Переменной x_{29} присваивается объединение набора результатов подстановки x_{24} вместо x_{12} в антецеденты теоремы с результатом отбрасывания в наборе x_{22} утверждения x_{23} .

Среди характеристик теоремы находится элемент "следтеорема($A_1 A_2$)", который присваивается переменной x_{30} . Предпринимается блокировка приемов, основанных на теореме по ссылке (A_1, A_2), и решается задача на описание. Ее посылки - утверждения x_{29} , условия - конъюнктивные члены утверждения x_{27} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "редуцирование", "попыткаспуска", "неизвестные x_{11} ". Если ответ на нее отличен от символа "отказ",

то он переписывается переменной x27. В нашем примере происходит лишь перестановка частей равенства x27.

Далее восстанавливается исходная блокировка приемов, основанных на теоремах ячейки вывода. Переменной x29 переписывается результат обработки процедурой "нормантецеденты" утверждений x29 относительно параметров утверждений x27 и x28. Затем создается импликация с антецедентами x29, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x27, x28. Ориентация выбирается та же, что в исходной теореме. В списке вывода новая теорема помечается как обобщение исходной, а исходная - сопровождается пометкой "исключение".

2. Обобщение эквивалентности, подготавливающей возможность разрешения относительно неизвестного подвыражения: исключение отрицания.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abde}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow a \sin b + e(\cos b)^2 = d \leftrightarrow a \sin b - e(\sin b)^2 = d - e)$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow a \sin b - c(\cos b)^2 = d \leftrightarrow a \sin b + c(\sin b)^2 = c + d)$$

Характеристики исходной теоремы - те же, что в примере предыдущего приема.

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - переменная, идентифицируемая с неизвестным выражением (в нашем случае - b). Выбирается отличный от x11 параметр x12 терма x10, имеющий единственное вхождение в x10. В нашем примере - c . Рассматривается вхождение x13 параметра x12 в терм x10. Переменной x14 присваивается вхождение непосредственной надоперации вхождения x13, переменной x15 - символ по вхождению x14. В нашем примере - "умножение". Проверяется, что арность символа x15 равна 2. Переменной x16 присваивается вхождение непосредственной надоперации вхождения x15. Проверяется, что она одноместная, и переменной x17 присваивается символ по вхождению x16. В нашем случае - "минус". Справочник "замена-знака" определяет по символу x15 пару (g, n) либо тройку (g, n, h) , такие, что внешний знак g (в случае тройки - h) можно перенести на n -й операнд операции x15, с заменой его (только в случае тройки) на g . В нашем примере переменной x20 присваивается пара (минус 1). Проверяется, что первый элемент набора x20 - символ x17. В случае некоммутативной операции x15 проверяется, что x13 есть n -й операнд операции x14. Переменной x22 присваивается выражение "x17(x12)". В нашем примере - " $-c$ ". Переменной x23 присваивается набор антецедентов теоремы. Переменной x25 присваивается тип значений операции x17. В нашем случае - "число". Предпринимается подразбиение набора x23 на набор x26 посылок, содержащих переменную x12, и набор x27 остальных посылок. Выбирается новая переменная x28. В нашем примере - e . Переменной x29 присваивается результат добавления равенства выражений x28 и x22 к набору x26. Переменной x30 присваивается результат добавления утверждения "x25(x28)" к набору x27. Затем решается задача на описание с посылками x30 и

условиями x_{29} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "упростить", "неизвестные x_{12} ". Ответ присваивается переменной x_{32} . В нашем примере - " $c = -e$ ". Переменной x_{33} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{32} . В нем выбирается равенство x_{34} переменной x_{12} некоторому выражению x_{35} . Переменной x_{38} присваивается результат подстановки выражения x_{35} вместо переменной x_{12} в заменяющий терм теоремы. В нашем примере - " $a \sin b + (-e)(\sin b)^2 = d - e$ ". Переменной x_{39} присваивается результат замены переменной x_{12} на переменную x_{28} в подтерме по вхождению x_{14} . В нашем примере - " $e(\cos b)^2$ ". Переменной x_{40} присваивается результат замены вхождения x_{16} в терм x_{10} на x_{39} . В нашем примере - " $a \sin b + e(\cos b)^2 = d$ ". Переменной x_{41} присваивается объединение списка x_{30} и результата удаления равенства x_{34} из набора x_{33} . В нашем примере - " e - число", " b - число", " a - число", " d - число".

Среди характеристик теоремы находится элемент "следтеорема($A_1 A_2$)", который присваивается переменной x_{42} . Предпринимается блокировка приемов, основанных на теореме по ссылке (A_1, A_2), и решается задача на описание. Ее посылки - утверждения x_{41} , условия - конъюнктивные члены утверждения x_{38} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "редуцирование", "попытка пуска", "неизвестные x_{11} ". Если ответ на нее отличен от символа "отказ", то он переписывается переменной x_{38} . В нашем примере происходит лишь вынесение наружу минуса перед e .

Далее восстанавливается исходная блокировка приемов, основанных на теоремах ячейки вывода. Переменной x_{41} переписывается результат обработки процедурой "нормантецеденты" утверждений x_{41} относительно параметров утверждений x_{38} и x_{40} . Затем создается импликация с антецедентами x_{41} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{38} , x_{40} . Ориентация выбирается та же, что в исходной теореме. В списке вывода новая теорема помечается как обобщение исходной, а исходная - сопровождается пометкой "исключение".

3.52 Характеристика "неравенства"

Характеристикой "неравенства" снабжаются эквивалентности для двух неравенств с невырожденными числовыми атомами.

Логические следствия теоремы

1. Вывод импликации из эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC} (\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ 0 \leq -l(AB) + l(BC) \rightarrow 0 \leq -\angle(ACB) + \angle(BAC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC} (\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ 0 \leq -l(AB) + l(BC) \leftrightarrow 0 \leq -\angle(ACB) + \angle(BAC))$$

В качестве результата берется импликация, полученная из исходной добавлением к антецедентам одной части консеквента и сохранением в консеквенте другой части.

3.53 Характеристика "норм"

Характеристикой "норм(N)" снабжаются тождества общей стандартизации, для которых обратное преобразование в пакетах приведения к заданным заголовкам тоже рассматривается как допустимое. N - направление замены.

Использование дополнительного тождества для упрощения заменяемой части

1. Попытка проварьировать заменяемую часть тождества общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(\neg(c \in d) \ \& \ d - \text{set} \ \& \ b - \text{слово} \rightarrow \{c; b\} \setminus d = \{; b\} \setminus d \cup \{c\})$$

из теоремы

$$\forall_{adf}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, d) \rightarrow (a \cup f) \setminus d = a \cup (f \setminus d))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{слово} \rightarrow \{; c\} \cup \{d\} = \{d; c\})$$

Проверяется, что заголовок теоремы - квантор общности, причем число переменных корневой связывающей приставки не более 3. В заменяемой части тождества выбирается вхождение x_{11} неоднобуквенного подтерма; переменной x_{12} присваивается символ по этому вхождению. В нашем примере x_{11} - вхождение терма " $a \cup f$ ". Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что число переменных ее корневой связывающей приставки не более 3. Переменной x_{16} присваивается вхождение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x_{12} . В нашем примере - " $\{; c\} \cup \{d\}$ ". Она далее рассматривается как заменяемая часть дополнительной теоремы. Проверяется, что дополнительная теорема не обеспечивает общей стандартизации в обратном направлении. Процедура "тождвывод" определяет результат x_{18} преобразования вхождения x_{11} в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. В нашем случае он имеет вид:

$$\forall_{bcd}(\{c\} - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ \{; b\} - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(\{c\}, d) \ \& \ b - \text{слово} \rightarrow \{c; b\} \setminus d = \{c\} \cup \{; b\} \setminus d)$$

Переменной x_{19} присваивается результат обработки теоремы x_{18} операторами "Спускоперандов" и "демодемодификация". В нашем примере x_{19} совпадает с x_{18} . Предпринимается переблокировка приемов, основанных на теоремах текущей ячейки вывода: приемы, основанные на исходных теоремах ячейки, не блокируются. Затем переменной x_{20} присваивается результат последовательной обработки теоремы x_{19} процедурами "Полныепосылки" и "нормтеорема". Далее

восстанавливается полная блокировка приемов, основанных на теоремах текущей ячейки вывода. Проверяется, что заголовок терма x20 - "длялюбого", причем число переменных корневой связывающей приставки этого терма не более чем на единицу больше числа переменных корневой связывающей приставки исходной теоремы. Если хотя бы одна из частей тождества x20 небесповторна, причем исходная теорема не является исходной теоремой ячейки вывода, то проверяется, что число переменных корневой связывающей приставки теоремы x20 не превосходит 2. Затем x20 регистрируется в списке вывода.

2. Попытка упростить заменяемую часть тождества общей стандартизации с помощью сокращающего тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ b \subseteq c \ \& \ c \cap d \subseteq b \rightarrow c \setminus d = b \setminus d \cup c \setminus b)$$

из теоремы

$$\forall_{adf}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, d) \rightarrow (a \cup f) \setminus d = a \cup (f \setminus d))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ac}(c - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ a \subseteq c \rightarrow a \cup (c \setminus a) = c)$$

Проверяется, что заголовок теоремы - квантор общности, причем число переменных корневой связывающей приставки не более 3. В заменяемой части тождества выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма; переменной x12 присваивается символ по этому вхождению. В нашем примере x11 - вхождение подтерма "a ∪ f". Справочник поиска теорем "Сокращение" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тожд-вывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{bcd}(c\text{-set} \ \& \ d\text{-set} \ \& \ b\text{-set} \ \& \ \text{непересек}(c \setminus b, d) \ \& \ c\text{-set} \ \& \ b \subseteq c \rightarrow c \setminus d = c \setminus b \cup b \setminus d)$$

Переменной x19 присваивается результат обработки теоремы x18 операторами "Спускоперандов" и "демодификация". В нашем примере он совпадает с x18. Проверяется, что x19 имеет своим заголовком квантор общности. Предпринимается переблокировка приемов, основанных на теоремах текущей ячейки вывода: приемы, основанные на исходных теоремах ячейки, не блокируются. Затем переменной x20 присваивается результат последовательной обработки теоремы x19 процедурами "полныепосылки" и "нормтеорема". Далее восстанавливается полная блокировка приемов, основанных на теоремах текущей ячейки вывода. Теорема x20 регистрируется в списке вывода.

3.54 Характеристика "нормализация"

Характеристикой "нормализация(N)" снабжаются тождества общей стандартизации. N - направление замены.

Применение дополнительного тождества для упрощения заменяемого термина

1. Подстановка единицы вместо переменной - операнда корневой ассоциативно-коммутативной операции заменяемого термина, не входящей в другие корневые операнды.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a - a = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \& b - \text{число} \rightarrow a + b - a = b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - ее заголовок. Проверяется, что он ассоциативен и коммутативен. Выбирается корневой операнд термина x10, представляющий собой переменную x13. В нашем примере - "b". Проверяется, что эта переменная имеет в x10 единственное вхождение и что количество корневых операндов термина x10 больше 2. Справочник "единица" определяет единицу x15 операции x11. В нашем примере - 0. Переменной x16 присваивается результат отбрасывания у x10 операнда x13. В нашем случае - "a - a". Переменной x17 присваивается набор антецедентов теоремы. Он разбивается на две части - x18 состоит из утверждений, содержащих переменную x13, а x19 - из остальных утверждений. Определяется набор x20 результатов подстановки в утверждения набор x13 единицы x15 вместо переменной x13. Проверяется, что все они усматриваются проверочными операторами из утверждений x19. Определяется результат подстановки единицы x15 вместо переменной x13 в заменяющую часть теоремы. Переменной x22 присваивается результат упрощения его относительно утверждений x19 при помощи нормализаторов общей стандартизации. Затем формируется итоговая импликация с антецедентами x19, консеквентом которой является равенство выражений x16 и x22.

2. Попытка равноценной переформулировки заменяемой части тождества общей стандартизации либо свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(\neg(a = 0) \& \neg(b = 0) \& d - \text{число} \& a - \text{число} \& b - \text{число} \rightarrow d|b|/|ab| = d/|a|)$$

из теоремы

$$\forall_{cdf}(\neg(c = 0) \& \neg(f = 0) \& c - \text{число} \& d - \text{число} \& f - \text{число} \rightarrow df/(cf) = d/c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \& b - \text{число} \rightarrow |a||b| = |ab|)$$

Описываемый ниже прием получился более громоздким, чем обычно, так как стандартизация теоремы была вынесена из оператора "нормтеорема" в длинную цепочку явно перечисляемых несложных преобразований. Он отработывался на материале алгебры логики, где непосредственная нормализация теоремы вспомогательной задачей приводила к разрушению представляющих интерес следствий. Вероятно, все-таки стоит попробовать его упростить.

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть, переменной x_{11} - заменяющая. Проверяется, что x_{10} небесповторно, а x_{11} бесповторно. Оператор "вартеор" определяет список пар (теорема - ее характеристики), которые могут оказаться полезными для равноценных переформулировок термов x_{10} и x_{11} . Для этого привлекаются справочники поиска теорем "перестановки" и "варпарам". Внутри заменяемой части теоремы выбирается вхождение x_{14} неоднобуквенного подтерма, внутри которого имеется вхождение с более чем одним операндом. В нашем примере - вхождение терма cf . Переменной x_{15} присваивается символ по вхождению x_{14} . В списке x_{12} выбирается тождество, имеющее заголовком одной из своих частей символ x_{15} . В нашем случае - указанная выше дополнительная теорема. Оператор "тождвывод" определяет результат x_{22} преобразования вхождения x_{14} при помощи дополнительной теоремы. В нашем случае он имеет вид:

$$\forall_{abd}(\neg(|a| = 0) \ \& \ \neg(|b| = 0) \ \& \ |a| - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ |b| - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow d|b|/|ab| = d/|a|)$$

Проверяется, что либо исходная теорема является исходной теоремой ячейки вывода, либо длина связывающей приставки теоремы x_{22} не превосходит максимума из 3 и длины связывающей приставки исходной теоремы. Оператор "Варотр" проверяет, имеет ли заменяемая часть теоремы x_{22} заголовок типа "отрицания" (например, "минус"). Если имеет, то переменная x_{23} последовательно перечисляет теореме x_{22} и теореме, полученную из применением данного "отрицания" к обеим частям. Иначе переменной x_{23} передается значение x_{22} . Переменной x_{24} присваивается результат обработки теоремы x_{23} оператором "Спускоперандов". В нашем примере он совпадает с x_{23} . Переменной x_{26} присваивается заменяемая часть теоремы x_{24} , а переменной x_{27} - заменяющая.

Если заголовком термов x_{26} и x_{27} служит одна и та же ассоциативно-коммутативная операция, то проверяется отсутствие общего их операнда - переменной, не входящей в прочие операнды.

Переменной x_{28} присваивается набор antecedентов теоремы x_{25} , переменной x_{27} переписывается результат обработки терма x_{27} нормализаторами общей стандартизации относительно x_{28} . В нашем примере x_{27} не изменяется.

Если ни один из корневых операндов терма x_{26} не изменяется нормализаторами общей стандартизации, то переменной x_{29} присваивается одноэлементный список, состоящий из терма x_{26} . Иначе - просматриваются теоремы T списка x_{12} , отличные от дополнительной теоремы и имеющие характеристику "свертка(...)" либо "нормализация(...)". Процедура "тождпреобр" (не путать с "тождвывод") определяет результат преобразования терма x_{26} при помощи теоремы T . Если корневые операнды данного результата не изменяются нормализаторами общей стандартизации, то он добавляется к списку x_{29} .

Выбирается какой-либо элемент x_{30} списка x_{29} . В нашем примере он совпадает с x_{26} , т.е. равен " $d|b|/|ab|$ ". Проверяется, что исходная теорема и теоремы списка x_{12} не изменяют терма x_{30} . Проверяется, что количество небесповторных переменных в x_{30} не больше, чем в x_{10} . Переменной x_{31} присваивается список пар (переменная x - операция f типа "отрицание"), таких, что каждое вхождение переменной x в x_{30} расположено непосредственно под операцией f . Переменной

x32 присваивается результат замены согласно списку x31 всех вхождений выражений $f(x)$ в x30 на переменную x , переменной x33 - набор результатов замены в утверждениях списка x28 выражений $f(x)$ на x , а прочих вхождений x - на $f(x)$. Переменной x34 присваивается набор, состоящий из x32 и всевозможных результатов упрощения x32 относительно x33 при помощи теорем списка x12. В этом наборе выбирается элемент x35. Переменной x36 присваивается результат его обработки оператором "Спускоперандов". Проверяется, что корневые операнды терма x36 не изменяются нормализаторами общей стандартизации. Рассматривается результат R замены согласно списку x31 в терме x27 выражений $f(x)$ на x , а прочих вхождений x - на $f(x)$. Переменной x37 присваивается список результатов упрощения терма R при помощи теорем x12. Рассматривается элемент x38 набора x37. Предпочтение отдается тому элементу, который получается из терма x32 вычеркиванием части операндов некоторых операций. Переменной x40 присваивается результат обработки набора набор x33 оператором "нормантецеденты" относительно параметров термов x36, x38. Затем создается импликация с антецедентами x40. Ее консеквентом служит равенство термов x36 и x38, с сохранением исходной ориентации. Переменной x41 присваивается результат обработки данной импликации оператором "полныепосылки". Проверяется отсутствие у x41 сдвоенных переменных. Проверяется, что число переменных ее корневой связывающей приставки не превосходит 3. Если в заменяющем терме H импликации x41 число n однобуквенных подтермов больше 3, причем у терма x10 таких подтермов меньше, чем у H , то проверяется, что $n = 4$, а число неоднобуквенных подтермов H не более 3. После этих проверок теорема x41 регистрируется в списке вывода. Она сопровождается единственной характеристикой "нормализация(...)" - той же, что была у исходной теоремы.

3. Попытка опрокинуть тождество общей стандартизации путем сильного упрощения заменяемого терма.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \rightarrow \ (a/b)/c = a/(bc))$$

из теоремы

$$\forall_{cdf}(\neg(c = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \rightarrow \ (df)/(cf) = d/c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \ \rightarrow \ (a/b)b = a)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. Проверяется, что терм x11 неоднобуквенный. Просматриваются логические символы терма x10, и для каждого из них предпринимаются обращения к справочникам поиска теорем "констнорм", "тожд", "поглощается", "поглощает", "конствхожд", "сократимо", "исклтерм", "сокращмн". Результаты обращений, т.е. пары (теорема - список характеристик), накапливаются в списке x12.

Проверяется, что исходная теорема не имеет характеристики "смтеорема". В заменяемой части рассматривается вхождение x14 неоднобуквенного подтерма,

и заголовок его присваивается переменной x15. В нашем примере x14 - вхождение подтерма "df". В списке x12 выбирается некоторая пара, и переменной x17 присваивается ее теорема. В нашем случае - указанная выше дополнительная теорема. Та часть тождества x17, которая имеет заголовок x15, рассматривается как заменяемая. При помощи процедуры "тождвывод" определяется результат x22 преобразования вхождения x14 посредством дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{abc}(\neg(c = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ (a/b) - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \rightarrow \ a/(cb) = (a/b)/c)$$

Переменной x23 присваивается результат обработки теоремы x22 операторами "Спускоперандов" и "демодификация". В нашем примере он совпадает с x22. Переменной x25 присваивается заменяемая часть теоремы x23, причем направление замены - такое же, как в сиходной теореме. Таким образом, в нашем примере получается, что x25 - левая часть. Переменной x26 присваивается заменяющая (в нашем примере - правая) часть теоремы x23. Проверяется, что x26 имеет не более одной небесповторной переменной. Переменной x28 присваивается результат обработки терма x25 нормализаторами общей стандартизации относительно списка x27 антецедентов теоремы x23. В нашем примере лишь меняются местами сомножители - получается "a/(bc)". Проверяется, что корневые операнды терма не изменяются нормализаторами общей стандартизации относительно списка x27. Проверяется, что теоремы списка x12 не упрощают выражение x26. Переменной x29 поочередно присваиваются терм x28 и (при отсутствии у дополнительной теоремы существенных посылок) результат обработки утверждения x28 относительно посылок x27 оператором "свертка". В последнем случае блокировка приемов сначала снимается, а затем восстанавливается. В нашем примере x29 совпадает с x28. Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" выражений x26 и x29 различаются. Переменной x30 присваивается результат обработки утверждений x27 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров выражений x26 и x29. Затем создается импликация с антецедентами x30, консеквентом которой служит равенство выражений x26 и x29. Эта импликация обрабатывается операторами "Полныепосылки" и "нормтеорема". Результат присваивается переменной x31. В нашем примере он совпадает с выводимой теоремой. Проверяется, что терм x31 отличен от константы "истина" и не имеет сдвоенных переменных. Проверяется, что исходная теорема не преобразует левую часть консеквента импликации x31. При помощи процедуры "характеризатор" определяется список x32 характеристик теоремы x31. В нашем примере - "нормализация(второйтерм)", "Выч(дробь(a b) сокращдоби первытерм)", "обобщмножитель", "группировки", "единствсуц(второйтерм)". Проверяется, что в списке x32 есть хотя бы одна из характеристик "норм(второйтерм)", "нормализация(второйтерм)", "сокращ(второйтерм)", "группировки". Проверяется, что в списке вывода и в списке x12 нет теоремы, отличающейся от x31 лишь переобозначением связанных переменных, перестановкой операндов коммутативных операций и симметричных отношений, а также инвертированием переменных, которые встречаются как под операцией типа "отрицание", так и без нее. Затем x31 регистрируется в списке вывода.

4. Попытка проварьировать заменяемую часть тождества общей стандартизации:

простейшие варьируемые тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdef}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(d) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{числитель}(d) - \text{even}) \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ d - \text{rational} \rightarrow -(e - f)^c(f - e)^d = (e - f)^{c+d})$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{rational} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \neg(\text{числитель}(a) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(a) - \text{even}) \rightarrow (b - c)^a = -(c - b)^a)$$

Внутри заменяемой части теоремы выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма с заголовком x12. В нашем примере - подтерма " a^b ". Проверяется, что длина кванторной приставки теоремы не более 3. Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она представляет собой кванторную импликацию, имеющую не более трех переменных. Переменной x16 присваивается вхождение той части дополнительной теоремы, которая имеет своим заголовком символ x12. Эта часть далее рассматривается как заменяемая. Среди характеристик дополнительной теоремы отсутствует элемент "упрощение(...)" либо "нормализация(...)", указывающий на противоположное направление замены. Процедура "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x11 при помощи тождества x13. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{cdef}((e - f) - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{rational} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(d) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \neg(\text{числитель}(d) - \text{even}) \rightarrow -(f - e)^d(e - f)^c = (e - f)^{d+c})$$

Переменной x19 присваивается результат обработки теоремы x18 процедурами "Спускоперандов" и "демодемодификация". Это не изменяет теоремы. Если заменяемая часть теоремы x19 не бесповторна, то проверяется, что длина кванторной приставки этой теоремы меньше 5. Предпринимается переблокировка приемов, основанных на теоремах текущей ячейки вывода: приемы, основанные на исходных теоремах ячейки, не блокируются. Затем переменной x20 присваивается результат последовательной обработки теоремы x19 процедурами "Полныепосылки" и "Нормтеорема". Далее восстанавливается полная блокировка приемов, основанных на теоремах текущей ячейки вывода. Процедуре "Нормтеорема" передается одноэлементный список комментариев, состоящий из символа "свертка". Проверяется, что x20 - кванторная импликация, оценка сложности консеквента которой не менее оценки сложности консеквента исходной теоремы. Проверяется, что длина кванторной приставки теоремы x20 не более чем на единицу превосходит длину кванторной приставки исходной теоремы. Если хотя бы одна из частей консеквента теоремы x20 небесповторна, то проверяется, что длина кванторной приставки теоремы x20 не превосходит 5 для случая

исходной теоремы списка вывода и не превосходит 3 для полученной в данном цикле вывода. Затем x20 регистрируется в списке вывода.

5. Попытка проварьировать заменяемую часть тождества общей стандартизации: простейшие варьирующие тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdef}(\neg(d = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ f \leq 0 \ \& \ de \leq 0 \rightarrow (-f)^c(-e/d)^c = (ef/d)^c)$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(d = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq b \ \& \ 0 \leq ad \rightarrow b^c(a/d)^c = (ab/d)^c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow -b(-c) = bc)$$

В заменяемой части рассматривается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - "ab". Переменной x12 присваивается заголовок этого подтерма. Проверяется, что длина кванторной приставки теоремы не менее 4, а заменяемый терм неповторен. Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что длина ее кванторной приставки не более 2. Находится характеристика "нормализация(N)" дополнительной теоремы, указывающая ее направление замены. Переменной x18 присваивается заменяемая часть дополнительной теоремы, переменной x19 - заменяющая. Проверяется, что оценки сложности этих частей равны и что оценка сложности заменяемой части исходной теоремы не меньше оценки сложности терма x19. Проверяется, что все заголовки имеющих максимальную сложность подтермов терма x18 встречаются в заменяемом терме исходной теоремы. Проверяется отсутствие в терме x18 однобуквенных подтермов, образованных логическими символами. Проверяется, что дополнительная теорема не была уже использована в таком же качестве при выводе (в текущем цикле вывода) исходной теоремы. Оператор "тождвывод" определяет результат x20 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере имеем:

$$\forall_{cdef}(\neg(d = 0) \ \& \ (-e) - \text{число} \ \& \ (-f) - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq -f \ \& \ 0 \leq (-e)d \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow (-f)^c(-e/d)^c = (ef/d)^c)$$

Проверяется, что длины кванторных приставок теоремы x20 и исходной теоремы равны. Теорема x20 последовательно обрабатывается операторами "Спускоперандов", "демодификация", "Полныепосылки", "нормтеорема". При обработке последними двумя операторами предпринимается временная переблокировка приемов, основанных на теоремах текущей ячейки вывода: приемы, основанные на исходных теоремах ячейки, не блокируются. Результат регистрируется в списке вывода. Предварительно проверяется, что он получает характеристику "нормализация".

6. Попытка упростить заменяемую часть тождества общей стандартизации с помощью нормализующей дистрибутивной развертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdef} (\neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \ \& \ 0 < de \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{rational} \rightarrow d^f e^f (de)^c = (de)^{c+f})$$

из теоремы

$$\forall_{abc} (a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < a \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc} (a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^c b^c = (ab)^c)$$

Проверяется, что кванторная приставка теоремы имеет не более трех переменных. В заменяемом терме рассматривается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - a^b . Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. Справочник поиска теорем "дистрибразвертка" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется наличие у нее характеристики "нормализация(...)". Оператор "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Этот результат последовательно обрабатывается операторами "Спускоперандов", "демодемодификация", "полныепосылки" и "нормтеорема". При обработке последними двумя операторами предпринимается временная переблокировка приемов, основанных на теоремах текущей ячейки вывода: приемы, основанные на исходных теоремах ячейки, не блокируются. Результат регистрируется в списке вывода. Предварительно проверяется, что он получает характеристику "нормализация".

7. Попытка упростить заменяемую часть тождества общей стандартизации с помощью сокращающего тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc} (\neg(bc - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow 1 = \log_{bc} b + \log_{bc} c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc} (a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \rightarrow \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a (a - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \rightarrow \log_a a = 1)$$

Проверяется, что кванторная приставка теоремы имеет не более трех переменных. В заменяемом терме рассматривается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - $\log_a(bc)$. Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. Справочник поиска теорем "Сокращение" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется наличие у нее характеристики "нормализация(...)". Оператор "тождвывод" определяет

результат x17 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Этот результат последовательно обрабатывается операторами "Спускоперандов", "демодификация", "полныепосылки" и "нормтеорема". При обработке последними двумя операторами предпринимается временная переблокировка приемов, основанных на теоремах текущей ячейки вывода: приемы, основанные на исходных теоремах ячейки, не блокируются. Результат регистрируется в списке вывода. Предварительно проверяется, что он получает характеристику "нормализация" либо "свертка".

8. Попытка упростить заменяемую часть тождества общей стандартизации с помощью разделяющего тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcf}(\neg(c - 1 = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < ab \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{rational} \rightarrow f \cdot \log_c(a/b) = \log_c(a^f/b^f))$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(\neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \cdot \log_c d = \log_c(d^e))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow (a/b)^c = a^c/b^c)$$

Проверяется, что кванторная приставка теоремы имеет не более трех переменных. В заменяемом терме рассматривается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - d^e . Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. Справочник поиска теорем "разбиение" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется наличие у нее характеристики "нормализация(...)". Оператор "тождвывод" определяет результат x17 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Этот результат последовательно обрабатывается операторами "Спускоперандов", "демодификация", "полныепосылки" и "нормтеорема". При обработке последними двумя операторами предпринимается временная переблокировка приемов, основанных на теоремах текущей ячейки вывода: приемы, основанные на исходных теоремах ячейки, не блокируются. Результат регистрируется в списке вывода. Предварительно проверяется, что он получает характеристику "нормализация" либо "сокращ".

9. Попытка упростить заменяемую часть тождества общей стандартизации с помощью простейшего тождества, уменьшающего оценку сложности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow b^c(-1)^c = (-b)^c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^c b^c = (ab)^c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow (-1)a = -a)$$

Проверяется, что кванторная приставка теоремы имеет не более трех переменных. В заменяемом терме рассматривается вхождение x_{11} неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - ab . Переменной x_{12} присваивается символ по вхождению x_{11} . Переменной x_{13} присваивается набор антецедентов теоремы. Проверяется, что все выражения, встречающиеся в этих антецедентах, имеют не более одной переменной. Справочник поиска теорем "упрощстанд" определяет по символу x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется наличие у нее характеристики "нормализация(...)" либо "упрощение(...)". Проверяется, что либо дополнительная теорема имеет единственную переменную, причем среди ее антецедентов отсутствует равенство, либо в ней встречается подтерм вида "перечень(отображение(...))". Оператор "тождвывод" определяет результат x_{18} преобразования вхождения x_{11} при помощи дополнительной теоремы. Этот результат последовательно обрабатывается операторами "Спускоперандов", "демодификация", "полныепосылки" и "Нормтеорема" (в последнем случае используется комментарий "сокращдробь"). При обработке последними двумя операторами предпринимается временная переблокировка приемов, основанных на теоремах текущей ячейки вывода: приемы, основанные на исходных теоремах ячейки, не блокируются. Результат регистрируется в списке вывода. Предварительно проверяется, что он получает характеристику "нормализация" либо "свертка".

10. Попытка упростить заменяемую часть тождества общей стандартизации с помощью условного тождества, исключающего сложное выражение.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(0 < ab \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow d|b|/(ab) = d/|a|)$$

из теоремы

$$\forall_{abd}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow d|b|/|ab| = d/|a|)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow |a| = a)$$

В заменяемом терме рассматривается вхождение x_{11} неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - $|ab|$. Переменной x_{12} присваивается символ по вхождению x_{11} . Справочник поиска теорем "раздпарам" определяет по символу x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется наличие у нее характеристики "нормализация(...)". Оператор "тождвывод" определяет результат x_{17} преобразования вхождения x_{11} при помощи дополнительной теоремы. Этот результат последовательно обрабатывается операторами "Спускоперандов", "демодификация" и "нормтеорема". Перед обращением к последнему оператору процедура "деблок" снимает блокировку приемов, основанных на уже имеющихся в текущем списке вывода теоремах. Результат регистрируется в списке вывода. Предварительно проверяется, что он получает характеристику "нормализация" либо "декомпозиция".

11. Попытка упростить заменяемую часть тождества общей стандартизации с помощью тождества, преобразующего выражение с единственной небесповторной переменной в выражение с единственной бесповторной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{fA}(A - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \text{Val}(\text{сужение}(f, A)) = \text{образ}(f, A \cap \text{Dom}(f)))$$

из теоремы

$$\forall_{bfA}(b - \text{set} \ \& \ A - \text{set} \ \& \ b \subseteq A \ \& \ b \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \text{образ}(\text{сужение}(f, A), b) = \text{образ}(f, b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \rightarrow \text{образ}(f, \text{Dom}(f)) = \text{Val}(f))$$

Переменной x11 присваивается заголовок заменяемой части. В нашем примере - "образ". Справочник поиска теорем "тожд" определяет по x11 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется наличие у нее характеристики "нормализация(...)". Оператор "тождвывод" определяет результат x16 преобразования заменяемой части основной теоремы при помощи дополнительной теоремы. Этот результат последовательно обрабатывается операторами "Полныепосылки" и "Нормтеорема". Последнему оператору передается элемент (смтеор ...), инициирующий применение при стандартизации теоремы тождеств, уже полученных в текущем цикле вывода.

12. Подстановка единицы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{df}(\neg(f = 0) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow df/f = d)$$

из теоремы

$$\forall_{cdf}(\neg(c = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow df/(cf) = d/c)$$

Проверяется, что заменяющий терм имеет длину 3 и что консеквент имеет ровно три переменных. Переменной x11 присваивается первый операнд заменяющего терма, переменной x12 - второй. Проверяется, что эти операнды суть различные переменные. Переменной x13 присваивается заголовок заменяющего терма. В нашем примере - "дробь". Переменной x15 присваивается единица операции x13. Определяется результат x17 подстановки в консеквент теоремы единицы x15 вместо того операнда заменяющего терма, по которому это значение является единицей. В нашем примере - вместо второго операнда. Определяется набор x19 результатов такой же подстановки в antecedentes теоремы. Затем создается импликация с antecedентами x19 и консеквентом x17. Она обрабатывается оператором "нормтеорема". Полученная теорема, помимо характеристики "нормализация", снабжается также характеристикой "смтеорема", т.е. указателем, что она создана для справочников поиска теорем.

13. Учет возможной перегруппировки для кратной переменной, имеющей как вхождение под одноместной операцией, так и вне этой операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \sin a \cos c + \sin(c - a) = \sin c \cos a)$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow -\sin b \cos c + \sin(b + c) = \sin c \cos b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \sin(-a) = -\sin a)$$

Переменной x10 присваивается заменяющий терм, переменной x11 - заменяемый. Проверяется, что число параметров терма x11 не более 3. Переменной x12 присваивается один из этих параметров. В нашем примере - b. Проверяется, что он имеет более одного вхождения в терм x11. Переменной x13 присваивается вхождение переменной x12 в терм x11, являющееся операндом вхождения x14 одноместной операции x15. В нашем примере - "sin b". Проверяется, что существует такое вхождение переменной x12 в терм x11, которое не является операндом операции x15. В заменяемой части теоремы выбирается вхождение x17 подтерма, равного подтерму x14. Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x15 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что ее заменяемая часть имеет заголовок x15. Оператор "тождвывод" определяет результат x23 преобразования вхождения x17 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. В нашем случае он имеет вид:

$$\forall_{ac}((-a) - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow -(\sin a) \cos c + \sin(-a + c) = \sin c \cos(-a))$$

Теорема x23 обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому передается элемент (смтеор . . .), иницирующий применение тождеств, уже полученных в текущем цикле вывода.

14. Попытка варьирования тождества типа сокращения с помощью тождества дистрибутивной развертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcdef}(\neg(c = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow d(bf + ef)/(cf) = d(b + e)/c)$$

из теоремы

$$\forall_{cdf}(\neg(c = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow df/(cf) = d/c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ ab + ac = a(b + c))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. Проверяется, что заменяемая часть имеет параметры, не входящие в

заменяющую. Выбирается переменная x_{12} , входящая в заменяемую часть и не входящая в заменяющую. В нашем примере - переменная f . Проверяется, что x_{12} имеет более одного вхождения в терм x_{10} . Выбирается некоторое ее вхождение x_{13} в этот терм и рассматривается вхождение x_{14} , операндом которого оно является. В нашем случае - " df ". Проверяется, что по вхождению x_{14} располагается ассоциативный и коммутативный символ x_{15} , причем число операндов операции x_{14} равно 2. Находится отличный от x_{13} операнд x_{16} операции x_{14} . Проверяется, что по вхождению x_{16} располагается переменная x_{17} , имеющая единственное вхождение в x_{10} . В нашем случае - переменная d . Справочник поиска теорем "дистрибразвертка" находит по символу x_{15} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{20} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере получаем:

$$\forall_{abe}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ ab + ae = a(b + e))$$

Переменной x_{21} присваивается вхождение консеквента теоремы x_{20} , переменной x_{22} - вхождение той части консеквента, которая имеет заголовок x_{15} . В нашем примере - " $a(b+e)$ ". Переменной x_{24} присваивается тот операнд вхождения x_{22} , который представляет собой переменную; эта переменная (в нашем случае " a ") присваивается переменной x_{26} . Переменной x_{27} присваивается результат подстановки в противоположную часть консеквента теоремы x_{20} переменной x_{12} вместо x_{26} . В нашем примере - " $fb + fe$ ". Переменной x_{28} присваивается результат замены вхождения x_{13} в терм x_{10} на терм x_{27} . В нашем случае - " $d(fb + fe)/(cf)$ ". Переменной x_{29} присваивается результат подстановки в отличный от x_{24} операнд операции x_{22} переменной x_{12} вместо переменной x_{26} . В нашем случае - " $b + e$ ". Определяется результат x_{30} подстановки в заменяющую часть исходной теоремы вместо переменной x_{17} результата соединения операцией x_{15} выражений x_{29} и x_{17} . В нашем примере - " $(b+e)d/c$ ". Переменной x_{31} присваивается набор результатов подстановки переменной x_{12} вместо x_{26} в antecedentes дополнительной теоремы, переменной x_{32} - объединение списка x_{31} со списком antecedентов исходной теоремы. Создается импликация с antecedентами x_{32} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{28} и x_{30} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

15. Попытка упрощения заменяемого термина, содержащего дополнительные переменные, для исключения сложного понятия на "неудобном" операнде.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abdeghi}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(e + hg^{i/2} = 0) \ \& \ \neg(hg^{i/2} - e = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ 0 \leq g \rightarrow d(hg^{i/2} - e)^b / (a(g^i h^2 - e^2)^b) = d / (a(e + hg^{i/2})^b))$$

из теоремы

$$\forall_{acdf}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow (df/a)/(cf) = (d/a)/c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cdefg}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ 0 \leq e \rightarrow (d + fe^{g/2})^c (fe^{g/2} - d)^c = (e^g f^2 - d^2)^c)$$

Переменной x9 присваивается вхождение консеквента, переменной x10 - вхождение некоторого операнда консеквента. В нашем примере - $(df/a)/(cf)$. Переменной x12 присваивается символ по вхождению x10. Проверяется, что операция x10 имеет ровно два операнда. Справочник "операнды" определяет по символу операции x12 номер x13 того операнда этой операции, упрощение которого является в эвристическом смысле приоритетным по отношению к другому операнду. В нашем примере x13 равно 2 (сложные подтермы знаменателя, в отличие от числителя, при сложении дробных выражений получают кратные вхождения). Переменной x14 присваивается подтерм по вхождению x10, переменной x15 - противоположная часть консеквента. В нашем примере x15 - $(d/a)/c$. Проверяется, что параметры терма x14 не включаются в параметры терма x15, но все параметры терма x15 являются параметрами терма x14. Переменной x16 присваивается вхождение операнда операции x10, имеющее номер x13. В нашем примере - операнда cf . Проверяется, что подтерм x16 неоднобуквенный и что его параметры не включаются в параметры терма x15. Переменной x17 присваивается заголовок терма x16. В нашем случае - "умножение". Справочник поиска теорем "упрощстанд" находит по символу x17 указанную выше дополнительную теорему. Заметим, что вид ее несколько необычен, так как выводилась она специально как вспомогательная теорема приемов вывода теорем. Оператор "тождвывод" определяет результат x22 преобразования вхождения x16 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Переменной x24 присваивается результат обработки теоремы x22 процедурой "нормтеорема". При этом блокировка приемов отключается. Теорема x24 регистрируется в списке вывода и сопровождается единственной характеристикой "упрощдробь(N)", где N - направление перехода в исходной теореме от x15 к x14.

16. Попытка сохранения общей стандартизации при подстановке единицы вместо неповторной переменной заменяемого терма, являющегося операндом некоммутативной операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow aa^c = a^{c+1})$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Рассматривается переменная x11, имеющая в x10 единственное вхождение. В нашем примере - b . Рассматривается вхождение x12 этой переменной в x10, являющееся операндом вхождения x13 двуместной операции x14. Проверяется, что эта операция некоммутативна. Определяется ее единица x16 и проверяется, что x12 - тот операнд, по которому значение x16 является единичным. Создается импликация, антецеденты которой получены из антецедентов исходной теоремы подстановкой x16 вместо x11, а консеквент - такой же подстановкой из консеквента исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема". При регистрации в списке вывода

проверяется наличие характеристики "нормализация". Прочие характеристики отбрасываются.

17. Попытка дистрибутивной свертки для последующей нормализации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(0 < d + e \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d(d + e)^c + e(d + e)^c = (d + e)^{c+1})$$

из теоремы

$$\forall_{ac}(0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow aa^c = a^{c+1})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ ab + ac = a(b + c))$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Проверяется, что число его операндов равно 2, причем одной из частей служит переменная x13, входящая в другой операнд, отличный от x13. Проверяется, что заменяющий терм неповторный. Переменной x14 присваивается заголовок заменяемой части. Справочник поиска теорем "дистрибразвертка" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x19 преобразования вхождения x10 при помощи дополнительной теоремы. Этому оператору передается указание "новаяпеременная" на блокировку ввода новых переменных при унификации. В нашем примере x19 имеет вид:

$$\forall_{cde}(0 < d + e \ \& \ (d + e) - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ (d + e)^c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow (d + e)^c d + (d + e)^c e = (d + e)^{c+1})$$

Теорема x19 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

18. Попытка дистрибутивной развертки для сокращения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow -d(d + e)^c + (d + e)^{c+1} = e(d + e)^c)$$

из теоремы

$$\forall_{ac}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow aa^c = a^{c+1})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ade}(a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow a(d + e) - ad = ae)$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Проверяется, что число его операндов равно 2, причем одной из частей служит переменная x13, входящая в другой операнд, отличный от x13. Проверяется, что заменяющий терм неповторный. Переменной x14 присваивается заголовок заменяемой части. Справочник поиска теорем "вычерк" определяет по x14 указанную выше

дополнительную теорему. Переменной x20 присваивается вхождение заменяемого термина дополнительной теоремы, переменной x21 - заменяющий терм. В заменяемом терме находится такое вхождение x23 заголовка заменяющего термина, что заменяющий терм получен из подтерма x23 вычеркиванием части операндов. Проверяется, что никакой корневой операнд термина x23 не обладает тем же свойством. В нашем примере x23 - вхождение подтерма $a(d + e)$. Оператор "тождвывод" определяет результат x24 преобразования вхождения x23 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема".

19. Использование тождества для значения подоперации в конкретной точке.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\arcsin 1/\sqrt{2} = \pi/4$$

из теоремы

$$\forall_x (x - \text{число} \ \& \ 0 \leq 2x + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - 2x \rightarrow \arcsin \sin x = x)$$

и дополнительной теоремы

$$\sin \pi/4 = \sqrt{2}/2$$

Переменной x11 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он неоднобуквенный и что самый сложный его подтерм - он сам. Переменной x13 присваивается список самых сложных собственных подтермов термина x11. Проверяется, что он одноэлементный; этот элемент присваивается переменной x14. В нашем примере x14 - "sin x". Проверяется, что выражение x14 имеет единственный корневой операнд и что оценка сложности заменяющей части теоремы меньше оценки сложности термина x14. Переменной x15 присваивается вхождение термина x14 в теорему, внутри ее заменяемой части. Переменной x16 присваивается заголовок выражения x14.

Определяется раздел, к которому относится символ x14, и просматриваются теоремы этого раздела, представляющие собой константные равенства, одна из частей которых имеет заголовок x16, а оценка сложности другой части меньше оценки сложности данной части. В нашем примере это равенство - указанная выше дополнительная теорема. Процедура "тождвывод" определяет результат x23 преобразования вхождения x15 при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается процедурой "Нормтеорема", которой передается элемент (смтеор . . .), иницирующий применение тождеств, уже полученных в текущем цикле вывода.

20. Использование упрощающего тождества для сложной подоперации корневой сложной операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b (b - \text{число} \ \& \ 0 \leq b \ \& \ 0 \leq \pi - b \rightarrow \arcsin \cos b = \pi/2 - b)$$

из теоремы

$$\forall_x(x - \text{число} \ \& \ 0 \leq \pi + 2x \ \& \ 0 \leq \pi - 2x \rightarrow \arcsin \sin x = x)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow \sin(\pi/2 - b) = \cos b)$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x11 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он неоднобуквенный и что самый сложный его подтерм - он сам. Переменной x13 присваивается список самых сложных собственных подтермов терма x11. Проверяется, что он одноэлементный; этот элемент присваивается переменной x14. В нашем примере x14 - "sin x". Проверяется, что выражение x14 имеет единственный корневой операнд и что оценка сложности заменяющей части теоремы меньше оценки сложности терма x14. Переменной x15 присваивается вхождение терма x14 в теорему, внутри ее заменяемой части. Переменной x16 присваивается заголовок выражения x14.

Определяется раздел, к которому относится символ x14, и просматриваются теоремы этого раздела, представляющие собой (в отличие от предыдущего приема) кванторные импликации с характеристикой "нормализация(...)". В нашем случае находится указанная выше дополнительная теорема. Проверяется, что заменяющий терм дополнительной теоремы неповторен, а каждый его корневой операнд - переменная. Определяется результат x25 преобразования вхождения x15 с помощью дополнительной теоремы. В нашем случае он имеет вид:

$$\forall_b(b - \text{число} \ \& \ 0 \leq b \ \& \ 0 \leq 2\pi - 2b \rightarrow \arcsin \cos b = \pi/2 - b)$$

Переменной x26 присваивается результат его обработки теоремы x25 оператором "нормтеорема". Переменной x29 присваивается результат обработки антецедентов теоремы x26 оператором "нормантецеденты", после чего создается импликация с антецедентами x29 и тем же консеквентом, что у x26. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому передается элемент (смтеор...), иницирующий применение тождеств, уже полученных в текущем цикле вывода.

21. Попытка навесить внешнюю операцию для устранения повторного вхождения переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{df}(\neg(\cos f = 0) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow d + d(\text{tg } f)^2 = d/(\cos f)^2)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow b(\sin a)^2 + b(\cos a)^2 = b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abnx}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \ \& \ n - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(n) - \text{even}) \ \& \ \neg(\cos x = 0) \rightarrow (a(\sin x)^n + b(\cos x)^n)/(\cos x)^n = a(\text{tg } x)^n + b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Проверяется, что x10 не бесповторно, а x11 бесповторно. Переменной x13 присваивается список подтермов терма x10, имеющих максимальную сложность. В нашем примере - "sin a", "cos a". Проверяется, что в списке x13 не менее двух элементов. Выбирается заголовок x15 одного из термов списка x13. В нашем случае - "синус". Справочник поиска теорем "склейкалин" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере имеем:

$$\forall_{cdf}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ e - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(e) - \text{even}) \ \& \ \neg(\cos f = 0) \rightarrow (c(\sin f)^e + d(\cos f)^e)/(\cos f)^e = c(\text{tg } f)^e + d)$$

Переменной x20 присваивается вхождение левой части консеквента теоремы x18. Переменной x21 присваивается вхождение небесповторного операнда x23 этой части, имеющего тот же заголовок, что и выражение x10. В нашем примере x23 - " $c(\sin f)^e + d(\cos f)^e$ ". Составляется список x24 параметров термов x10 и x23. Определяется унифицирующая термы x10 и x23 подстановка S вместо переменных x24. Переменной x26 присваивается список подтермов терма x23, имеющих максимальную сложность. В нашем случае - "sin f", "cos f". Переменной x27 присваивается список заголовков этих подтермов. Проверяется, что подстановка S не подставляет вместо какой-либо переменной из x24 выражение, содержащее символ списка x27. Определяется результат x28 применения подстановки S к правой части консеквента теоремы x18. В нашем примере - " $d(\text{tg } f)^2 + d$ ". Определяется результат x29 замены вхождения x21 в консеквент теоремы x18 на терм x11. В нашем примере - " $b/(\cos f)^e$ ". Определяется результат x30 применения подстановки S к терму x29. В нашем примере - " $d/(\cos f)^2$ ". Переменной x31 присваивается объединение результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и теоремы x18. Затем создается импликация с антецедентами x31, консеквент которой - равенство выражений x28 и x30. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

22. Попытка использовать определение для получения приема с функциональной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{set} \ \& \ c \subseteq \text{Dom}(d) \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(\lambda_f(d(f), f \in c)) \rightarrow \text{card}(c) = \text{card}(\text{set}_e(\exists_f(f \in c \ \& \ e = d(f))))))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \text{Dom}(a) \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(\text{сужение}(a, b)) \rightarrow \text{card}(b) = \text{card}(\text{образ}(a, b)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ba}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{set}_x(\exists_y(y \in a \ \& \ x = f(y))) = \text{образ}(f, a))$$

Переменной x_{11} присваивается расположенное в заменяемой части вхождение неоднобуквенного подтерма с заголовком x_{12} . В нашем примере - подтерма "образ(a, b)". Справочник поиска теорем "определение" находит по символу x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Среди ее характеристик имеется терм x_{15} с заголовком "функподст". В нашем случае - терм "функподст(f первыйтерм)". Оператор "тождвывод" находит результат x_{18} преобразования вхождения x_{11} при помощи дополнительной теоремы, применяемой в направлении, указанном характеристикой x_{15} . В нашем случае он имеет вид:

$$\forall_{cd}(c - \text{set} \ \& \ c \subseteq \text{Dom}(d) \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(\text{сужение}(d, c)) \rightarrow \text{card}(c) = \text{card}(\text{set}_e(\exists_f(f \in c \ \& \ e = d(f))))$$

Переменной x_{20} присваивается консеквент теоремы x_{18} , переменной x_{21} - вхождение в x_{20} квантора существования. Проверяется, что его связывающая приставка состоит из единственной переменной x_{23} . В нашем примере x_{21} - " $\exists_f(f \in c \ \& \ e = d(f))$ ", x_{23} - переменная f . Проверяется, что под квантором существования расположена конъюнкция двух утверждений, одно из которых - равенство терма x_{26} вида "значение($x_{27} \ x_{23}$)", а другое - утверждение вида "принадлежит($x_{23} \ x_{29}$)". Здесь x_{27} , x_{29} - переменные. В нашем примере x_{27} - d , x_{29} - c . Проверяется, что x_{29} - свободная переменная квантора x_{21} . Проверяется, что каждое вхождение переменной x_{27} в исходную теорему - либо в ее связывающую приставку, либо имеет вид "функция(x_{27})", либо имеет вид "содержится(x_{29} область(x_{27}))", либо имеет вид "сужение($x_{27} \ x_{29}$)", либо имеет вид "значение($x_{27} \ y$)", где y - переменная, для которой в контексте рассматриваемого вхождения существует утверждение "принадлежит($y \ x_{29}$)". Переменной x_{30} присваивается выражение "отображение(x_{23} принадлежит($x_{23} \ x_{29}$) значение($x_{27} \ x_{23}$))". В нашем примере - выражение " $\lambda_f(d(f), f \in c)$ ". В теореме x_{18} происходит замена всех вхождений терма "сужение($x_{27} \ x_{29}$)" (в нашем примере - "сужение($d \ c$)") на терм x_{30} . Затем x_{18} регистрируется в списке вывода, причем в дальнейших выводах не участвует, но в результат включается.

Применение дополнительного тождества для упрощения заменяющего термина

1. Попытка получить тождество для префиксной рекурсии из тождества для конкатенации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{слово} \rightarrow \{; b\} \cup \{a\} = \{a; b\})$$

из теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{слово} \ \& \ d - \text{слово} \rightarrow \{; c\} \cup \{; d\} = \{; d; c\})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}((a; b) = \text{префикс}(a, b))$$

Здесь " $; d; c$ " обозначает "конкатенация($d \ c$)", " $a; b$ " - "конкатенация(набор(a)) b "; " $\{; b\}$ " - "перечень(b)".

В консеквенте теоремы находится вхождение x11 подтерма с заголовком "конкатенация". Справочник поиска теорем "перестановки" находит по символу "конкатенация" указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тожд-вывод" определяет результат x17 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{ab}(b - \text{слово} \ \& \ (a) - \text{слово} \rightarrow \{; b\} \cup \{a\} = \{a; b\})$$

Теорема x17 последовательно обрабатывается операторами "Спускоперандов", "демодификация" и "нормтеорема".

- Использование тождества общей стандартизации для получения тождества, устраняющего сложное подвыражение с неизвестными при навешивании внешней операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acd}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow (a^{d/c})^c = a^d)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow (a^b)^c = a^{bc})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow (a/b)b = a)$$

Проверяется, что теорема имеет не более трех переменных и не сопровождается характеристикой с заголовком "смнеизв". В заменяющей части рассматривается вхождение x11 неодноэлементного подтерма с заголовком x12. Справочник поиска теорем "конствхожд" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" использует ее для преобразования вхождения x11. Результат обрабатывается оператором "нормтеорема". Характеризатор, которому передается указание "смхаракт(смнеизв)", определяет характеристику "смнеизв(второйтерм 1 и(известно(c)не(известно(a)) натуральное(d)))". Других характеристик теореме не передается. Выведенная теорема используется приемами программирующего вывода в качестве дополнительной теоремы. Например, она используется при получении эквивалентностей для устранения неизвестных радикалов в уравнениях.

- Попытка упрощения заменяющего терма для получения теоремы справочника "поглощается".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(c - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ a \subseteq c \rightarrow a \cup c \setminus a = c)$$

из теоремы

$$\forall_{bd}(b - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow d \cup (b \setminus d) = b \cup d)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ b \subseteq c \rightarrow b \cup c = c)$$

Переменной x_{11} присваивается логический символ, являющийся заголовком заменяющей части. Переменной x_{12} присваивается заменяемый терм, переменной x_{13} - список его параметров. Проверяется, что этот список двухэлементный. Выбирается элемент x_{14} списка x_{13} . В нашем примере - b . Проверяется, что переменная x_{14} имеет единственное вхождение в терм x_{12} . Переменной x_{15} присваивается другая переменная списка x_{13} . В нашем случае - d . Проверяется, что она имеет ровно 2 вхождения в терм x_{12} . Справочник поиска теорем "поглощает" определяет по символу x_{11} указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x_{21} преобразования заменяющей части исходной теоремы при помощи дополнительной теоремы. Проверяется, что x_{21} - кванторное тождество, в одной части которого расположена переменная x , а другая имеет вид $f(y, g(x, y))$, где y - переменная, а порядок операндов произвольный. Затем x_{21} регистрируется в списке вывода.

4. Подстановка единицы для получения приема справочника "Измзнака".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow -b = b \cdot (-1))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow -ab = (-a)b)$$

Теорема, выводимая приемом, нужна как дополнительная теорема для вывода теорем. Она снабжается характеристикой "Измзнака", по которой создается прием справочника поиска теорем "Измзнака".

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть, переменной x_{11} - заменяющая. Проверяется, что терм x_{11} имеет вид $f(g(x, y))$, где x, y - переменные. Находится единица e операции g . Переменной x_{16} присваивается та из переменных x, y , по которой операция g имеет единицу. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{17} присваивается заголовок терма x_{10} . Проверяется, что операция x_{17} ассоциативна и коммутативна, причем число корневых операндов терма x_{10} равно 2. Переменной x_{19} присваивается один из этих операндов. В нашем случае - " $-a$ ". Проверяется, что терм x_{19} имеет единственную переменную x_{16} . Переменной x_{20} присваивается другой корневой операнд терма x_{10} . Проверяется, что он представляет собой переменную. В нашем случае - переменную " b ". Переменной x_{22} присваивается набор результатов подстановки единицы e вместо переменной x_{16} в antecedentes теоремы, переменной x_{23} - результат такой же подстановки в консеквент. Затем создается импликация с antecedентами x_{22} и консеквентом x_{23} , которая обрабатывается оператором "нормтеорема". Результат сопровождается единственной характеристикой "Измзнака".

Применение дополнительной эквивалентности для упрощения antecedента

1. Попытка обработать существенный antecedент сокращающей эквивалентностью.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(0 < e \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq c - d \rightarrow \max(ce, de) = ce)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a \leq b \rightarrow \max(a, b) = b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abd}(0 < d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow b \leq a \leftrightarrow bd \leq ad)$$

Проверяется, что теорема имеет единственный существенный антецедент, номер которого присваивается переменной x12. В нашем примере - 3. Переменной x13 присваивается вхождение этого антецедента, переменной x14 - он сам. В нашем примере - " $a \leq b$ ". Переменной x15 присваивается заголовок утверждения x14. Справочник поиска теорем "Сокращ" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x20 преобразования вхождения x13 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере x20 имеет вид:

$$\forall_{cde}(de - \text{число} \ \& \ ce - \text{число} \ \& \ d \leq c \ \& \ 0 < e \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \max(de, ce) = ce)$$

Переменной x22 присваивается результат обработки антецедентов теоремы x20 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров консеквента. Затем создается импликация с антецедентами x22 и консеквентом теоремы x20. Она обрабатывается оператором "нормтеорема". Проверяется, что все переменные результирующей теоремы x23 включаются в параметры ее консеквента. Затем x23 регистрируется в списке вывода.

Использование тождества для упрощения заменяемой части дополнительной эквивалентности

1. Попытка использовать тождество общей стандартизации для варьирования эквивалентности, разделяющей переменные одного выражения в разных операндах отношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdef}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(c, e \cap (d \cup f)) \leftrightarrow \text{непересек}(c, d \cap e) \ \& \ \text{непересек}(e, c \cap f))$$

из теоремы

$$\forall_{adf}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow a \cap (f \cup (a \cap d)) = a \cap (d \cup f))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{be}(b - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow b \cap e = \emptyset \leftrightarrow \text{непересек}(b, e))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - ее заголовок. Справочник поиска теорем "разделитель" определяет по x11 указанную выше дополнительную теорему. Направление ее применения определяется характеристикой "разделение(...)". В нашем примере - "второйтерм". Рассматривается

вхождение x18 символа x11, расположенное в заменяемой части дополнительной теоремы. В нашем примере - вхождение подтерма " $b \cap e$ ". Проверяется, что число операндов этого вхождения равно 2. Оператор "тождвывод" находит результат x19 преобразования вхождения x18 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{cdef}((f \cup e \cap c \cap d) \cap c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ (e \cap c) - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow (e \cap c) \cap (d \cup f) = \emptyset \leftrightarrow \text{непересек}((f \cup e \cap c \cap d) \cap c, e))$$

После преобразования оператором "нормтеорема" утверждение регистрируется в списке вывода.

Использование тождества для упрощения заменяемой части дополнительного тождества

1. Попытка использовать тождество общей стандартизации, исключаящее переменную, для упрощения заменяемой части тождества приведения к заданным заголовкам.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c(c - \text{число} \rightarrow (\sin c + \cos c)^2 = 2 \sin c \cos c + 1)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow (\sin a)^2 + (\cos a)^2 = 1)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - ее заголовок, переменной x12 - заменяющая часть. Проверяется, что оценка сложности терма x12 меньше оценки сложности терма x10. Проверяется, что символ x11 ассоциативен и коммутативен. Переменной x13 присваивается список параметров заменяемой части, переменной x14 - список параметров заменяющей части. Проверяется, что x14 - собственное подмножество множества x13.

Составляется список x16 всех символов, являющихся надоперациями самых сложных подтермов терма x10. В нашем примере - "плюс" и "степень". Рассматриваются те операции f списка x16, которые аналогичны возведению в степень - возникли из многократного применения бинарной ассоциативной и коммутативной операции g . Операции g добавляется к списку x16, а в список x17 заносятся пары (f - номер операнда, рассматриваемого как показатель степени). В нашем случае к списку x16 добавляется операция "умножение", список x17 состоит из единственной пары (степень 2). Заметим, что хотя в данном приеме список x17 не используется, но он необходим другому приему, который будет рассмотрен сразу после данного и у которого начальная часть программы такая же.

Проверяется, что список x16 не более чем трехэлементный. Переменной x18 присваивается набор antecedентов теоремы. Выбирается переменная x19, не

входящая в теорему. В нашем случае - переменная b . Определяется тип T значений операции $x11$, и к списку $x18$ присоединяется утверждение " $T(x19)$ ". В нашем примере - " $\text{число}(b)$ ". Создается импликация $x21$ с антецедентами $x18$, консеквентом которой служит равенство выражений " $x11(x10, x19)$ " и " $x11(x12, x19)$ ". В нашем примере она имеет вид:

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow (\sin a)^2 + (\cos a)^2 + b = 1 + b)$$

Выбирается символ $x22$ списка $x16$. В нашем примере - символ "умножение". В разделе базы теорем, связанном с символом $x22$, выбирается указанная выше дополнительная теорема. Проверяется, что она имеет характеристику вида "нормзаголовок(A, N)" и что оценка сложности ее заменяемого терма не меньше оценки сложности заменяющего. Оператор "тождвывод" определяет результат преобразования заменяемого терма дополнительной теоремы теоремой $x21$. Этот результат обрабатывается процедурой "нормтеорема".

2. Попытка использовать тождество общей стандартизации, исключаящее переменную, для вывода тождества понижения степени сложного выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_d(d - \text{число} \rightarrow (\sin d)^6 + (\cos d)^6 = -3(\sin d)^2(\cos d)^2 + 1)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow (\sin a)^2 + (\cos a)^2 = 1)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$$

Начальная часть приема такая же, как в предыдущем пункте. Для удобства чтения повторим ее.

Переменной $x10$ присваивается заменяемая часть, переменной $x11$ - ее заголовок, переменной $x12$ - заменяющая часть. Проверяется, что оценка сложности терма $x12$ меньше оценки сложности терма $x10$. Проверяется, что символ $x11$ ассоциативен и коммутативен. Переменной $x13$ присваивается список параметров заменяемой части, переменной $x14$ - список параметров заменяющей части. Проверяется, что $x14$ - собственное подмножество множества $x13$.

Переменной $x15$ присваивается список самых сложных подтермов терма $x10$. Составляется список $x16$ всех символов, являющихся надоперациями этих подтермов. В нашем примере - "плюс" и "степень". Рассматриваются те операции f списка $x16$, которые аналогичны возведению в степень - возникли из многократного применения бинарной ассоциативной и коммутативной операции g . Операции g добавляется к списку $x16$, а в список $x17$ заносятся пары (f - номер операнда, рассматриваемого как показатель степени). В нашем случае к списку $x16$ добавляется операция "умножение", список $x17$ состоит из единственной пары (степень 2).

Проверяется, что список $x16$ не более чем трехэлементный. Переменной $x18$ присваивается набор антецедентов теоремы. Выбирается переменная $x19$, не входящая в теорему. В нашем случае - переменная b . Определяется тип T значений операции $x11$, и к списку $x18$ присоединяется утверждение " $T(x19)$ ". В нашем примере - " $\text{число}(b)$ ". Создается импликация $x21$ с антецедентами

x18, консеквентом которой служит равенство выражений "x11(x10, x19)" и "x11(x12,x19)". В нашем примере она имеет вид:

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow (\sin a)^2 + (\cos a)^2 + b = 1 + b)$$

Выбирается символ x22 списка x16. В нашем примере - символ "умножение". В разделе базы теорем, связанном с символом x22, выбирается указанная выше дополнительная теорема.

Далее начинаются отличия от предыдущего приема. Проверяется, что дополнительная теорема имеет характеристику "свертка(N)". Проверяется, что список x17 одноэлементный, список x15 - двухэлементный, число корневых операндов заменяемого терма x10 равно 2. Рассматривается единственный элемент x26 списка x17. Это - пара, образованная логическим символом типа "степени" и номером его операнда, рассматриваемого как показатель степени. Переменной x27 присваивается первый элемент данной пары. В нашем случае - символ "степень". Проверяется, что оба корневых операнда T_1, T_2 терма x10 имеют заголовок x27. Переменной x28 присваивается первый операнд терма T_1 , переменной x29 - первый операнд терма T_2 . В нашем примере - $\sin a$ и $\cos a$. Проверяется, что оба терма x28, x29 входят в список x15. Переменной x32 присваивается заменяющая часть дополнительной теоремы. В нашем примере - " $(a+b)^3$ ". Проверяется, что она неповторна. В ней находится вхождение x33 заголовка x11 терма x10. В нашем случае - символа "плюс". Проверяется, что операция x33 имеет ровно два операнда, являющиеся переменными x34 и x35. Переменной x36 присваивается заменяемая часть дополнительной теоремы. Проверяется, что каждая из переменных x34 и x35 имеет в ней более одного вхождения. Проверяется также, что заголовком терма x36 служит символ x11. Переменной x37 присваивается набор коневых операндов терма x36, переменной x38 - список тех из них, которые имеют заголовок x27. В нашем случае x38 состоит из термов a^3, b^3 . Проверяется, что список x38 двухэлементный. Проверяется, что каждая из переменных x34, x35 является "основанием" степени списка x38.

Выбирается переменная x40, не входящая в дополнительную теорему. В нашем примере - c . Переменной x41 присваивается результат соединения операцией x11 не вошедших в список x38 элементов списка x37 и переменной x40. В нашем примере имеем " $3a^2b + 3ab^2 + c$ ". Составляется список x43 однобуквенных слов, образованных новыми переменными, отличными от x40 и не входящими в дополнительную теорему. Длина его равна длине списка x42 переменных исходной теоремы. В нашем примере список x43 состоит из единственного терма d . Переменной x44 присваивается результат переобозначения в заменяющей части исходной теоремы переменных x42 на термы x43. В нашем примере получаем терм "1". Переменной x45 присваивается результат замены в терме x32 вхождения x33 на терм x44. В нашем случае имеем " 1^3 ". Переменным x46 и x47 присваиваются результаты подстановки термов x43 вместо переменных x42 в корневые операнды терма x10. В нашем случае - " $(\sin d)^2$ " и " $(\cos d)^2$ ". Переменной x48 присваивается результат подстановки в терм x41 выражений x46 и x47 вместо переменных x34 и x35. В нашем примере имеем " $3((\sin d)^2)^2(\cos d)^2 + 3(\sin d)^2((\cos d)^2)^2 + c$ ". Переменной x49 присваивается равенство выражений x45 и x48. Составляется объединенный список x50 результатов подстановки в antecedentes дополнительной теоремы термов x46 и x47

вместо переменных x_{34} и x_{35} , а также результатов подстановки в антецеденты исходной теоремы термов x_{43} вместо переменных x_{42} . Решается задача на описание с посылками x_{50} и единственным условием x_{49} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "и", "неизвестные x_{40} ". Ответ присваивается переменной x_{52} . В нашем примере он имеет вид:

$$c = -3(\sin d)^2(\cos d)^4 - 3(\sin d)^4(\cos d)^2 + 1$$

Проверяется, что этот ответ имеет вид равенства переменной x_{40} некоторому выражению R . Переменной x_{53} присваивается результат подстановки термов x_{46} и x_{47} вместо переменных x_{34} и x_{35} в результат соединения операцией x_{11} выражений x_{38} . В нашем примере получаем " $((\sin d)^2)^3 + ((\cos d)^2)^3$ ". Решается задача на упрощение выражения R относительно посылок x_{50} . Ответ присваивается переменной x_{55} . В нашем примере получаем " $-3(\sin d)^2(\cos d)^2 + 1$ ". Создается импликация с антецедентами x_{50} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{53} и x_{55} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

3. Варьирование первой операции в тождестве для взаимного уничтожения двух сложных операций.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \ \& \ 0 \leq b + 1 \ \& \ 0 \leq -b + 1 \rightarrow \cos \arcsin b = \sqrt{-b^2 + 1})$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \ \& \ 0 \leq a + 1 \ \& \ 0 \leq -a + 1 \rightarrow \sin \arcsin a = a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \ \& \ 0 \leq 2a + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - 2a \rightarrow \cos a = \sqrt{1 - (\sin a)^2})$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть, переменной x_{11} - заменяющая. Проверяется, что число корневых операндов заменяемой части равно 1, причем самый сложный подтерм этой части единственный и совпадает с ее корневым операндом A . Находится оценка v сложности самого сложного подтерма заменяемой части, отличного от A . Проверяется, что она больше оценки сложности заменяющей части и равна оценке сложности корневой операции заменяемой части.

Переменной x_{13} присваивается заголовок заменяемой части. В нашем случае - "синус". В качестве дополнительной теоремы выбирается теорема раздела, к которому относится символ x_{13} , представляющая собой кванторную импликацию с характеристикой "нормализация(N)" либо "свертка(N)". Переменной x_{24} присваивается заменяемая часть дополнительной теоремы. Проверяется, что в ней встречается символ x_{13} , причем эта часть имеет единственную переменную. Переменной x_{27} присваивается вхождение символа x_{13} в заменяемую часть. Проверяется, что его корневым операндом служит некоторая переменная x_{28} . В нашем примере - переменная a . Проверяется, что каждое вхождение переменной a в заменяемую часть дополнительной теоремы представляет собой корневой операнд операции x_{13} . Переменной x_{29} присваивается заменяющая часть дополнительной теоремы. Проверяется, что она имеет вид одноместной

операции x30 от переменной x28. В нашем примере - вид "cos a". Проверяется, что операции x30 и x13 различны. Проверяется, что оценка терма x11 меньше оценки терма x29. В заменяемой части дополнительной теоремы выбирается вхождение x31 символа x13. В нашем примере - вхождение выражения sin a. Оператор "тождвывод" находит результат x32 преобразования вхождения x31 при помощи исходной теоремы. В нашем случае он имеет вид:

$$\forall_b(\arcsin b - \text{число} \ \& \ 0 \leq 2 \arcsin b + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - 2 \arcsin b \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \leq b + 1 \ \& \ 0 \leq -b + 1 \rightarrow \cos \arcsin b = \sqrt{1 - b^2})$$

Теорема x32 обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому передается элемент (смтеор ...), иницирующий применение тождеств, уже полученных в текущем цикле вывода.

4. Попытка использовать тождество общей стандартизации, уменьшающее сложность, для упрощения заменяемой части перегруппировочного тождества общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abdefh}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(a - b = 0) \ \& \ 0 < h \ \& \ 0 < ab \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \rightarrow (b/a)^e / h^{f/d} = (b/a)^{e+(f \log_{a/b} h)/d})$$

из теоремы

$$\forall_{abcde}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < e \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d^{b+(c \log_a e)/a} = d^b e^{c/a})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < ab \rightarrow 1/(a/b)^c = (b/a)^c)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - ее заголовок. В нашем примере - "степень". Переменной x12 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что оценка ее сложности меньше оценки сложности заменяемой части. Справочник поиска теорем "норм" определяет по символу x11 указанную выше дополнительную теорему, имеющую характеристику "нормализация". В заменяемой части дополнительной теоремы находится вхождение x19 символа x11. В нашем примере - "(a/b)^c". Оператор "тождвывод" находит результат x20 преобразования вхождения x19 при помощи исходной теоремы. Он обрабатывается оператором "нормтеорема".

Использование тождества для упрощения консеквента дополнительной простой импликации

1. Использование тождества для преобразования условия монотонности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(c - \text{set} \ \& \ c \subseteq \text{Dom}(a) \ \& \ a - \text{функция} \rightarrow \text{образ}(a, c) \subseteq \text{Val}(a))$$

из теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \rightarrow \text{образ}(f, \text{Dom}(f)) = \text{Val}(f))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cdf}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ c \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ c \subseteq d \ \& \ d \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{образ}(f, c) \subseteq \text{образ}(f, d))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - ее заголовок. В нашем примере - символ "образ". Справочник поиска теорем "монотоннозависит" находит по символу x11 указанную выше дополнительную теорему. Рассматривается вхождение x15 какого-либо операнда дополнительной теоремы, и оператор "тождвывод" находит результат ж16 преобразования этого вхождения исходной теоремой. Импликация x16 обрабатывается процедурой "нормтеорема".

Альтернативное применение тождества к его собственной заменяемой части

1. Получение перестановочного тождества при альтернативной общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acde}(\neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < e \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e^{c \log_d a} = a^{c \log_d e})$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(\neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < e \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d^{c \log_d e} = e^c)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. Переменной x12 присваивается список параметров заменяемой части, переменной x13 - заменяющей. Проверяется, что x12 не включается в x13. В заменяемой части выбирается вхождение x14 двуместной ассоциативно-коммутативной операции x18, одним из операндов которой служит переменная x17, не имеющая других вхождений в терм x10. В нашем примере x14 - вхождение подтерма " $c \log_d e$ ", x17 - переменная c . Проверяется, что x17 входит в заменяющую часть. Переменной x19 присваивается подтерм - другой операнд операции x14. В нашем случае - " $\log_d e$ ". Переменной x20 присваивается список параметров терма x19. Проверяется, что он имеет не менее двух элементов. Выбирается переменная x21 списка x20, не входящая в заменяющую часть. В нашем случае - переменная d . Переменной x22 присваивается другая переменная списка x20, входящая в заменяющий терм. В нашем случае - e . Проверяется, что вхождение переменной x22 в терм x10 единственное. Выбирается переменная x23, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - a . Переменной x24 присваивается результат замены в терме x19 переменной x22 на x23. Переменной x25 присваивается результат соединения операций x18 переменной x17 и выражения x24. В нашем примере - $c \log_d a$. Переменной x26 присваивается результат подстановки терма x25 вместо переменной x17 в заменяющую часть теоремы x11. В нашем случае - " $e^{c \log_d a}$ ". Переменной x27 присваивается результат подстановки в заменяющую часть теоремы переменной x23 и подтерма x14 вместо переменных

x22 и x17. В нашем случае - " $a^{\log_a e}$ ". Переменной x28 присваивается равенство выражений x26 и x27. Переменной x30 присваивается набор результатов замены переменной x22 на x23 в тех антецедентах исходной теоремы, которые содержали переменную x22. В нашем примере - " $0 < a$ " и " a - число". Создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы утверждений x30, а консеквент - равенство x28. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Обобщение сокращающего тождества с помощью дополнительного тождества "обобщаемое".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(a\text{—число} \ \& \ b\text{—число} \ \& \ \neg(b=0) \ \& \ \neg(d=0) \ \& \ d\text{—число} \ \rightarrow \ (a/b) \cdot (b/d) = a/d)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a\text{—число} \ \& \ b\text{—число} \ \& \ \neg(b=0) \ \rightarrow \ (a/b)b = a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(\neg(b=0) \ \& \ a\text{—число} \ \& \ b\text{—число} \ \& \ e\text{—число} \ \rightarrow \ e \cdot (a/b) = (ae)/b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. Проверяется, что число корневых операндов заменяемой части равно 2, и переменной x12 присваивается заголовок терма x10. Переменной x13 присваивается список параметров терма x10, переменной x14 - список параметров терма x11. Проверяется, что x14 - собственный подсписок списка x13. Рассматривается тот корневой операнд терма x10, который представляет собой переменную x17, не входящую в список x14. В нашем примере - операнд b . Переменной x18 присваивается другой корневой операнд терма x10. В нашем примере - " a/b ". Проверяется, что он содержит переменную x17. Справочник поиска теорем "обобщаемое" находит по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается результат переобозначения переменных этой теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере имеем:

$$\forall_{cde}(\neg(d=0) \ \& \ c\text{—число} \ \& \ d\text{—число} \ \& \ e\text{—число} \ \rightarrow \ e \cdot (c/d) = (ce)/d)$$

Среди характеристик дополнительной теоремы находится элемент "обобщаемое(N)". В нашем случае N - "второйтерм". Переменной x25 присваивается заменяемая часть теоремы x19, переменной x26 - заменяющая. Переменной x29 присваивается некоторый корневой операнд терма x26, представляющий собой переменную, переменной x33 - другой корневой операнд. В нашем примере x29 - d , x33 - " ce ". Переменной x32 присваивается тот корневой операнд терма x25, который представляет собой переменную. В нашем примере x32 - e . Выбирается параметр x34 терма x33, отличный от x32. В нашем случае - c . Находится унифицирующая подстановка S для термов x33 и x10 вместо переменных x32 и x34 (в нашем примере - вместо e, c). Переменной x37 присваивается результат замены операнда x33 терма x26 на терм x11. В нашем примере имеем

" a/d ". Переменной $x38$ присваивается результат применения унифицирующей подстановки S к терму $x25$. В нашем примере - " $(a/b) \cdot (b/d)$ ". Переменной $x39$ присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы с результатами применения подстановки S к антецедентам теоремы $x19$. После обработки корневых операндов терма $x38$ нормализаторами общей стандартизации относительно посылок $x39$ получается терм, который переписывается переменной $x38$. В нашем примере терм не изменяется. Терм $x37$ обрабатывается нормализаторами общей стандартизации; результат переписывается переменной $x37$. В нашем примере терм не изменяется. Переменной $x40$ присваивается равенство выражений $x38$ и $x37$. Переменной $x41$ присваивается результат обработки списка $x39$ оператором "нормантецеденты" относительно параметров равенства $x40$. Затем создается итоговая импликация с антецедентами $x41$ и консеквентом $x40$. Она регистрируется в списке вывода с характеристиками "нормализация(второйтерм)" и "смтеорема". Это означает, что теорема будет использоваться только для программирующего вывода в качестве дополнительной теоремы. По ней создаются приемы справочников поиска теорем.

2. Подстановка единицы в нормализующее тождество перестановочного типа для вывода перестановочного тождества с атомарной операцией в заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 1/(a/b) = b/a)$$

из теоремы

$$\forall_{abd}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow d/(a/b) = bd/a)$$

Переменной $x10$ присваивается заменяемая часть, переменной $x11$ - заменяющая. Проверяется, что число корневых операндов заменяемой части равно 2, и переменной $x12$ присваивается заголовок терма $x10$. Переменной $x13$ присваивается список параметров терма $x10$, переменной $x14$ - список параметров терма $x11$. Проверяется, что $x13$ и $x14$ совпадают и что теорема имеет характеристику "группировки". Проверяется, что список $x14$ состоит из трех элементов. В терме $x11$ находится вхождение $x15$ двуместной операции $x16$. В нашем примере - " bd ". Справочник "единица" определяет единицу $x18$ операции $x16$. Переменной $x20$ присваивается тот операнд вхождения $x15$, по которому операция $x16$ имеет единицу $x18$. Проверяется, что на вхождении $x20$ расположена переменная $x21$. В нашем случае - переменная d . Переменной $x22$ присваивается результат подстановки единицы $x18$ вместо переменной $x21$ в терм $x10$. В нашем примере - " $1/(a/b)$ ". Переменной $x23$ присваивается результат замены вхождения $x15$ в терм $x11$ на тот операнд вхождения $x15$, который отличен от $x20$. В нашем случае $x23$ имеет вид " b/a ". Переменной $x24$ присваивается набор результатов подстановки единицы $x18$ вместо переменной $x21$ в антецеденты теоремы. Корневые операнды терма $x22$ обрабатываются нормализаторами общей стандартизации, после чего из этого терма нормализатор "упрощение" исключает избыточные единицы. Проверяется, что преобразованный терм $x22$ не совпадает с $x23$. Переменной $x25$ присваивается равенство термов $x22$ и $x23$, переменной $x26$ - результат обработки списка $x24$ оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма $x25$. Затем создается итоговая

импликация с антецедентами x26 и консеквентом x25. Она снабжается характеристикой "смтеорема", а также, возможно, характеристиками "нормализация" и "группировки".

3. Применение сокращающего тождества к нормализующему тождеству перестановочного типа для получения другого сокращающего тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow d/(d/c) = c)$$

из теоремы

$$\forall_{abd}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow d/(a/b) = bd/a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ae}(\neg(e = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow ae/e = a)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. Проверяется, что число корневых операндов заменяемой части равно 2, и переменной x12 присваивается заголовок терма x10. Переменной x13 присваивается список параметров терма x10, переменной x14 - список параметров терма x11. Проверяется, что x13 и x14 совпадают и что теорема имеет характеристику "группировки". Проверяется, что список x14 состоит из трех элементов. Переменной x15 присваивается заголовок терма x11. В нашем примере - "дробь". Справочник поиска теорем "конствхожд" определяет по символу x15 указанную выше дополнительную теорему, обладающую характеристикой "нормализация(...)". Переменной x20 присваивается вхождение ее заменяющей части. Процедура "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождения x20 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. В нашем примере имеем:

$$\forall_{dcf}(\neg(df = 0) \ \& \ \neg(cf = 0) \ \& \ df - \text{число} \ \& \ cf - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow d/(df/(cf)) = c)$$

Теорема x21 обрабатывается процедурой "полныепосылки". В нашем примере это приводит к появлению дополнительного антецедента " $f - \text{число}$ ". Переменной x22 присваивается вхождение консеквента теоремы x21. Проверяется, что этот консеквент - равенство в одной части которого находится переменная x24, а в другой - отличный от нее терм x25. В нашем случае x24 - c , x25 - $d/(df/(cf))$. Корневые операнды терма x25 обрабатываются нормализаторами общей стандартизации, после чего из этого терма нормализатор "упрощединица" исключает избыточные единицы. В нашем примере получается терм " $d/(d/c)$ ". Проверяется, что терм x25 имеет ровно два параметра. Переменной x26 присваивается равенство терма x25 терму x24, а переменной x27 - результат обработки антецедентов теоремы x21 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x26. Затем создается итоговая импликация с антецедентами x27 и консеквентом x26. Она снабжается характеристиками "смтеорема" и "нормализация(...)".

4. Подстановка единицы в сокращающее тождество с двумя переменными.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_f(\neg(f = 0) \ \& \ f - \text{число} \rightarrow f/f = 1)$$

из теоремы

$$\forall_{df}(\neg(f = 0) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow df/f = d)$$

Переменной x10 присваивается заменяющий терм. Проверяется, что он представляет собой переменную x11. Переменной x12 присваивается заменяемый терм, переменной x13 - список его переменных. Проверяется, что этот список двухэлементный. Проверяется, что переменная x11 имеет единственное вхождение в терм x12. Рассматривается вхождение x14 этой переменной в терм x12. Переменной x15 присваивается вхождение, непосредственным операндом которого является x14. Переменной x16 присваивается символ по вхождению x15. В нашем случае - "умножение". Находится единица x18 операции x16 относительно операнда x14. Переменной x19 присваивается результат подстановки в консеквент теоремы единицы x18 вместо переменной x11, переменной x21 - набор результатов такой же подстановки в antecedentes теоремы. Создается импликация с antecedентами x21 и консеквентом x19, которая обрабатывается оператором "нормтеорема". Результат регистрируется в списке вывода. Он снабжается характеристиками "смтеорема" и "нормализация(...)".

Обобщение теоремы

1. Обобщение упрощающего тождества путем домножения всех членов корневой ассоциативно-коммутативной операции на дополнительный параметр.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow b(\sin a)^2 + b(\cos a)^2 = b)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow (\sin a)^2 + (\cos a)^2 = 1)$$

Проверяется отсутствие в блоке вывода пометки, что теорема уже была обобщена. Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - ее заголовок. В нашем примере - "плюс". Справочник "стандформа" определяет по x11 название x12 нормализатора приведения к стандартной форме, в которой корневой операцией служит символ x11. В нашем примере - нормализатор раскрытия скобок "стандплюс". Справочник "станддн" определяет по названию стандартной формы x12 пару x13 вида (f, g) , где f - корневая ассоциативно-коммутативная операция стандартной формы, g - ее внутренняя ассоциативно-коммутативная операция. В нашем примере x13 - ("плюс", "умножение"). Переменной x14 присваивается второй элемент пары x13 (в нашем случае - "умножение"). Справочник "единица" определяет единицу e операции x14.

Переменной x16 присваивается набор корневых операндов заменяемой части, переменной x17 - набор наборов x14-членов (в нашем примере - сомножителей)

выражений x_{16} . Переменной x_{18} присваивается пересечение всех наборов x_{17} . Проверяется, что среди элементов набора x_{18} нет переменной, встречающейся в каждом выражении списка x_{16} однократно.

Выбирается переменная x_{19} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b . Переменной x_{20} присваивается название нормализатора общей стандартизации выражений с заголовком x_{14} . В нашем примере - "нормумножение". Переменной x_{21} присваивается набор результатов обработки нормализатором x_{20} выражений, получающихся при соединении операцией x_{14} выражения набора x_{16} и переменной x_{19} . В нашем примере имеем пару выражений " $b(\sin a)^2$ ", " $b(\cos a)^2$ ". Проверяется отсутствие отличной от x_{19} переменной, встречающейся под одной и той же коммутативной операцией во всех термах списка x_{21} одновременно с x_{19} .

Переменной x_{22} присваивается набор результатов обработки нормализатором x_{20} выражений, получающихся при соединении x_{11} -членов заменяющего терма и переменной x_{19} посредством операции x_{14} . В нашем примере x_{22} состоит из единственного терма b . Переменной x_{23} присваивается равенство результатов соединения операцией x_{11} термов наборов x_{21} и x_{22} , с сохранением той же ориентации, что в исходной теореме. Переменной x_{26} присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы с теми необходимыми для сопровождения терма x_{23} утверждениями, которые содержат переменную x_{19} . Переменной x_{27} присваивается импликация с антецедентами x_{26} и консеквентом x_{23} . Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. Теореме x_{27} передаются все характеристики исходной теоремы, имеющие заголовки "нормализация", "станд", "группировки". Кроме того, ей передается характеристика "варпарам($x_{19} e$)".

2. Обобщение упрощающего тождества путем ввода неповторного внешнего параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \rightarrow |bc/a| = c|b/a|)$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \rightarrow |bc| = c|b|)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \cdot (a/b) = (ae)/b)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть, переменной x_{11} - заменяющая. В заменяемой части рассматривается вхождение x_{12} двуместной операции x_{13} . В нашем примере - операции bc . Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x_{13} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{19} присваивается ее заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок x_{13} . Рассматривается вхождение x_{20} корневого операнда терма x_{19} , представляющее собой двуместную операцию от переменных x_{22} и x_{23} . Находится единица этой операции. В нашем примере x_{19} - " a/b "; переменная x_{22} - a , переменная x_{23} - b . Проверяется, что другой корневой операнд терма x_{19}

представляет собой переменную x_{25} . В нашем примере - e . Проверяется, что исходная теорема не имеет антецедента с заголовком "равно".

Если символ x_{13} коммутативен, то переменной x_{26} присваивается произвольный корневой операнд операции x_{12} , иначе - операнд, имеющий тот же номер, что и операнд x_{19} операции x_{20} . В нашем примере x_{26} - вхождение операнда b . Проверяется, что по вхождению x_{26} расположена переменная x_{27} , имеющая единственное вхождение в терм x_{10} . Переменной x_{28} присваивается вхождение отличного от x_{26} операнда операции x_{12} . Переменной x_{29} присваивается та из переменных x_{22} , x_{23} , по которой операция x_{20} не имеет единицы, переменной x_{30} - та, по которой она имеет единицу. В нашем случае x_{29} - a , x_{30} - b . Переменной x_{31} присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. Проверяется, что его заголовок отличен от символа x_{13} и что число его корневых операндов равно 2. Рассматривается вхождение x_{32} того корневого операнда терма x_{31} , который имеет заголовок x_{13} . В нашем примере - терма " ae ". Проверяется, что число операндов вхождения x_{32} равно 2. Переменной x_{33} присваивается вхождение операнда операции x_{32} , равного переменной x_{25} (т.е. e), переменной x_{34} - вхождение операнда, равного переменной x_{29} (т.е. a). Если операция x_{13} некоммутативна, то проверяется, что операнд x_{34} операции x_{32} имеет тот же номер, что и операнд x_{20} операции x_{19} . Рассматривается вхождение x_{35} корневого операнда терма x_{31} , отличного от x_{32} . Проверяется, что на этом вхождении расположена переменная x_{30} (т.е. b). Переменной x_{36} присваивается заголовок терма x_{31} .

Предпринимается предварительная проверка избыточности ввода нового параметра. Рассматривается случай, когда x_{12} - операнд операции x_{36} , противоположным операндом которой является неповторная в заменяемой части переменная.

Если проверка избыточности дала положительный результат, выбирается переменная x_{37} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - " a ". Переменной x_{38} присваивается результат соеденения термов x_{12} и x_{37} операцией x_{36} , причем номер операнда x_{37} совпадает с номером операнда x_{35} операции x_{31} . В нашем примере x_{38} имеет вид bc/a . Переменной x_{39} присваивается результат замены вхождения x_{12} в терм x_{10} на x_{38} . В нашем случае - " $|bc/a|$ ". Переменной x_{40} присваивается результат подстановки термов x_{27} и x_{37} вместо переменных x_{29} и x_{30} в подтерм x_{20} . В нашем примере - " b/a ". Переменной x_{41} присваивается результат подстановки терма x_{40} вместо переменной x_{27} в терм x_{11} . В нашем случае - " $c|b/a|$ ". Переменной x_{43} присваивается набор результатов подстановки выражений x_{27} , x_{37} и подтерма x_{28} вместо переменных x_{29} , x_{30} и x_{25} в антецеденты дополнительной теоремы. В нашем примере - " $\neg(a = 0)$ ", " $b - \text{число}$ ", " $a - \text{число}$ ", " $c - \text{число}$ ". Переменной x_{44} присваивается объединение набора x_{43} с набором результатов подстановки выражения x_{40} вместо переменной x_{27} в антецеденты исходной теоремы.

Далее снова предпринимается анализ избыточности добавленной переменной x_{37} . Выражение x_{39} обрабатывается нормализаторами общей стандартизации и проверяется, что в результате переменная x_{37} не оказалась в одной и той же ассоциативно-коммутативной операции с другой неповторной переменной.

Создается импликация с антецедентами x44, консеквентом которой служит равенство выражений x41 и x39. Ориентация равенства - та же, что у исходной теоремы. Переменной x46 присваивается результат обработки этой импликации оператором "нормтеорема". Проверяется, что в теореме x46 переменная x37 имеет единичное значение для той операции, операндом которой она является. Затем эта теорема регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

3. Обобщение упрощающего тождества путем ввода функционального неповторного внешнего параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abde}(d - \text{функция} \ \& \ \text{конечное}(e) \ \& \ \text{Dom}(d) = e \ \& \ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(b) = e \ \& \ \neg(0 \in \text{Val}(b)) \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow \sum_{f, f \in e} ad(f)/b(f) = a \sum_{f, f \in e} d(f)/b(f))$$

из теоремы

$$\forall_{ade}(a - \text{число} \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ \text{конечное}(e) \ \& \ \text{Dom}(d) = e \ \& \ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \sum_{f, f \in e} (ad(f)) = a \sum_{f, f \in e} d(f))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \cdot (a/b) = (ae)/b)$$

Начало программы совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. В заменяемой части рассматривается вхождение x12 двуместной операции x13. В нашем примере - операции $ad(f)$. Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается ее заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок x13. Рассматривается вхождение x20 корневого операнда терма x19, представляющее собой двуместную операцию от переменных x22 и x23. Находится единица E этой операции. В нашем примере x19 - " a/b "; переменная x22 - a , переменная x23 - b . Проверяется, что другой корневой операнд терма x19 представляет собой переменную x25. В нашем примере - e . Проверяется, что исходная теорема не имеет антецедента с заголовком "равно".

Если символ x13 коммутативен, то переменной x26 присваивается произвольный корневой операнд операции x12, иначе - операнд, имеющий тот же номер, что и операнд x19 операции x20. В нашем примере x26 - вхождение операнда $d(f)$.

Далее начинаются отличия от предыдущего приема. Проверяется, что по вхождению x26 располагается символ "значение". Первым операндом вхождения x26 является переменная x27, имеющая единственное вхождение в терм x10. В нашем примере - " d ". Проверяется, что в заменяющей части переменная x27 встречается только как первый операнд выражений "значение(...)". Вторым

операндом вхождения x_{26} служит переменная x_{28} . В нашем примере - " f ". Переменная x_{27} является свободной в терме x_{10} , а переменная x_{28} - связанной. Проверяется, что каждое вхождение переменной x_{27} в антецеденты является операндом одного из символов "функция", "область", "значение", а каждое ее вхождение в заменяющий терм - первым операндом символа "значение". Находится вхождение x_{29} символа "отображение", внутри которого располагается вхождение x_{26} . В нашем примере подтерм по вхождению x_{29} имеет вид " $\lambda_f(ad(f), f \in e)$ ". Проверяется, что x_{28} входит в связывающую приставку этого описателя "отображение". Проверяется, что предпоследний операнд описателя имеет заголовок "принадлежит", причем первый операнд отношения принадлежности - переменная x_{28} . Второй операнд этого отношения присваивается переменной x_{30} . В нашем случае - " e ". Переменной x_{31} присваивается операнд операции x_{12} , отличный от x_{26} . Если E - единица для первого операнда термина x_{20} , то переменным x_{32} и x_{33} присваиваются переменные x_{23} и x_{22} , иначе - x_{22} и x_{23} . В нашем примере - " a, b ". Проверяется существование у теоремы антецедента вида "равно(область(x_{27}) x_{30})". В нашем примере - " $Dom(d) = e$ ".

Переменной x_{34} присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. Проверяется, что его заголовок отличен от x_{13} , причем число корневых операндов равно 2. Переменной x_{35} присваивается вхождение корневого операнда термина x_{34} , имеющего заголовок x_{13} . В нашем примере - " ae ". Проверяется, что число операндов вхождения x_{35} равно 2. Переменной x_{36} присваивается вхождение операнда операции x_{35} , равного переменной x_{25} (т.е. e), переменной x_{37} - вхождение операнда, равного переменной x_{32} (т.е. a). Если операция x_{13} некоммутативна, то проверяется, что операнд x_{37} операции x_{35} имеет тот же номер, что и операнд x_{20} операции x_{19} . Рассматривается вхождение x_{38} корневого операнда термина x_{34} , отличного от x_{35} . Проверяется, что на этом вхождении расположена переменная x_{33} (т.е. b). Переменной x_{39} присваивается заголовок термина x_{34} .

Предпринимается предварительная проверка избыточности ввода нового параметра. Рассматривается случай, когда x_{12} - операнд операции x_{40} , противоположным операндом которой является выражение "значение($x_{42} \dots$)" с бесповторной в заменяемой части переменной x_{42} .

Выбирается переменная x_{40} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b . Переменной x_{41} присваивается результат соединения операцией x_{39} подтерма x_{12} и термина "значение($x_{40} x_{28}$)", причем последний терм размещается на том же месте, что и операнд x_{38} вхождения x_{34} . В нашем случае - " $ad(f)/b(f)$ ". Переменной x_{42} присваивается результат замены вхождения x_{12} в терм x_{10} на терм x_{41} . В нашем примере имеем: $\sum_{f, f \in e} ad(f)/b(f)$. Переменной x_{43} присваивается результат подстановки термов "значение($x_{27} x_{28}$)" и "значение($x_{40} x_{28}$)" вместо переменных x_{32} и x_{33} в подтерм x_{20} . В нашем примере - " $d(f)/b(f)$ ". Определяется результат x_{44} одновременной замены в терме x_{11} всех вхождений термина "значение($x_{27} x_{28}$)" на терм x_{43} , а всех вхождений термов "значение($x_{27} X$)", где X - отличная от x_{28} переменная, связанная в x_{11} , на результат подстановки в x_{43} переменной X вместо x_{28} . В нашем примере имеем: $a \cdot \sum_{f, f \in e} (d(f)/b(f))$. Переменной x_{45} присваивается набор результатов подстановки в антецеденты дополнительной теоремы термов "значение($x_{27} x_{28}$)", "значение($x_{40} x_{28}$)" и подтерма x_{31} вместо переменных x_{32} , x_{33} и x_{25} .

Каждое утверждение H набора $x45$, имеющее своим параметром переменную $x28$, заменяется на кванторную импликацию "длялюбого($x28$ если принадлежит($x28$ $x30$)то H)". Переменной $x47$ присваивается объединение набора антецедентов исходной теоремы, списка $x46$ и утверждений "функция($x40$)", "равно(область($x40$) $x30$)".

Далее снова предпринимается анализ избыточности добавленной переменной $x40$. Выражение $x42$ обрабатывается нормализаторами общей стандартизации и проверяется, что в результате функциональная переменная $x40$ не оказалась в одной и той же ассоциативно-коммутативной операции с другой неповторной функциональной переменной.

Переменной $x48$ присваивается равенство термов $x44$ и $x42$, с сохранением ориентации равенства, принятой в исходной теореме. Переменной $x49$ присваивается результат обработки списка $x47$ процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма $x48$. Затем создается импликация с антецедентами $x49$ и консеквентом $x48$, которая регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

4. Обобщение упрощающего тождества путем ввода неповторного дополнительного параметра операнда.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow |c/(ab)| = |c/b|/a)$$

из теоремы

$$\forall_{ac}(0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow |c/a| = |c|/a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ade}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d/(ae) = (d/e)/a)$$

Начало программы приема совпадает с началом предыдущих двух приемов. Для удобства чтения повторим его. Переменной $x10$ присваивается заменяемая часть, переменной $x11$ - заменяющая. В заменяемой части рассматривается вхождение $x12$ двуместной операции $x13$. В нашем примере - операции c/a . Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу $x13$ указанную выше дополнительную теорему. Переменной $x19$ присваивается ее заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок $x13$. Рассматривается вхождение $x20$ корневого операнда терма $x19$, представляющее собой двуместную операцию от переменных $x22$ и $x23$. Находится единица этой операции. В нашем примере $x19$ - " d/e "; переменная $x22$ - d , переменная $x23$ - e . Проверяется, что другой корневой операнд терма $x19$ представляет собой переменную $x25$. В нашем примере - a . Проверяется, что исходная теорема не имеет антецедента с заголовком "равно".

Если символ $x13$ коммутативен, то переменной $x26$ присваивается произвольный корневой операнд операции $x12$, иначе - операнд, имеющий тот же номер, что и операнд $x20$ операции $x19$. В нашем примере $x26$ - вхождение операнда b . Проверяется, что по вхождению $x26$ расположена переменная $x27$, имеющая

единственное вхождение в терм x_{10} . Переменной x_{28} присваивается вхождение отличного от x_{26} операнда операции x_{12} . Переменной x_{29} присваивается та из переменных x_{22} , x_{23} , по которой операция x_{20} не имеет единицы, переменной x_{30} - та, по которой она имеет единицу. В нашем случае $x_{29} - d$, $x_{30} - e$. Переменной x_{31} присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы.

Далее начинаются отличия от предыдущих приемов. Проверяется, что заголовком терма x_{31} служит символ x_{13} . В нашем примере $x_{31} - "d/(ae)"$. Переменной x_{32} присваивается тот корневой операнд терма x_{31} , который расположен так же, как операнд x_{20} операции x_{19} . В нашем случае - d . Проверяется, что по вхождению x_{32} расположена переменная x_{29} . Переменной x_{33} присваивается вхождение операнда операции x_{31} , отличного от x_{32} . Переменной x_{34} присваивается символ по вхождению x_{33} . Проверяется, что он коммутативен. Если x_{28} - вхождение операции x_{34} , то проверяется, что оно не имеет операнда - неповторной в терме x_{10} переменной.

Выбирается новая переменная x_{35} . В нашем примере - b . Если по вхождению x_{28} расположена переменная, неповторная в терме x_{10} , то проверяется наличие содержащего эту переменную антецедента, не используемого для сопровождения терма x_{10} по о.д.з. Переменной x_{36} присваивается результат соединения операцией x_{34} переменной x_{35} и подтерма x_{28} . В нашем примере - " ba ". Переменной x_{37} присваивается результат замены в терме x_{10} вхождения x_{28} на терм x_{36} . В нашем случае - " $|c/(ba)|$ ". Переменной x_{38} присваивается результат подстановки термов x_{27} и x_{35} вместо переменных x_{29} и x_{30} в подтерм x_{20} . В нашем примере - " c/b ". Переменной x_{39} присваивается результат подстановки терма x_{38} вместо переменной x_{27} в терм x_{11} . В нашем примере - " $|c/b|/a$ ". Переменной x_{41} присваивается набор результатов подстановки термов x_{27} , x_{35} и подтерма x_{28} вместо переменных x_{29} , x_{30} и x_{25} в антецеденты дополнительной теоремы. Проверяется, что все утверждения списка x_{41} , содержащие связанные в терме x_{10} переменные, являются следствиями не содержащих таких переменных утверждений данного списка. Переменной x_{42} присваивается объединение списка x_{41} с набором результатов подстановки терма x_{38} вместо переменной x_{27} в антецеденты исходной теоремы.

Предпринимается анализ избыточности добавленной переменной x_{35} . Выражение x_{36} обрабатывается нормализаторами общей стандартизации и проверяется, что в результате переменная x_{35} не оказалась в одной и той же ассоциативно-коммутативной операции с другой неповторной переменной.

Создается импликация с антецедентами x_{42} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{37} и x_{39} . Ориентация равенства - та же, что в исходной теореме. Она обрабатывается оператором "нормтеорема". Если у полученной теоремы x_{44} длина связывающей приставки больше, чем у исходной, то проверяется отсутствие сдвоенных переменных. Затем теорема x_{44} регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

5. Обобщение упрощающего тождества путем ввода функционального неповторного дополнительного параметра операнда.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{abcd}(a - \text{функция} \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ \text{Dom}(a) = c \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{функция} \ \& \\ & \text{Dom}(b) = c \ \& \ \neg(d = 0) \ \& \ \neg(0 \in \text{Val}(b)) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \\ & \sum_{f, f \in c} a(f)/(b(f)d) = \sum_{f, f \in c} a(f)/b(f)/d \end{aligned}$$

из теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{acd}(\neg(d = 0) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ \text{Dom}(a) = c \ \& \\ & \text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \sum_{f, f \in c} a(f)/d = \sum_{f, f \in c} a(f)/d \end{aligned}$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ade}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d/(ae) = (d/e)/a)$$

Начало программы совпадает с началом программы предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. В заменяемой части рассматривается вхождение x12 двуместной операции x13. В нашем примере - операции $a(f)/d$. Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается ее заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок x13. Рассматривается вхождение x20 корневого операнда терма x19, представляющее собой двуместную операцию от переменных x22 и x23. Находится единица E этой операции. В нашем примере x19 - " $(d/e)/a$ "; переменная x22 - d , переменная x23 - e . Проверяется, что другой корневой операнд терма x19 представляет собой переменную x25. В нашем примере - a . Проверяется, что исходная теорема не имеет антецедента с заголовком "равно".

Если символ x13 коммутативен, то переменной x26 присваивается произвольный корневой операнд операции x12, иначе - операнд, имеющий тот же номер, что и операнд x19 операции x20. В нашем примере x26 - вхождение операнда $a(f)$.

Проверяется, что по вхождению x26 располагается символ "значение". Первым операндом вхождения x26 является переменная x27, имеющая единственное вхождение в терм x10. В нашем примере - " a ". Проверяется, что в заменяющей части переменная x27 встречается только как первый операнд выражений "значение(...)". Вторым операндом вхождения x26 служит переменная x28. В нашем примере - " f ". Переменная x27 является свободной в терме x10, а переменная x28 - связанной. Проверяется, что каждое вхождение переменной x27 в антецеденты является операндом одного из символов "функция", "область", "значение", а каждое ее вхождение в заменяющий терм - первым операндом символа "значение". Находится вхождение x29 символа "отображение", внутри которого располагается вхождение x26. В нашем примере подтерм по вхождению x29 имеет вид " $\lambda_f(a(f)/d, f \in c)$ ". Проверяется, что x28 входит в связывающую приставку этого описателя "отображение". Проверяется, что предпоследний операнд описателя имеет заголовок "принадлежит", причем первый операнд отношения принадлежности - переменная x28. Второй операнд этого отношения присваивается переменной x30. В нашем случае - " c ". Переменной x31 присваивается операнд операции x12, отличный от x26. Если E - единица

для первого операнда терма x_{20} , то переменным x_{32} и x_{33} присваиваются переменные x_{23} и x_{22} , иначе - x_{22} и x_{23} . В нашем примере - " d, e ". Проверяется существование у теоремы антецедента вида " $\text{равно}(\text{область}(x_{27})x_{30})$ ". В нашем примере - " $\text{Dom}(a) = c$ ".

Далее начинаются отличия. Переменной x_{34} присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. Проверяется, что его заголовок равен x_{13} . Переменной x_{35} присваивается входение того операнда операции x_{34} , который расположен так же, как операнд x_{20} операции x_{19} . В нашем примере - входение операнда d . Проверяется, что по входению x_{35} располагается переменная x_{32} . Переменной x_{36} присваивается входение другого операнда операции x_{34} , переменной x_{37} - символ, расположенный по входению x_{36} . Проверяется, что операция x_{37} коммутативна.

Если по входению x_{31} располагается символ x_{37} , то проверяется, что операция x_{31} не имеет операнда вида " $\text{значение}(X, \dots)$ ", где переменная X неповторна в терме x_{10} .

Выбирается новая переменная x_{38} . В нашем примере - b . Переменной x_{39} присваивается результат соединения операцией x_{37} терма " $\text{значение}(x_{38} x_{28})$ " и подтерма x_{31} . В нашем примере - " $b(f)d$ ". Переменной x_{40} присваивается результат замены входения x_{31} в терм x_{10} на терм x_{39} . В нашем случае - $\sum_{f, f \in c} a(f)/(b(f)d)$. Переменной x_{41} присваивается результат подстановки термов " $\text{значение}(x_{27} x_{28})$ " и " $\text{значение}(x_{38} x_{28})$ " вместо переменных x_{32} и x_{33} в подтерм x_{20} . В нашем случае - " $a(f)/b(f)$ ". Определяется результат x_{42} одновременной замены в терме x_{11} всех входений терма " $\text{значение}(x_{27} x_{28})$ " на терм x_{41} , а всех входений термов " $\text{значение}(x_{27} X)$ ", где X - отличная от x_{28} переменная, связанная в x_{11} , на результат подстановки в x_{41} переменной X вместо x_{28} . В нашем примере имеем: $\sum_{f, f \in c} a(f)/b(f)/d$. Переменной x_{44} присваивается набор результатов подстановки термов " $\text{значение}(x_{27} x_{28})$ ", " $\text{значение}(x_{38} x_{28})$ " и подтерма x_{31} вместо переменных x_{32} , x_{33} и x_{35} в антецеденты дополнительной теоремы. Каждое содержащее переменную x_{28} утверждение U списка x_{44} заменяется на " $\text{длялюбого}(x_{28} \text{ если принадлежит}(x_{28} x_{30}) \text{ то } U)$ ".

Переменной x_{45} присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы, списка x_{44} и утверждений " $\text{функция}(x_{38})$ ", " $\text{равно}(\text{область}(x_{38})x_{30})$ ".

Предпринимается анализ избыточности добавленной переменной x_{38} . Выражение x_{42} обрабатывается нормализаторами общей стандартизации и проверяется, что в результате функциональная переменная x_{38} не оказалась в одной и той же ассоциативно-коммутативной операции с другой неповторной функциональной переменной.

Переменной x_{46} присваивается равенство выражений x_{42} и x_{40} , с сохранением ориентации равенства в исходной теореме. Переменной x_{47} присваивается результат обработки оператором " нормантецеденты " списка x_{45} относительно параметров равенства x_{46} . Затем создается итоговая импликация с антецедентами x_{47} и консеквентом x_{46} . Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

6. Обобщение упрощающего тождества путем ввода повторного дополнительного параметра операнда.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefg}(\neg(b=0) \ \& \ 0 < adfg \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ 0 \leq befg \rightarrow (ae/(bd))^c = (ef/(bg))^c / (df/(ag))^c)$$

из теоремы

$$\forall_{abcdef}(\neg(b=0) \ \& \ 0 < adf \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 \leq bef \rightarrow (ae/(bd))^c = (ef/b)^c / (df/a)^c)$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{ade}(\neg(a=0) \ \& \ \neg(e=0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d/(ae) = (d/e)/a)$$

$$\forall_{abe}(\neg(b=0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \cdot (a/b) = ae/b)$$

Начало программы совпадает с началом программы предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. В заменяемой части рассматривается вхождение x12 двуместной операции x13. В нашем примере - операции ef/b . Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x13 указанную выше первую дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается ее заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок x13. Рассматривается вхождение x20 корневого операнда терма x19, представляющее собой двуместную операцию от переменных x22 и x23. Находится единица E этой операции. В нашем примере x19 - " $(d/e)/a$ "; переменная x22 - d , переменная x23 - e . Проверяется, что другой корневой операнд терма x19 представляет собой переменную x25. В нашем примере - a . Проверяется, что исходная теорема не имеет антецедента с заголовком "равно".

Если символ x13 коммутативен, то переменной x26 присваивается произвольный корневой операнд операции x12, иначе - операнд, имеющий тот же номер, что и операнд x19 операции x20. В нашем примере x26 - вхождение терма ef . Переменной x27 присваивается символ по вхождению x26.

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что x27 - символ коммутативной операции. Рассматривается вхождение x28 операнда операции x26, представляющее собой переменную x29, имеющую более одного вхождения в заменяемую часть x10. В наше случае - переменная f . Проверяется, что каждое вхождение переменной x29 в терм x10 является операндом операции x27, являющейся, в свою очередь, операндом операции x13, отличным от того, по которому эта операция имеет единицу E . Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x27 указанную выше вторую дополнительную теорему. Переменной x35 присваивается заменяемая часть этой теоремы. В нашем примере - $e \cdot (a/b)$. Проверяется, что она имеет заголовок x27. Переменной x36 присваивается заменяющая часть дополнительной теоремы. В нашем случае - ae/b . Проверяется, что она имеет заголовок x13. Проверяется, что число переменных терма x35 равно 3, число корневых операндов - 2. Переменной x37 присваивается неоднобуквенный операнд терма x35. Другой операнд - переменная x39.

В нашем примере - *e*. Проверяется, что число корневых операндов терма x_{36} равно 2. Переменной x_{40} присваивается вхождение того из них, который имеет заголовок x_{27} . В нашем примере - *ae*. Проверяется, что одним из операндов вхождения x_{40} служит переменная x_{39} , а другим - некоторая переменная, которая присваивается переменной x_{44} . В нашем примере - *a*. Операнд вхождения x_{36} , отличный от x_{40} , присваивается переменной x_{41} . Проверяется, что по вхождению x_{41} расположена переменная, которая присваивается переменной x_{45} . В нашем примере - *b*. Проверяется, что переменная x_{45} входит в подтерм x_{37} . Переменной x_{41} присваивается тот операнд вхождения x_{36} , по которому операция x_{13} имеет единицу. В нашем примере - операнд *b*. Переменной x_{47} присваивается вхождение операнда вхождения x_{12} , отличного от x_{26} . В нашем примере - знаменатель *b*. Переменной x_{48} присваивается та из переменных x_{23} , x_{22} - операндов терма x_{20} - по которой операция x_{13} не имеет единицы. В нашем примере - *d*.

Переменной x_{49} присваивается заменяющий терм первой дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет заголовок x_{13} . Переменной x_{50} присваивается тот корневой операнд терма x_{49} , который расположен так же, как операнд x_{20} операции x_{19} . В нашем примере - операнд *d*. Проверяется, что по вхождению x_{50} располагается переменная x_{48} . Переменной x_{51} присваивается другой корневой операнд терма x_{49} , переменной x_{52} - заголовок этого операнда. В нашем примере x_{51} - "*ae*". Проверяется, что символ x_{52} коммутативен.

Проверяется избыточность ввода дополнительной переменной: если по вхождению x_{47} располагается операция x_{52} , имеющая своим операндом переменную, то проверяется, что эта переменная не располагается в заменяемом терме x_{10} так же, как будет расположена дополнительная переменная.

Выбирается переменная x_{53} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная *g*. Рассматриваются всевозможные вхождения v_1 в заменяемый терм x_{10} переменной x_{29} , и определяются вхождения v_2 , операндом которых служит v_1 , вхождения v_3 , операндом которых служит v_2 , и всевозможные отличные от v_2 вхождения v_4 операндов вхождения v_3 . Переменной x_{54} присваивается список вхождений v_4 . В нашем примере x_{54} - вхождения переменных *b*, *a*. Проверяется, что различные вхождения списка x_{54} не подчинены друг другу. Переменной x_{56} присваивается результат замены вхождений x_{54} подтермов *t* на термы " $x_{52}(x_{53}, t)$ ". В нашем примере - замены *b* на *gb* и *a* на *ga*. Переменной x_{57} присваивается результат замены в подтерме x_{37} переменных x_{44} и x_{45} на x_{29} и x_{53} . В нашем случае - "*f/g*". Переменной x_{58} присваивается результат подстановки терма x_{57} вместо переменной x_{29} в терм x_{11} . В нашем примере - " $(ae/(bd))^c$ ". Проверяется, что antecedentes первой дополнительной теоремы включаются в список утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. выражения x_{19} , а antecedentes второй - утверждения x_{35} . Переменной x_{59} присваивается набор результатов подстановки терма x_{57} вместо переменной x_{29} в antecedentes исходной теоремы. Переменной x_{60} присваивается равенство выражений x_{58} и x_{56} , ориентированное так же, как в исходной теореме. Список x_{59} пополняется утверждениями, необходимыми для сопровождения по о.д.з. равенства x_{60} , и обрабатывается оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{60} . Затем создается импликация с antecedентами x_{59} и

консеквентом x_{60} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

7. Обобщение упрощающего тождества путем ввода внешней двуместной операции над сложной одноместной операцией.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow |a|^c|b| = |a^c b|)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow |a||b| = |ab|)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \rightarrow |a^b| = |a|^b)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть, переменной x_{11} - заменяющая. В нашем примере x_{10} - " $|a||b|$ ". В терме x_{10} выбирается вхождение x_{12} одноместной операции x_{13} . В нашем примере - " $|a|$ ". Проверяется, что ее первый операнд - переменная x_{14} , имеющая в x_{10} единственное вхождение. Проверяется, что x_{12} не является операндом двуместной операции, другой операнд которой - переменная, неповторная в x_{10} . Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по x_{13} указанную выше дополнительную теорему. По ее характеристике "сокращ" находится заменяемая часть x_{20} этой теоремы. В нашем примере - " $|a^b|$ ". Проверяется, что ее заголовок - x_{13} . Рассматривается корневой операнд x_{21} операции x_{20} , и проверяется, что он представляет собой двуместную операцию от двух различных переменных x_{23} и x_{24} . В нашем случае - a и b . Находится единица E операции x_{21} . Переменной x_{25} присваивается заменяющая часть дополнительной теоремы. Проверяется, что она имеет ровно два корневых операнда. Проверяется, что корневая операция терма x_{25} имеет ту же единицу E , что и операция x_{21} . Переменной x_{29} присваивается переменная, являющаяся корневым операндом терма x_{25} . В нашем примере - " b ". Проверяется, что x_{29} совпадает с x_{23} либо с x_{24} , причем именно с той из переменных x_{23} , x_{24} , по которой операция x_{21} имеет единицу. Проверяется, что x_{28} - тот корневой операнд, по которому корневая операция терма x_{25} имеет единицу.

Выбирается переменная x_{30} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - " c ". Переменной x_{31} присваивается пара переменных x_{23} , x_{24} . Если x_{29} равно x_{23} , то переменной x_{32} присваивается пара переменных x_{30} , x_{14} , иначе - пара x_{14} , x_{30} . Определяется результат x_{33} замены в терме x_{25} переменных x_{31} на x_{32} , а также результат x_{34} такой же замены в терме x_{20} . В нашем примере x_{33} - " $|a|^c$ ", x_{34} - " $|a^c|$ ". Переменной x_{35} присваивается результат замены подтерма x_{12} терма x_{10} на x_{33} , переменной x_{36} - результат подстановки корневого операнда терма x_{34} вместо переменной x_{14} в терм x_{11} . В нашем примере x_{35} имеет вид " $|a|^c|b|$ ", x_{36} - вид " $|a^c b|$ ". Переменной x_{37} присваивается равенство выражений x_{35} и x_{36} , ориентация которого такая же, как в исходной теореме. Находится объединение результатов подстановки корневого операнда

терма x_{34} вместо переменной x_{14} в антецеденты исходной теоремы с результатами переобозначения переменных x_{31} на x_{32} в антецедентах дополнительной теоремы. Переменной x_{41} присваивается результат обработки его оператором "нормантецеденты" относительно параметров равенства x_{37} . Затем создается импликация с антецедентами x_{42} и консеквентом x_{37} . Она обрабатывается оператором "полныепосылки" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

8. Использование "зануляющего" тождества для обобщения по дистрибутивности, дающего прием подбора примера.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a = 0 \ \& \ b = 0 \rightarrow ca + db = 0)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a \cdot 0 = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяющий терм. Проверяется, что он однобуквенный и состоит из логического символа x_{11} . В нашем примере x_{11} - "0". Переменной x_{12} присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он имеет два корневых операнда, одним из которых служит переменная x_{15} . Переменной x_{16} присваивается другой операнд. В нашем примере x_{15} - a , x_{16} - "0". Проверяется, что терм x_{16} константный. Переменной x_{17} присваивается заголовок терма x_{12} . Справочник поиска теорем "дистрибразвертка" определяет по x_{17} указанную выше дополнительную теорему. Характеристика "дистрибразвертка" указывает на ее ориентацию. В нашем примере - справа налево. Оператор "тождвывод" находит результат x_{23} преобразования заменяемой части исходной теоремы при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{cd}((c + d) - \text{число} \ \& \ 0 - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow 0 \cdot c + 0 \cdot d = 0)$$

Переменной x_{24} присваивается набор антецедентов теоремы x_{23} , переменной x_{25} - ее консеквент. Переменной x_{26} присваивается результат обработки набора x_{24} оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{25} . Переменной x_{27} присваивается результат обработки оператором "станд" импликации с антецедентами x_{26} и консеквентом x_{25} . В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{cd}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow c \cdot 0 + d \cdot 0 = 0)$$

Проверяется, что консеквент импликации x_{27} - равенство, у которого в одной части расположен символ x_{11} . Переменной x_{31} присваивается другая часть равенства. Переменной x_{32} присваивается набор вхождений терма x_{16} (в нашем примере - нуля) в терм x_{31} . Проверяется, что он непуст. Выбирается список x_{33} переменных, не входящих в теорему x_{27} и имеющий ту же длину, что и набор

x32. В нашем примере x33 - a, b . Переменной x34 присваивается результат замены в терме x31 вхождений x32 на переменные x33. В нашем примере имеем " $ca + db$ ". Переменной x35 присваивается набор равенств переменных списка x33 терму x16. Затем создается импликация, антецеденты которой получают-ся объединением антецедентов исходной теоремы со списком x35, а консеквнт - равенство терма x34 терму x11. Эта импликация регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "подборзначений(x33)".

9. Обобщение тождества общей стандартизации путем домножения обеих частей на новую переменную и перемещения ее внутрь заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdef}(\neg(f = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(d) - \text{even}) \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ d - \text{rational} \rightarrow ef^d/f^c = ef^{d-c})$$

из теоремы

$$\forall_{abd}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(a) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a - \text{rational} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow d^b/d^a = d^{b-a})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \cdot (a/b) = ae/b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - ее заголовок. В нашем случае - "дробь". Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по x11 указанную выше дополнительную теорему. Характеристика "нормализация" указывает на заменяемую часть x17 дополнительной теоремы. В нашем случае - " $e \cdot (a/b)$ ". Проверяется, что эта часть имеет одним из своих операндов переменную x20 (в нашем случае - e). Переменной x19 присваивается вхождение другого операнда, причем проверяется, что заголовком этого операнда служит символ x11. Переменной x21 присваивается заголовок терма x17. В нашем случае - "умножение". Находится единица E операции x21, причем проверяется, что операция x17 имеет эту единицу для операнда x20. Переменной x23 присваивается заменяющая часть дополнительной теоремы. Переменной x24 присваивается вхождение того корневого операнда терма x23, заголовком x25 которого служит коммутативная операция. В нашем примере - " ae ". Проверяется, что одним из операндов операции x24 служит переменная x20.

Проверяется избыточность ввода новой переменной: рассматривается вхождение корневого операнда терма x10, расположенного так же, как операнд x24 терма x23. Проверяется, что по этому вхождению не расположена бесповторная в x10 переменная либо операция с заголовком x25, имеющая своим операндом бесповторную в x10 переменную.

Далее оператор "тождвывод" находит результат x26 преобразования вхождения x19 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. В нашем примере имеем:

$$\forall_{cdef} (\neg(f^c = 0) \ \& \ f^d - \text{число} \ \& \ f^c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(d) - \text{even}) \ \& \ f - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ d - \text{rational} \rightarrow e f^{d-c} = f^d e / f^c)$$

Переменной x27 присваивается результат обработки импликации x26 оператором "нормтеорема". Проверяется, что консеквент теоремы x27 - равенство, причем если x10 бесповторно, то и заменяемая часть теоремы x27 бесповторна. Проверяется, что ни один из антецедентов теоремы x27 не имеет более 4 вхождений переменных. При необходимости ориентация равенства в теореме x27 изменяется так, чтобы она совпала с ориентацией равенства в исходной теореме. Затем теорема x27 регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

10. Обобщение упрощающего тождества путем ввода извлекаемого параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde} (\neg(a = 0) \ \& \ \neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < e \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d^{b+c \log_a e/a} = d^b \cdot e^{c/a})$$

из теоремы

$$\forall_{accde} (\neg(a = 0) \ \& \ \neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < e \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d^{c \log_a e/a} = e^{c/a})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc} (a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < a \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. Проверяется, что заменяемая часть имеет параметры, не входящие в заменяющую. В заменяемой части рассматривается вхождение x12 неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - $d^{c \log_a e/a}$. Переменной x13 присваивается заголовок этого подтерма. В нашем примере - "степень". Справочник поиска теорем "извлечпарам" определяет по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается заменяемая часть дополнительной теоремы (в нашем примере - " $a^b a^c$ ", переменной x20 - заменяющая. Проверяется, что заголовок заменяющей части - символ x13. Переменной x23 присваивается переменная, являющаяся корневым операндом терма x20, переменной x22 - вхождение другого операнда. Переменным x26, x27 присваиваются переменные - операнды вхождения x22. В нашем примере x23 - a , x26 - b , x27 - c . Определяется единица E операции x22 (в нашем случае - символа "плюс"). Переменной x29 присваивается та из переменных x26, x27, по которой операция x22 имеет единицу, переменной x30 - другая из них. В нашем примере x29 - c , x30 - b . Переменной x31 присваивается заголовок терма x19. В нашем примере - "умножение". Проверяется, что x31 ассоциативно и коммутативно, причем число корневых операндов терма x19 равно 2. Переменной x32 присваивается вхождение того из них, на котором расположен символ x13. В нашем примере - " a^b ". Проверяется, что подтерм x32 совпадает с результатом замены вхождения x22 в терм x20 на переменную x30. Переменной x34 присваивается корневой операнд терма x19, отличный от x32. В нашем примере - " a^c ". Проверяется, что

число корневых операндов термина x_{12} равно 2. Проверяется, что либо x_{12} - корень термина x_{10} , либо заголовком термина x_{10} служит символ x_{31} , а x_{12} - корневой операнд термина x_{10} .

Рассматриваются вхождения x_{35} и x_{36} корневых операндов термина x_{12} (возможно, с изменением порядка). Если теорема имеет характеристику "склейка(x N)", означающую, что от кратных вхождений переменной x осуществляется переход к единственному ее вхождению, причем N совпадает с направлением общей стандартизации, то проверяется, что переменная x не входит в подтерм x_{35} . В нашем примере x_{35} - операнд d . Если x_{13} некоммутативно, то проверяется, что номер операнда x_{35} термина x_{12} совпадает с номером операнда x_{21} термина x_{20} . Если по вхождению x_{36} расположена операция x_{22} , то проверяется, что терм x_{36} не имеет своим операндом неповторную в x_{10} переменную. В нашем примере x_{36} имеет вид " $c \log_a e/a$ ". Выбирается переменная x_{37} , не входящая в исходную теорему. В нашем случае - b . Переменной x_{38} присваивается результат соединения операцией x_{22} термов x_{37} и x_{36} , причем если эта операция некоммутативна, то x_{37} располагается на том операнде, по которому имеется единица. В нашем примере x_{38} имеет вид " $c \log_a e/a + b$ ". Переменной x_{39} присваивается результат замены вхождения x_{36} в терм x_{10} на терм x_{38} . В нашем примере - " $d^{c \log_a e/a + b}$ ". Переменной x_{40} присваивается результат подстановки термов x_{35} , x_{37} и x_{36} вместо переменных x_{23} , x_{29} и x_{30} в терм x_{34} . В нашем примере имеем " d^b ". Переменной x_{41} присваивается результат соединения операцией x_{31} термов x_{40} и x_{11} . В нашем случае - " $d^b e^{c/a}$ ". Переменной x_{42} присваивается равенство выражений x_{39} и x_{41} , с сохранением ориентации исходной теоремы. Переменной x_{43} присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы и результатов подстановки термов x_{35} , x_{37} и x_{36} вместо переменных x_{23} , x_{29} и x_{30} в антецеденты дополнительной теоремы. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x_{43} и утверждения, необходимые для сопровождения по о.д.з. выражения x_{39} . Консеквентом служит равенство x_{42} . Эта импликация обрабатывается операторами "полныепосылки" и "норм-теорема". Затем она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы, причем ей передается только характеристика "нормализация(...)".

11. Обобщение тождества типа сокращения путем домножения обеих частей на степени самых сложных сомножителей слагаемых заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \ \& \ 0 \leq d \rightarrow b(\sin a)^c(\cos a)^{d+2} + b(\sin a)^{c+2}(\cos a)^d = b(\sin a)^c(\cos a)^d)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow b(\sin a)^2 + b(\cos a)^2 = b)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть, переменной x_{11} - заменяющая часть. Проверяется, что терм x_{10} имеет параметры, не входящие в x_{11} . Переменной x_{12} присваивается заголовок заменяемой части. В нашем примере - "плюс". Проверяется, что символ x_{12} ассоциативен и коммутативен. Переменной x_{13} присваивается результат обращения к справочнику "стандформа" на символе x_{12} - название стандартной формы с корневой операцией x_{12} . В

нашем случае - "стандплюс". Переменной x14 присваивается результат обращения к справочнику "станддн" на символе x13 - пара, образованная корневой операцией стандартной формы и внутренней ее ассоциативно-коммутативной операцией. В нашем случае x14 - пара ("плюс", "умножение"). Переменной x15 присваивается второй элемент пары x14 (т.е. "умножение"). Справочник "дистрибутивно" проверяет, что операция x15 дистрибутивна относительно x12. Справочник "степень" определяет, что для ассоциативно-коммутативного символа x15 существует операция g типа "степени", и выдает пару (g, i) , где i - номер целочисленного операнда операции g , играющего роль показателя степени. Переменной x17 присваивается первый элемент данной пары, переменной x18 - второй ее элемент. Переменной x19 присваивается набор подтермов заменяемого термина, имеющих максимальную оценку сложности. В нашем примере - " $\sin a, \cos a$ ". Переменной x20 присваивается x10, переменной x21 - x11. Эти переменные будут играть роль накопителей новых версий заменяемого и заменяющего термов. Переменной x22 присваивается список антецедентов теоремы.

Далее последовательно рассматриваются элементы x24 списка x19. Для примера возьмем случай, когда x24 - " $\sin a$ ". Выбирается переменная x25, не входящая в исходную теорему и в терм x20. В нашем случае - переменная " c ". Переменной x26 присваивается результат "возведения в степень x25" выражения x24. В нашем примере - " $(\sin a)^c$ ". Переменной x27 присваивается результат соединения операцией x12 результатов соединения операцией x15 корневых операндов термина x20 с термом x26. В нашем примере - " $b(\sin a)^2(\sin a)^c + b(\cos a)^2(\sin a)^c$ ". Переменной x28 присваивается результат объединения списка антецедентов x22 с утверждениями "целое(x25)" и "меньшеилиравно(0 x25)". Переменной x29 присваивается результат обработки нормализаторами общей стандартизации выражения x27 относительно посылок x28. Проверяется, что в каждый корневой операнд выражения x29 подтерм x24 входит однократно. Затем x20 заменяется на x29, x21 - на результат обработки нормализаторами общей стандартизации результата соединения операцией x15 выражения x21 и x26. Переменной x22 переприсваивается список x28. Затем - переход к очередному элементу списка x19.

По завершении указанных преобразований создается импликация с антецедентами x22, консеквентом которой служит равенство выражений x20 и x21. Ориентация равенства такая же, как в исходной теореме. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется как обобщение исходной теоремы.

12. Обобщение тождества общей стандартизации путем применения к обеим его частям операции типа "возведения в степень".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(\neg(\sin d = 0) \ \& \ \neg(\cos d = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow (\text{tg } d)^c (\text{ctg } d)^c = 1)$$

из теоремы

$$\forall_c(\neg(\sin c = 0) \ \& \ \neg(\cos c = 0) \ \& \ c - \text{число} \rightarrow 1 = \text{tg } c \text{ctg } c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^c b^c = (ab)^c)$$

Переменной x10 присваивается заменяющий терм, переменной x11 - заменяемый. Проверяется, что либо заменяемый терм имеет параметр, не входящий в заменяющий, либо оба терма неповторны, имеют одинаковые параметры, каждый символ операции заменяющего терма встречается в заменяемом, а число вхождений таких символов в заменяющий терм меньше числа их вхождений в заменяемый.

Проверяется, что число корневых операндов заменяемого терма равно 2, причем эти операнды - не переменные. Переменной x12 присваивается заголовок терма x11. В нашем примере - "умножение". Справочник поиска теорем "разд-парам" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается вхождение ее заменяемого терма. В нашем случае - " $(ab)^c$ ". Проверяется, что число операндов вхождения x18 равно 2. Переменной x19 присваивается символ по вхождению x18. В нашем случае - "степень". Проверяется, что либо x19 не встречается в выражении x11, либо это выражение имеет хотя бы два параметра, а выражение x10 - единственный параметр. Определяется единица E операции x19. Рассматривается операнд x21 вхождения x18, имеющий заголовок x12. В нашем примере - ab . Проверяется, что операция x18 имеет единицу по другому операнду x22. Переменной x23 присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет заголовок x12. Проверяется, что каждый корневой операнд A терма x23 имеет заголовок x19, причем тот операнд терма A , по которому операция x19 имеет единицу, совпадает с переменной по вхождению x22.

Процедура "тождвывод" определяет результат x24 преобразования вхождения x21 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Он обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

13. Обобщение упрощающего тождества типа произведения степеней с одинаковыми показателями путем разделения показателей.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acd}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ 0 < \cos d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ 0 \leq a - c \rightarrow (\cos d)^a (\text{tg } d)^c = (\sin d)^c (\cos d)^{a-c})$$

из теоремы

$$\forall_{cd}(\neg(\cos d = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow (\cos d)^c (\text{tg } c)^d = (\sin d)^c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < a \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий. Проверяется, что число корневых операндов терма x10 равно 2. Переменной x12 присваивается заголовок заменяемого терма. В нашем примере

- "умножение". Справочник "степень" определяет по символу x_{12} пару x_{13} , первый элемент которой - степенная операция, получаемая из ассоциативно-коммутативной операции x_{12} , а второй - номер операнда, представляющего собой целочисленный показатель степени. Проверяется, что оценка сложности терма x_{11} меньше оценки сложности терма x_{10} . Переменной x_{14} присваивается первый элемент пары x_{13} . В нашем случае - "степень". Переменной x_{15} присваивается набор корневых операндов терма x_{10} . В нашем случае - $(\cos d)^c, (\operatorname{tg} d)^c$. Проверяется, что оба эти операнда имеют заголовок x_{14} . Переменной x_{16} присваивается второй операнд пары x_{13} . Переменной x_{17} присваивается корневой операнд первого терма пары x_{15} , имеющий номер x_{16} (т.е. показатель степени). Переменной x_{18} присваивается символ по вхождению x_{17} . Проверяется, что это переменная и что такая же переменная является корневым операндом с номером x_{16} у второго терма пары x_{15} . В нашем примере $x_{18} - c$. Справочник поиска теорем "извлечпарам" определяет по символу x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{22} присваивается вхождение ее консеквента (равенства). Переменной x_{23} присваивается вхождение того операнда равенства x_{22} , заголовком которого служит символ x_{12} , а переменной x_{24} - того операнда, заголовком которого служит символ x_{14} . В нашем примере x_{23} - вхождение терма $a^b a^c$, x_{24} - терма a^{b+c} . Проверяется, что число корневых операндов терма x_{23} равно 2. Переменной x_{25} присваивается его первый операнд. Проверяется, что его заголовок равен x_{14} . Переменной x_{26} присваивается переменная - первый операнд терма x_{25} , переменной x_{27} - переменная, являющаяся его вторым операндом. Проверяется, что второй операнд x_{28} терма x_{23} имеет заголовок x_{14} , причем его первый операнд - переменная x_{26} , а второй операнд - некоторая отличная от x_{27} переменная x_{29} . В нашем примере $x_{26} - a$, $x_{27} - b$, $x_{29} - c$. Проверяется, что первым операндом терма x_{24} служит переменная x_{26} , а заголовок его второго операнда - "плюс". Переменной x_{30} присваивается этот второй операнд. В нашем примере - $b + c$. Проверяется, что число операндов терма x_{30} равно 2, причем одним из операндов служит переменная x_{27} , а другим - x_{29} .

Выбирается переменная x_{33} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - a . Переменной x_{34} присваивается сумма выражений x_{33} и "минус(x_{18})". Выбирается корневой операнд x_{35} терма x_{10} . В нашем примере - $(\cos d)^c$. Переменной x_{36} присваивается первый операнд терма x_{35} , переменной x_{37} - набор результатов подстановки термов x_{36} , x_{34} и x_{18} вместо переменных x_{26} , x_{27} и x_{29} в antecedentes дополнительной теоремы. Переменной x_{38} присваивается результат объединения набора antecedentes исходной теоремы и списка x_{37} с утверждениями "число(x_{33})" и "меньшеилиравно(0 x_{34})". Переменной x_{39} присваивается результат замены в терме x_{10} второго корневого операнда подтерма x_{35} на переменную x_{33} . В нашем примере имеем $(\cos d)^a (\operatorname{tg} d)^c$. Создается терм A , полученный соединением термов x_{34} и x_{36} операцией x_{14} , причем x_{34} располагается на позиции, соответствующей "показателю степени". В нашем случае этот терм имеет вид $(\cos d)^{a-c}$. Переменной x_{40} присваивается результат соединения операцией x_{12} термов A и x_{11} . В нашем случае - $(\cos d)^{a-c} (\sin d)^c$. Затем создается импликация с antecedентами x_{38} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{39} и x_{40} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

14. Исключение операции типа "отрицание", если она встречается над всеми вхождениями заданной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ce}(e - \text{set} \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \text{card}(e) = \text{card}(\text{set}_a(a + c \in e \ \& \ a - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{ce}(e - \text{set} \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \text{card}(e) = \text{card}(\text{set}_a(a - c \in e \ \& \ a - \text{число})))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть. В ней усматривается вхождение x_{11} одноместной операции x_{13} от переменной x_{12} . В нашем примере - " $-c$ ". Справочник "отрицание" усматривается, что x_{13} - операция типа "отрицание", т.е. ее двукратное применение возвращает исходный результат. Проверяется, что в терме x_{10} переменная x_{12} входит только как операнд операции x_{13} . Переменной x_{14} присваивается набор антецедентов, переменной x_{15} - заменяющий терм. Проверяется, что либо переменная x_{12} входит в терм x_{15} только под операцией x_{13} , либо каждый антецедент, список параметров которого отличен от единственной неповторной в нем переменной x_{12} , содержит эту переменную только под операцией x_{13} . Переменной x_{16} присваивается набор результатов подстановки в антецеденты выражения " $x_{13}(x_{12})$ " вместо переменной x_{12} . Переменной x_{17} присваивается результат такой же подстановки в консеквент. Создается импликация с антецедентами x_{16} и консеквентом x_{17} . Эта импликация обрабатывается операторами "полныепосылки" и "нормтеорема", после чего регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

15. Попытка отбрасывания избыточного отрицания равенства в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abAB}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow b(\text{авектор}(AB)) = (ab)\text{вектор}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{abAB}(\neg(a = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow b(\text{авектор}(AB)) = (ab)\text{вектор}(AB))$$

Переменной x_8 присваивается набор антецедентов теоремы. В этом наборе выбирается утверждение x_{10} , имеющее вид " $\neg(x = t)$ " и не используемое для сопровождения консеквента по о.д.з. Проверяется, что x - переменная, не входящая в терм t . Проверяется, что x_{10} не используется для сопровождения по о.д.з. остальных антецедентов. Переменной x_{16} присваивается объединение списка утверждений, используемых для сопровождения по о.д.з. антецедентов, отличных от x_{10} , со списком отличных от x_{10} антецедентов. Переменной x_{17} присваивается результат добавления к x_{16} равенства $x = t$. Решается задача на доказательство консеквента из посылок x_{17} . Ей передаются комментарии "ложь", "теорвывод" и "(смтеор ...)". Последний комментарий активирует использование при решении задачи теорем, уже сохраненных в списке вывода. Если получается ответ "истина", то создается импликация с антецедентами x_{16} и тем же консеквентом, что у исходной теоремы. Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

Реализация антецедентов

1. Попытка реализации существенного антецедента тождества общей стандартизации путем подбора примера.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ad}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow a \cup (a \cap d) = a)$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ b \subseteq c \rightarrow b \cup c = c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow b \cap c \subseteq b)$$

Рассматривается существенный антецедент теоремы, который присваивается переменной x10. В нашем примере - " $b \subseteq c$ ". Переменной x11 присваивается корневое вхождение в этот антецедент, либо, если его заголовком служит символ "не", вхождение корневого операнда. Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. Справочники поиска теорем "свойства", "пример" находят по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "выводпосылки" находит результат x15 замещения антецедента x10 при помощи дополнительной теоремы на список ее антецедентов. В нашем примере имеем:

$$\forall_{ad}(a \cap d - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow (a \cap d) \cup a = a)$$

Переменной x16 присваивается результат обработки импликации x15 операторами "Спускоперандов", "демодификация". В нашем примере он совпадает с x16. Переменной x17 присваивается консеквент теоремы x16, переменной x18 - набор ее антецедентов. Переменной x19 присваивается пара результатов обработки обеих частей равенства x17 нормализаторами общей стандартизации относительно x18. Проверяется, что эти результаты различны. Переменной x20 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка x18 относительно параметров термов x19. Создается импликация с антецедентами x20, консеквентом которой служит равенство выражений x20. Она обрабатывается оператором "демодификация" и регистрируется в списке вывода.

Варьирование антецедентов

1. Попытка использовать в обратном направлении перегруппировочную эквивалентность общей стандартизации для варьирования антецедента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ a \setminus b \subseteq c \rightarrow a \setminus (b \cup c) = \emptyset)$$

из теоремы

$$\forall_{de}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ d \subseteq e \rightarrow d \setminus e = \emptyset)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow b \subseteq c \cup e \leftrightarrow b \setminus c \subseteq e)$$

Рассматривается существенный антецедент теоремы, который присваивается переменной x10. В нашем примере - " $d \subseteq e$ ". Переменной x11 присваивается корневое вхождение в этот антецедент, либо, если его заголовком служит символ "не", вхождение корневого операнда. Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. Справочник поиска теорем "упрощэвк" находит по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x15 присваивается вхождение ее консеквента. Проверяется, что дополнительная теорема имеет характеристику "нормализация(N)" и "группировка(M)", где $M \neq N$. Переменной x20 присваивается вхождение заменяемой части дополнительной теоремы в смысле направления M. Проверяется, что по этому вхождению расположен символ x12. Оператор "тождвывод" присваивает переменной x21 результат преобразования вхождения x10 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере имеем:

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ (b \cup c) - \text{set} \ \& \ a \setminus b \subseteq c \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \setminus (b \cup c) = \emptyset)$$

Переменной x22 присваивается консеквент теоремы x21, переменной x23 - набор ее антецедентов. Переменной x24 присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы (относительно направления M), переменной x25 - параметры терма x24. Выбирается элемент x26 списка x23, для которого усматривается, что он является результатом некоторой подстановки S вместо переменных x25 в терм x24. В нашем примере x26 - " $a \setminus b \subseteq c$ ". Переменной x28 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка, полученного из x23 отбрасыванием элемента x26. Обработка выполняется относительно параметров терма x22. Переменной x29 присваивается результат добавления утверждения x26 к списку x28. Переменной x30 присваивается результат обработки нормализаторами общей стандартизации терма x22 относительно посылок x28. Проверяется, что этот результат совпадает с x22. Затем создается импликация с антецедентами x29 и консеквентом x22, которая регистрируется в списке вывода.

2. Попытка декомпозиции сложного подвыражения антецедента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{set} \ \& \ c \subseteq \text{Dom}(d) \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(d) \rightarrow \text{card}(c) = \text{card}(\text{образ}(d, c)))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \text{Dom}(a) \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(\text{сужение}(a, b)) \rightarrow \text{card}(b) = \text{card}(\text{образ}(a, b)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{af}(\text{взаимнооднозначно}(f) \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{взаимнооднозначно}(\text{сужение}(f, a)))$$

Переменной x12 присваивается вхождение существенного антецедента теоремы. В нашем примере - антецедента " $\text{взаимнооднозначно}(\text{сужение}(a, b))$ ". Переменной x14 присваивается список маскимальных по включению подвыражений утверждения x12. В нем выбирается выражение x15. В нашем примере -

"сужение(a, b)". Переменной x_{16} присваивается список параметров терма x_{15} . Проверяется, что этот список имеет хотя бы два элемента и содержит все параметры антецедента x_{12} . Переменной x_{17} присваивается заголовок антецедента x_{12} . В нашем случае - "взаимнооднозначно". Проверяется, что x_{17} - не отрицание. Справочник поиска теорем "свойства" определяет по x_{17} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{20} присваивается консеквент дополнительной теоремы, переменной x_{21} - список максимальных по включению его подвыражений. В списке x_{21} выбирается выражение x_{22} . В нашем примере - "сужение(f, a)". Переменной x_{23} присваивается список параметров терма x_{22} . Проверяется, что он включает все параметры терма x_{20} и имеет не менее двух элементов. Переменной x_{24} присваивается список максимальных по включению подвыражений антецедентов дополнительной теоремы. В нашем примере - " $f, a, \text{Dom}(f)$ ". Проверяется, что это список образует декомпозицию по переменным терма x_{22} . Оператор "выводпосылки" определяет результат x_{25} унификации в исходной теореме антецедента x_{12} с консеквентом дополнительной теоремы и замены его на группу антецедентов дополнительной теоремы. Импликация x_{25} обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Ввод условного выражения

1. Вывод из тождества типа "зануления" тождества для группировки внутрь условного выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a \cdot (0 \text{ при } b, \text{ иначе } c) = (0 \text{ при } b, \text{ иначе } ac))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a \cdot 0 = 0)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяющая часть. Проверяется, что она константная. Переменной x_{11} присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она неповторная, не имеет существенных посылок, а число ее корневых операндов равно 2. Проверяется, что теорема не содержит символа "двоичное". Переменной x_{13} присваивается неконстантный корневой операнд терма x_{11} . В нашем примере - " a ". Выбираются две новых переменных x, y . В нашем примере - b, c . Переменной x_{15} присваивается отличный от x_{13} корневой операнд терма x_{11} . Переменной x_{16} поочередно присваиваются выражение "вариант($x \ y \ x_{15}$)" и "вариант($x \ y \ x_{15}$)". Для каждого случая будет выводиться отдельная теорема. В нашем примере рассматривается первый случай. Переменной x_{18} присваивается результат замещения в терме x_{11} операнда x_{15} на терм x_{16} . В нашем примере он имеет вид " $a(0 \text{ при } b, \text{ иначе } c)$ ". Определяется результат R замены в терме x_{11} операнда x_{15} на переменную y . В нашем примере - ac . Переменной x_{19} присваивается равенство выражения x_{18} выражению, получающемуся из x_{16} заменой переменной y на терм R . В нашем примере имеем: $a(0 \text{ при } b, \text{ иначе } c) = (0 \text{ при } b, \text{ иначе } ac)$. Создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. условных выражений

правой части равенства x19. Консеквентом служит равенство x19. Эта импликация регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "альтоперанд(второйтерм)".

Извлечение эквивалентности из тождества

1. Извлечение из тождества для обратной операции эквивалентности для двух встречных равенств.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{a,f,x}(a \in \text{Val}(f) \ \& \ x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f \text{ — функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \\ x = \text{обрфункция}(f)(a) \leftrightarrow a = f(x))$$

из теоремы

$$\forall_{f,x}(x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f \text{ — функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \\ \text{обрфункция}(f)(f(x)) = x)$$

Переменной x10 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что она представляет собой переменную x11. В нашем примере - "x". Переменной x12 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что переменная x11 имеет в ней единственное вхождение. Рассматривается вхождение x13 того корневого операнда терма x12, который содержит переменную x11. В нашем примере x12 имеет вид "значение(обрфункция(f) значение(f, x))", так что x13 - вхождение подтерма "значение(f, x)". Переменной x14 присваивается этот подтерм. Выбирается переменная x15, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a. Переменной x16 присваивается результат замены вхождения x13 в терм x12 на переменную x15. В нашем случае - "значение(обрфункция(f), a)". Переменной x17 присваивается равенство выражений x16 и x10. В нашем примере - "обрфункция(f)(a) = x". Переменной x18 присваивается набор антецедентов исходной теоремы. Он разбивается на поднабор x19 утверждений, содержащих переменную x11, и набор x20 утверждений, не содержащих ее. В нашем примере x19 состоит из единственного утверждения "x ∈ Dom(f)". Выбирается переменная x21, не входящая в исходную теорему и отличная от x15. В нашем примере - "b". Переменной x22 присваивается результат замены в терме x14 переменной x11 на x21. В нашем примере имеем "f(b)". Переменной x23 присваивается набор результатов такой же замены в утверждениях набора x19. В нашем случае - единственное утверждение "b ∈ Dom(f)". Переменной x24 присваивается результат навешивания квантора существования по переменной x21 на конъюнкцию утверждений x23 и равенства выражений x15, x22. В нашем примере - "∃b(a = f(b) & b ∈ Dom(f))". Утверждение x24 обрабатывается задачей на преобразование с целью "упростить" относительно посылок x20. Результат присваивается переменной x26. В нашем примере получаем "a ∈ Dom(f)". Проверяется, что утверждение x26 элементарно. Переменной x27 присваивается результат добавления утверждения x26 к списку x18. Затем создается импликация с антецедентами x27, консеквентом которой служит эквивалентность утверждения x17 равенству выражений x15 и x14. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и заносится в список вывода.

2. Извлечение из тождества для повторной операции эквивалентности для решения уравнений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(\neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{числитель}(b) - \text{even}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow d = a^b \leftrightarrow a = d^{1/b})$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow (a^b)^c = a^{bc})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow (a/b) \cdot b = a)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий, переменной x12 - набор антецедентов. Проверяется, что теорема имеет характеристику "обобщмножитель" и не имеет существенных антецедентов. Переменной x13 присваивается заголовок заменяемой части. Проверяется, что заменяющая часть имеет от же заголовков. В нашем примере - "степень". Переменной x14 присваивается вхождение того корневого операнда терма x10, который является переменной. Переменной x16 присваивается переменная по вхождению x14. В нашем примере - "c". Переменной x15 присваивается вхождение другого корневого операнда терма x10. В нашем примере - "a^b". Проверяется, что по этому вхождению расположен символ x13. Переменной x17 присваивается вхождение того корневого операнда терма x11, который представляет собой операцию x19. В нашем примере - "умножение". Проверяется, что операнды вхождения x17 - переменные x16 и x22. Переменной x18 присваивается вхождение другого корневого операнда терма x11. Проверяется, что по вхождению x18 расположена переменная x23. Проверяется, что одним операндом вхождения x15 служит переменная x22, а другим - x23. Переменной x26 присваивается номер операнда x17 терма x11. Проверяется, что он совпадает с номером операнда x14 терма x10 и с номером операнда x22 вхождения x15. В нашем примере этот номер равен 2. Проверяется, что операция x19 коммутативна. Находится единица x28 операции x13. Проверяется, что номер операнда операции x13, по которому она имеет данную единицу, равен x26. Справочник поиска теорем "конствхожд" определяет по символу x19 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x31 присваивается ее консеквент, представляющий собой равенство. Рассматривается вхождение x33 операнда равенства, являющегося переменной. Эта переменная присваивается переменной x34. Другой операнд равенства имеет заголовок x19, а его операндами служат отличная от x34 переменная x37 и терм x38. В нашем примере x34 - "a", x37 - "b", x38 - "a/b". Проверяется, что терм x38 содержит переменную x37.

Переменной x41 присваивается набор результатов подстановки термов x22 и x28 вместо переменных x37 и x34 в антецеденты дополнительной теоремы. Переменной x42 присваивается результат такой же подстановки в терм x38. В нашем примере - "1/b". Выбирается переменная x43, не входящая в исходную

теорему. В нашем примере - "d". Переменной x44 присваивается набор результатов подстановки терма x42 вместо переменной x16 в антецеденты исходной теоремы. Переменной x47 присваивается набор результатов подстановки термов x22, x42 и x43 вместо переменных x16, x22 и x23 в антецеденты исходной теоремы. Переменной x48 присваивается объединение списков x44, x47 и x41. Переменной x50 присваивается результат подстановки термов x42 и x43 вместо переменных x22 и x23 в подтерм x15. В нашем примере - "d^{1/b}". Создается импликация с антецедентами x48, консеквентом которой служит эквивалентность равенства термов x49 и x43 равенству термов x23 и x50. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с характеристикой "глуб(. . .)".

3. Извлечение из тождества сокращения эквивалентности для решения уравнения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Вектор}(c) \rightarrow b = a + c \leftrightarrow a = b - c)$$

из теоремы

$$\forall_c(\text{Вектор}(c) \rightarrow c - c = \text{вектор}0)$$

Переменной x10 присваивается заменяющий терм. Проверяется, что он представляет собой логический символ x11. В нашем примере - "вектор0". Переменной x12 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он имеет ровно два корневых операнда. Один из них - переменная x15, другой - терм x16, имеющий единственную переменную x15. Проверяется, что исходная теорема не имеет отличных от x15 переменных. Переменной x17 присваивается заголовок заменяемого терма x12. В нашем примере - "плюсвект". Проверяется, что символ x17 ассоциативен и коммутативен, причем символ x11 является единицей операции x17. Выбираются две переменных X, Y, не входящих в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b. Переменной x20 присваивается равенство переменной Y результата соединения операцией x17 термов x15, X. В нашем примере - "c + a = b". Переменной x21 присваивается равенство переменной X результата соединения операцией x17 переменной Y и терма x16. В нашем примере - "a = b - c". Переменной x22 присваивается эквивалентность равенств x20 и x21. Переменной x23 присваивается результат пополнения списка антецедентов исходной теоремы утверждениями, необходимыми для сопровождения терма x22 по о.д.з. Создается импликация с антецедентами x23 и консеквентом x22. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

4. Извлечение из тождества сокращения эквивалентности для группировки всех членов равенства в одной части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(c) \rightarrow a = c \leftrightarrow a - c = \text{вектор}0)$$

из теоремы

$\forall_c(\text{Вектор}(c) \rightarrow c - c = \text{вектор}0)$

Начало данного приема совпадает с началом предыдущего. Для удобства чтения повторим его. Переменной x_{10} присваивается заменяющий терм. Проверяется, что он представляет собой логический символ x_{11} . В нашем примере - "вектор0". Переменной x_{12} присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он имеет ровно два корневых операнда. Один из них - переменная x_{15} , другой - терм x_{16} , имеющий единственную переменную x_{15} . Проверяется, что исходная теорема не имеет отличных от x_{15} переменных. Переменной x_{17} присваивается заголовок заменяемого терма x_{12} . В нашем примере - "плюсвект". Проверяется, что символ x_{17} ассоциативен и коммутативен, причем символ x_{11} является единицей операции x_{17} . Выбираются две переменных X, Y , не входящих в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b .

Дальше начинаются отличия. Переменной x_{20} присваивается равенство переменных x_{15} и X , переменной x_{21} - равенство единице x_{11} результата соединения операцией x_{17} переменной X и терма x_{16} . Переменной x_{22} присваивается эквивалентность равенств x_{20} и x_{21} , переменной x_{23} - результат добавления к антецедентам исходной теоремы утверждений, необходимых для сопровождения терма x_{22} по о.д.з. Создается импликация с антецедентами x_{23} и консеквентом x_{22} , которая обрабатывается оператором "нормтеорема".

Замена переменных в теореме

1. Перестановка местами двух преобразований в тождестве для обратной операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{af}(a \in \text{Val}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow f(\text{обрфункция}(f)(a)) = a)$$

из теоремы

$$\forall_{fx}(x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \text{обрфункция}(f)(f(x)) = x)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяющий терм. Проверяется, что он представляет собой переменную x_{11} . В нашем примере - x . Переменной x_{12} присваивается заменяемый терм. Проверяется, что переменная x имеет в нем единственное вхождение. Выбирается вхождение x_{13} корневого операнда x_{14} , в котором встречается переменная x_{11} . В нашем примере - $f(x)$. Выбирается переменная x_{15} , не входящая в исходную теорему. В нашем случае - a . Переменной x_{16} присваивается результат замены в терме x_{12} вхождения x_{13} на переменную x_{15} . В нашем примере - " $\text{обрфункция}(f)(a)$ ". Переменной x_{17} присваивается равенство выражения x_{16} переменной x_{11} , переменной x_{18} - список антецедентов исходной теоремы. Этот список разбивается на подсписок x_{19} утверждений, содержащих x_{11} , и подсписок x_{20} остальных утверждений. Выбирается переменная x_{21} , не входящая в исходную теорему и отличная от x_{15} . В нашем примере - " b ". Определяются результат x_{22} подстановки переменной x_{21} вместо переменной x_{11} в терм x_{14} , а также набор x_{23} результатов такой же

подстановки в утверждения списка x19. Переменной x24 присваивается результат навешивания квантора существования по переменной x21 на конъюнкцию утверждений x23 и равенства выражений x15, x22. В нашем случае он имеет вид " $\exists_b(a = f(b) \ \& \ b \in \text{Dom}(f))$ ". Утверждение x24 упрощается вспомогательной задачей на преобразование и результат присваивается переменной x26. В нашем примере получаем " $a \in \text{Val}(f)$ ". Проверяется, что утверждение x26 элементарно. Переменной x27 присваивается результат добавления к набору x18 утверждения x26.

Определяются результат x28 подстановки выражения x16 вместо переменной x11 в терм x14, а также набор x29 результатов такой же подстановки в утверждения списка x27. В нашем примере x28 имеет вид " $f(\text{обрфункция}(f)(a))$ ", x29 состоит из утверждений " f – функция", " f – взаимнооднозначно", " $a \in \text{Val}(f)$ ". Переменной x30 присваивается равенство выражений x28 и x15. Утверждения x29 обрабатываются процедурой "нормантецеденты" относительно параметров равенства x30. Затем создается импликация с антецедентами x29 и консеквентом x30. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

2. Попытки варьирования отрицаний в тождестве бесповторного типа для получения тождества общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(a) \rightarrow -(-b)a = ba)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(a) \rightarrow (-b)a = -ba)$$

Здесь минус обозначает векторную операцию "минусвект", умножение - умножение вектора на число "умножвект".

Переменной x10 присваивается набор операндов консеквента (т.е. пара частей равенства). Проверяется, что списки параметров термов пары x10 равны и двухэлементны. Проверяется, что каждый из термов x10 бесповторен. Переменной x11 присваивается направление замены, противоположное направлению стандартизации исходной теоремы. В нашем примере - "первыйтерм". Переменной x12 присваивается заменяемая часть теоремы (в смысле x11), переменной x13 - заменяющая. В нашем примере x12 - " $-(ba)$ ", x13 - " $(-b)a$ ". Оператор "варотр" перечисляет всевозможные варианты навешивания операции f типа "отрицания" на переменные терма x13, которые входят в x13 только под операцией f . Переменной x14 присваивается список теорем, полученных указанным образом из исходной теоремы, причем таких, что их применение в направлении терма x13 дает общую стандартизацию. Если заголовок терма x13 - операция типа "отрицание", то дополнительно предпринимается попытка рассмотреть равенство термов, полученных из x12 и x13 переходом к их "отрицаниям". Проверяется, что полученное тождество, применяемое в направлении терма x13, дает общую стандартизацию, и если это так, то оно заносится в список x14. В нашем примере x14 состоит из единственной импликации:

$$\forall_{ab}(b - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(a) \rightarrow -(-b)a = ba)$$

Далее импликации набора x14 регистрируются в списке вывода.

3. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(c) \rightarrow b(ac) = (ab)c)$$

из теоремы

$$\forall_{abAB}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow b(\text{авектор}(AB)) = (ab)\text{вектор}(AB))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий, переменной x12 - набор антецедентов. В терме x10 рассматривается вхождение x13 атомарного относительно x12 подвыражения x14. В нашем примере - выражения "вектор(AB)". Переменной x15 присваивается список параметров терма x14, переменной x16 - консеквент теоремы. Проверяется, что каждая переменная списка x15 встречается в терме x16 и в существенных антецедентах теоремы только внутри подтерма, равного x14. Переменной x17 присваивается заголовок терма x14. В нашем примере - "вектор". Справочник "тип" определяет тип x19 значения выражений с заголовком x17. В нашем случае - "Вектор". Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по символу x19 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x20 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем случае -

$$\forall_c(\text{Вектор}(c) \leftrightarrow \exists_{de}(d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ c = \text{вектор}(de)))$$

Переменной x23 присваивается вхождение консеквента теоремы x20. Проверяется, что заголовок левой части эквивалентности x23 - символ x19. Переменной x24 присваивается вхождение правой части. Проверяется, что по вхождению x24 расположен квантор существования. Переменной x25 присваивается набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Переменной x26 присваивается переменная - корневой операнд левой части эквивалентности. В нашем примере - "c". Среди утверждений x25 выбирается равенство x27 с переменной x26 в левой части. Проверяется, что заголовок правой части - x17, и переменной x28 присваивается эта правая часть. В нашем случае - "вектор(de)". Переменной x29 присваивается список параметров терма x28. Проверяется, что эти параметры включаются в связывающую приставку квантора x24. Усматривается, что терм x14 является результатом некоторой подстановки S вместо переменных x29 в терм x28. Переменной x31 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям списка x25, отличным от x27. В нашем примере - "A - точка", "B - точка". Переменной x32 присваивается список антецедентов исходной теоремы, в которых какая-либо переменная списка x15 встречается не внутри подтерма, равного x14. Переменной x33 присваивается

объединение не вошедших в список х32 antecedентов исходной теоремы со списком х31. Проверяется, что утверждения х32 суть следствия утверждений х33. Переменной х34 присваивается результат добавления термина х16 перед началом списка не вошедших в х32 antecedентов исходной теоремы. В каждом терме списка х34 все вхождения подтерма х14 заменяются на переменную х26. Затем создается импликация, консеквентом которой служит первый элемент списка х34, а antecedентами - остальные элементы этого списка. Эта импликация регистрируется в списке вывода.

Индуктивное обобщение тождества

1. Ввод целочисленного параметра для обобщения тождества, в котором прибавление к аргументу константного термина не изменяет значения.

В качестве примера рассмотрим вывод тождества

$$\forall_{ab}(\neg(\cos b = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a - \text{целое} \rightarrow \operatorname{tg}(b + a\pi) = \operatorname{tg} b)$$

из тождества

$$\forall_b(\neg(\cos b = 0) \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \operatorname{tg}(b + \pi) = \operatorname{tg} b)$$

Переменной х10 присваивается заменяемый терм, переменной х11 - заменяющий. В заменяемом терме рассматривается вхождение х12 символа "плюс", имеющего ровно 2 слагаемых. Переменной х13 присваивается вхождение того слагаемого, который представляет собой переменную (она присваивается переменной х15), переменной х14 - вхождение другого слагаемого. Проверяется, что переменная х15 имеет единственное вхождение в терме х10. Переменной х16 присваивается подтерм по вхождению х14. В нашем примере х15 - b ; х16 - π . Проверяется, что выражение х16 константное. Переменной х17 присваивается результат замены вхождения х12 в терм х10 на переменную х15. Проверяется, что термины х17 и х11, после обработки оператором "станд", совпадают. Выбирается переменная х18, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - a . Переменной х20 присваивается результат замены вхождения х14 в терм х10 на произведение выражений х18 и х16. В нашем случае - " $\operatorname{tg}(b + a\pi)$ ". Создается импликация, antecedенты которой получаются добавлением к antecedентам исходной теоремы утверждения "целое(х18)", а консеквентом служит равенство выражения х20 выражению х11. После обработки оператором "нормтеорема" она регистрируется в списке вывода.

2. Переход от вынесения наружу минуса к вынесению наружу степени минус единицы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{целое} \rightarrow \sin(a(-1)^b) = (-1)^b \sin a)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \sin(-a) = -\sin a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow (-1)a = -a)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий. Переменной x12 присваивается заголовок терма x11. В нашем случае - "минус". Проверяется, что x12 - одноместная операция. Переменной x13 присваивается корневой операнд этой операции. В нашем примере - " $\sin a$ ". Оператор "сравнтермов" определяет вхождение x14 в терм x13 и вхождение x15 в терм x10, такие, что x13, x10 отличаются друг от друга только внутри подтермов x14, x15. В нашем примере x14 - вхождение переменной a , x15 - вхождение подтерма " $-a$ ". Проверяется, что x14 - вхождение переменной, и эта переменная присваивается переменной x16. Подтерм по вхождению x15 присваивается переменной x17. Проверяется, что x17 имеет вид x12(x16). Проверяется, что текущая теорема не имеет существенных antecedентов. Справочник поиска теорем "измзнака" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она тоже не имеет существенных antecedентов. Переменной x20 присваивается вхождение консеквента дополнительной теоремы. Проверяется, что один из операндов равенства x20 имеет заголовок x12. Переменной x22 присваивается вхождение другого операнда, а переменной x23 - его заголовок. В нашем примере - "умножение". Проверяется, что среди операндов вхождения x22 встречается константный терм x25. В нашем случае - " -1 ". Справочник "степень" определяет по символу x23 ассоциативной и коммутативной операции пару (g, i) , где g - соответствующая x23 операция типа "возведения в целочисленную степень", а i - номер операнда, соответствующего показателю степени. Выбирается переменная x27, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b . Переменной x28 присваивается результат соединения операцией g термов x25 и x27, причем x27 играет роль показателя степени. В нашем примере x28 имеет вид " $(-1)^b$ ". Переменной x29 присваивается результат замены вхождения x15 в терм x10 на результат соединения операцией x23 термов x28 и x16. В нашем примере - " $\sin((-1)^b a)$ ". Переменной x30 присваивается результат соединения операцией x23 термов x28 и x13. В нашем случае - " $(-1)^b \sin a$ ". Создается импликация, antecedенты которой получаются добавлением к antecedентам исходной теоремы утверждения "целое(x27)", а консеквентом служит равенство выражений x29 и x30. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема".

3. Переход от исключения минуса к исключению степени минус единицы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{целое} \rightarrow \cos(a(-1)^b) = \cos a)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \cos(-a) = \cos a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow (-1)a = -a)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий. Оператор "сравнтермов" определяет вхождение x12 в терм x11 и вхождение x13 в терм x10, такие, что x11, x10 отличаются друг от друга только

внутри подтермов x_{12} , x_{13} . В нашем примере x_{14} - вхождение переменной a , x_{13} - вхождение подтерма " $-a$ ". Проверяется, что x_{12} - вхождение переменной, и эта переменная присваивается переменной x_{14} . Подтерм по вхождению x_{13} присваивается переменной x_{15} . Проверяется, что x_{17} имеет вид $x_{16}(x_{14})$, где x_{16} - символ одноместной операции. В нашем примере - "минус". Проверяется, что текущая теорема не имеет существенных антецедентов. Справочник поиска теорем "измзнака" определяет по символу x_{16} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она тоже не имеет существенных антецедентов. Переменной x_{19} присваивается вхождение консеквента дополнительной теоремы. Проверяется, что один из операндов равенства x_{19} имеет заголовок x_{16} . Переменной x_{21} присваивается вхождение другого операнда, а переменной x_{22} - его заголовок. В нашем примере - "умножение". Проверяется, что среди операндов вхождения x_{21} встречается константный терм x_{24} . В нашем случае - " -1 ". Справочник "степень" определяет по символу x_{22} ассоциативной и коммутативной операции пару (g, i) , где g - соответствующая x_{22} операция типа "возведения в целочисленную степень", а i - номер операнда, соответствующего показателю степени. Выбирается переменная x_{26} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b . Переменной x_{27} присваивается результат соединения операцией g термов x_{24} и x_{26} , причем x_{26} играет роль показателя степени. В нашем примере x_{27} имеет вид " $(-1)^b$ ". Переменной x_{28} присваивается результат замены вхождения x_{13} в терм x_{10} на результат соединения операцией x_{22} термов x_{27} и x_{14} . В нашем примере - " $\cos((-1)^b a)$ ". Создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы утверждения "целое(x_{26})", а консеквентом служит равенство выражений x_{28} и x_{11} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема".

4. Ввод степенного выражения с натуральным показателем для самого сложного подтерма заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdef} (\neg(a = 0) \ \& \ \neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < e \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{натуральное} \rightarrow d^{b+c(\log_d e)^{f/a}} = d^b e^{c(\log_d e)^{f-1/a}})$$

из теоремы

$$\forall_{abcde} (\neg(a = 0) \ \& \ \neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < e \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d^{b+c \log_d e/a} = d^b e^{c/a})$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм, переменной x_{11} - заменяющий. Заменяемый терм имеет единственный подтерм максимальной сложности, который присваивается переменной x_{13} . В нашем примере - $\log_d e$. Переменной x_{14} присваивается вхождение подтерма x_{13} в x_{10} . Проверяется, что оно является операндом вхождения x_{15} ассоциативной и коммутативной операции x_{16} . В нашем случае - умножения. Справочник "степень" определяет по символу x_{16} пару (g, i) , где g - соответствующая x_{16} операция типа "возведения в целочисленную степень", а i - номер операнда, соответствующего показателю степени. Проверяется, что g некоммутативно. Находится переменная x_{20} , являющаяся отличным от x_{14} операндом операции x_{15} . В нашем примере - переменная c . Проверяется, что она имеет единственное вхождение в терм x_{10} . Выбирается

переменная x22, не встречающаяся в исходной теореме. В нашем случае - f . Переменной x23 присваивается результат соединения операцией g термов x13 и x22, причем x22 играет роль показателя степени. В нашем примере x23 имеет вид $(\log_d e)^f$. Переменной x24 присваивается результат замены в x10 вхождения x14 на терм x23. В нашем примере имеем $d^{b+c(\log_d e)^f/a}$. Переменной x25 присваивается сумма x22 и минус единицы. Переменной x26 присваивается результат соединения операцией x16 выражения x20 и результата соединения операцией g термов x13, x25. Здесь роль показателя степени играет x25. В нашем случае имеем $c(\log_d e)^{f-1}$. Переменной x27 присваивается результат подстановки выражения x26 вместо переменной x20 в терм x11. В нашем примере - $d^b e^{c(\log_d e)^{f-1}/a}$. Переменной x28 присваивается равенство выражений x24 и x27, переменной x29 - набор результатов подстановки в антецеденты исходной теоремы выражения x26 вместо переменной x20, пополненный утверждением "натуральное(x22)". Создается импликация с антецедентами x29 и консеквентом x28. Она обрабатывается операторами "полныепосылки" и "нормтеорема". Проверяется, что результат не имеет антецедентов с более чем двумя параметрами, после чего он регистрируется в списке вывода.

Преобразование тождества с помощью вспомогательной задачи

1. Попытка разрешить нормализующее тождество с несколькими сложными численными операциями относительно одной из них.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a (a - \text{число} \rightarrow (\sin a)^2 = 1 - (\cos a)^2)$$

из теоремы

$$\forall_a (a - \text{число} \rightarrow (\sin a)^2 + (\cos a)^2 = 1)$$

Переменной x10 присваивается консеквент, переменной x11 - список подтермов утверждения x10, имеющих наибольшую оценку сложности. В нашем примере - "sin a", "cos a". Проверяется, что в списке x11 не менее двух элементов. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Проверяется, что x9 - равенство вещественных либо комплексных чисел. Выбирается элемент x13 списка x11. В нашем примере - "sin a". Проверяется, что терм x13 имеет единственное вхождение в терме x10; переменной x16 присваивается это вхождение. Выбирается переменная x15, не входящая в теорему. В нашем случае - b . Рассматривается надтерм x18 вхождения x16. В нашем примере - $(\sin a)^2$. Проверяется что он не имеет вхождений отличных от x13 термов списка x11. Переменной x20, в зависимости от типа значений корневой операции выражения x18, присваивается символ "число" либо "комплексное". Переменной x21 присваивается результат замены подтерма x18 терма x10 на переменную x15. В нашем примере - $b + (\cos a)^2 = 1$. Решается задача на описание с посылками x12 и условиями x21, "x20(x15)". Цели ее - "полный", "явное", "прямойответ", "и". "неизвестные x15". Переменной x23 присваивается ответ. Среди конъюнктивных членов ответа выбирается равенство x25 неизвестной x15 некоторому терму t . Проверяется, что этот терм отличен от терма x18. В нашем примере он имеет вид $1 - (\cos a)^2$. Переменной x26 присваивается равенство выражения x18 терму t . Проверяется, что истинность прочих конъюнктивных членов ответа x23

усматривается из посылок x12. Переменной x27 присваивается импликация с антецедентами x12 и консеквентом x26. Она регистрируется в списке вывода с характеристикой "вартеор(второйтерм)". Если список x11 состоит только из двух термов, причем r - терм, отличный от x13, то добавляется характеристика "варьир(второйтерм x13 r)".

2. Попытка перегруппировки членов тождества и приведения правой части к заданному заголовку.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow (\sin a)^2 = (-\cos a + 1)(1 + \cos a))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow (\sin a)^2 + (\cos a)^2 = 1)$$

Переменной x10 присваивается консеквент теоремы, переменной x11 - набор подтермов консеквента, имеющих максимальную сложность. Проверяется, что этот набор имеет не менее двух элементов. В нашем примере x11 состоит из выражений "sin a", "cos a". Переменной x12 присваивается набор антецедентов теоремы. Переменной x13 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте, которая имеет своим заголовком x15 символ ассоциативной и коммутативной операции. В нашем примере - "плюс". Переменной x14 присваивается вхождение другой части равенства. Переменной x17 присваивается тип значений операции x15. В нашем случае - "число". Справочник "перегруппировка" определяет по символу x17 тройку (A, B, C) , означающую, что возможна перегруппировка A - членов операндов равенства из одной части в другую с изменением знака B ; C - единица операции A . В нашем примере имеем тройку (плюс, минус, 0). Справочник "заголовки" определяет по символу A набор S названий таких нормализаторов приведения к заданным заголовкам, которые обычно применяются к выражениям, имеющим своим заголовком данный символ. Переменной x22 присваивается объединение x15 - членов подтерма x13 с B -отрицаниями x15 - членов подтерма x14. В нашем примере x22 состоит из термов " $(\sin a)^2$ ", " $(\cos a)^2$ ", "-1". Выбираются такие элемент x23 списка x22 и элемент x24 списка x11, что x24 входит в x23. В нашем примере x23 - " $(\sin a)^2$ ", x24 - "sin a". Проверяется, что x24 не входит в остальные термы списка x22. Переменной x26 присваивается результат соединения операцией x15 B - отрицаний отличных от x23 выражений списка x22. В нашем примере - " $-(\cos a)^2 + 1$ ". Из списка S выбирается название x27 нормализатора приведения к заданным заголовкам. В нашем примере - "видумножение". Находится результат x28 применения к выражению x26 нормализатора x27 относительно посылок x12. Нормализатору передаются комментарии "группировка", "повторчисло". В нашем примере получаем " $(-\cos a + 1)(1 + \cos a)$ ". Проверяется, что x28 имеет заголовок, для достижения которого предназначен нормализатор x27 (с точностью до отбрасывания корневых одноместных операций, допустимых согласно формату нормализатора). Создается импликация с антецедентами x12, консеквентом которой служит равенство выражений x23 и x28. Она регистрируется в списке вывода и снабжается единственной характеристикой "нормзаголовок(x27 второйтерм)".

3. Попытка явного разрешения относительно самого сложного подвыражения равенства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(0 < bc \ \& \ c|d \ \& \ b\text{—целое} \ \& \ c\text{—целое} \ \& \ d\text{—целое} \ \& \ \text{взаимнопросты}(d/|c|, |b|) \rightarrow \text{нод}(d, bc) = |c|)$$

из теоремы

$$\forall_{bcd}(0 < bc \ \& \ c|d \ \& \ b\text{—целое} \ \& \ c\text{—целое} \ \& \ d\text{—целое} \ \& \ \text{взаимнопросты}(d/|c|, |b|) \rightarrow bc/\text{нод}(d, bc) = |b|)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяющий терм, переменной x_{11} - заменяемый. Переменной x_{12} присваивается набор подвыражений терма x_{11} , имеющих максимальную сложность. Проверяется, что он одноэлементный, и переменной x_{13} присваивается его элемент. В нашем примере - " $\text{нод}(d, bc)$ ". Проверяется, что термы x_{13} и x_{11} различны. Переменной x_{14} присваивается набор подвыражений терма x_{10} , имеющих максимальную сложность. В нашем примере он состоит из терма " $|b|$ ". Проверяется, что либо оценка сложности терма x_{10} меньше оценки сложности терма x_{13} , либо эти оценки равны, причем x_{14} состоит из единственного терма, более короткого, чем x_{13} , и при этом получаемого из x_{13} исключением части операндов. Проверяется, что в терме x_{11} имеется единственное вхождение терма x_{13} . Переменной x_{18} присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - a . Переменной x_{19} присваивается равенство выражения, получаемого из x_{11} заменой подтерма x_{13} на x_{18} , выражению x_{10} . В нашем примере - " $bc/a = |b|$ ". Переменной x_{20} присваивается набор типов значений выражений с тем же заголовком, что у терма x_{13} . В нашем примере - "натуральное", "целое", "рациональное", "число". Переменной x_{21} присваивается утверждение " $P(x_{18})$ ", где P - начало списка x_{20} . В нашем примере x_{21} имеет вид " $\text{натуральное}(a)$ ". Переменной x_{22} присваивается список антецедентов исходной теоремы, после чего решается задача на описание с посылками x_{22} и условиями x_{19} , x_{21} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "равно", "неизвестные a ", "упростить". Ответ задачи присваивается переменной x_{24} . В нашем примере он имеет вид " $a = |c|$ ". Проверяется, что x_{24} - равенство с переменной x_{18} в левой части. Переменной x_{25} присваивается правая часть равенства. Проверяется, что оценка сложности терма x_{25} меньше оценки сложности терма x_{13} . Создается импликация x_{27} с антецедентами x_{22} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{13} и x_{25} . Исходная теорема исключается из дальнейшего вывода, а теорема x_{27} регистрируется в списке вывода как ее обобщение.

Склейка двух теорем

1. Склейка двух импликаций, отличающихся только альтернативными антецедентами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abAB}(\neg(a = 0) \ \& \ a\text{—число} \ \& \ b\text{—число} \ \& \ A\text{—точка} \ \& \ B\text{—точка} \rightarrow b(a \cdot \text{вектор}(AB)) = (ab)\text{вектор}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{abAB}(0 < a \ \& \ a\text{-число} \ \& \ b\text{-число} \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \rightarrow b(a\text{-вектор}(AB)) = (ab)\text{вектор}(AB))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abAB}(a < 0 \ \& \ a\text{-число} \ \& \ b\text{-число} \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \rightarrow b(a\text{-вектор}(AB)) = (ab)\text{вектор}(AB))$$

Переменной x10 присваивается консеквент, переменной x11 - набор антецедентов. В списке вывода выбирается дополнительная теорема, отличная от исходной и не помеченная символом "исключение" в своем блоке вывода. Проверяется, что текущая характеристика "нормализация(...)" встречается среди характеристик дополнительной теоремы. Переменной x15 присваивается набор антецедентов дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет такую же длину, что и набор x11. Переменной x16 присваивается консеквент дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет такую же длину, как и x10. Переменной x17 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не встречающиеся в исходной теореме. В нашем примере имеем:

$$\forall_{cdef}(c < 0 \ \& \ c\text{-число} \ \& \ d\text{-число} \ \& \ e\text{-точка} \ \& \ f\text{-точка} \ \rightarrow d(c\text{-вектор}(ef)) = (cd)\text{вектор}(ef))$$

Переменной x18 присваивается консеквент теоремы x17, переменной x19 - список переменных этого консеквента. Усматривается, некоторое переобозначение без отождествлений переменных x19 переводит терм x18 в терм x10. Переменной x22 присваивается набор результатов такого же переобозначения переменных в антецедентах теоремы x17. В нашем примере - набор " $a < 0$ ", " a - число", " b - число", " A - точка", " B - точка". Переменной x23 присваивается пересечение списков x11 и x22, переменной x24 - исключение антецедентов x23 из списка x11, переменной x25 - исключение антецедентов x23 из списка x22. Проверяется, что список x24 состоит из единственного утверждения A , список x25 - из единственного утверждения B . В нашем примере A - " $0 < a$ ", B - " $a < 0$ ". Переменной x26 присваивается дизъюнкция утверждений A, B . Переменной x27 присваивается результат обработки утверждения x26 оператором "нормили" относительно списка утверждений x23. В нашем примере получаем " $\neg(a = 0)$ ". Проверяется, что x27 элементарно, и создается импликация с антецедентами, получаемыми добавлением x27 к списку x23. Консеквентом ее является утверждение x10. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. Как исходная, так и дополнительная теоремы из списка вывода исключаются.

2. Склейка двух импликаций с одинаковыми антецедентами, консеквенты которых отличаются заменой константного подвыражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcf}(b\text{-число} \ \& \ c\text{-число} \ \& \ f\text{-число} \ \& \ 0 \leq c - b \ \& \ 0 \leq f - c \ \& \ a\text{-boolean} \ \rightarrow [b, c] \cup [c, f] = [b, f])$$

из теоремы

$$\forall_{bcf}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 \leq c - b \ \& \ 0 \leq f - c \rightarrow [b, c] \cup [c, f] = [b, f])$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bcf}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 \leq c - b \ \& \ 0 \leq f - c \rightarrow [b, c] \cup [c, f] = [b, f])$$

Формульный редактор в данном случае скрывает указатели на тип промежутка. В первой из приведенных трех теорем последний операнд выражений для промежутков равен a , т.е. правый конец промежутка может как принадлежать, так и не принадлежать промежуткам (но для всех промежутков - одинаково). Во второй теореме последние операнды выражений для промежутков равны 0, в третьей - равны 1. Соответственно, правый конец промежутка либо отбрасывается, либо относится к промежутку.

Переменной x_{10} присваивается консеквент, переменной x_{11} - набор антецедентов. В списке вывода выбирается дополнительная теорема, отличная от исходной и не помеченная символом "исключение" в своем блоке вывода. Проверяется, что текущая характеристика "нормализация(...)" встречается среди характеристик дополнительной теоремы. Переменной x_{15} присваивается набор антецедентов дополнительной теоремы. Проверяется, что он совпадает с x_{11} . Переменной x_{16} присваивается консеквент дополнительной теоремы. Проверяется, что кванторные приставки основной и дополнительной теорем совпадают. Оператор "разлтермов" определяет набор x_{17} всех пар (v_1, v_2) вхождений v_1 в терм x_{10} и вхождений v_2 в терм x_{16} , имеющих равные указатели вхождений и равные наборы внешних операций, таких, что подтермы по v_1 и v_2 имеют различные заголовки. В нашем примере x_{17} состоит из трех пар, соответствующих сравнению концов трех рассматриваемых в консеквенте промежутков. Первый элемент каждой пары - вхождение нуля, второй - вхождение единицы. Переменной x_{18} присваивается первый элемент первой пары, x_{19} - второй элемент первой пары (она относится к промежутку в правой части консеквента). Проверяется, что первые элементы прочих пар суть вхождения подтермов, равных подтерму x_{20} по вхождению x_{18} , а вторые элементы - подтермов, равных подтерму x_{21} по вхождению x_{19} . Проверяется, что термы x_{20} и x_{21} константные. Проверяется, что тип значения подтерма x_{18} отличен от типа значения его непосредственного надтерма. Выбирается переменная x_{22} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{24} присваивается результат замены в терме x_{10} подтермов, расположенных на вхождениях - первых элементах пар набора x_{17} - на переменную x_{22} . Переменной x_{25} присваивается результат добавления к списку антецедентов исходной теоремы утверждения "принадлежит(x_{22} перечень(набор(x_{20} x_{21})))". В нашем примере - " $a \in \{0, 1\}$ ". Создается импликация с антецедентами x_{25} и консеквентом x_{24} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Исходная и дополнительная теоремы в результат цикла вывода не включаются, но в дальнейших выводах участвуют, так как могут понадобиться для других склеек.

3. Склейка двух отличающихся альтернативными antecedentes тождеств с различающимися правыми частями и одинаковыми левыми.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ a\text{-число} \ \& \ b\text{-число} \ \& \ c\text{-число} \ \rightarrow \ |c/(ab)| = |c/b|/|a|)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ a\text{-число} \ \& \ b\text{-число} \ \& \ c\text{-число} \ \rightarrow \ |c/(ab)| = |c/b|/a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a < 0 \ \& \ a\text{-число} \ \& \ b\text{-число} \ \& \ c\text{-число} \ \rightarrow \ |c/(ab)| = -|c/b|/a)$$

Переменной x10 присваивается консеквент, переменной x11 - набор antecedентов. В списке вывода выбирается дополнительная теорема, отличная от исходной и не помеченная символом "исключение" в своем блоке вывода. Проверяется, что текущая характеристика "нормализация(...)" встречается среди характеристик дополнительной теоремы. Переменной x15 присваивается набор antecedентов дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет такую же длину, что и набор x11. Переменной x16 присваивается консеквент дополнительной теоремы. Переменной x17 присваивается заменяемый терм, переменной x18 - заменяющий. Проверяется, что параметры терма x18 - подмножество параметров терма x17. Переменной x19 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере имеем:

$$\forall_{def}(\neg(e = 0) \ \& \ d < 0 \ \& \ d\text{-число} \ \& \ e\text{-число} \ \& \ f\text{-число} \ \rightarrow \ |f/(de)| = -|f/e|/d)$$

Переменной x20 присваивается консеквент теоремы x19, переменной x21 - заменяемая часть этого консеквента. Проверяется, что длины выражений x21 и x17 равны. Определяется подстановка S вместо переменных терма x21, переводящая его в терм x17. Проверяется, что S переобозначает переменные, не отождествляя их. Переменной x25 присваивается результат применения подстановки S к заменяющему терму теоремы x19. В нашем примере - " $-|c/b|/a$ ". Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" термов x18 и x25 различны. Определяется результат x26 применения подстановки S к antecedентам теоремы x19. Переменной x27 присваивается пересечение списков x11 и x26, переменной x28 - разность списков x11 и x27, переменной x29 - разность списков x26 и x27. Проверяется, что списки x28 и x29 одноэлементы и состоят из некоторых утверждений A, B . В нашем примере - " $0 < a$ ", " $a < 0$ ". Переменной x30 присваивается дизъюнкция утверждений A и B , переменной x31 - результат обработки утверждения x30 нормализатором "нормили" относительно посылок x27. В нашем примере получаем " $\neg(a = 0)$ ". Проверяется, что утверждение x31 элементарное. Переменной x32 присваивается равенство выражения x17 условному выражению "вариант(B x25 x18)". В нашем примере оно имеет вид:

$$|c/(ab)| = (-|c/b|/a \text{ при } a < 0, \text{ иначе } |c/b|/a)$$

Создается импликация, antecedенты которой получаются добавлением утверждения x31 к списку x27, а консеквентом служит x32. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Создание квазипротоколов

1. Обращение к нормализатору приведения к заданным заголовкам для декомпозиции сложного выражения.

В качестве примера рассмотрим создание квазипротокола

$$\forall_{abcde}(b = d + e \ \& \ 0 < (d + e)c \rightarrow \log_a((d + e)c) = \log_a(bc))$$

по теореме

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \rightarrow \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c)$$

Рассматриваемый квазипротокол создает прием, выполняющий попытку разложения на множители суммы $d + e$ - сомножителя выражения под логарифмом.

Переменной x10 присваивается заменяющая часть, переменной x11 - заменяемая. Проверяется, что оценки сложности обеих частей одинаковы. В терме x11 выбирается вхождение x13 двуместной операции, операндами которой служат различные переменные x14 и x15. В нашем примере эта операция - " bc "; переменная x14 - b ; переменная x15 - c . Проверяется, что переменные x14 и x15 имеют единственное вхождение в терме x11. Переменной x16 присваивается список подтермов терма x10, имеющих максимальную сложность. В нашем примере - " $\log_a b$ " и " $\log_a c$ ". Проверяется, что список x16 двухэлементный, причем каждый его терм неповторен и содержит ровно одну из переменных x14, x15. Проверяется, что терм x11 неповторный. Переменной x17 присваивается символ по вхождению x13. В нашем примере - "умножение". При помощи справочника "нормзаголовков" определяется название x21 нормализатора приведения выражений к заголовку x17. В нашем примере - "видумножение". Просматриваются протоколы базы теорем, расположенный в том ее разделе, к которому относится символ x17. Выбирается протокол x25, имеющий заголовок "видобъекта", первым операндом которого служит символ x21. В нашем примере - "видобъекта(видумножение контекст(вид(фикс плюс($a b$))))". Этот протокол определяет вид выражений, к которым обычно применяется нормализатор x21. Проверяется, что число операндов протокола x25 равно 2. Переменной x26 присваивается второй из них. Проверяется, что его заголовок - "контекст", причем в нем выделяется вхождение x27 терма "вид(фикс t)". Переменной x28 присваивается терм " t ". В нашем примере - "плюс($a b$)". Переменной x29 присваивается список параметров терма x28. В нашем примере - " a, b ". Переменной x30 присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему и имеющих такую же длину, как список x29. В нашем примере - " d, e ". Переменной x31 присваивается результат замены в терме x28 переменных x29 на x30. В нашем примере - " $d + e$ ". Переменной x32 присваивается набор антецедентов исходной теоремы, переменной x33 - список утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. терма x11. В нашем примере - " $c - \text{число}$ ", " $b - \text{число}$ ", " $\neg(a - 1 = 0)$ ", " $0 < bc$ ", " $0 < a$ ", " $a - \text{число}$ ". Проверяется, что список x33 непуст. Проверяется, что операция x17 ассоциативна и коммутативна. Выбирается антецедент x34, не входящий в список x33 и содержащий переменную x14 либо x15. В нашем примере - $0 < b$. Проверяется, что при помощи задачи на доказательство не удастся вывести x34 из x33. Переменной x36 присваивается равенство выражению

x11 выражения, полученного из x11 заменой первого операнда вхождения x13 на терм x31. В нашем примере получаем: " $\log_a((d+e)c) = \log_a(bc)$ ". Переменной x37 присваивается набор, состоящий из единственного элемента - равенства термов x14 и x31. В нашем примере - " $b = d+e$ ". Просматриваются все содержащиеся подтермы x13 утверждения списка x33. Первые операнды подтермов x13 у них заменяются на x31, после чего такие утверждения добавляются к списку x37. В нашем примере добавляется единственный элемент " $0 < (d+e)c$ ". Наконец, создается импликация с антецедентами x37 и консеквентом x36. Она регистрируется в списке вывода с характеристиками "стандранно" и "оператор(x21)". Других характеристик не вводится.

2. Стандартизация операнда с помощью нормализатора стандартной формы.

В качестве примера рассмотрим создание квазипротокола

$$\forall abcdefgn(g = (a + b)^n c / d + e \rightarrow f^{(a+b)^n c / d + e} = fg)$$

по теореме

$$\forall abc(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$$

Рассматриваемый квазипротокол создает прием, выполняющий раскрытие скобок в показателе степени.

Переменной x10 присваивается заменяющий терм. В нашем примере - " a^{b+c} ". Проверяется, что он неповторный. Переменной x11 присваивается заменяемый терм, переменной x12 - список его параметров. Переменной x13 присваивается список параметров терма x13. Проверяется, что x12 включается в x13. Проверяется, что имеет место один из следующих случаев:

- (a) Самый сложный подтерм терма x10 - он сам. Список S самых сложных подтермов терма x11 - не менее чем двухэлементный. В нашем примере он состоит из термов a^b, a^c . Терм x10 имеет своим корневым операндом выражение $f(x, y)$, где x, y - различные переменные. В нашем примере - " $b + c$ ". Ни один из термов списка S не содержит одновременно обеих переменных x, y . Тогда переменной x14 присваивается заголовок терма x10, переменной x15 - номер корневого операнда терма x10, равного $f(x, y)$, переменной x16 - символ f .
- (b) Предыдущий случай не имеет места. Терм x11 имеет корневой операнд вида $f(x, y)$, где x, y - переменные, каждая из которых неповторна в x11. Тогда переменной x14 присваивается заголовок терма x11, переменной x15 - номер корневого операнд терма x11, равного $f(x, y)$, переменной x16 - символ f .

В нашем примере имеет место случай а), причем x14 - "степень", x15 - 2, x16 - "плюс". Справочник "стандформа" определяет по x16 название x25 стандартной формы с корневой операцией x16. В нашем примере - "стандплюс".

Начинается просмотр всех теорем T того раздела, к которому относится символ x_{16} . В нашем примере - "элементарная алгебра". В процессе просмотра находится квазипротокол с характеристиками "стандхаракт", "оператор(x_{25})". Этот квазипротокол задает шаблон для указания вида термов, обеспечивающего невырожденные преобразования к стандартной форме x_{25} . Переменной x_{26} присваивается пара (квазипротокол - его характеристики). В нашем примере - (" $(a + b)^n c/d + e$ ", ("теорема приема", "стандхаракт", "оператор(стандплюс)", "указатель(единица(1 с d n) единица(0 e))", "см(натуральное(n) или(не(заголовок(c 1)) не(заголовок(d 1)) не(заголовок(n 1))))").

Просмотр раздела продолжается даже после обнаружения необходимого квазипротокола. В процессе просмотра теорем T проверяется, что ни для одной из них не выполнено ни одно из следующих условий:

- (a) T - кванторная импликация, имеющая характеристику "нормализация(N)" либо "декомпозиция(M)". В первом случае пусть M - направление, противоположное N . Заменяемый (в смысле направления M) терм A теоремы T имеет заголовок x_{14} и неповторен. Параметры заменяющего термина B включаются в параметры заменяемого. Наиболее сложный подтерм термина A - он сам. Список P наиболее сложных подтермов термина B не менее чем двухэлементный. Терм A имеет корневой операнд вида $g(z, v)$, где g отлично от x_{16} ; z, v - различные переменные. Ни один из термов списка P не содержит одновременно обе эти переменные. Номер корневого операнда $g(z, v)$ термина A равен x_{15} .
- (b) T - кванторная импликация, имеющая характеристику "нормализация(N)". Заменяемая часть A теоремы T имеет заголовок x_{14} и корневой операнд вида $g(z, v)$, где g отлично от x_{16} , а каждая из переменных z, v имеет единственное вхождение в A . Номер корневого операнда $g(z, v)$ термина A равен x_{15} .

По завершении просмотра теорем переменной x_{27} присваивается первый элемент пары x_{26} . В нашем примере - " $(a + b)^n c/d + e$ ". Переменной x_{28} присваивается арность символа x_{14} . Проверяется, что она равна 1 либо 2. В первом случае переменной x_{29} присваивается терм $x_{14}(x_{27})$, во втором - результат соединения операцией x_{14} термина x_{27} и новой переменной, причем терм x_{27} помещается на позиции x_{15} . В нашем примере x_{29} имеет вид " $f^{(a+b)^n c/d+e}$ ".

Выбирается переменная x_{30} , не входящая в терм x_{29} . В нашем примере - g . Переменной x_{32} присваивается равенство термов x_{30} и x_{27} , переменной x_{33} - равенство термина x_{29} результату замены в x_{29} подтерма x_{27} на переменную x_{30} . Переменной x_{34} присваивается импликация с единственным антецедентом x_{32} и консеквентом x_{33} . Она регистрируется в списке вывода с характеристиками "теорема приема", "операнд", "стандравно", "оператор(x_{25})". К ним добавляются все термы "см(...)", "указатель(...)" из второго элемента пары x_{26} .

3.55 Характеристика "нормзаголовков"

Характеристикой "нормзаголовков($P N$)" снабжаются тождества, которые можно использовать для нормализатора P преобразования к заданным заголовкам. N - на-

правление замены.

Использование дополнительного тождества для варьирования заменяемой части

1. Попытка проварьировать заменяемую часть тождества приведения к заданным заголовкам.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow b \log_c |a| = \log_c(a^b))$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(\neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \log_c d = \log_c(d^e))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \rightarrow |a|^b = a^b)$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Проверяется, что число переменных кванторной приставки теоремы не превосходит 3. В заменяемой части выделяется вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. Переменной x12 присваивается его заголовок. В нашем примере x11 - вхождение " d^e ", x12 - символ "степень". Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет не более двух переменных. Переменной x16 присваивается вхождение той части консеквента дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x12. В нашем примере - " $|a|^b$ ". Переменной x17 присваивается направление замены, при котором часть x16 оказывается заменяемой. Оператор "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x11 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы, ориентированной в направлении x17. В нашем примере получаем:

$$\forall_{abc}(\neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < |a| \ \& \ c - \text{число} \ \& \ |a| - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \rightarrow b \log_c |a| = \log_c(a^b))$$

Теорема x18 последовательно обрабатывается операторами "Спускоперандов", "демодификация" и "нормтеорема". Проверяется, что число переменных кванторной приставки у результата не превосходит такого числа у исходной теоремы, и этот результат регистрируется в списке вывода.

2. Попытка упрощения заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow 1 + \sin(b) = 2(\sin(b/2 + \pi/4)^2))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin a + \sin b = 2 \sin((a + b)/2) \cos((a - b)/2))$$

и дополнительной теоремы

$$\sin(\pi/2) = 1.$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Проверяется, что кванторная приставка теоремы имеет не более трех переменных. Внутри заменяемой части рассматривается вхождение x11 неоднобуквенного терма. Переменной x12 присваивается его заголовок. В нашем примере x11 - "sin a", x12 - "синус". Для получения дополнительной теоремы используются справочник поиска теорем "сокращдоби" и "констцелое". В нашем примере таким образом определяется указанная выше дополнительная теорема. Оператор "тожд-вывод" определяет результат x17 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере имеем:

$$\forall_b(\pi/2 - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 1 + \sin b = 2 \sin((\pi/2 + b)/2) \cos((\pi/2 - b)/2))$$

Теорема x17 последовательно обрабатывается операторами "Спускоперандов", "демодификация", "нормтеорема". Проверяется, что результат - кванторная импликация, длина кванторной приставки которой не больше, чем у исходной теоремы. Этот результат регистрируется в списке вывода.

3. Попытка сильного упрощения заменяемой части для получения тождества общей стандартизации, исключающего переменную.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bd}(b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq d + b^2 \rightarrow d = (b + \sqrt{d + b^2})(-b + \sqrt{d + b^2}))$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \rightarrow c - b^2 = (b + \sqrt{c})(-b + \sqrt{c}))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a + (b - a) = b)$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Проверяется, что кванторная приставка теоремы имеет не более трех переменных. Внутри заменяемой части рассматривается вхождение x11 неоднобуквенного терма. Переменной x12 присваивается его заголовок. В нашем примере x11 - "c - b²a", x12 - "плюс". Справочник поиска теорем "поглощается" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается результат преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере имеем:

$$\forall_{bd}(b - \text{число} \ \& \ d + b^2 - \text{число} \ \& \ (-b^2) - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow d = (b + \sqrt{d + b^2})(-b + \sqrt{d + b^2}))$$

Переменной x19 присваивается результат последовательной обработки теоремы x17 операторами "Спускоперандов", "демодификация" и "нормтеорема". Переменной x21 присваивается заменяемая часть теоремы x19 (в том же направлении замены, что и для исходной теоремы), переменной x22 - заменяющая.

Проверяется, что параметры терма x21 - собственное подмножество параметров терма x22, причем оценка сложности терма x21 меньше оценки сложности терма x22. Проверяется также, что длина кванторной приставки теоремы x19 не больше, чем у исходной теоремы. Затем теорема x19 регистрируется в списке вывода.

4. Попытка сильного упрощения заменяемой части при помощи тождества, включающего переменную.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{de}(d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e \rightarrow (\sqrt{d + \sqrt{e + d^2}} + \sqrt{-d + \sqrt{e + d^2}})^2 = 2\sqrt{e} + 2\sqrt{e + d^2})$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \rightarrow (b + \sqrt{c})^2 = c + 2b\sqrt{c} + b^2)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq d + \sqrt{e + d^2} \ \& \ 0 \leq e + d^2 \ \& \ 0 \leq -d + \sqrt{e + d^2} \rightarrow (d + \sqrt{e + d^2})^c (-d + \sqrt{e + d^2})^c = e^c)$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Проверяется, что кванторная приставка теоремы имеет не более трех переменных. Внутри заменяемой части рассматривается вхождение x11 неоднобуквенного терма. Переменной x12 присваивается его заголовок. В нашем примере x11 - " $b \cdot 2\sqrt{c}$ ", x12 - "умножение". Справочник поиска теорем "исклпараметр" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что оценки сложности подтерма x11 и консеквента дополнительной теоремы совпадают. Переменной x17 присваивается результат преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере имеем:

$$\forall_{de}(\sqrt{-d + \sqrt{e + d^2}} - \text{число} \ \& \ d + \sqrt{e + d^2} - \text{число} \ \& \ 0 \leq d + \sqrt{e + d^2} \ \& \ 1/2 - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e + d^2 \ \& \ 0 \leq -d + \sqrt{e + d^2} \rightarrow (\sqrt{-d + \sqrt{e + d^2}} + \sqrt{d + \sqrt{e + d^2}})^2 = (d + \sqrt{e + d^2}) + \sqrt{e} \cdot 2 + (\sqrt{-d + \sqrt{e + d^2}})^2)$$

К antecedentes теоремы x17 добавляются утверждения, необходимые для сопровождения ее консеквента по о.д.з. Результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Проверяется, что характеристизатор создает для него характеристику "уменьшсложн(M)", где M - направление замены, противоположное направлению исходной теоремы.

5. Попытка подстановки единицы в связку двух неповторных переменных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ace}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow (e + ac)/c = a + c/e)$$

из теоремы

$$\forall_{abce}(\neg(b = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow (ac + be)/(bc) = a/b + e/c)$$

В этом примере характеристика имеет вид "нормзаголовок(видумножение первыйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий. Внутри x10 рассматривается вхождение x12 подтерма вида $f(x, y)$, где x, y - переменные. Переменной x13 присваивается символ f , переменной x17 - одна из переменных x, y , переменной x18 - другая. В нашем примере x12 - вхождение терма " a/b ", x13 - символ "дробь", x17 - a , x18 - b . Проверяется, что переменные x17, x18 имеют единственное вхождение в терм x10. Находится единица x19 операции f . Переменной x20 присваивается та из переменных x17, x18, по которой операция x12 имеет единицу x19. Переменной x21 присваивается набор результатов подстановки в antecedentes теоремы единицы x19 вместо переменной x20, переменной x22 - результат такой же подстановки в консеквент теоремы. Создается импликация с antecedентами x21 и консеквентом x22. Она обрабатывается оператором "нормтеорема".

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Попытка модифицировать тождество приведения к заданным заголовкам путем заблаговременного "вынесения за скобки" общих частей операндов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdef} (\neg(d = 0) \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow ab/(df) + ac/(ef) = a(be + cd)/(def))$$

из теоремы

$$\forall_{abce} (\neg(b = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow (ac + be)/(bc) = a/b + e/c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcdef} (\neg(d = 0) \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow ab/(df) + ac/(ef) = a(b/d + c/e)/f)$$

Теорема выводится для приема сложения дробных выражений, который заблаговременно выводит за рамки вычислений общие множители числителей и знаменателей.

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части, переменной x11 - заголовок этой части. В нашем примере - "плюс". Переменной x12 присваивается название нормализатора приведения к заданным заголовкам, указанное в характеристике теоремы. В нашем примере - "видумножение". Переменной x13 присваивается список заголовков, к которым приводит термы оператор x12. В нашем примере - "умножение", "степень", "дробь".

Справочник поиска теорем "свертки" перечисляет по символу x11 вспомогательные теоремы, одна из которых будет выбрана в качестве указанной выше дополнительной теоремы. Текущая такая теорема присваивается переменной x17. Проверяется, что заголовок заменяемой части теоремы x17 равен x11. Переменной x24 присваивается заголовок заменяющей части теоремы x17. В

нашем примере - символ "дробь". Проверяется, что он входит в список x13. Переменной x25 присваивается список переменных заменяемой части теоремы x17, имеющих в ней более одного вхождения. В нашем примере - переменные a, f . Проверяется, что список x25 непуст. Для каждой переменной списка x25 проверяется, что она появляется в заменяемой части теоремы x17 только как операнд одной и той же ассоциативно-коммутативной операции, имеющей единицу. В нашем примере - "умножение". Проверяется, что заменяющая часть теоремы x17 представляет собой двуместную операцию, в которой выделяется вхождение x28 символа x11. В нашем примере - " $b/d + c/e$ ". Проверяется, что все расположенные вне x28 переменные заменяющей части принадлежат списку x25, а внутри x28 нет переменных этого списка.

В процессе просмотра теорем x17 отбирается та из них, для которой длина списка x25 - наибольшая. В результате, по окончании просмотра, переменной x14 оказывается сопоставлена отобранная дополнительная теорема, переменной x15 - указанное выше вхождение x28 в эту теорему (оно будет преобразовываться текущей теоремой). Прочие переменные становятся после просмотра не определенными.

Оператор "тождвывод" определяет результат x17 преобразования вхождения x15 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Он обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка получения тождества, исключаящего сложную операцию.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcdf}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \rightarrow c^f d^2 - b^2 = (b + dc^{f/2})(dc^{f/2} - b))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a^2 - b^2 = (a - b)(a + b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow (ba^{d/c})^c = b^c a^d)$$

Получаемая здесь теорема используется как дополнительная при выводе теорем. Именно, с ее помощью выводится теорема приема, исключаящего иррациональность в знаменателе.

Проверяется, что теорема - стартовая в списке вывода. Внутри заменяемой части выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. Переменной x12 присваивается его заголовок. В нашем примере x11 - вхождение термина a^2 , x12 - "степень". Справочник поиска теорем "смнеизв" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x15 присваивается ее характеристика "смнеизв($N \dots$)". Оператор "тождвывод" находит результат x17 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы, заменяемой в направлении N . В нашем примере получаем:

$$\forall_{bcdf}(dc^{f/2} - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(2 = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 2 - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(2) - \text{even}) \rightarrow d^2c^f - b^2 = (dc^{f/2} - b)(dc^{f/2} + b))$$

Теорема x17 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "упрощение(...)". Направление замены определяется характеристизатором. Очевидно, оно будет обратным направлению исходной теоремы.

Обобщение теоремы

1. Попытка получения тождества, устраняющего кратные вхождения сложной операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcf}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow (f + bc)/(ac) = (b + f/c)/a)$$

из теоремы

$$\forall_{ace}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow (e + ac)/c = a + e/c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ade}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d/(ae) = (d/e)/a)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий. Переменной x12 присваивается заголовок терма x11. В нашем примере - символ "дробь". Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что обе части равенства в ее консекенте имеют один и тот же заголовок x12. Переменной x16 присваивается вхождение одной из этих частей, переменной x17 - другой. В нашем примере x16 - правая часть, x17 - левая. Внутри вхождения x16 расположено отличное от него вхождение x18 символа x12. В нашем примере - вхождение подтерма "d/e". Проверяется, что в подтерме x17 имеет лишь одно вхождение символа x12. Переменной x19 присваивается результат преобразования вхождения x18 при помощи исходной теоремы, применяемой в обратном направлении. В нашем примере - в направлении "второйтерм", причем x19 имеет следующий вид:

$$\forall_{abcf}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ f + bc - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow (f + bc)/(ac) = (b + f/c)/a)$$

Теорема x19 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Ее единственная характеристика с заголовком "единствсуц" определяется характеристизатором.

2. Попытка ввести вспомогательную переменную для неодносимвольного аргумента сложной операции заменяемого терма.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow \sin b = 2 \sin(b/2) \cos(b/2))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \sin(2a) = 2 \sin a \cos a)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий. Проверяется, что их оценки сложности совпадают. Переменной x12 присваивается набор имеющих максимальную сложность подвыражений терма x10. Проверяется, что он имеет длину 1, и переменной x13 присваивается его единственный элемент. В нашем примере - "sin(2a)". Проверяется, что число корневых операндов терма x13 равно 1. Переменной x14 присваивается этот корневой операнд. В нашем примере - "2a". Проверяется, что он неоднобуквенный. Переменной x15 присваивается список параметров терма x14. Проверяется, что он одноэлементный, и переменной x16 присваивается этот элемент. В нашем примере - переменная a. Выбирается переменная x17, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b. Список x18 antecedентов теоремы разбивается на подсписок x19 утверждений, содержащих переменную x16, и подсписок x20 остальных утверждений. Справочник "тип" определяет тип x22 значений выражений с заголовком операнда x14. В нашем примере - "число". Утверждение "x22(x17)" присоединяется к списку x20. Решается задача на описание, посылки которой суть утверждения x20, а условия - утверждения x19, пополненные равенством выражений x17 и x14. В нашем примере - равенством "b = 2a". Цели задачи - "полныйявное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x16". Ответ присваивается переменной x25. В нашем примере он имеет вид "a = b/2". Проверяется, что терм x25 представляет собой равенство переменной x16 некоторому терму x26. В нашем примере - терму "b/2". Переменной x27 присваивается список результатов подстановки x26 вместо x16 в antecedенты исходной теоремы. Переменной x29 присваивается результат замены в x10 всех вхождений подтерма x14 на переменную x17. Переменной x30 присваивается результат подстановки x26 вместо x16 в заменяющую часть x11. Переменной x31 присваивается равенство выражений x29 и x30. Переменной x32 присваивается результат обработки оператором "нормantecedенты" списка x27, пополненного утверждением "x22(x17)". Обработка ведется относительно параметров равенства x31. Наконец, создается импликация с antecedентами x32 и консеквентом x31, которая регистрируется в списке вывода. Если характеристика исходной теоремы - "нормзаголовков(P N)", то новая теорема сопровождается характеристикой "нормзаголовков(P второйтерм)".

Использование тождества для варьирования дополнительной эквивалентности

1. Попытка получить эквивалентность свертки двух утверждений в неповторное утверждение.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c(c - \text{число} \rightarrow \neg(\sin c = 0) \leftrightarrow \neg(-\cos c + 1 = 0) \& \neg(\cos c + 1))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow (\sin a)^2 = (-\cos a + 1)(1 + \cos a))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий. Проверяется, что их оценки сложности совпадают. Проверяется, что утверждение x10 неповторно, а x11 - неповторно и имеет более одного корневого операнда. Переменной x12 присваивается заголовок терма x11. В нашем примере - "умножение". Справочник поиска теорем "разделить" находит по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "и" либо "или". В случае характеристики "или" дополнительная теорема преобразуется в эквивалентность отрицания ее исходного заменяемого терма конъюнкции отрицаний дизъюнктивных членов ее исходного заменяющего терма. Ориентация дополнительной теоремы сохраняется. В нашем примере дополнительная теорема преобразуется к виду:

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \neg(ab = 0) \leftrightarrow \neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0))$$

Переменной x18 присваивается вхождение консеквента дополнительной теоремы, переменной x20 - набор конъюнктивных членов ее заменяющей части. Проверяется, что все утверждения списка x20 элементарны. Выбирается расположенное в заменяемой части дополнительной теоремы вхождение x21 символа x12. В нашем примере - вхождение выражения "ab". Оператор "тождвывод" присваивает переменной x22 результат преобразования вхождения x21 при помощи исходной теоремы. В нашем примере имеем:

$$\forall_c(-\cos c + 1 - \text{число} \ \& \ 1 + \cos c - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \neg((\sin c)^2 = 0) \leftrightarrow \neg(-\cos c + 1 = 0) \ \& \ \neg(1 + \cos c = 0))$$

Переменной x23 присваивается результат обработки теоремы x22 оператором "нормтеорема". Проверяется, что x23 - кванторная эквивалентность, один из операндов которой - конъюнкция. Затем x23 регистрируется в списке вывода.

3.56 Характеристика "нормкрд"

Характеристикой "нормкрд" снабжается равенство либо конъюнкция равенств, содержащих логические символы - обозначения отдельных координат объектов. Например, обозначение "крд(a, K, i)" для i - й координаты вектора a в системе координат K .

Логические следствия теоремы

1. Выражение невырожденного атома с помощью равенств в посылках, задающих значения других числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdABK}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямокрд}(K) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \ \& \\ l(AB) = a \ \& \ -\text{крд}(B, K, 1) + \text{крд}(A, K, 1) = b \ \& \ -\text{крд}(B, K, 2) + \text{крд}(A, K, 2) = \\ c \ \& \ -\text{крд}(B, K, 3) + \text{крд}(A, K, 3) = d \rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + d^2)$$

из теоремы

$$\forall_{ABK}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow l(AB)^2 = (-\text{крд}(B, K, 1) + \text{крд}(A, K, 1))^2 + (-\text{крд}(B, K, 2) + \text{крд}(A, K, 2))^2 + (-\text{крд}(B, K, 3) + \text{крд}(A, K, 3))^2)$$

Переменной x8 присваивается набор антецедентов, переменной x9 - консеквент. Проверяется, что он представляет собой равенство. Переменной x10 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что он имеет не менее двух элементов.

Просматриваются все элементы A списка x10, входящие в консеквент в виде $A - B$, где B - тоже элемент списка x10. Проверяется, что ни A , ни B других вхождений в теореме не имеют. Такие пары A, B заменяются в списке x10 на их разности $A - B$. В нашем примере x10 оказывается состоящим из выражений " $l(AB)$ ", " $-\text{крд}(B, K, 1) + \text{крд}(A, K, 1)$ ", " $-\text{крд}(B, K, 2) + \text{крд}(A, K, 2)$ ", " $-\text{крд}(B, K, 3) + \text{крд}(A, K, 3)$ ".

Переменной x11 присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему, имеющий ту же длину, что список x10. В нашем примере - переменные a, b, c, d . Переменной x13 присваивается объединение списка результатов замен в антецедентах теоремы выражений списка x10 на соответствующие переменные списка x11 со списком равенств этих выражений соответствующим переменным. Переменной x14 присваивается результат замены в консеквенте x9 выражений x10 на переменные x11. Создается импликация с антецедентами x13 и консеквентом x14, которая регистрируется в списке вывода. Она сопровождается единственной характеристикой " $\text{извлечпарам}(\text{второйтерм})$ ".

2. Вывод импликации, переходящей от равенства объектов к равенству их отдельных координат.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcgK}(g - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \ \& \ b \in \{1, 2, 3\} \ \& \ ga = c \rightarrow g \cdot \text{крд}(a, K, b) = \text{крд}(c, K, b))$$

из теоремы

$$\forall_{abgK}(g - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \ \& \ b \in \{1, 2, 3\} \rightarrow g \cdot \text{крд}(a, K, b) = \text{крд}(ga, K, b))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - вхождение того операнда равенства в консеквенте, заголовок x12 которого является названием отдельной координаты согласно справочнику "крд". В нашем примере x11 - вхождение терма " $\text{крд}(ga, K, b)$ ". Переменной x13 присваивается первый корневой операнд терма x11. В нашем примере - " ga ". Проверяется, что терм x13 неоднобуквенный. Выбирается переменная x14, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная c . Переменной x15 присваивается равенство выражений x13 и x14, переменной x16 - результат замены первого операнда терма x10 на переменную x14. В нашем примере - " $\text{крд}(c, K, b)$ ". Переменной x17 присваивается результат добавления равенства x15 к списку x8,

переменной x_{18} - результат замены в консеквенте теоремы подтерма x_{10} на терм x_{16} . Наконец, создается импликация с антецедентами x_{17} и консеквентом x_{18} . Она регистрируется в списке вывода, причем из предлагаемых характеристик отбирается только "нормкрд".

3. Переход от равенства для разности координат к равенству, выражающему одну координату через другую.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(b\text{-точка} \ \& \ c\text{-точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(d) \ \& \ \text{вверх}(\text{вектор}(bc), d) \ \& \ \text{Трехмерн}(d) \rightarrow \text{крд}(c, d, 3) = l(bc) + \text{крд}(b, d, 3))$$

из теоремы

$$\forall_{bcd}(b\text{-точка} \ \& \ c\text{-точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(d) \ \& \ \text{вверх}(\text{вектор}(bc), d) \ \& \ \text{Трехмерн}(d) \rightarrow -\text{крд}(b, d, 3) + \text{крд}(c, d, 3) = l(bc))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_9 - вхождение консеквента, представляющего собой равенство вида $A - B = C$. Проверяется, что заголовком выражения A служит название x_{14} отдельной координаты. В нашем примере A имеет вид "крд($c, d, 3$)", x_{14} - символ "крд". Проверяется, что выражение B тоже имеет заголовок x_{14} . Переменной x_{15} присваивается равенство $A = B + C$. Создается импликация, антецеденты которой такие же, как у исходной теоремы, а консеквент - равенство x_{15} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода, причем из предлагаемых характеристик отбирается только "нормкрд".

Склейка теорем

1. Склейка нескольких импликаций, получающихся друг из друга варьированием подвыражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aABK}(A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \ \& \ a \in \{1, 2, 3\} \rightarrow -\text{крд}(A, K, a) + \text{крд}(B, K, a) = \text{крд}(\text{вектор}(AB), K, a))$$

из теоремы

$$\forall_{ABK}(A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow -\text{крд}(A, K, 1) + \text{крд}(B, K, 1) = \text{крд}(\text{вектор}(AB), K, 1))$$

и двух дополнительных теоремы

$$\forall_{ABK}(A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow -\text{крд}(A, K, 2) + \text{крд}(B, K, 2) = \text{крд}(\text{вектор}(AB), K, 2))$$

$$\forall_{ABK}(A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow -\text{крд}(A, K, 3) + \text{крд}(B, K, 3) = \text{крд}(\text{вектор}(AB), K, 3))$$

Переменной x_8 присваивается набор антецедентов теоремы, переменной x_9 - ее консеквент. Переменной x_{10} присваивается терм t вида "набор($A_1 \dots A_n B$)", где A_1, \dots, A_n - антецеденты теоремы, B - ее консеквент.

Просматриваются отличные от текущей теоремы теоремы T из списка вывода, имеющие ту же длину, что и текущая теорема, в число характеристик которых входит символ "нормкрд". Для каждой такой теоремы формируется терм t' вида "набор($A'_1 \dots A'_m B'$)", где A'_1, \dots, A'_m - антецеденты теоремы T , B' - ее консеквент. Оператор "Усмзамена" определяет список S некорневых вхождений в терм t некоторого выражения p , при замене которых на некоторое выражение p' получается терм t' . В результате просмотра переменной $x11$ оказывается присвоен список S - один и тот же для всех отобранных теорем T ; переменной $x12$ - выражение p ; переменной $x13$ - набор выражений p' (различных для различных теорем T); переменной $x14$ - набор элементов списка вывода для отобранных теорем T . Напомним, что эти элементы суть четверки (вес элемента - теорема - характеристики - блок вывода).

Переменной $x15$ присваивается набор отобранных теорем T , извлеченных из списка $x14$. В нашем примере - две указанные выше дополнительные теоремы. Переменной $x16$ присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной $x17$ присваивается результат обработки оператором "станд" утверждения "принадлежит($x16$ перечень($\text{набор}(p, p'_1, \dots, p'_k)$))", где p'_1, \dots, p'_k - элементы списка $x13$. Переменной $x19$ присваивается результат замены в терме $x10$ всех вхождений списка $x11$ на переменную $x16$. В нашем примере имеем:

$$A - \text{точка}, B - \text{точка}, \text{Трехмерн}(K), -\text{крд}(A, K, a) + \text{крд}(B, K, a) = \text{крд}(\text{вектор}(AB), K, a)$$

Переменной $x21$ присваивается последний элемент набора $x19$, переменной $x22$ - результат замены в наборе $x19$ последнего элемента на утверждение $x17$. Затем создается импликация с антецедентами $x22$ и консеквентом $x21$, регистрируемая в списке вывода. При этом в блок вывода исходной теоремы и всех теорем T , отобранных в список $x14$, заносится символ "исключение".

Использование тождества для варьирования дополнительной теоремы

1. Преобразование соотношений для координат в соотношения для их разрядов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABK}(\text{Вектор}(A) \ \& \ \text{Вектор}(B) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{крд}(A, K, 1) + \text{крд}(B, K, 1) = \text{крд}(A + B, K, 1))$$

из теоремы

$$\forall_{AKabc}(\text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Вектор}(A) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \rightarrow \text{крд}(A, K, 1) = a \ \& \ \text{крд}(A, K, 2) = b \ \& \ \text{крд}(A, K, 3) = c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcdefABK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(A) \ \& \ \text{Вектор}(B) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (d, e, f) \rightarrow \text{коорд}(A + B, K) = (a + d, b + e, c + f))$$

Переменной x_8 присваивается набор антецедентов, переменной x_9 - набор конъюнктивных членов консеквента. Переменной x_{10} присваивается набор характеристик "определение(...)" исходной теоремы. В нашем примере - характеристики "определение(крд($A, K, 1$)))", "определение(крд($A, K, 2$)))", "определение(крд($A, K, 3$)))". Переменной x_{11} присваивается список всех равенств в антецедентах, левая часть которых - название координат. В нашем примере x_{11} состоит из единственного равенства "крд(A, K) = (a, b, c)". Проверяется, что список x_{11} одноэлементен, и переменной x_{12} присваивается его элемент. Проверяется, что его параметры включают все переменные теоремы. Переменной x_{13} присваивается левая часть равенства x_{12} , переменной x_{14} - правая. Проверяется, что заголовок символа x_{14} - "набор". Переменной x_{15} присваивается набор заголовков корневых операндов терма x_{14} . В нашем примере - " a, b, c ". Проверяется, что x_{15} - список различных переменных. Проверяется, что каждая из переменных списка x_{15} входит в единственный антецедент теоремы. Составляется список x_{16} всех таких равенств набора x_9 , у которых в одной части расположена переменная списка x_{15} , а в другой - такой терм t , что "определение(t)" встречается в списке x_{10} . В нашем примере x_{16} состоит из равенств "крд($A, K, 1$) = a ", "крд($A, K, 2$) = b ", "крд($A, K, 3$) = c ". Проверяется, что длины наборов x_{15} и x_{16} равны. Переменной x_{17} присваивается список, элементы которого суть термы t , для которых в наборе x_{16} встречается их равенство переменной списка x_{15} . Элементы набора x_{17} упорядочены согласно упорядочению переменных x_{15} . В нашем примере x_{17} состоит из выражений "крд($A, K, 1$)", "крд($A, K, 2$)", "крд($A, K, 3$)". Переменной x_{18} присваивается заголовок терма x_{13} . В нашем примере - "коорд". Находится раздел, к которому относится символ x_{18} (в нашем примере - "системыкоординат"), и просматриваются теоремы x_{23} этого раздела, обладающие характеристикой с заголовком "значпарам", "числопред" либо "коорд".

В нашем примере x_{23} - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x_{24} присваивается набор ее антецедентов, переменной x_{25} - список равенств набора x_{24} , у которых заголовком левой части служит символ x_{18} , а заголовком правой - символ "набор". В нашем примере x_{25} состоит из равенств "коорд(A, K) = (a, b, c)", "коорд(B, K) = (d, e, f)". Проверяется, что список x_{25} непуст. Переменной x_{26} присваивается список правых частей равенств x_{25} . В нашем примере - " (a, b, c) " и " (d, e, f) ". Проверяется, что термы набора x_{26} имеют одинаковые количества корневых операндов. Переменной x_{27} присваивается набор заголовков корневых операндов термов x_{26} , записанных подряд. В нашем примере - " a, b, c, d, e, f ". Проверяется, что x_{27} - набор различных переменных.

Переменной x_{28} присваивается консеквент дополнительной теоремы, переменной x_{29} - результат отбрасывания из списка ее антецедентов утверждений x_{25} . Переменным x_{30} , x_{31} присваиваются списки переменных дополнительной теоремы и исходной теоремы. В нашем примере x_{30} - " $a, b, c, d, e, f, A, B, K$ ", x_{31} - " a, b, c, A, K ".

Начинается просмотр равенств x_{32} списка x_{25} . Для текущего такого равенства переменной x_{33} присваивается список переменных, не входящих в набор x_{30} и имеющих такую же длину, как у списка x_{31} . Список x_{33} добавляется к концу списка x_{30} . Переменной x_{34} присваивается результат замены переменных x_{31} на переменные x_{33} в терме x_{12} (в нашем примере - в равенстве "крд(A, K) =

(a, b, c)). Переменной x_{35} присваивается список параметров термина x_{34} . Проверяется, что терм x_{32} является результатом некоторой подстановки S в терм x_{34} вместо переменных x_{35} . Переменной x_{37} присваивается список переменных, в которые подстановкой S переводятся переменные x_{33} . Переменной x_{38} присваивается набор результатов применения подстановки S к результатам переобозначения в терминах списка x_{17} переменных x_{31} на x_{33} . Переменной x_{39} присваивается набор результатов применения подстановки S к результатам переобозначения в отличных от x_{12} терминах списка x_{18} переменных x_{31} на x_{33} . Затем к списку x_{29} присоединяются элементы списка x_{39} , а к терму x_{28} применяется подстановка выражений x_{38} вместо переменных x_{37} . Далее - переход к очередному равенству x_{32} списка x_{25} .

В нашем примере, после указанного цикла просмотра списка x_{25} , значением переменной x_{28} становится терм "коорд($A + B, K$) = (крд($A, K, 1$) + крд($B, K, 1$), крд($A, K, 2$) + крд($B, K, 2$), крд($A, K, 3$) + крд($B, K, 3$))", значением переменной x_{29} - список "систкоорд(K)", "Вектор(A)", "Вектор(B)", "Трехмерн(K)". Список x_{30} состоит из переменных $a, b, c, d, e, f, A, B, K, g, h, i, j, k, l, m, n, p, q$.

Далее терм x_{28} - равенство для набора координат - преобразуется в конъюнкцию равенств для отдельных координат. В нашем примере получаем следующий его окончательный вид:

"крд($A+B, K, 1$) = крд($A, K, 1$) + крд($B, K, 1$) & крд($A+B, K, 2$) = крд($A, K, 2$) + крд($B, K, 2$) & крд($A + B, K, 3$) = крд($A, K, 3$) + крд($B, K, 3$)"

Создается импликация с антецедентами x_{29} и консеквентом x_{28} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема". Если ее консеквент - конъюнкция, то импликация разбивается на несколько импликаций для отдельных конъюнктивных членов консеквента, и каждая из них снова обрабатывается оператором "нормтеорема". Затем результаты регистрируются в списке вывода.

3.57 Характеристика "нормотр"

Характеристикой "нормотр($x N$)" снабжается эквивалентность, заменяемая часть которой есть элементарное утверждение с заголовком "отрицание", заменяющая - элементарное утверждение без отрицания, причем глубина вхождения переменной x в заменяемое и заменяющее утверждения (без учета отрицания) равна 1, а число ее вхождений в каждое из этих утверждений тоже равно 1. N - указатель направления замены.

Логические следствия теоремы

1. Контрапозиция кванторной импликации для исключения отрицания в консеквенте.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abde}(\forall_c(d(c) \& a(c) < b(c) \rightarrow \neg e(c)) \leftrightarrow \forall_c(d(c) \& e(c) \rightarrow b(c) \leq a(c)))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \neg(a < b) \leftrightarrow b \leq a)$$

Проверяется, что у теоремы нет существенных посылок. Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что его заголовок - символ "не". Переменной x11 присваивается заменяющий терм. Переменной x12 присваиваются параметры заменяемого терма. Проверяется, что они совпадают с параметрами заменяющего. Выбирается переменная x13, не входящая в список x12. В нашем примере - переменная c . Переменной x15 присваивается результат подстановки в корневой операнд терма x10 вместо переменных f списка x12 термов " $f(13)$ ". В нашем примере x15 имеет вид " $a(c) < b(c)$ ". Переменной x16 присваивается результат такой же подстановки в терм x11. В нашем примере - " $b(c) \leq a(c)$ ". Переменной x17 присваивается пара переменных F, G , отличных от x13 и не входящих в список x12. В нашем примере - переменные d, e . Переменной x18 присваивается терм $F(13)$, переменной x19 - терм $G(13)$. В нашем примере - термы $d(c), e(c)$. Переменной x20 присваивается эквивалентность кванторной импликации с антецедентами x18, x15 и консеквентом "не(x19)" кванторной импликации с антецедентами x18, x19 и консеквентом x16. Связывающая приставка этих импликаций состоит из единственной переменной x13. Переменной x21 присваивается кванторная импликация без антецедентов, консеквентом которой служит терм x20. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "импликант(второйтерм)".

2. Переброска отрицания в консеквенте.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \neg(b \leq a) \leftrightarrow a < b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \neg(a < b) \leftrightarrow b \leq a)$$

Проверяется, что теорема не имеет существенных посылок. Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что его заголовок - символ "не". Переменной x11 присваивается заменяющий терм. Проверяется, что он элементарен и что параметры термов x10, x11 одинаковы. Создается импликация с теми же антецедентами, что у исходной теоремы. Консеквентом служит эквивалентность отрицания утверждения x11 корневому операнду утверждения x10. Эта импликация регистрируется в списке вывода.

3.58 Характеристика "обобщподст"

Характеристикой "обобщподст" снабжается импликация с характеристикой "функперех(...)", позволяющая получить обобщение теоремы, определяющей рассматриваемую функциональную характеристику. Напомним, что характеристика "функперех(i)" означает, что теорема представляет собой частный случай определения функциональной характеристики (например, первообразной). При этом i - номер операнда консеквента, на котором расположена характеризующая функция.

Варьирование антецедента

1. Попытка реализации обобщаемого антецедента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bgh}(\neg(b=0) \ \& \ \neg(g=0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(\sin(h + bx/g), x - \text{число}), \lambda_d(-g \cos(h + bd/g)/b, d - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{abchg}(\neg(b=0) \ \& \ \neg(g=0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(h + bx/g), x - \text{число}), \lambda_d(gc(h + bd/g)/b, d - \text{число})))$$

и дополнительной теоремы

$$\text{первообразная}(\lambda_x(\sin x, x - \text{число}), \lambda_b(-\cos b, b - \text{число}))$$

Переменной x9 присваивается заголовок консеквента. В нашем примере - "первообразная". Переменной x10 присваивается вхождение антецедента с тем же заголовком x9. Определяется раздел x11, к которому относится символ x9. В нашем примере - "интегралы". Просматриваются теоремы данного раздела, имеющие характеристику "функперех(i)". и не имеющие характеристик "едн", "обобщвход". В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x18 присваивается вхождение консеквента дополнительной теоремы либо, если она не является кванторной импликацией, как в нашем примере, вхождение ее левого края. Проверяется, что по вхождению x18 расположен символ x9. Переменной x19 присваивается вхождение i - го операнда вхождений x18. В нашем примере i = 1 и x19 - вхождение подтерма " $\lambda_x(\sin x, x - \text{число})$ ". Проверяется, что по вхождению x19 расположен описатель "отображение". Переменной x20 присваивается связывающая приставка этого описателя. Проверяется, что последний операнд описателя "отображение" (т.е. выражение, определяющее его значение) содержит переменную связывающей приставки. Если дополнительная теорема - кванторная импликация. то проверяется, что она не имеет антецедента с заголовком x9. Процедура "выводпосылки" унифицирует антецедент x10 с консеквентом дополнительной теоремы и заменяет его на обработанные унифицирующей подстановкой антецеденты дополнительной теоремы. Результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Ему передается характеристика "едн". Кроме того, характеристатор вводит характеристику "функперех(...)".

2. Варьирование антецедента с помощью теоремы, имеющей характеристику "контрольвывода".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{befghj}(\neg(b=0) \ \& \ \neg(g=0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_x(e(g(-h + tg x)/b)/(\cos x)^2, x - \text{число}), f) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(e(x), x - \text{число}), \lambda_x(gf(\arctg(h + bx/g))/b, x - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{abcgh}(\neg(b = 0) \ \& \ \neg(g = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \\ \text{первообразная}(a, c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(h + bx/g), x - \text{число}), \\ \lambda_d(gc(h + bd/g)/b, d - \text{число})))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(\text{первообразная}(\lambda_x(b(\text{tg } x)/(\cos x)^2, x - \text{число}), c) \rightarrow \\ \text{первообразная}(b, \lambda_d(c(\text{arctg } d), d - \text{число})))$$

Переменной x9 присваивается заголовок консеквента. В нашем примере - "первообразная". Переменной x10 присваивается вхождение антецедента с заголовком x9. В нашем примере - "первообразная(a, c)". В списке вывода выбирается дополнительная теорема, отличная от исходной и имеющая характеристику x13 с заголовком "контрольвывода". В нашем примере - характеристику "контрольвывода(b x arctg x)". Проверяется, что теорема эта - кванторная импликация, у которой заголовок консеквента равен x9. Переменной x14 присваивается кванторная импликация, получаемая из дополнительной теоремы добавлением антецедента x13. Оператор "выводпосылки" находит результат x15 преобразования исходной теоремы путем "вывода" ее антецедента x10 при помощи теоремы x14. Переменной x16 присваивается результат обработки импликации x15 оператором "нормтеорема". В нашем примере получаем:

$$\forall_{befghj}(\neg(b = 0) \ \& \ \neg(g = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ \text{контроль-} \\ \text{вывода}(e, j, \text{arctg}(j)) \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_a(e(\text{tg } a)/(\cos a)^2, a - \text{число}), f) \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(e(h + bx/g), x - \text{число}), \lambda_d(gf(\text{arctg}(h + bd/g)/b, d - \text{число}))))$$

Переменной x18 присваивается антецедент импликации x16, имеющий заголовок "контрольвывода", а переменной x19 - результат отбрасывания у импликации x16 этого антецедента. Переменной x20 присваивается вхождение консеквента теоремы x19. Проверяется, что этот консеквент имеет заголовок x9. Переменной x21 присваивается вхождение первого операнда консеквента x20. Проверяется, что по этому вхождению расположен описатель "отображение". Переменной x22 присваивается вхождение последнего операнда описателя. В нашем примере - вхождение терма $e(h + bx/g)$. Проверяется, что по вхождению x22 расположен символ "значение". Переменной x23 присваивается переменная - первый операнд терма "значение(...)". В нашем примере - "e". Проверяется, что эта же переменная является первым операндом терма x18. Переменной x24 присваивается переменная - второй операнд терма x18. В нашем примере - переменная "j". Переменной x25 присваивается результат подстановки второго операнда терма x22 вместо переменной x24 в терм x18. В нашем примере получается $\text{arctg}(h + bx/g)$. Переменной x26 присваивается переменная связывающей приставки описателя x21. В нашем случае - x. Переменной x27 присваивается антецедент импликации x19, имеющий заголовок x9. В нашем примере - "первообразная($\lambda_a(e(\text{tg } a)/(\cos a)^2, a - \text{число}), f$)". Переменной x29 присваивается вхождение первого операнда терма x27. Проверяется, что по этому вхождению расположен описатель "отображение". Рассматривается вхождение x29 символа "значение" в последний операнд данного описателя. В нашем примере - вхождение терма $e(\text{tg } a)$. Проверяется, что первый операнд вхождения x29 - переменная x23. Переменной x30 присваивается равенство вторых операндов термов x22 и x29. В нашем примере - $h + bx/g = \text{tg } a$.

Решается задача на описание, посылками которой служат antecedentes теоремы x19, а единственным условием - равенство x30. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "одз", "неизвестные x26". Ответ задачи присваивается переменной x33. В нашем примере он имеет вид " $\neg \cos a = 0$ & a - число & $x = g(-h + \operatorname{tg} a)/b$ ". Переменной x34 присваивается набор конъюнктивных членов ответа. Среди них выбирается равенство x35 с переменной x26 в левой части. В нашем примере - равенство " $x = g(-h + \operatorname{tg} a)/b$ ". Переменной x36 присваивается правая часть равенства, переменной x37 - результат замены в теореме x19 второго операнда вхождения x29 на терм x36, а вхождения x21 - на терм "отображение(x26 число(x26) значение(x23 x26))". В теореме x37 все связанные переменные описателей "отображение", отличные от x26, переобозначаются на x26. Затем x37 регистрируется в списке вывода и снабжается характеристикой, полученной из термина x18 заменой его последнего операнда на терм x25. В нашем примере - характеристикой "контрольвывода(x5 x10 $\arctg(h + bd/g)$)". Характеризатору разрешается добавлять характеристики с заголовками "функперех", "упрощинтеграл".

3.59 Характеристика "общнорм"

Характеристикой "общнорм(N)" снабжается эквивалентность общей стандартизации утверждения, не имеющего вида дизъюнкции либо конъюнкции. Заменяющее утверждение - элементарное. N - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Вывод эквивалентности из эквивалентности.

- (a) Попытка перехода к отрицаниям в эквивалентности общей стандартизации, при котором утверждение в заменяемой части переформулируется без отрицания.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a (a - \text{число} \rightarrow |a| \leq 0 \leftrightarrow a = 0)$$

из теоремы

$$\forall_a (a - \text{число} \rightarrow 0 < |a| \leftrightarrow \neg(a = 0))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он элементарен. Переменной x11 присваивается заменяющий терм, переменной x12 - список antecedентов. Проверяется, что список x12 непуст, а x11 элементарно. Переменной x13 присваивается отрицание утверждения x10. В нашем примере - " $\neg(0 < |a|)$ ". Переменной x15 присваивается результат упрощения утверждения x13 относительно посылок x12 при помощи вспомогательной задачи на преобразование. В нашем примере он имеет вид " $|a| \leq 0$ ". Проверяется, что утверждение x15 и не имеет заголовка "не". Создается импликация с antecedентами x12, консеквентом которой служит эквивалентность утверждения x15 отрицанию утверждения x11. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (b) Переход к отрицаниям в эквивалентности общей стандартизации с квантором существования в заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \forall_c(a < c \ \& \ c - \text{число} \rightarrow b \leq c) \leftrightarrow b \leq a)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \exists_c(c < b \ \& \ a < c \ \& \ c - \text{число}) \leftrightarrow a < b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть теоремы. Проверяется, что ее заголовок - квантор существования. Переменной x11 присваивается заменяющий терм, переменной x12 - список антецедентов. Проверяется, что этот список непуст и что утверждение x11 элементарно. Переменной x13 присваивается отрицание утверждения x11. Переменной x14 присваивается набор конъюнктивных членов под квантором x10, переменной x15 - связывающая приставка этого квантора. Переменной x17 присваивается результат отбрасывания из списка x14 всех утверждений, необходимых для сопровождения консеквента по о.д.з. В списке x17 выбирается утверждение x18. В нашем примере - " $c < b$ ". Переменной x19 присваивается его отрицание. Переменной x20 присваивается результат удаления утверждения x18 из списка x17. Проверяется, что он непуст и что все его элементы не имеют заголовка "не". Переменной x21 присваивается кванторная импликация со связывающей приставкой x15, антецедентами которой являются утверждения x20, а консеквентом - утверждение x19. Создается импликация с антецедентами x12, консеквентом которой служит эквивалентность импликации x21 утверждению x13. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (c) Перенесение в антецеденты отрицания дизъюнктивного члена заменяемой части эквивалентности общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \leq a - b \rightarrow b < a \leftrightarrow \neg(a = b))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a < b \vee b < a \leftrightarrow \neg(a = b))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть теоремы. Проверяется, что ее заголовок - символ "или". Переменной x11 присваивается заменяющий терм. Проверяется, что он элементарен. Переменной x12 присваивается набор дизъюнктивных членов утверждения x10. Проверяется, что он имеет длину 2 и состоит из элементарных утверждений. Переменной x13 присваивается набор антецедентов. Проверяется, что он непуст. Переменной x14 присваивается элемент набора x12. В нашем примере - " $a < b$ ". Решается задача на преобразование, посылками которой служат утверждения x13, а условием - отрицание утверждения x14. Единственная цель этой задачи - "упростить". Ответ задачи присваивается переменной x16. Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения списка x13 и утверждение x16, а консеквентом - эквивалентность отличного от x14 элемента списка x12 утверждению x11. Она регистрируется в списке вывода.

- (d) Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, выполняющей свертку конъюнкции, эквивалентностей, полученных перенесением всех конъюнктивных членов, кроме одного, в antecedentes.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ 0 \leq ac \rightarrow a^b = a^c \leftrightarrow a = c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow a^b = a^c \ \& \ 0 \leq ac \leftrightarrow a = c)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть теоремы. Проверяется, что ее заголовок - символ "и". Переменной x11 присваивается заменяющий терм, переменной x12 - набор antecedentes теоремы. Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x10. Проверяется, что все они элементарны. Выбирается утверждение x14 списка x13. В нашем случае - " $a^b = c^b$ ". Переменной x16 присваивается результат добавления к списку antecedentes теоремы элементов списка x13, отличных от утверждения x14. Проверяется, что x14 не входит в список утверждений, определяющих о.д.з. для списка x16. Затем создается импликация с antecedентами x16, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x14 и x11. Она регистрируется в списке вывода.

- (e) Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, сворачивающей дизъюнкцию элементарных утверждений A_1, \dots, A_n в элементарное утверждение B , эквивалентности общей стандартизации для дизъюнкции A_i и B .

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a < b \ \vee \ a \leq b \leftrightarrow a \leq b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a < b \ \vee \ a = b \leftrightarrow a \leq b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть теоремы. Проверяется, что ее заголовок - символ "или". Переменной x11 присваивается заменяющий терм. Проверяется, что он элементарен. Переменной x12 присваивается набор дизъюнктивных членов утверждения x10. В списке x12 выбирается элементарное утверждение x13. В нашем примере - " $a < b$ ". Переменной x14 присваивается набор antecedentes теоремы. Создается импликация с antecedентами x14, консеквентом которой служит эквивалентность дизъюнкции утверждений x13 и x11 утверждению x11. Она регистрируется в списке вывода.

- (f) Попытка перенесения отрицания существенного antecedента в дизъюнктивные члены заменяющей части эквивалентности общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq c \rightarrow -c^b + a^b = 0 \leftrightarrow a = c \ \vee \ b = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = c) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq c \rightarrow -c^b + a^b = 0 \leftrightarrow b = 0)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть теоремы, переменной x12 - набор антецедентов. В этом списке выбирается существенный антецедент x15, имеющий вид отрицания равенства. В нашем примере - " $\neg(a = c)$ ". Переменной x16 присваивается результат замены в наборе x12 антецедента x15 на его равенство. В нашем примере - на " $a = c$ ". Решается задача на доказательство с посылками x16 и условием x10. Если получен ответ "истина", то переменной x18 присваивается эквивалентность утверждения x10 дизъюнкции заменяющей части эквивалентности и указанного равенства. Создается импликация, антецеденты которой получены исключением из набора x12 утверждения x15, а консеквент - утверждение x18. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (g) Попытка извлечь из эквивалентности общей стандартизации эквивалентность для усиления, использующую равенство из посылок.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abde}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, d) \ \& \ b = d \cup e \rightarrow a \subseteq b \leftrightarrow a \subseteq e)$$

из теоремы

$$\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, d) \rightarrow a \subseteq d \cup e \leftrightarrow a \subseteq e)$$

Переменной x10 присваивается заменяющий терм, переменной x11 - заменяемый. В x10 и x11 находятся такие наименьшие подтермы, что эти термы отличаются только внутри данных подтермов. Переменной x12 присваивается вхождение подтерма в x10, переменной x13 - в x11. В нашем примере x12 - вхождение подтерма e , x13 - подтерма $d \cup e$. Проверяется, что по вхождению x12 расположен предикатный символ. Переменной x14 присваивается подтерм по вхождению x12, переменной x15 - по вхождению x13. Проверяется, что x15 неповторно и что x14 получается из x15 вычеркиванием части операндов некоторых операций, а также заменой части неконстантных подтермов на логические символы. Проверяется, что терм x15 имеет параметры, не входящие в терм x14. Выбирается переменная x16, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b . Переменной x17 присваивается результат замены вхождения x13 в терм x11 на x16. В нашем примере - " $a \subseteq b$ ". Переменной x18 присваивается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы равенства выражений x16 и x15, а консеквентом служит эквивалентность утверждений x10 и x17. Ориентация - та же, что в исходной теореме. Эта импликация регистрируется в списке вывода.

- (h) Перенесение в антецеденты всех конъюнктивных членов заменяемой части, кроме самого сложного.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bce}(\neg(b = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ ce \leq 0 \rightarrow c^b = e^b \leftrightarrow c = -e)$$

из теоремы

$$\forall_{bce}(\neg(b = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow c^b = e^b \ \& \ ce \leq 0 \leftrightarrow c = -e)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть теоремы. Проверяется, что она имеет заголовок "и". Переменной x11 присваивается заменяющий терм, переменной x12 - набор антецедентов. Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов заменяемой части. Переменной x14 присваивается оценка сложности терма x10. Проверяется, что оценка сложности терма x11 меньше x14. В списке x13 выбирается утверждение x15, оценка сложности которого равна x14. В нашем примере - " $c^b = e^b$ ". Проверяется, что оценка сложности других элементов списка x13 меньше x14. Переменной x16 присваивается результат добавления к списку x12 отличных от x15 элементов списка x13. Создается импликация с антецедентами x16, консеквентом которой служит эквивалентность x15 и x11. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (i) Перенесение в конъюнктивные члены заменяемой части антецедента, являющегося следствием заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{целое} \ \& \ 0 < a \leftrightarrow a - \text{натуральное})$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{целое} \rightarrow 0 < a \leftrightarrow a - \text{натуральное})$$

Переменной x10 присваивается заменяющий терм, переменной x11 - заменяемый. Переменной x12 присваивается набор антецедентов теоремы. Проверяется, что он одноэлементный. Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов заменяемой части, переменной x14 - единственный антецедент теоремы. При разблокированных приемах проверяется, что x14 - следствие утверждений x13. Для этого используется проверочный оператор. Создается импликация без антецедентов, консеквентом которой служит эквивалентность конъюнкции утверждений x14 и x11 утверждению x10. Она регистрируется в списке вывода.

- (j) Перенесение в антецеденты конъюнктивного члена заменяемой части для получения эквивалентности усиления одноместного предиката.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(0 < a \ \& \ a - \text{число} \rightarrow a - \text{целое} \leftrightarrow a - \text{натуральное})$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{целое} \ \& \ 0 < a \leftrightarrow a - \text{натуральное})$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что его заголовок - символ "и". Переменной x11 присваивается заменяющий терм, переменной x12 - набор антецедентов. Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x10. Проверяется, что он двухэлементный и что заменяющий терм x11 имеет длину 2. Переменной x14

присваивается корневой операнд терма x_{11} . В нашем примере - a . Выбирается элемент x_{15} списка x_{13} , имеющий длину 2 и корневой операнд x_{14} . В нашем примере - " a — целое". Рассматривается элемент x_{16} списка x_{13} , отличный от x_{15} . В нашем примере - " $0 < a$ ". Проверяется, что x_{15} не является необходимым для сопровождения по о.д.з. терма x_{16} . Переменной x_{17} присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения x_{16} по о.д.з. В нашем примере - " a — число". Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x_{12} , x_{17} и утверждение x_{16} . Консеквентом ее является эквивалентность утверждений x_{15} и x_{11} . Импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (к) Переход от эквивалентности дизъюнкции к эквивалентности отрицания конъюнкции отрицаний.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c (c - \text{число} \rightarrow \neg(\sin(2c) = 0) \leftrightarrow \neg(\sin c = 0) \& \neg(\cos c = 0))$$

из теоремы

$$\forall_c (c - \text{число} \rightarrow \sin(2c) = 0 \leftrightarrow \sin c = 0 \vee \cos c = 0)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм. Проверяется, что его заголовок - символ "или". Переменной x_{11} присваивается заменяющий терм. Проверяется, что он элементарен. Переменной x_{12} присваивается набор дизъюнктивных членов утверждения x_{10} . Проверяется, что он двух-элементный и состоит из элементарных утверждений. Проверяется, что оценки сложности терма x_{11} и термов списка x_{12} одинаковы. Переменной x_{14} присваивается список подтермов терма x_{11} , имеющих максимальную сложность. Проверяется, что он одноэлементный. Создается импликация, антецеденты которой такие же, как у исходной теоремы, а консеквентом служит эквивалентность отрицания утверждения x_{11} конъюнкции отрицаний утверждений списка x_{12} . Она регистрируется в списке вывода.

2. Вывод импликации из эквивалентности.

- (а) Извлечение из эквивалентности общей стандартизации импликации для проверочного оператора без использования контрапозиции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{mn} (m - \text{целое} \& n - \text{целое} \rightarrow m + n - \text{целое})$$

из теоремы

$$\forall_{mn} (n - \text{число} \& m - \text{целое} \rightarrow m + n - \text{целое} \leftrightarrow n - \text{целое})$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он элементарный. Переменной x_{11} присваивается заменяющий терм, переменной x_{12} - набор антецедентов. Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{13} присваивается утверждение x_{10} , а переменной x_{14} - 0. Во втором случае переменной x_{13} присваивается отрицание

утверждения x_{10} , а переменной x_{14} - 1. В нашем примере берется первый случай, т.е. x_{13} - "целое($m + n$)". Внутри терма x_{13} берется вхождение x_{15} символа x_{16} , по которому справочник "легковидеть" определяет существование проверочного оператора для обработки утверждения x_{13} . В нашем примере x_{16} - символ "целое", проверочный оператор - "усмцелое". Составляется список S - объединение антецедентов теоремы и конъюнктивных членов терма x_{11} в случае $x_{14} = 0$ и отрицания терма x_{11} в случае $x_{14} = 1$. Переменной x_{18} присваивается результат обработки процедурой "нормантецеденты" списка S относительно параметров терма x_{13} . Проверяется, что в этом результате отсутствуют константа "ложь" и равенства переменных не содержащим этих переменных термам. Переменной x_{19} присваивается импликация с антецедентами x_{18} и консеквентом x_{13} . Проверяется, что проверочный оператор на текущий момент не способен усмотреть истинность утверждения x_{13} из посылок x_{18} . Процедура "Исклант" предпринимает попытку отбросить антецеденты импликации x_{19} , без которых ее истинность сохраняется. Она использует задачу на доказательство и отменяет на время ее решения блокировку приемов. Результат регистрируется в списке вывода. Допускаются только характеристики с заголовками "спуск", "Спуск", "легковидеть".

- (b) Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, заменяемая часть которой имеет вид конъюнкции, импликации для приема вывода конъюнктивного члена (с нормализацией теоремы).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(C \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow l(AB) = l(AC) + l(BC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow C \in \text{отрезок}(AB) \leftrightarrow C - \text{точка} \ \& \ l(AB) = l(AC) + l(BC))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм. Проверяется, что его заголовок - символ "и". Переменной x_{11} присваивается заменяющий терм, переменной x_{12} - набор антецедентов. Переменной x_{13} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{10} . В этом наборе выбирается элементарное утверждение x_{14} , оценка сложности которого не меньше оценки сложности утверждения x_{11} . В нашем примере x_{14} - утверждение " $l(AB) = l(AC) + l(BC)$ ". Переменной x_{15} присваивается результат добавления к списку x_{12} утверждения x_{11} . Далее к x_{15} добавляются утверждения списка x_{13} , необходимые для сопровождения по о.д.з. утверждения x_{14} . Создается импликация с антецедентами x_{15} и консеквентом x_{14} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (c) Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, заменяемая часть которой имеет вид конъюнкции, импликации для приема вывода конъюнктивного члена (без нормализации теоремы).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_d(d - \text{число} \ \& \ \sin d \leq 0 \ \& \ \cos d \leq 0 \ \& \ \neg(\sin(2d) = 0) \rightarrow \cos d < 0)$$

из теоремы

$$\forall_d(d - \text{число} \ \& \ \sin d \leq 0 \ \& \ \cos d \leq 0 \rightarrow 0 < \sin(2d) \leftrightarrow \sin d < 0 \ \& \ \cos d < 0)$$

До момента формирования итоговой импликации действия совпадают с предыдущим приемом. Значением переменной x14 здесь является утверждение " $\cos d < 0$ ". Далее переменной x16 присваивается результат обработки списка x15 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x14. Проверяется, что в списке x16 нет равенства переменной терму, несодержащему эту переменную. Создается импликация с антецедентами x16 и консеквентом x14, которая регистрируется в списке вывода.

Заметим, что предыдущий прием в аналогичной ситуации не преобразует неравенство для синуса двойного угла в отрицание равенства. Таким образом, данный прием, хотя и не обращается к оператору "нормтеорема", выполняет более сильную стандартизацию.

- (d) Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, заменяемая часть которой имеет вид конъюнкции, импликации с заменяющей частью в консеквенте (с предобработкой антецедентов).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_d(\sin d < 0 \ \& \ \cos d < 0 \ \& \ d - \text{число} \rightarrow 0 < \sin(2d))$$

из теоремы

$$\forall_d(d - \text{число} \ \& \ \sin d \leq 0 \ \& \ \cos d \leq 0 \rightarrow 0 < \sin(2d) \leftrightarrow \sin d < 0 \ \& \ \cos d < 0)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что его заголовок - символ "и". Переменной x11 присваивается заменяющий терм, переменной x12 - набор антецедентов. Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x10. Проверяется, что все они элементарны. и что оценка сложности терма x10 не меньше оценки сложности терма x11. Переменной x14 присваивается результат обработки конкатенации списков x12 и x13 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x11. Создается импликация с антецедентами x14 и консеквентом x11, которая обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (e) Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, заменяемая часть которой имеет вид конъюнкции, импликации с заменяющей частью в консеквенте (без предобработки антецедентов).

В качестве примера можно рассмотреть вывод теоремы

$$\forall_a(0 < a \ \& \ a - \text{целое} \rightarrow a - \text{натуральное})$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{целое} \ \& \ 0 < a \leftrightarrow a - \text{натуральное})$$

Отличие от предыдущего приема состоит лишь в том, что отсутствует обращение к оператору "нормантецеденты", а среди характеристик итоговой теоремы выбираются лишь те, которые связаны с проверочными операторами.

- (f) Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, заменяемая часть которой имеет вид конъюнкции, импликации с конъюнктивным членом заменяемой части в консеквенте.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_n (n - \text{натуральное} \rightarrow 0 \leq n - 1)$$

из теоремы

$$\forall_n (n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n - 1 \leftrightarrow n - \text{натуральное})$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что его заголовок - символ "и". Переменной x11 присваивается заменяющий терм, переменной x12 - набор антецедентов. Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x10. Проверяется, что все они элементарны. и что оценка сложности терма x10 не меньше оценки сложности терма x11. Среди утверждений x13 выбирается утверждение x14, имеющее единственную переменную. В нашем примере - " $0 \leq n - 1$ ". Справочник "легковидеть" определяет существование проверочного оператора, усматривающего истинность утверждений вида x14. В нашем примере - "усмменьшеилиравно". Создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к списку x12 утверждения x11, а консеквентом служит утверждение x14. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (g) Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, заменяемая часть которой имеет вид конъюнкции, импликации для приема усмотрения отрицания заменяющей части из отрицания конъюнктивного члена заменяемой.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC} (\neg(A = B) \ \& \ \leq \neg l(AB) + l(AC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \neg(C \in \text{отрезок}(AB)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow C \in \text{отрезок}(AB) \leftrightarrow C - \text{точка} \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \ \& \ l(AC) \leq l(AB))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что его заголовок - символ "и". Переменной x11 присваивается заменяющий терм, переменной x12 - набор антецедентов. Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x10. Среди них выбирается элементарное утверждение x14, оценка сложности которого не превосходит оценки сложности терма x11. В нашем примере - " $l(AC) \leq l(AB)$ ". Переменной x15 присваивается результат добавления к списку x12 отрицание утверждения x14. Переменной x16 присваивается результат обработки списка x15 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x11. Создается импликация с антецедентами x16, консеквентом которой служит отрицание утверждения x11. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", с передачей вспомогательной задаче на преобразование комментария "отрл", блокирующего контрапозиции. Результат регистрируется в списке вывода.

- (h) Извлечение из эквивалентности двух элементарных утверждений простой импликации для идентифицирующего оператора (прямой ход).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aA}(\neg(a = A) \ \& \ a \text{ — точка} \ \& \ A \text{ — точка} \rightarrow \text{точкалуча}(A, a, a))$$

из теоремы

$$\forall_{aA}(a \text{ — точка} \ \& \ A \text{ — точка} \rightarrow \text{точкалуча}(A, a, a) \leftrightarrow \neg(a = A))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он элементарен. Переменной x11 присваивается заменяющий терм, переменной x12 - набор антецедентов. Проверяется, что утверждение x11 элементарно. Переменной x13 присваивается заголовок утверждения x10. В нашем примере - "точкалуча". Накопитель x14 заполняется справочником "См" заголовками идентифицирующих операторов, закрепленных за символом x13. В нашем примере эти заголовки суть "точкалуча", "точкалуча". Проверяется, что накопитель x14 непуст. Затем создается импликация, антецеденты которой - утверждения списка x12 и утверждение x11, а консеквент - x10. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (i) Извлечение из эквивалентности двух элементарных утверждений простой импликации для идентифицирующего оператора (обратный ход).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \angle(ABC) = \pi \ \& \ A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \rightarrow B \in \text{отрезок}(AC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \rightarrow \angle(ABC) = \pi \leftrightarrow B \in \text{отрезок}(AC))$$

Отличие от предыдущего приема лишь в том, что термы x10 и x11 меняются местами: x13 - заголовок терма x11; антецеденты состоят из x12 и x10, а консеквентом служит x11.

- (j) Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, заменяемая часть которой есть равенство, тождества общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{de}(d \text{ — set} \ \& \ e \text{ — set} \ \& \ d \subseteq e \rightarrow d \setminus e = \emptyset)$$

из теоремы

$$\forall_{de}(d \text{ — set} \ \& \ e \text{ — set} \rightarrow d \setminus e = \emptyset \leftrightarrow d \subseteq e)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он элементарен. Переменной x11 присваивается заменяющий терм, переменной x12 - набор антецедентов. Рассматриваются два случая. Сначала переменной x13 присваивается терм x10 и переменной x14 - 0, а затем переменной x13 присваивается отрицание терма x10 и переменной x14 - 1. В нашем

примере x_{13} - терм " $d \setminus e = \emptyset$ ", $x_{14} = 0$. Проверяется, что заголовок утверждения x_{13} - символ "равно". Составляется список S , образованный утверждениями x_{12} , а также конъюнктивными членами утверждения x_{11} в случае $x_{14} = 0$ и отрицания утверждения x_{11} в случае $x_{14} = 1$. Переменной x_{15} присваивается результат обработки списка S процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{13} . Проверяется, что x_{15} не содержит утверждений с заголовком "или", а также равенств переменной выражению, не содержащему этой переменной. Проверяется, что нормализаторы общей стандартизации не преобразуют обе части равенства x_{13} в одно и то же выражение. Тогда создается импликация с антецедентами x_{15} и консеквентом x_{13} , которая регистрируется в списке вывода..

- (к) Извлечение из эквивалентности общей стандартизации, заменяющая часть которой есть равенство, тождества общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ \text{взаимнопросты}(m, n) \rightarrow \text{нод}(m, n) = 1)$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow \text{взаимнопросты}(m, n) \leftrightarrow \text{нод}(m, n) = 1)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он элементарен. Переменной x_{11} присваивается заменяющий терм, переменной x_{12} - набор антецедентов. Проверяется, что утверждение x_{11} элементарно. Если его заголовок - символ "не", то переменной x_{13} присваивается утверждение под отрицанием, иначе x_{13} совпадает с x_{11} . Проверяется, что заголовок утверждения x_{13} - символ "равно". Если заголовок x_{11} - символ "не", то переменной x_{14} присваивается отрицание утверждения x_{10} , иначе - утверждение x_{10} . В нашем примере x_{13} - равенство " $\text{нод}(m, n) = 1$ ". Проверяется, что либо x_{14} - равенство, либо существует проверочный оператор для обработки утверждения x_{14} . В нашем примере x_{14} - " $\text{взаимнопросты}(m, n)$ ". Переменной x_{15} присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{13} списка, получаемого добавлением к антецедентам теоремы утверждения x_{14} . Проверяется, что в x_{15} нет равенств переменной выражению, не содержащему эту переменную. Проверяется, что нормализаторы общей стандартизации не преобразуют обе части равенства x_{13} в одно и то же выражение. Тогда создается импликация с антецедентами x_{15} и консеквентом x_{13} , которая регистрируется в списке вывода.

- (l) Извлечение из эквивалентности общей стандартизации импликации для проверочного оператора с усложненным антецедентом.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \ \& \ \neg(\text{card}(a) = 0) \rightarrow \neg(a = \emptyset))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \rightarrow \text{card}(a) = 0 \leftrightarrow a = \emptyset)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он элементарен. Переменной x_{11} присваивается заменяющий терм, переменной

x12 - набор антецедентов. Рассматриваются два случая. В первом из них переменной x13 присваивается терм x11, а переменной x14 - 0. Во втором - переменной x13 присваивается отрицание терма x11, а переменной x14 - 1. В нашем примере x13 - " $\neg(a = \emptyset)$ ", x14 = 1. Проверяется существование проверочного оператора P для утверждения x13. В нашем примере - "усм-непусто". Переменной x18 присваивается в случае x14 = 0 утверждение x10, иначе - отрицание x10. В нашем примере - " $\neg(\text{card}(a) = 0)$ ". Проверяется, что для проверки x18 имеется проверочный оператор, отличный от P . Составляется список S , полученный добавлением к списку x12 утверждения x18. Переменной x19 присваивается результат обработки списка S оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x13. Проверяется, что в x19 нет равенства переменной выражению, не содержащему этой переменной. Проверяется также, что проверочные операторы не усматривают истинности утверждения x13 из посылок x19. Переменной x20 присваивается импликация с антецедентами x19 и консеквентом x13, которая регистрируется в списке вывода.

- (m) Извлечение простой импликации из эквивалентности общей стандартизации, одна из частей которой есть равенство, фиксирующее значение переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \rightarrow \text{образ}(f, \emptyset) = \emptyset)$$

из теоремы

$$\forall_{bf}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow b = \emptyset \leftrightarrow \text{образ}(f, b) = \emptyset)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он элементарен. Переменной x11 присваивается заменяющий терм, переменной x12 - набор антецедентов. Проверяется, что x11 элементарно. Если заголовок x11 - символ "не", то переменной x13 присваивается утверждение под отрицанием, иначе - утверждение x11. В нашем примере x13 - " $b = \emptyset$ ". Проверяется, что заголовок x13 - равенство. Переменной x14 присваивается утверждение x10, если заголовок x11 отличен от "не", иначе - отрицание утверждения x10. Переменной x15 присваивается заголовок левой части равенства x13. Проверяется, что x15 - переменная, не входящая в правую часть. Составляется список S , полученный добавлением к списку x12 утверждения x13. Переменной x16 присваивается результат обработки списка S оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x14. При помощи вспомогательной задачи на исследование тестируется непротиворечивость списка x16. Затем создается импликация с антецедентами x16 и консеквентом x14. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому передается опция на использование при упрощении текущей теоремы других теорем, уже занесенных в список вывода. Результат регистрируется в списке вывода.

- (n) Извлечение константного тождества из эквивалентности общей стандартизации, одна из частей которой есть равенство, фиксирующее значение переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$|0| = 0$$

из теоремы

$$\forall_a (a - \text{число} \rightarrow |a| = 0 \leftrightarrow a = 0)$$

Начало совпадает с действиями предыдущего приема. Значением переменной x_{13} служит равенство $a = 0$. После того, как получен результат применения процедуры "Нормтеорема", выясняется, что он представляет собой константу "истина". Тогда переменной x_{18} присваивается результат обработки импликации с антецедентами x_{16} и консеквентом x_{14} оператором "нормдлялюбого". Проверяется, что получено равенство без переменных. В нашем примере - " $|0| = 0$ ". Обе части этого равенства обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. Если после этого они не совпали, то равенство регистрируется в списке вывода.

- (o) Извлечение из эквивалентности общей стандартизации импликации для проверочного оператора с использованием контрапозиции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ade} (a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ a \subseteq d \cup e \ \& \ \neg(a \subseteq e) \rightarrow \neg(\text{непересек}(a, d)))$$

из теоремы

$$\forall_{ade} (a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, d) \rightarrow a \subseteq d \cup e \leftrightarrow a \subseteq e)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он элементарен. Переменной x_{11} присваивается заменяющий терм, переменной x_{12} - набор антецедентов. Проверяется, что x_{11} элементарно. Выбирается существенный антецедент P , и переменной x_{16} присваивается его отрицание. В нашем случае x_{16} - " $\neg(\text{непересек}(a, d))$ ". Проверяется, что для обработки x_{16} имеется проверочный оператор. В нашем примере - "усмнепересек". Переменной x_{20} поочередно присваивается сначала пара, образованная термом x_{10} и отрицанием терма x_{11} , а затем - пара, образованная отрицанием терма x_{10} и термом x_{11} . В нашем примере - пара " $a \subseteq d \cup e$ ", " $\neg(a \subseteq e)$ ". Проверяется, что в этой паре нет равенства. Составляется список S , получаемый добавлением утверждений пары x_{20} к результату исключения из списка антецедентов теоремы утверждения P . Переменной x_{21} присваивается результат обработки списка S процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{16} . Проверяется, что список x_{21} не содержит константы "ложь", а также не содержит равенства переменной выражению, не содержащему этой переменной. Проверяется, что проверочный операторы не усматривают истинность утверждения x_{16} из посылок x_{21} . Переменной x_{22} присваивается импликация с антецедентами x_{21} и консеквентом x_{16} . Проверяется, что вспомогательная задача на доказательство не усматривает, что P - следствие утверждений x_{21} , пополненных необходимыми для сопровождения их по о.д.з. утверждениями. Тогда x_{22} регистрируется в списке вывода.

- (p) Получение простой импликации для проверочного оператора из эквивалентности для свертки дизъюнкции путем перенесения дизъюнктивного члена в антецеденты.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \rightarrow a \leq b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a < b \vee a = b \leftrightarrow a \leq b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он имеет заголовок "или". Переменной x11 присваивается заменяющий терм. Проверяется, что он элементарный. Переменной x12 присваивается набор дизъюнктивных членов утверждения x10. Проверяется, что он двухэлементный и состоит из элементарных утверждений. Переменной x13 присваивается набор антецедентов. Проверяется, что он непуст. В списке x12 выбирается утверждение x14, не являющееся равенством. В нашем примере - " $a < b$ ". Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x13 и утверждение x14, а консеквент - x11. Она регистрируется в списке вывода.

- (q) Переход от эквивалентности для указания на тип объекта к импликации, усматривающей отрицание подтипа данного типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \neg(d = 0) \rightarrow \neg(c + di - \text{целое}))$$

из теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow c + di - \text{число} \leftrightarrow d = 0)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он элементарен. Переменной x11 присваивается заменяющий терм. Проверяется, что он элементарен. Переменной x12 присваивается заголовок утверждения x10. В нашем примере - "число". При помощи справочника "родобъекта" проверяется, что x12 - название типа объекта. Определяется тот раздел, к которому относится символ x12. В нашем примере - "элементарная алгебра". Переменной x14 присваивается список всех символов, отнесенных к данному разделу. В этом списке выбирается символ x15, являющийся названием типа объектов. В нашем примере - "целое". При помощи справочника "род" находится список x16 всех надтипов типа x15. В нашем примере - "рациональное", "число", "комплексное". Проверяется, что тип x12 входит в список x16. Переменной x17 присваивается отрицание терма x11. В нашем примере - " $\neg(d = 0)$ ". Проверяется, что для обработки утверждения x17 имеется проверочный оператор. В нашем примере - "усмне0". Переменной x18 присваивается результат добавления к антецедентам теоремы утверждения x17. Создается импликация с антецедентами x18, консеквентом которой служит утверждение " $\neg(P(t))$ ", где P - символ x15, t - корневой операнд заменяемой части теоремы. Эта импликация регистрируется в списке вывода.

Специальная стандартизация теоремы

1. Группировка в левых частях всех ненулевых членов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 < a - b \vee 0 < b - a \leftrightarrow \neg(a - b = 0))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a < b \vee b < a \leftrightarrow \neg(a = b))$$

Переменной x10 присваивается набор антецедентов. Переменной x11 присваивается исходная теорема, после чего начинается цикл преобразований терма x11. Просматриваются входящие в x11 символы двуместных отношений, для которых справочник "перегруппировка" допускает возможность перегруппировки членов из одной части в другую. Фактически этот справочник выдает тройку (A, B, C) , где A - ассоциативная и коммутативная операция, операнды которой переносятся из одной части в другую, B - знак, изменяемый при перенесении, C - единица операции A . Для каждого такого двуместного отношения выполняется группировка всех "ненулевых" (отличных от C) A -членов в первом операнде. Если результат x11 всех таких перегруппировок отличен от исходной теоремы, то он последовательно обрабатывается операторами "Полныепосылки" и "нормтеорема", после чего регистрируется в списке вывода.

Применение дополнительного тождества для упрощения заменяемого терма

1. Попытка опрокинуть эквивалентность общей стандартизации путем сильного упрощения заменяемого терма.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ade}(a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d = e - a \leftrightarrow e = a + d)$$

из теоремы

$$\forall_{bcd}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow c = d \leftrightarrow b + c = b + d)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a - a = 0)$$

Переменной x10 присваивается заменяемое утверждение. Проверяется, что среди антецедентов нет равенства переменной не содержащему ее выражению. Переменной x11 присваивается список ссылок на дополнительные теоремы, которые по символам терма x10 находят справочники поиска теорем "констнорм", "тожд", "упрощимп", "исклтерм", "поглощает", "Сокращение", "упрощстанд". Внутри заменяемой части выбирается входжение x13 неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - подтерма " $b+c$ ". Переменной x14 присваивается символ по этому входжению. В нашем примере - "плюс". В списке x11 выбирается теорема x16, причем переменным x18 и x19 присваиваются входжения частей равенства, являющегося ее консеквентом. Проверяется, что по входжению x18 расположен символ x14. В нашем примере x16 - указанная выше дополнительная теорема. Оператор "тождвывод" определяет результат x21 преобразования входжения x13 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. При

обращении ему передается опция "модификатор", разрешающая введение дополнительного операнда - новой переменной, добавляемой к операндам в обеих частях равенства в преобразующей теореме. В нашем примере это означает, что фактически консеквент дополнительной теоремы рассматривается как $a - a + e = e$. x21 имеет вид:

$$\forall_{ade}(e - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ -a + e - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \rightarrow \ -a + e = d \leftrightarrow 0 + e = a + d).$$

Теорема x21 последовательно обрабатывается операторами "демодификация", "полнепосылки" и "Нормтеорема". Последнему оператору разрешается использовать теоремы, уже имеющиеся в списке вывода. Результат присваивается переменной x23. Проверяется, что x23 - кванторная импликация, параметры антецедентов которой включаются в параметры консеквента. Проверяется также, что ни один антецедент не имеет более двух параметров. Затем теорема x23 регистрируется в списке вывода.

2. Попытка обращения в константу либо переменную двуместной операции из заменяемой части эквивалентности общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bx}(0 < x \ \& \ 0 < b - 1 \ \& \ b - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \ \rightarrow \ \log_b x < 0 \leftrightarrow x < 1)$$

из теоремы

$$\forall_{axy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ 0 < x \ \& \ 0 < y \ \& \ 0 < a - 1 \ \& \ a - \text{число} \ \rightarrow \ \log_a x < \log_a y \leftrightarrow x < y)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \rightarrow \ \log_a 1 = 0)$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что среди антецедентов нет равенства переменной выражению, не содержащему этой переменной. Внутри заменяемой части рассматривается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма, причем переменной x12 присваивается символ по этому вхождению. В нашем примере x11 - " $\log_a y$ ", x12 - символ "логарифм". Справочники поиска теорем "констнабор" и "конствхожд" определяют по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается список параметров терма x10, имеющих в нем более одного вхождения. В нашем примере - переменная a . Оператор "тождвывод" определяет результат x19 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Ему передается дополнительная опция (фикс x17), означающая, что вместо переменных списка x17 подстановка при унификации не выполняется. В нашем примере x18 имеет вид:

$$\forall_{ax}(x - \text{число} \ \& \ 1 - \text{число} \ \& \ 0 < x \ \& \ 0 < 1 \ \& \ 0 < a - 1 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \rightarrow \ \log_a x < 0 \leftrightarrow x < 1)$$

Переменной x19 присваивается результат последовательной обработки теоремы x18 операторами "полнепосылки" и "нормтеорема". Затем теорема x19 регистрируется в списке вывода.

3. Попытка получения из эквивалентности типа "навешивания операции на обе части двуместного отношения" эквивалентности для исключения сложной операции с неизвестными.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aefgh}(\neg(g = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(g) - \text{even} \ \& \ g - \text{rational} \ \& \ 0 \leq e \rightarrow e^h f^g = a^g \ \& \ 0 \leq af \leftrightarrow a = fe^{h/g})$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow a^b = c^b \ \& \ 0 \leq ac \leftrightarrow a = c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow (ba^{d/c})^c = b^c a^d)$$

Переменной x10 присваивается заменяющий терм. Проверяется, что число его корневых операндов равно 2, причем эти операнды суть переменные x11 и x12. В нашем примере x11 - a, x12 - c. Переменной x14 присваивается вхождение конъюнктивного члена заменяемого терма, имеющего тот же заголовок, что терм x10. В нашем примере - вхождение равенства $a^b = c^b$. Проверяется, что число операндов вхождения x14 равно 2. Переменной x15 присваивается вхождение одного из операндов вхождения x14, переменной x16 - символ по этому вхождению. В нашем примере x15 - c^b , x16 - "степень". Справочник поиска теорем "смнеизв" определяет по символу x16 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается ее характеристика "смнеизв(...)".

В нашем примере - "смнеизв(второйтерм 1 и(тип(описать)условие известно(c) не(известно(a)) натуральное(d) или(натуральное(c) известно(b))))". Напомним, что характеристика "смнеизв($N \ i \ F$)" указывает на тождество, упрощающее относительно неизвестных заданный корневой операнд преобразуемого выражения. N - направление замены, i - номер корневого операнда, F - конъюнкция фильтров, уточняющих контекст.

Процедура "тождвывод" определяет результат x22 преобразования вхождения x15 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этой процедуре передаются установки (перем x (x)) для всех параметров x консеквента дополнительной теоремы. На момент выдачи процедурой "тождвывод" очередного результата такая установка будет иметь вид (перем x t), где t - терм, который был подставлен вместо x при унификации. В нашем примере x22 имеет вид:

$$\forall_{aefgh}(\neg(g = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ fe^{h/g} - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(g) - \text{even} \ \& \ g - \text{rational} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ 0 \leq e \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(g) - \text{even}) \rightarrow a^g = f^g e^h \ \& \ 0 \leq a(fe^{h/g}) \leftrightarrow a = fe^{h/g})$$

При этом элементы (перем ...) преобразуются в (перем a e), (перем b f), (перем c g), (перем d h).

Переменной x_{23} присваивается результат обработки импликации x_{22} оператором "нормтеорема". Он совпадает с указанным выше результатом вывода. Однако, перед регистрацией его в списке вывода предпринимается некоторая работа по созданию характеристик данной теоремы. Прежде всего, проверяется отсутствие в списке вывода теоремы, отличающейся от x_{23} лишь переобозначением переменных. Переменной x_{24} присваивается набор вторых элементов установок "перем", переменной x_{25} - набор последних элементов. В нашем примере $x_{24} - a, b, c, d$, $x_{25} - e, f, g, h$ (во втором случае имеются в виду однобуквенные термы). Переменной x_{26} присваивается результат подстановки в фильтры F характеристики x_{19} термов x_{25} вместо переменных x_{24} . В нашем примере получается "и(тип(описать) условие известно(g) не(известно(e)) натуральное(h) или(натуральное(g) известно(f)))".

Создается пустой накопитель x_{28} , и применяется процедура "неизвконтексты". Напомним, что обращение к ней имеет вид "неизвконтексты($X_1 X_2 X_3 X_4 X_5$)", где X_1, X_2 - термы, X_3 - набор фильтров, описывающий внешний контекст для задачи с неизвестными. X_4 - список переменных теоремы. Выходная переменная X_5 перечисляет дополняющие X_3 наборы фильтров, указывающие на контексты, в которых терм X_1 имеет большую сложность относительно неизвестных, чем терм X_2 . В нашем приеме X_1, X_2 - заменяющий и заменяемый терм теоремы x_{23} в направлении, определяемом исходной теоремой, т.е. в рассматриваемом примере $a = fe^{h/g}$ и $e^h fg$. В качестве X_3 берется список конъюнктивных членов терма x_{26} , в качестве X_4 - список переменных теоремы x_{23} . В список x_{28} заносятся только те результаты X_5 , которые не включают уже имеющиеся в x_{28} списки фильтров.

Проверяется, что список x_{28} непуст. В нашем примере он состоит из единственного набора "тип(описать)", "условие", "известно(g)", "не(известно(e))", "натуральное(h)", "или(натуральное(g) и(известно(f) известно(a)))".

Реализуется цикл просмотра теорем текущего списка вывода и проверка наличие теоремы с характеристикой "неизвоценка(...)", являющейся частным случаем теоремы x_{23} либо такой, частным случаем которой служит x_{23} . В первом случае старая теорема помечается отметкой "исключение", во втором - работа приема обрывается.

Наборы фильтров, представленные в списке x_{28} , упрощаются процедурой "преобрфильтр". Затем предпринимается регистрация теоремы x_{23} в списке вывода, причем ей передаются характеристики "неизвоценка($M Q$)", где M - направление замены, противоположное направлению исходной теоремы; Q - конъюнкция фильтров одного из наборов списка x_{28} .

4. Попытка применить дистрибутивную развертку к заменяющей части эквивалентности общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ace} (\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow a + e = 0 \leftrightarrow a/c + e/c = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{bd}(\neg(d = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow b = 0 \leftrightarrow b/d = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bde}(\neg(d = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow b/d + e/d = (b + e)/d)$$

Сразу заметим, что самостоятельной ценности выводимая теорема не имеет, однако используется при выводе теоремы:

$$\forall_{ace}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \neg(a + e = 0) \rightarrow \neg(a/c + e/c = 0))$$

Последняя теорема порождает прием проверочного оператора "усмне0", причем сумма двух дробей с одинаковыми знаменателями может возникать в качестве его входного данного при сравнении двух дробей.

Перейдем к описанию рассматриваемого приема вывода теорем. Проверяется, что число переменных связывающей приставки исходной теоремы не более 2. Переменной x11 присваивается расположенное в заменяемой части вхождение неоднобуквенного подтерма, переменной x12 - символ по вхождению x11. В нашем примере x11 - вхождение выражения b/d , x12 - символ "дробь". Проверяется, что каждый параметр подтерма x11 встречается в заменяемой части теоремы лишь однократно. Справочник поиска теорем "дистрибразвертка" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" определяет результат x17 преобразования вхождения x11 при помощи этой теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{ace}(\neg(c = 0) \ \& \ a + e - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow a + e = 0 \leftrightarrow a/c + e/c = 0)$$

Переменной x18 присваивается результат обработки теоремы x17 оператором "нормтеорема". Проверяется, что он представляет собой кванторную эквивалентность двух элементарных утверждений, после чего регистрируется в списке вывода.

5. Попытка сильного упрощения подвыражения конъюнктивной заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_z(z - \text{комплексное} \rightarrow \text{Im}(z) = 0 \leftrightarrow \text{Re}(z) = z)$$

из теоремы

$$\forall_{az}(z - \text{комплексное} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow a - \text{Re}(z) = 0 \ \& \ \text{Im}(z) = 0 \leftrightarrow a = z)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a - a = 0)$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Проверяется, что она имеет заголовок "и". Внутри заменяемой части выбирается вхождение x11 неоднобуквенного выражения, переменной x12 присваивается его заголовок.

В нашем примере x11 - " $a - Re(z)$ ". Справочник поиска теорем "констнорм" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x17 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается процедурой "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

6. Попытка сильного упрощения подвыражения неконъюнктивной заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ce}(c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(c \cap e) \rightarrow \text{конечное}(e) \leftrightarrow \text{конечное}(e \setminus c))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{конечное}(a \cup b) \leftrightarrow \text{конечное}(a))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ce}(c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow c \cap e \cup e \setminus c = e)$$

Проверяется, что заменяемая часть бесповторна. В ней выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подвыражения. Переменной x12 присваивается символ по этому вхождению. В нашем примере x11 - подтерм $a \cup b$. Справочник поиска теорем "исклпараметр" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она не имеет существенных антецедентов и что ее заменяющая часть - переменная. Оператор "тождвывод" определяет результат x19 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Он обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

7. Попытка ввода известного "коэффициента" при упрощаемом выражении с неизвестными.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdef}(\neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{числитель}(f) - \text{even}) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ f - \text{rational} \rightarrow d^f e^f = c^f \leftrightarrow c = de)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{числитель}(b) - \text{even}) \rightarrow a^b = c^b \leftrightarrow a = c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall abc(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^c b^c = (ab)^c)$$

Переменной x10 присваивается заменяющий терм, переменной x11 - заменяемый. Проверяется, что x11 - не конъюнкция, и что параметры терма x11 не включаются в параметры терма x10. Проверяется, что оценка сложности терма x11 больше 4 и больше оценки сложности антецедентов. Переменной x13

присваивается набор подтермов терма x_{11} , имеющих максимальную оценку сложности. В этом наборе выбирается терм x_{14} . В нашем примере - " a^b ". Среди параметров терма x_{14} выбирается переменная x_{15} , имеющая единственное вхождение в терм x_{11} . В нашем примере - переменная a . Переменной x_{16} присваивается заголовок терма x_{14} . В нашем примере - "степень". Справочник поиска теорем "дистрибразвертка" определяет по x_{16} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{19} присваивается вхождение терма x_{14} в заменяемую часть теоремы. Переменной x_{23} присваивается вхождение заменяющей (в нашем примере - левой) части дополнительной теоремы, переменной x_{24} - символ по этому вхождению. В нашем примере - "умножение". Проверяется, что x_{19} - не операнд операции x_{24} . Оператор "тождвывод" определяет результат x_{26} преобразования вхождения x_{19} в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этому оператору передается комментарий (переменная x_{15} набор(x_{15})), позволяющий отследить терм x_{28} , который был подставлен вместо переменной x_{15} при унификации. В нашем примере x_{28} - терм " de ". Переменной x_{27} присваивается результат обработки теоремы x_{26} процедурой "нормтеорема". В нашем примере этот результат - указанная выше итоговая теорема вывода. Переменной x_{29} присваивается список параметров терма x_{28} . В нашем примере - " d, e ". Проверяется, что этот список не менее чем двухэлементный. Процедура "характеризатор" определяет список x_{30} характеристик теоремы x_{27} . В нашем примере он состоит из термов "общнорм(второйтерм)" и "вычеркивание(второйтерм)". В данном списке находится элемент заголовком "общнорм", и переменной x_{32} присваивается его первый операнд. В нашем примере - "второйтерм". Переменной x_{34} присваивается заменяемая часть теоремы x_{27} согласно направлению x_{32} . В нашем примере она имеет вид " $d^f e^f = c^f$ ". Переменной x_{35} присваивается набор подтермов терма x_{34} , имеющих максимальную оценку сложности. В нашем примере это термы " d^f, e^f, c^f ". Выбираются элемент x_{37} списка x_{35} и переменная x_{36} списка x_{29} , такие, что x_{37} содержит переменную x_{36} , причем x_{36} имеет единственное вхождение в терме x_{34} . В нашем примере x_{36} - переменная d , x_{37} - " d^f ". Переменной x_{38} присваивается вхождение терма x_{37} в терм x_{34} , переменной x_{39} - вхождение, операндом которого является x_{38} . Проверяется, что по вхождению x_{39} расположен символ x_{24} . Переменной x_{40} присваивается результат исключения операнда x_{38} операции x_{39} . В нашем примере - " e^f ". Переменной x_{41} присваивается переменная списка x_{29} , отличная от x_{36} и входящая в терм x_{40} . В нашем примере это переменная e . Переменной x_{42} присваивается список, обозованный термом "не(известно(x_{36}))" и термами "известно(x)" для всех параметров x терма x_{40} . В нашем примере имеем список "не(известно(d))", "известно(e)", "известно(f)". Переменной x_{43} присваивается терм "неизвоценка($N Q$)", где Q - конъюнкция термов x_{42} , N - направление замены для исходной теоремы. Затем теорема x_{27} регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой x_{43} .

Применение дополнительного тождества для упрощения заменяющего утверждения

1. Попытка получить эквивалентность типа сокращения путем сильного упрощения заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acd}(0 < d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow a/d < c/d \leftrightarrow a < c)$$

из теоремы

$$\forall_{bcd}(0 < d \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow b < c/d \leftrightarrow bd < c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow a/b \cdot b = a)$$

Внутри заменяющей части выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. Переменной x12 присваивается символ по этому вхождению. В нашем примере x11 - вхождение подтерма bd , x12 - символ "умножение". Справочник поиска теорем "конствхожд" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что заголовок ее заменяемой части - x12. Оператор "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Он обрабатывается процедурой "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. При регистрации проверяется наличие среди характеристик новой теоремы терма "вычеркивание(...)".

2. Попытка упрощения заменяющей части для перехода от эквивалентности перегруппировочного типа к эквивалентности небесповторного утверждения бесповторному.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cf}(c - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(c, c \setminus f) \leftrightarrow c \subseteq f)$$

из теоремы

$$\forall_{bef}(b - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(b, e \setminus f) \leftrightarrow b \cap e \subseteq f)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_c(c - \text{set} \rightarrow c \cap c = c)$$

Переменной x10 присваивается заменяющий терм, переменной x11 - список его параметров. Проверяется, что он включает в себя все переменные теоремы. Переменной x12 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что утверждения x10, x12 элементарны и бесповторны. Проверяется наличие у теоремы характеристики "группировка(...)". Проверяется наличие переменной списка x11, глубина вхождения которой в терм x10 больше единицы, а в терм x11 - равна 1. Внутри заменяющей части теоремы выбирается вхождение x14 неоднобуквенного подтерма. Переменной x15 присваивается символ по этому вхождению. В нашем примере x14 - " $b \cap e$ ", x15 - символ "пересечение". Справочник поиска теорем "тожд" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x20 преобразования вхождения x14 при помощи дополнительной теоремы. Ввод новых переменных при унификации блокируется. Проверяется, что заменяющий терм теоремы x20 бесповторен, а заменяемый - не бесповторен. Антецеденты теоремы x20 обрабатываются оператором "нормантецеденты" относительно параметров ее консеквента. Полученная после этого импликация регистрируется в списке вывода.

3. Попытка использовать тождество сильного упрощения для перехода от слабой общей стандартизации к сильной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bd}(\neg(d = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow b = 0 \leftrightarrow b/d = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow b = ac \leftrightarrow a = b/c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a \cdot 0 = 0)$$

Проверяется, что теорема имеет характеристику "коммутатор", т.е. преобразует бесповторное утверждение так, чтобы выявилась симметрия по переменным. Внутри заменяющей части выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. В нашем примере x11 имеет вид "ac", x12 - символ "умножение". Справочник поиска теорем "констнабор" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что заголовок заменяющей части дополнительной теоремы - логический символ. Оператор "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет меньше переменных, чем исходная теорема. Импликация x18 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Применение дополнительной эквивалентности для упрощения заменяемого утверждения

1. Попытка упростить заменяемую часть эквивалентности при помощи стандартизирующей эквивалентности двух элементарных бесповторных утверждений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{be}(b - \text{set} \rightarrow b = \{e\} \leftrightarrow \forall_c(c = e \leftrightarrow c \in b))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow a = b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \leftrightarrow c \in b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a = b \leftrightarrow a \in \{b\})$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть теоремы, переменной x11 - список предикатных символов, входящих в x10. В нашем примере - символы "длялюбого", "эквивалентно", "принадлежит" (заметим, что под предикатным символом здесь понимается любой заголовок утверждений, включая кванторы и логические связки). Справочник поиска теорем "упрощэkv" заполняет список x12 парами (теорема - список ее характеристик) по всем символам, входящим в список x11. В заменяемой части теоремы рассматривается вхождение x14 неоднобуквенного подтерма, и переменной x15 присваивается символ по вхождению

x14. В нашем примере x14 имеет вид " $c \in a$ ", x15 - символ "принадлежит". Проверяется, что x15 - предикатный символ. В списке x12 выбирается теорема x17 с характеристикой "общнорм". В нашем примере это указанная выше дополнительная теорема. Оператор "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождения x14 при помощи дополнительной теоремы. Переменной x22 присваивается результат обработки теоремы x21 операторами "Спускоперандов" и "демодификация". В нашем примере получается теорема:

$$\forall_{be}(\{e\} - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \{e\} = b \leftrightarrow \forall_c(c = e \leftrightarrow c \in b))$$

Переменной x23 присваивается результат обработки импликации x22 оператором "нормтеорема". В нашем примере x23 - указанная выше выводимая теорема. Проверяется, что заголовок теоремы x23 - символ "длялюбого", причем если x23 содержит дизъюнкцию, то и исходная теорема содержала дизъюнкцию. Проверяется, что заменяемая часть теоремы x23 не упрощается относительно ее о.д.з., для чего используется вспомогательная задача на преобразование. Затем теорема x23 регистрируется в списке вывода.

2. Попытка опрокинуть эквивалентность общей стандартизации путем расширения фрагмента заменяемого термина.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \text{точкалуча}(A, B, C) \leftrightarrow \neg(A = B) \ \& \ \neg(A \in \text{интервал}(BC)) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \text{точкалуча}(A, B, C) \leftrightarrow \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{луч}(AB))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow C \in \text{луч}(AB) \leftrightarrow C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \neg(A \in \text{интервал}(BC)))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - набор ее конъюнктивных членов, переменной x12 - набор антецедентов. Выбирается утверждение x13 списка x11, переменной x14 присваивается его заголовок. В нашем примере x13 имеет вид " $C \in \text{луч}(AB)$ ". Справочник поиска теорем "упрощкн" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается результат добавления к антецедентам теоремы отличных от x13 элементов списка x11. Процедура "тождпреобр" определяет результат x20 преобразования термина x13 относительно посылок x19 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере получаем " $\neg(A \in \text{интервал}(BC)) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB)$ ". Переменной x21 присваивается конъюнкция отличных от x13 элементов списка x11 и конъюнктивных членов термина x20. Создается импликация с антецедентами x12, консеквентом которой служит эквивалентность заменяющей части исходной теоремы утверждению x21. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Попытка упростить конъюнктивный член заменяемого утверждения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{целое} \rightarrow 0 < a \leftrightarrow a - \text{натуральное})$$

из теоремы

$$\forall_n(n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n - 1 \leftrightarrow n - \text{натуральное})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_n(n - \text{целое} \rightarrow 0 < n \leftrightarrow 0 \leq n - 1)$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Проверяется, что по вхождению x10 расположен символ "и". Переменной x11 присваивается вхождение операнда вхождения x10, переменной x12 - символ по вхождению x11. В нашем примере x11 - " $0 \leq n - 1$ ", x12 - символ "меньшеилиравно". Проверяется, что x12 отлично от символов "не", "равно" и что подтерм по вхождению x11 имеет единственный параметр. Справочник поиска теорем "общнаправл" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тожд-вывод" находит результат x17 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Импликация x17 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Применение дополнительной эквивалентности для упрощения заменяющего утверждения

1. Попытка использовать сокращающую эквивалентность для перехода от слабой общей стандартизации к сильной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ceg}(\neg(c = 0) \ \& \ \neg(g = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \rightarrow c = g \ \vee \ e = 0 \leftrightarrow e/c = e/g)$$

из теоремы

$$\forall_{abdf}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow af = bd \leftrightarrow a/d = b/f)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow a = e \ \vee \ b = 0 \leftrightarrow ab = be)$$

Внутри заменяющей части теоремы выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. Переменной x12 присваивается символ по этому вхождению. В нашем примере x11 имеет вид af , x12 - символ "умножение". Справочник поиска теорем "сокращ" опеределяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "и(N)" либо "или(N)". Переменной x17 присваивается заменяемая часть дополнительной теоремы (в смысле направления замены N), переменной x18 - заголовок этой части. В нашем примере x18 - символ "равно". Рассматривается вхождение x19

символа x18 в заменяемую часть исходной теоремы, внутри которого расположено x11. В нашем примере - вхождение равенства " $af = bd$ ". Оператор "тожд-вывод" определяет результат x20 преобразования вхождения x19 при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "полны-епосылки"; затем проверяется, что число переменных теоремы x20 меньше, чем у исходной теоремы. Далее импликация x20 обрабатывается процедурой "норм-теорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка использовать старую сокращающую эквивалентность для получения новой.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdf} (\neg(c = 0) \ \& \ \neg(d = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow a/(cd) = b/(cf) \leftrightarrow a/d = b/f)$$

из теоремы

$$\forall_{abdf} (\neg(d = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow a.f = b.d \leftrightarrow a/d = b/f)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc} (\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab = bc \leftrightarrow a = c)$$

Проверяется, что теорема имеет характеристику "коммутатор", т.е. преобразует неповторное утверждение так, чтобы выявилась симметрия по переменным. Переменной x10 присваивается заменяющий терм. Проверяется, что число его корневых операндов равно 2. Переменной x11 присваивается заголовок терма x10. Если этот заголовок - равенство, то переменной x11 переприсваивается тип значения частей этого равенства. В нашем примере x11 - символ "число". Проверяется, что заголовки операндов терма x10 одинаковы. Этот общий заголовок присваивается переменной x12. В нашем примере x12 - "умножение". Проверяется, что символ x12 ассоциативен и коммутативен. Переменной x13 присваивается заменяемый терм теоремы, переменной x14 - список максимальных по включению подвыражений, содержащихся в x13. В нашем примере - " $a/d, b/f$ ". Справочник поиска теорем "коэфф" определяет по символу x11 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается набор корневых операндов консеквента дополнительной теоремы. Переменной x19 присваивается один из них, переменной x20 - другой. В нашем примере x19 - равенство " $a = c$ ", x20 - равенство " $ab = bc$ ". Проверяется, что параметры терма x19 входят в терм x20 и что оба корневых операнда терма x20 имеют заголовок x12. Выбирается параметр x21 терма x20, не входящий в терм x19. В нашем примере - b . Переменной x22 присваивается список параметров терма x20, отличных от x21. В нашем примере - a, c . Выбираются такие переменные x24 и x26, что x24 - корневой операнд первого операнда терма x10, x26 - корневой операнд второго операнда терма x10, причем среди выражений списка x14 нет такого, который одновременно включал бы обе переменные x24, x26. В нашем примере x24 - f , x26 - d . Выбирается переменная x28, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - c . Определяется результат x29 подстановки в терм x13 выражений x12(x24, x28) и x12(x26, x28) вместо переменных x24, x26. В

нашем примере получаем терм " $a/dc = b/fc$ ". Переменной x30 присваивается набор результатов подстановки в antecedentes теоремы вместо переменных x22 и переменной x21 корневых операндов терма x10 и терма x28. В нашем примере получаем утверждения " $\neg(c = 0)$ ", " af – число", " c – число", " bd – число". Создается импликация, antecedентами которой служат antecedенты исходной теоремы и утверждения x30, а консеквентом - эквивалентность утверждений x29 и x13. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Попытка использовать эквивалентность, определяющую одноместный предикат через многоместный.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{целое} \rightarrow a(\bmod 2) = 0 \leftrightarrow a - \text{even})$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(n - \text{натуральное} \ \& \ m - \text{целое} \rightarrow m(\bmod n) = 0 \leftrightarrow n|m)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{целое} \rightarrow a - \text{even} \leftrightarrow 2|a)$$

В заменяющей части теоремы выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. Переменной x12 присваивается символ по этому вхождению. В нашем примере x11 - " $n|m$ ", x12 - символ "делит". Справочник поиска теорем "опред" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что заменяющий терм дополнительной теоремы (в направлении общей стандартизации) имеет длину 2. В нашем примере - терм " $a - \text{even}$ ". Проверяется также, что длина заменяемого терма дополнительной теоремы не менее 3. Оператор "тождвывод" определяет результат x19 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Импликация x19 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Попытка сильного упрощения заменяющего терма, не имеющего вида равенства, и обратной свертки в равенство.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{mn}(n - \text{натуральное} \ \& \ m - \text{целое} \rightarrow -m(\bmod n) = 0 \leftrightarrow m(\bmod n) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(n - \text{натуральное} \ \& \ m - \text{целое} \rightarrow m(\bmod n) = 0 \leftrightarrow n|m)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow m|-n)$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяющей части теоремы. Переменной x11 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она элементарна

и представляет собой равенство, а заменяющая часть элементарна и не является равенством. При этом параметры обеих частей одинаковы. Переменной x13 присваивается заголовок заменяющей части. В нашем примере - символ "делит". Проверяется, что x13 - не символ "не". Справочники поиска теорем "упрощэкв", "Сокращ" определяют по x13 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что заголовки обеих частей эквивалентности в консеквенте дополнительной теоремы равны x13. Оператор "тождвывод" определяет результат x19 преобразования вхождения x10 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы, применяемой в направлении общей стандартизации. В нашем примере x19 имеет вид:

$$\forall_{ab}(a - \text{натуральное} \ \& \ (-b) - \text{целое} \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \rightarrow -b(\text{mod } a) = 0 \leftrightarrow a|b)$$

Переменной x21 присваивается вхождение заменяющей части теоремы x19. В нашем примере - вхождение правой части. Оператор "тождвывод" определяет результат x23 преобразования вхождения x21 при помощи исходной теоремы, применяемой в направлении, противоположном ее исходной ориентации. Импликация x23 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Попытка декомпозиции заменяющего терма, не имеющего вида равенства, и обратной свертки для каждого конъюнктивного члена.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abn}(b - \text{натуральное} \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ a - \text{целое} \rightarrow a(\text{mod } \text{нок}(b, n)) = 0 \leftrightarrow a(\text{mod } b) = 0 \ \& \ a(\text{mod } n) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(n - \text{натуральное} \ \& \ m - \text{целое} \rightarrow m(\text{mod } n) = 0 \leftrightarrow n|m)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{kmn}(k - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|k \ \& \ n|k \leftrightarrow \text{нок}(m, n)|k)$$

Переменной x11 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он элементарный, неповторный и имеет заголовок "равно". Переменной x12 присваивается заменяющий терм. Проверяется, что он тоже элементарный, а его заголовок x13 (в нашем примере - "делит") отличен от символов "равно", "не". Параметры термов x11 и x12 одинаковы. Справочник поиска теорем "упрощкн" определяет по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается вхождение заменяемой части дополнительной теоремы, переменной x20 - вхождение заменяющей. Проверяется, что по вхождению x19 расположен символ x13, а по вхождению x20 - символ "и". Кроме того, проверяется, что каждый операнд вхождения x20 имеет заголовок x13. Оператор "тождвывод" находит результат x21 преобразования вхождения x10 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{abc}(\text{нок}(b, c) - \text{натуральное} \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ c - \text{целое} \rightarrow a(\text{mod } \text{нок}(b, c)) = 0 \leftrightarrow b|a \ \& \ c|a)$$

Последовательно просматриваются операнды заменяющей части теоремы x21, и каждый из них преобразуется при помощи исходной теоремы. Результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и переписывается переменной x21. В нашем примере x21 приобретает вид итоговой теоремы вывода, указанной выше.

Проверяется, что в заменяемой части теоремы x21 не встречается ассоциативная и коммутативная операция с более чем двумя операндами, имеющая среди своих операндов две неповторных переменных. Затем теоремы x21 регистрируются в списке вывода.

Использование дополнительного тождества свертки условного выражения

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_m(m - \text{число} \rightarrow |m| - \text{целое} \leftrightarrow m - \text{целое})$$

из теоремы

$$\forall_m(m - \text{число} \rightarrow -m - \text{целое} \leftrightarrow m - \text{целое})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = (a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } -a))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий. Проверяется, что они имеют одинаковые заголовки. Оператор "сравнтермов" находит внутри x10 и x11 такие наименьшие подтермы x12 и x13, что x10 и x11 отличаются только внутри них. В нашем примере x12 - "-m", x13 - "m". Проверяется, что вхождение x12 некорневое, и переменной x14 присваивается подтерм по вхождению x12. Переменной x15 присваивается подтерм по вхождению x13. Переменной x16 присваивается заголовок терма x14. Справочник поиска теорем "варианты" определяет по x16 указанную выше дополнительную теорему. Ее переменные переобозначаются так, чтобы были отличны от переменных исходной теоремы. В нашем примере дополнительная теорема не изменяется. Переменной x21 присваивается тот операнд равенства в консеквенте дополнительной теоремы, который не имеет заголовка "вариант", а переменной x22 - тот, который имеет такой заголовок. В нашем примере x22 - "(a при 0 ≤ a, иначе -a)". Переменной x23 присваивается набор альтернатив условного выражения x22. В нашем примере - "a, -a". Среди выражений x23 выбирается тот терм x24, заголовком которого служит символ x16. Переменной x25 присваивается список параметров терма x24. В нашем примере x24 - "-a". Проверяется, что дополнительная теорема не имеет переменных, не входящих в x25. Переменной x26 присваивается элемент пары x23, отличный от x24. В нашем примере - "a". Определяется подстановка S вместо переменных x25, унифицирующая термы x14 и x24, а также термы x15 и x26. Переменной x28 присваивается список утверждений, получаемых применением подстановки S к антецедентам исходной и дополнительной теорем. Переменной x29 присваивается результат применения подстановки S к подтерму x21, а переменной x30 - результат применения ее к терму x15. В нашем примере получаем, соответственно, |m| и m. Переменной x31 присваивается результат одновременных замены вхождения x12 в терм x10 на терм x29 и применения подстановки S к остальной части терма x10. Аналогичным образом, переменной x32 присваивается результат одновременных замены вхождения x13 в терм x11 на

терм x_{30} и применения подстановки S к остальной части терма x_{11} . В нашем примере получаем, соответственно, " $|m|$ — целое" и " m — целое". Создается импликация с антецедентами x_{28} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{31} и x_{32} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на описание для получения новой теоремы

1. Попытка использовать параметрическое описание объектов заданного типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_z (z \text{ — комплексное} \rightarrow z \text{ — число} \leftrightarrow \text{Im}(z) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{cd} (c \text{ — число} \& d \text{ — число} \rightarrow c + di \text{ — число} \leftrightarrow d = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_z (z \text{ — комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy} (x \text{ — число} \& y \text{ — число} \& z = x + iy))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяющий терм, переменной x_{11} — заменочный. Проверяется, что терма x_{11} имеет единственный корневой операнд, и переменной x_{13} присваивается заголовок этого корневого операнда. В нашем примере — символ "Плюс" комплексного сложения. Справочник "тип" определяет тип x_{15} значения термов с заголовком x_{13} . В нашем случае — "комплексное". Справочник поиска теорем "определение" находит по символу x_{15} указанную выше дополнительную теорему. Переменные дополнительной теоремы переобозначаются на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере это не изменяет дополнительной теоремы. Переменной x_{19} присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x_{15} , переменной x_{20} — вхождение той части, которая представляет собой квантор существования. Проверяется, что дополнительная теорема не имеет антецедентов. Переменной x_{21} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования x_{20} . Среди них находится равенство x_{22} переменной x_{23} терму x_{24} . Проверяется, что x_{23} — корневой операнд подтерма x_{19} . В нашем примере x_{23} — переменная z , x_{24} — терм $x + iy$. Переменной x_{25} присваивается корневой операнд терма x_{11} . В нашем примере — " $c + di$ ". Переменной x_{26} присваивается список параметров терма x_{25} . В нашем примере — " c, d ". Проверяется, что он содержит все переменные исходной теоремы. Усматривается, что терм x_{24} — результат некоторой подстановки S вместо переменных x_{26} в терм x_{25} . Переменной x_{29} присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы. Проверяется, что он включается в список x_{21} . Переменной x_{30} присваивается результат применения подстановки S к терму x_{10} . В нашем примере он имеет вид " $y = 0$ ". Переменной x_{31} присваивается список параметров терма x_{30} . Переменной x_{32} присваивается результат добавления к списку x_{21} подтерма x_{19} , т.е. в нашем примере утверждения " z — комплексное". Выбирается список x_{33} переменных, не входящих в термы списка x_{32} , длина которого равна длине списка x_{31} . В нашем примере список x_{33} состоит из единственной переменной a . Переменной

x34 присваивается список равенств переменных x31 соответствующим переменным x33. В нашем примере - единственное равенство $y = a$. Создается задача на описание x35, посылками которой являются утверждения x32, а условиями - равенства x34. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x33", "контроль", "известно x23". В нашем случае x32 состоит из утверждений " x - число", " y - число", " $z = x + iy$ ", " z - комплексное". Переменной x36 присваивается ответ задачи x35. В нашем примере он имеет вид " $a = \text{Im}(z)$ ". Проверяется, что x36 отлично от символа "отказ". Переменной x37 присваивается набор конъюнктивных членов терма x36. Переменной x38 присваивается набор правых частей равенств списка x37, в левой части которых расположена переменная списка x33. Переменной x39 присваивается результат подстановки термов x38 вместо переменных x31 в терм x30. Переменной x40 присваивается терм $P(x23)$, где P - заголовок терма x11. В нашем случае имеем z - число. Переменной x42 присваивается импликация, антецедентом которой служит подтерм x19, а консеквентом - эквивалентность термов x40 и x39. Она регистрируется в списке вывода.

2. Усмотрение однозначной определенности значения выражения при переходе к отрицанию.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{целое} \rightarrow a(\text{mod } 2) = 1 \leftrightarrow \neg(a - \text{even}))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{целое} \rightarrow a(\text{mod } 2) = 0 \leftrightarrow a - \text{even})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{mnk}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow m(\text{mod } n) = k \leftrightarrow k \in \{0, \dots, n - 1\} \ \& \ \exists_p(p - \text{целое} \ \& \ m = k + np))$$

Переменной x10 присваивается заменяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x11 присваивается заменяющее утверждение, переменной x12 - набор антецедентов. Проверяется, что x10 - равенство. Переменной x15 присваивается заголовок некоторой части x13 этого равенства. В нашем случае - символ "вычет". Справочник поиска теорем "опрзнач" находит по символу x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменные дополнительной теоремы переобозначаются на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере дополнительная теорема не изменяется. Переменной x20 присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте дополнительной теоремы, которая представляет собой равенство. В нашем примере - вхождение равенства " $m(\text{mod } n) = k$ ". Переменной x21 присваивается вхождение другой части эквивалентности. Переменной x22 присваивается вхождение той части равенства x20, заголовок которой равен x15; переменной x23 - вхождение другой части равенства. Переменной x24 присваивается само равенство по вхождению x20, переменной x25 - список его параметров. Находится подстановка S вместо переменных x25, переводящая равенство x24 в x10. Переменной x27 присваивается список параметров подтерма x22, переменной x28 - список тех термов, в которые переменные x27 переводятся подстановкой S . В нашем

примере x27 - переменные m, n ; x28 - термы $a, 2$. Переменной x29 присваивается переменная, расположенная на вхождении x23. В нашем случае - переменная k . Переменной x30 присваивается терм, в который переменная x29 переводится подстановкой S . В нашем примере - терм 0. Переменной x31 присваивается набор результатов подстановки термов x28 вместо переменных x27 в конъюнктивные члены подтерма x21. К нему добавляется отрицание равенства выражений x29 и x30. В нашем примере x31 состоит из утверждений " $k \in \{0, \dots, 2 - 1\}$ ", " $\exists_p(p - \text{целое} \ \& \ a = k + 2p)$ ", " $\neg(k = 0)$ ". Создается задача на описание x33, посылками которой служат антецеденты исходной теоремы, а условиями - утверждения x31. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x29". Ответ задачи x33 присваивается переменной x34. В нашем примере он имеет вид " $k = 1 \ \& \ 1 \leq 1 \ \& \ 1 - \text{целое} \ \& \ \exists_p(a = 2p + 1 \ \& \ p - \text{целое})$ ". Проверяется, что ответ x34 отличен от символа "отказ". Переменной x35 присваивается набор его конъюнктивных членов. В этом наборе находится равенство x36 для значения неизвестной x29. Рассматривается правая часть t данного равенства. Переменной x37 присваивается эквивалентность равенства термов x13 и t отрицанию утверждения x11. Затем создается импликация с антецедентами x12 и консеквентом x37, которая регистрируется в списке вывода.

Варьирование заменяемой части эквивалентности

1. Группировка ненулевых членов в одной части отношения (случай элементарной заменяемой части).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq c \rightarrow -c^b + a^b = 0 \leftrightarrow a - c = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq c \rightarrow a^b = c^b \leftrightarrow a = c)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она представляет собой элементарное утверждение. Переменной x11 присваивается заменяющая часть, переменной x12 - список антецедентов. Проверяется, что число корневых операндов заменяемой части равно 2. Переменной x13 присваивается ее заголовок. Если x13 - равенство, то переменной x13 переписывается тип значений операндов этого равенства. Переменной x14 присваивается результат обращения к справочнику "перегруппировка" на символе x13. Если возможна перегруппировка A - членов операндов отношения x13 либо равенства объектов типа x13 из одной части в другую с изменением знака B , то x14 становится равно тройке (A, B, C) , где C - единица операции A . В нашем примере x13 - символ "число", x14 - тройка ("плюс", "минус", 0). Проверяется, что x14 - тройка указанного вида и что утверждение x10 не имеет константы C одним из своих корневых операндов. Переменной x18 присваивается результат перегруппировки корневых операндов отношения x10 в левой части. В нашем примере - " $a^b - c^b = 0$ ". Переменной x19 присваивается заменяющая часть. Если ее заголовок такой же, как у заменяемой части, а число корневых операндов

равно 2, то предпринимается аналогичная перегруппировка ее членов в левой части. В нашем примере получается " $a - c = 0$ ". Создается импликация с антецедентами x12, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x18 и x19. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Группировка ненулевых членов в одной части отношения (случай конъюнктивной заменяемой части).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow -c^b + a^b = 0 \ \& \ 0 \leq ac \leftrightarrow a = c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow a^b = c^b \ \& \ 0 \leq ac \leftrightarrow a = c)$$

Действия аналогичны предыдущему пункту, но перегруппировка происходит только в конъюнктивных членах заменяемой части.

3. Попытка проварьировать заменяемую часть эквивалентности общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(c \in a) \ \& \ a - \text{set} \ \& \ b - \text{слово} \rightarrow a \subseteq \{c; b\} \leftrightarrow a \subseteq \{; b\})$$

из теоремы

$$\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, d) \rightarrow a \subseteq d \cup e \leftrightarrow a \subseteq e)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{слово} \rightarrow \{; c\} \cup \{d\} = \{d; c\})$$

Проверяется, что исходная теорема имеет не более трех переменных. Внутри заменяемой части выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма, и переменной x12 присваивается его заголовок. В нашем примере x11 - выражение " $d \cup e$ ", x12 - символ "объединение". Проверяется, что x11 не расположено внутри такого конъюнктивного члена заменяемой части, оценка сложности которого меньше оценки сложности всей заменяемой части. Справочник поиска теорем "перестановки" находит по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что если исходная теорема имела более одной переменной, то дополнительная имеет не более двух переменных, иначе - не более трех. Оператор "тождвывод" определяет результат преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Этот результат последовательно обрабатывается операторами "Спускоперандов", "демодификация" и "нормтеорема". Результат регистрируется в списке вывода.

Реализация фрагмента консеквента эквивалентности

1. Использование эквивалентности общей стандартизации для перехода от константного примера к неконстантному.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c (c - \text{число} \rightarrow c < c + 1)$$

из теоремы

$$\forall_{abc} (a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a < b \leftrightarrow a + c < b + c)$$

и дополнительной теоремы

$$0 < 1.$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она элементарна и не имеет заголовка "не". Переменной x11 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что она неповторна, элементарна и не имеет заголовка "не", а ее параметры образуют собственное подмножество параметров заменяемой части. Проверяется, что корневые операнды утверждения x11 суть переменные. Переменной x13 присваивается заголовок утверждения x11. В нашем примере - символ "меньше". Справочник поиска теорем "Константа" определяет по x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x16 присваивается список переменных утверждения x11. Определяется подстановка S вместо переменных x16, переводящая x11 в дополнительную теорему. Определяются результат x18 применения подстановки S к терму x10, а также набор x20 результатов применения этой подстановки к антецедентам исходной теоремы. В нашем примере x18 имеет вид " $0 + c < 1 + c$ ". Переменной x23 присваивается утверждение, получаемое из x18 при обработке его корневых операндов нормализаторами общей стандартизации относительно списка x20. Переменной x24 присваивается результат обработки утверждений x20 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x23. Переменной x25 присваивается импликация с антецедентами x24 и консеквентом x23. Она регистрируется в списке вывода.

2. Реализация конъюнктивного члена заменяемого терма.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{amn} (a - \text{set} \ \& \ a \subseteq Z \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow a \cup \{m, \dots, n\} = Z \leftrightarrow Z \subseteq a \cup [m, n])$$

из теоремы

$$\forall_{abmn} (a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq Z \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow b \subseteq a \cup \{m, \dots, n\} \leftrightarrow b \subseteq a \cup [m, n] \ \& \ b \subseteq Z)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_b (b - \text{set} \rightarrow b \subseteq b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что он представляет собой конъюнкцию. Выбирается вхождение x12 конъюнктивного члена заменяемой части. Переменной x13 присваивается его заголовок, с отбрасыванием отрицания, если оно есть. В нашем примере x12 - вхождение утверждения $b \subseteq Z$, x13 - символ "содержится". Справочник поиска теорем "пример" определяет по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Ее консеквент A заменяется на эквивалентность " $A \leftrightarrow$ истина". Оператор "тождвывод" находит результат x18 преобразования вхождения x12 при помощи измененной указанным образом дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Обобщение теоремы

1. Попытка обобщить эквивалентность общей стандартизации путем исключения знака перед двуместной операцией.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(0 < d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow 0 < ad + bd \leftrightarrow 0 < a + b)$$

из теоремы

$$\forall_{abd}(0 < d \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow 0 < ad - bd \leftrightarrow 0 < a - b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она элементарна. Внутри x10 выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма, число корневых операндов которого равно 1. В нашем примере - вхождение подтерма " $-bd$ ". Переменной x12 присваивается вхождение корневого операнда подтерма x11. Проверяется, что число операндов вхождения x12 равно 2. Переменной x13 присваивается символ по вхождению x12. В нашем примере - символ "умножение". Справочник "заменазнака" определяет по символу x13 пару (f, n) , указывающую на возможность внесения знака f в n -й операнд операции x13. В нашем примере эта пара имеет вид "(минус 1)". Проверяется, что по вхождению x11 расположен символ f . Справочник "отрицание" устанавливает, что двукратное применение операции f возвращает исходное значение. Переменной x18 присваивается n -й операнд вхождения x12, переменной x19 - символ по этому вхождению. В нашем примере x19 - переменная b . Проверяется, что x19 - переменная, имеющая единственное вхождение в x10. Переменной x20 присваивается терм " $x17(x19)$ ". В нашем примере - " $-b$ ". Переменной x21 присваивается результат подстановки терма x20 вместо переменной x19 в консеквент теоремы. Переменной x22 присваивается набор результатов такой же подстановки в антецеденты теоремы. Создается импликация с антецедентами x22 и консеквентом x21. Она обрабатывается операторами "полныепосылки" и "нормтеорема", после чего регистрируется в списке вывода.

2. Исключение операции типа "отрицание", если она встречается над всеми вхождениями заданной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_m(m - \text{целое} \rightarrow \neg(m = 0) \ \& \ 0 < m + 1 \leftrightarrow 0 \leq m - 1)$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow \neg(m - n = 0) \ \& \ 0 < m - n + 1 \leftrightarrow 0 \leq m - n - 1)$$

В заменяемой части теоремы рассматривается вхождение x_{11} неоднобуквенного подтерма, число корневых операндов которого равно 1. Переменной x_{12} присваивается переменная - корневой операнд вхождения x_{11} . В нашем примере x_{11} - вхождение терма " $-n$ ", x_{12} - переменная n . Переменной x_{13} присваивается заголовок подтерма x_{11} . Справочник "отрицание" проверяет, что двукратное применение операции x_{13} не изменяет исходного значения. Проверяется, что все вхождения переменной x_{12} в заменяемый терм расположены только под операцией x_{13} . Проверяется что это же верно для вхождений x_{12} в antecedentes, за исключением antecedentes, имеющих единственное вхождение переменной x_{12} и не содержащих других переменных. Переменной x_{15} присваивается набор результатов подстановки в antecedentes терма " $x_{13}(x_{12})$ " вместо переменной x_{12} , а переменной x_{16} - результат такой же подстановки в консеквент. Создается импликация с antecedентами x_{15} и консеквентом x_{16} , которая обрабатывается операторами "полныепосылки", "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Обобщение эквивалентности общей стандартизации путем ввода неповторного внешнего параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow bc/a - \text{rational} \leftrightarrow b/a - \text{rational})$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(c = 0) \rightarrow bc - \text{rational} \leftrightarrow b - \text{rational})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \cdot (a/b) = ae/b)$$

Описание приема почти дословно воспроизводит описание аналогичного приема для характеристики "нормализация". Для удобства чтения повторим текст полностью.

Переменной x_{10} присваивается заменяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x_{11} присваивается заменяющее утверждение. Проверяется, что оно не содержит символа "или". Внутри терма x_{10} выбирается вхождение x_{12} неоднобуквенного подтерма с двумя корневыми операндами; переменной x_{13} присваивается его заголовок. В нашем примере x_{12} - выражение bc , x_{13} - символ "умножение". Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по x_{13} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{18} присваивается вхождение консеквента дополнительной теоремы, переменной x_{19} - ее заменяемая часть. В нашем примере- " $e \cdot (a/b)$ ". Проверяется, что она имеет заголовок x_{13} . Рассматривается вхождение x_{20} корневого операнда терма x_{19} ,

представляющее собой двуместную операцию от переменных x_{22} и x_{23} . Находится единица E этой операции. В нашем примере переменная x_{22} - a , переменная x_{23} - b . Проверяется, что другой корневой операнд терма x_{19} представляет собой переменную x_{25} . В нашем примере - e .

Если символ x_{13} коммутативен, то переменной x_{26} присваивается произвольный корневой операнд операции x_{12} , иначе - операнд, имеющий тот же номер, что и операнд x_{19} операции x_{20} . В нашем примере x_{26} - вхождение операнда b .

Проверяется, что по вхождению x_{26} расположена переменная x_{27} , имеющая единственное вхождение в терм x_{10} . Переменной x_{28} присваивается вхождение отличного от x_{26} операнда операции x_{12} . Переменной x_{29} присваивается та из переменных x_{22} , x_{23} , по которой операция x_{20} не имеет единицы, переменной x_{30} - та, по которой она имеет единицу. В нашем случае x_{29} - a , x_{30} - b . Переменной x_{31} присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. Проверяется, что его заголовок отличен от символа x_{13} и что число его корневых операндов равно 2. Рассматривается вхождение x_{32} того корневого операнда терма x_{31} , который имеет заголовок x_{13} . В нашем примере - терма " ae ". Проверяется, что число операндов вхождения x_{32} равно 2. Переменной x_{33} присваивается вхождение операнда операции x_{32} , равного переменной x_{25} (т.е. e), переменной x_{34} - вхождение операнда, равного переменной x_{29} (т.е. a). Если операция x_{13} некоммутативна, то проверяется, что операнд x_{34} операции x_{32} имеет тот же номер, что и операнд x_{20} операции x_{19} . Рассматривается вхождение x_{35} корневого операнда терма x_{31} , отличного от x_{32} . Проверяется, что на этом вхождении расположена переменная x_{30} (т.е. b). Переменной x_{36} присваивается заголовок терма x_{31} .

Предпринимается предварительная проверка избыточности ввода нового параметра. Рассматривается случай, когда x_{12} - операнд операции x_{36} , противоположным операндом которой является неповторная в заменяемой части переменная.

Если проверка избыточности дала положительный результат, выбирается переменная x_{37} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - " a ". Переменной x_{38} присваивается результат соединения термов x_{12} и x_{37} операцией x_{36} , причем номер операнда x_{37} совпадает с номером операнда x_{35} операции x_{31} . В нашем примере x_{38} имеет вид bc/a . Переменной x_{39} присваивается результат замены вхождения x_{12} в терм x_{10} на x_{38} . В нашем случае - " $bc/a - \text{rational}$ ". Переменной x_{40} присваивается результат подстановки термов x_{27} и x_{37} вместо переменных x_{29} и x_{30} в подтерм x_{20} . В нашем примере - " b/a ". Переменной x_{41} присваивается результат подстановки терма x_{40} вместо переменной x_{27} в терм x_{11} . В нашем случае - " $b/a - \text{rational}$ ". Переменной x_{43} присваивается набор результатов подстановки выражений x_{27} , x_{37} и подтерма x_{28} вместо переменных x_{29} , x_{30} и x_{25} в antecedentes дополнительной теоремы. В нашем примере - " $\neg(a = 0)$ ", " $b - \text{число}$ ", " $a - \text{число}$ ", " $c - \text{число}$ ". Переменной x_{44} присваивается объединение набора x_{43} с набором результатов подстановки выражения x_{40} вместо переменной x_{27} в antecedentes исходной теоремы.

Далее снова предпринимается анализ избыточности добавленной переменной x_{37} . Выражение x_{39} обрабатывается нормализаторами общей стандартизации

и проверяется, что в результате переменная x37 не оказалась в одной и той же ассоциативно-коммутативной операции с другой неповторной переменной.

Создается импликация с антецедентами x44, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x41 и x39. Ориентация равенства - та же, что у исходной теоремы. Переменной x46 присваивается результат обработки этой импликации оператором "нормтеорема". Проверяется, что в теореме x46 переменная x37 имеет единичное значение для той операции, операндом которой она является. Затем эта теорема регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

4. Обобщение эквивалентности общей стандартизации путем ввода повторного дополнительного параметра операнда.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde fghijk} (\neg(g=0) \& \neg(h=0) \& \neg(i=0) \& \neg(j=0) \& \neg(k=0) \& \\ a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& d - \text{число} \& e - \text{число} \& f - \text{число} \& \\ g - \text{число} \& h - \text{число} \& i - \text{число} \& j - \text{число} \& k - \text{число} \rightarrow \\ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (a/g, b/i, c/j)) \leftrightarrow \text{пропорцнаборы}((d, e, f), \\ (ah/(gk), bh/(ik), ch/(jk))))$$

из теоремы

$$\forall_{abcde fghij} (\neg(g=0) \& \neg(h=0) \& \neg(i=0) \& \neg(j=0) \& a - \text{число} \& \\ b - \text{число} \& c - \text{число} \& d - \text{число} \& e - \text{число} \& f - \text{число} \& g - \text{число} \& \\ h - \text{число} \& i - \text{число} \& j - \text{число} \rightarrow \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (a/g, b/i, c/j)) \leftrightarrow \\ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (ah/g, bh/i, ch/j)))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{ade} (\neg(a=0) \& \neg(e=0) \& a - \text{число} \& d - \text{число} \& e - \text{число} \rightarrow d/(ae) = (d/e)/a)$$

$$\forall_{abe} (\neg(b=0) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& e - \text{число} \rightarrow e \cdot (a/b) = ae/b)$$

Описание приема почти дословно воспроизводит описание аналогичного приема для характеристики "нормализация". Для удобства чтения повторим текст полностью.

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. В заменяемой части рассматривается вхождение x12 двуместной операции x13. В нашем примере - операции ah/g . Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x13 указанную выше первую дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается ее заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок x13. Рассматривается вхождение x20 корневого операнда терма x19, представляющее собой двуместную операцию от переменных x22 и x23. Находится единица E этой операции. В нашем примере x19 - " $(d/e)/a$ "; переменная x22 - d , переменная x23 - e . Проверяется, что другой корневой операнд терма x19 представляет собой переменную x25. В нашем примере - a .

Если символ x13 коммутативен, то переменной x26 присваивается произвольный корневой операнд операции x12, иначе - операнд, имеющий тот же номер,

что и операнд x_{19} операции x_{20} . В нашем примере x_{26} - вхождение термина ah . Переменной x_{27} присваивается символ по вхождению x_{26} .

Проверяется, что x_{27} - символ коммутативной операции. Рассматривается вхождение x_{28} операнда операции x_{26} , представляющее собой переменную x_{29} , имеющую более одного вхождения в заменяемую часть x_{10} . В нашем случае - переменная h . Проверяется, что каждое вхождение переменной x_{29} в терм x_{10} является операндом операции x_{27} , являющейся, в свою очередь, операндом операции x_{13} , отличным от того, по которому эта операция имеет единицу E . Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x_{27} указанную выше вторую дополнительную теорему. Переменной x_{35} присваивается заменяемая часть этой теоремы. В нашем примере - $e \cdot (a/b)$. Проверяется, что она имеет заголовок x_{27} . Переменной x_{36} присваивается заменяющая часть дополнительной теоремы. В нашем случае - ae/b . Проверяется, что она имеет заголовок x_{13} . Проверяется, что число переменных термина x_{35} равно 3, число корневых операндов - 2. Переменной x_{37} присваивается неоднобуквенный операнд термина x_{35} . Другой операнд - переменная x_{39} . В нашем примере - e . Проверяется, что число корневых операндов термина x_{36} равно 2. Переменной x_{40} присваивается вхождение того из них, который имеет заголовок x_{27} . В нашем примере - ae . Проверяется, что одним из операндов вхождения x_{40} служит переменная x_{39} , а другим - некоторая переменная, которая присваивается переменной x_{44} . В нашем примере - a . Операнд вхождения x_{36} , отличный от x_{40} , присваивается переменной x_{41} . Проверяется, что по вхождению x_{41} расположена переменная, которая присваивается переменной x_{45} . В нашем примере - b . Проверяется, что переменная x_{45} входит в подтерм x_{37} . Переменной x_{41} присваивается тот операнд вхождения x_{36} , по которому операция x_{13} имеет единицу. В нашем примере - операнд b . Переменной x_{47} присваивается вхождение операнда вхождения x_{12} , отличного от x_{26} . В нашем примере - знаменатель b . Переменной x_{48} присваивается та из переменных x_{23} , x_{22} - операндов термина x_{20} - по которой операция x_{13} не имеет единицы. В нашем примере - d .

Переменной x_{49} присваивается заменяющий терм первой дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет заголовок x_{13} . Переменной x_{50} присваивается тот корневой операнд термина x_{49} , который расположен так же, как операнд x_{20} операции x_{19} . В нашем примере - операнд d . Проверяется, что по вхождению x_{50} располагается переменная x_{48} . Переменной x_{51} присваивается другой корневой операнд термина x_{49} , переменной x_{52} - заголовок этого операнда. В нашем примере x_{51} - " ae ". Проверяется, что символ x_{52} коммутативен.

Проверяется избыточность ввода дополнительной переменной: если по вхождению x_{47} располагается операция x_{52} , имеющая своим операндом переменную, то проверяется, что эта переменная не располагается в заменяемом терме x_{10} так же, как будет расположена дополнительная переменная.

Выбирается переменная x_{53} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная k . Рассматриваются всевозможные вхождения v_1 в заменяемый терм x_{10} переменной x_{29} , и определяются вхождения v_2 , операндом которых служит v_1 , вхождения v_3 , операндом которых служит v_2 , и всевозможные отличные от v_2 вхождения v_4 операндов вхождения v_3 . Переменной

x54 присваивается список вхождений v_4 . В нашем примере x54 - вхождения переменных g, i, j . Проверяется, что различные вхождения списка x54 не подчинены друг другу. Переменной x56 присваивается результат замены вхождений x54 подтермов t на термы "x52(x53, t)". В нашем примере - замены g на kg , i на ki и j на kj . Переменной x57 присваивается результат замены в подтерме x37 переменных x44 и x45 на x29 и x53. В нашем случае - " h/k ". Переменной x58 присваивается результат подстановки терма x57 вместо переменной x29 в терм x11. В нашем примере - "пропорцнаборы($(d, e, f), (a/g, b/i, c/j)$)". Проверяется, что антецеденты первой дополнительной теоремы включаются в список утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. выражения x19, а антецеденты второй - утверждения x35. Переменной x59 присваивается набор результатов подстановки терма x57 вместо переменной x29 в антецеденты исходной теоремы. Переменной x60 присваивается равенство выражений x58 и x56, ориентированное так же, как в исходной теореме. Список x59 пополняется утверждениями, необходимыми для сопровождения по о.д.з. равенства x60, и обрабатывается оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x60. Затем создается импликация с антецедентами x59 и консеквентом x60. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

Склейка двух теорем

1. Попытка склеить две эквивалентности общей стандартизации, отличающиеся заменяющими частями.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bd}(b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow 0 < d/b \leftrightarrow 0 < bd)$$

из теоремы

$$\forall_{ac}(0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow 0 < c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bd}(b < 0 \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow d < 0)$$

Переменной x10 присваивается заменяющий терм, переменной x11 - заменяемый. В списке вывода находится теорема x13, отличная от исходной теоремы и имеющая характеристику вида "общнорм(N)". Переменной x15 присваивается направление замены N . В нашем примере x13 - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x17 присваивается заменяемый терм дополнительной теоремы. Проверяется, что его длина равна длине терма x11. Переменной x11 присваивается связывающая приставка исходной теоремы. Проверяется, что она включается в параметры терма x11. Аналогично, переменной x19 присваивается связывающая приставка дополнительной теоремы, и проверяется, что она включается в параметры терма x17. Определяется подстановка S вместо переменных x18, переводящая терм x11 в терм x17. Проверяется, что она подставляет вместо переменных x18 различные переменные. Переменной x23 присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедента исходной

теоремы, обработанных оператором "станд". Переменной x24 присваивается набор антецедентов дополнительной теоремы, обработанных оператором "станд". Переменной x25 присваивается разность списков x23 и x24, переменной x26 - разность списков x24 и x23, переменной x27 - пересечение списков x23 и x24. Проверяется, что списки x25 и x26 одноэлементны. В нашем примере x25 состоит из утверждения " $0 < b$ ", x26 - из утверждения " $b < 0$ ". Список x27 состоит из утверждений " b - число", " d - число". Определяется результат x28 применения подстановки S к терму x10. В нашем примере он имеет вид " $0 < d$ ". Рассматриваются конъюнкция содержимого набора x25 и утверждения x28, а также конъюнкция содержимого набора x26 и заменяющего термина дополнительной теоремы. Переменной x29 присваивается дизъюнкция этих двух конъюнкций. В нашем примере она имеет вид " $0 < b \ \& \ 0 < d \ \vee \ b < 0 \ \& \ d < 0$ ". Переменной x30 присваивается задача на описание с посылками x27, единственным условием которой является утверждение x29. Цели задачи "свертка", "и", "редакция". Переменной x31 присваивается ответ задачи x30. В нашем примере он имеет вид " $0 < bd$ ". Проверяется, что утверждение x31 элементарно. Переменной x32 присваивается дизъюнкция содержимых списков x25 и x26. В нашем случае - " $0 < b \ \vee \ b < 0$ ". Создается задача на описание x33 с посылками x27 и единственным условием x32. Цели - "свертка", "и", "редакция". Ответ задачи x33 присваивается переменной x34. В нашем примере он имеет вид " $\neg(b = 0)$ ". Проверяется, что утверждение x34 элементарно. Создается импликация, антецедентами которой являются утверждения списка x27 и утверждение x34, а консеквентом - эквивалентность утверждений x17 и x31. Она регистрируется в списке вывода. Обе исходных теоремы в этом списке сохраняются.

2. Склейка двух импликаций, отличающихся альтернативными антецедентами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abAB}(\neg(A = B) \ \& \ a\text{-число} \ \& \ b\text{-число} \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \rightarrow \ a\text{вектор}(AB) = b\text{вектор}(AB) \leftrightarrow a = b)$$

из теоремы

$$\forall_{abAB}(\neg(A = B) \ \& \ a\text{-число} \ \& \ b\text{-число} \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ 0 \leq b \ \rightarrow \ a\text{вектор}(AB) = b\text{вектор}(AB) \leftrightarrow b = a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abAB}(\neg(A = B) \ \& \ a\text{-число} \ \& \ b\text{-число} \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ a \leq 0 \ \rightarrow \ a\text{вектор}(AB) = b\text{вектор}(AB) \leftrightarrow b = a)$$

Переменной x10 присваивается консеквент, переменной x11 - список антецедентов. В списке вывода находится теорема x13, отличная от исходной, не помеченная символом "исключение" и имеющая ту же текущую характеристику x7, что исходная теорема. В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x15 присваивается список антецедентов дополнительной теоремы, переменной x16 - ее консеквент. Проверяется, что длины термов x10 и x16 равны. Переменной x17 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не встречающиеся в исходной теореме. В нашем примере x17 имеет вид:

$$\forall_{cdef}(\neg(e = f) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ c \leq 0 \rightarrow \text{свектор}(ef) = \text{двектор}(ef) \leftrightarrow d = c)$$

Переменной x18 присваивается консеквент теоремы x17, переменной x19 - его параметры. Процедура "унификация" определяет подстановку S вместо переменных x19, переводящую терм x18 в терм x10. Проверяется, что эта подстановка осуществляет переобозначение переменных и не отождествляет их. Переменной x22 присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x17. Переменной x23 присваивается пересечение списковой x11 и x22. Проверяется, что оно непусто. Переменной x24 присваивается разность списков x11 и x23, переменной x25 - разность списков x22 и x23. Проверяется, что хотя бы один из списков x24, x25 одноэлементный. Переменной x26 присваивается элемент того из списков, который одноэлементный (при прочих равных условиях - элемент списка x24), а переменной x27 - другой список. В списке x27 выбирается элемент x28, параметры которого такие же, как у утверждения x26. В нашем примере x27 состоит из единственного утверждения " $b \leq 0$ ", x26 имеет вид " $0 \leq b$ ". Переменной x29 присваивается объединение списка x23 и отличных от x28 элементов списка x27. Переменной x30 присваивается дизъюнкция утверждений x26 и x28, переменной x31 - результат обработки этой дизъюнкции относительно посылок x29 оператором "нормили". В нашем примере x31 имеет вид " $b - \text{число}$ ". Проверяется, что утверждение x31 элементарно. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x29 и утверждение x31, а консеквентом - утверждение x10. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Если оба списка x24, x25 одноэлементные, то склеенные теоремы помечаются символом "исключение".

3. Склейка двух эквивалентностей для конъюнкций, отличающихся альтернативными членами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow a^b = c^b \leftrightarrow a = c \vee a = -c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow a^b = c^b \ \& \ 0 \leq ac \leftrightarrow a = c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bce}(\neg(b = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow c^b = e^b \ \& \ ce \leq 0 \leftrightarrow c = -e)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок "и", и переменной x11 присваивается набор конъюнктивных членов. Проверяется, что он двухэлементный. Выбирается элемент x12 пары x11. В нашем примере - $a^b = c^b$. Переменной x13 присваивается список параметров терма x12. Проверяется, что он включает все переменные исходной теоремы. Переменной x14 присваивается другой элемент пары x11. В нашем примере - " $0 \leq ac$ ". Проверяется, что терм x14 содержит не все переменные теоремы. В

списке вывода выбирается теорема x16, отличная от исходной теоремы, имеющая характеристику "общнорм(N)", причем такая, что ее заменяемая часть - конъюнкция двух утверждений, длина одного из которых равна длине терма x12. Это утверждение присваивается переменной x22. В нашем примере x16 - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x23 присваивается список параметров терма x22. Проверяется, что он включает все переменные дополнительной теоремы. Определяется подстановка S вместо переменных x23, переводящая терм x22 в x12. Переменной x25 присваивается результат применения подстановки S к дополнительной теореме. В нашем примере получаем теорему:

$$\forall_{bac}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow a^b = c^b \ \& \ ac \leq 0 \leftrightarrow a = -c)$$

Переменной x27 присваивается заменяемый терм теоремы x25, переменной x28 - набор конъюнктивных членов утверждения x27. Проверяется, что x12 входит в набор x28, и переменной x29 присваивается другой элемент набора x28. В нашем примере - " $ac \leq 0$ ". Переменной x30 присваивается заменяющий терм исходной теоремы, переменной x31 - заменяющий терм теоремы x25. Проверяется, что результаты обработки их оператором "станд" различны. Переменной x32 присваивается дизъюнкция утверждений x14 и x29. В нашем примере она имеет вид " $0 \leq ac \vee ac \leq 0$ ". Проверяется, что результаты x33 и x34 обработки оператором "станд" антецедентов исходной теоремы и теоремы x25 совпадают. Проверяется, что дизъюнкция x32 является следствием утверждений x33 (используется задача на доказательство). Переменной x36 присваивается эквивалентность утверждения x12 дизъюнкции утверждений x30 и x31. Затем создается импликация с антецедентами x33 и консеквентом x36, которая обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Вывод теоремы путем доказательства гипотезы

1. Получение из эквивалентности, сворачивающей дизъюнкцию двух элементарных утверждений в одно, эквивалентности свертки конъюнкции двух утверждений в одно.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \neg(a = b) \ \& \ a \leq b \leftrightarrow a < b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a < b \vee a = b \leftrightarrow a \leq b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок "или". Переменной x11 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что она элементарна. Переменной x12 присваивается набор дизъюнктивных членов утверждения x10. Проверяется, что он двухэлементный и состоит из элементарных утверждений. Переменной x13 присваивается набор антецедентов теоремы. Переменной x14 присваивается один из элементов пары x13, переменной x15 - другой. В нашем примере x14 - утверждение " $a < b$ ", x15 - " $a = b$ ". Решается задача на доказательство отрицания утверждения x15,

посылками которой служат утверждения списка x13 и утверждение x14. Вводится сильный ограничитель трудоемкости. Если получается ответ "истина", то создается импликация с антецедентами x13, консеквентом которой служит эквивалентность конъюнкции утверждений x11 и отрицания x15 утверждению x14. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Замена переменных в теореме

1. Использование параметрического описания для исключения атомарных выражений - случай, когда заменяющая часть содержит переменные атомарного выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c(\text{Вектор}(c) \rightarrow \text{длина}(c) = 0 \leftrightarrow c = \text{вектор}0)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(ab)) = 0 \leftrightarrow a = b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она элементарна. Переменной x11 присваивается заменяющая часть, переменной x12 - список антецедентов. В утверждении x10 выбирается вхождение x13 неоднобуквенного подтерма x14, отличного от всего терма x10. В нашем примере - подтерма "вектор(ab)". Проверяется, что x14 - атомарное выражение (тип значения хотя бы одного из операндов отличен от типа значения самого выражения). Переменной x15 присваивается заголовок терма x14 (в нашем примере - "вектор"), переменной x16 - список его параметров. Проверяется, что каждый из параметров x16 встречается в терме x10 только внутри подтерма, равного x14. Переменной x18 присваивается тип значения выражений с заголовком x15. В нашем примере - "Вектор". Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по x18 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x21 присваивается результат переобозначения в дополнительной теореме переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере получаем теорему:

$$\forall_c(\text{Вектор}(c) \leftrightarrow \exists_{de}(d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ c = \text{вектор}(de)))$$

Переменной x22 присваивается вхождение консеквента теоремы x21. Проверяется, что левая часть эквивалентности x22 имеет заголовок x18, а правая часть - заголовок "существует". Переменной x24 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. Переменной x25 присваивается переменная - корневой операнд левой части эквивалентности x22. В нашем примере - переменная c. Среди утверждений x24 выбирается равенство x26 с переменной x25 в левой части. Проверяется, что заголовок правой части этого равенства - символ x15. Переменной x27 присваивается сама эта правая часть. Определяется подстановка S вместо переменных x16, переводящая терм x14 в

терм x_{27} . Переменной x_{29} присваивается список всех антецедентов исходной теоремы, содержащих переменные списка x_{16} . Проверяется, что эти антецеденты других переменных не содержат. Переменной x_{30} присваивается список всевозможных результатов применения подстановки S к утверждениям x_{29} , для которых не удастся усмотреть, что они суть следствия утверждений x_{24} . Проверяется, что список x_{30} пуст. Переменной x_{32} присваивается результат замены в x_{10} всех вхождений терма x_{14} на терм x_{25} . В нашем примере он имеет вид "длина(c) = 0". Переменной x_{33} присваивается результат отбрасывания в списке x_{12} утверждений x_{29} и добавления левой части эквивалентности x_{22} . В нашем примере список x_{33} состоит из единственного утверждения "Вектор(c)". Определяется результат x_{34} применения подстановки S к терму x_{11} . В нашем примере он имеет вид " $d = e$ ". Переменной x_{35} присваивается результат объединения разности списков x_{12} и x_{29} , списка x_{24} с отброшенным равенством x_{26} и утверждения x_{34} . Выражение x_{27} упрощается относительно посылок x_{35} при помощи задачи на преобразование; результат присваивается переменной x_{37} . В нашем примере получается выражение "вектор0". Проверяется, что x_{37} не имеет параметров списка x_{16} . Переменной x_{38} присваивается равенство выражений x_{25} и x_{37} . При помощи задачи на доказательство проверяется, что x_{32} - следствие утверждений x_{33} и равенства x_{38} . Затем создается импликация с антецедентами x_{33} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{32} и x_{38} . Она регистрируется в списке вывода.

2. Использование параметрического описания для исключения атомарных выражений - случай, когда заменяющая часть не содержит переменных атомарного выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(c) \rightarrow ac = bc \leftrightarrow a = b \vee c = \text{вектор}0)$$

из теоремы

$$\forall_{abAB}(\neg(A = B) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow a \cdot \text{вектор}(AB) = b \cdot \text{вектор}(AB) \leftrightarrow a = b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_{22} присваивается вхождение консеквента теоремы x_{21} . Проверяется, что левая часть эквивалентности x_{22} имеет заголовок x_{18} , а правая часть - заголовок "существует". Переменной x_{24} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. Переменной x_{25} присваивается переменная - корневой операнд левой части эквивалентности x_{22} . В нашем примере - переменная c . Среди утверждений x_{24} выбирается равенство x_{26} с переменной x_{25} в левой части. Проверяется, что заголовок правой части этого равенства - символ x_{15} . Переменной x_{27} присваивается сама эта правая часть. Определяется подстановка S вместо переменных x_{16} , переводящая терм x_{14} в

терм x_{27} . Переменной x_{29} присваивается список всех антецедентов исходной теоремы, содержащих переменные списка x_{16} . Проверяется, что эти антецеденты других переменных не содержат. Переменной x_{30} присваивается список всевозможных результатов применения подстановки S к утверждениям x_{29} , для которых не удается усмотреть, что они суть следствия утверждений x_{24} .

Дальше начинаются отличия от предыдущего приема. Проверяется, что список x_{30} одноэлементный. В нашем примере он состоит из утверждения " $\neg(d = e)$ ". Проверяется, что переменные x_{16} не встречаются в утверждении x_{11} . Переменной x_{31} присваивается отрицание утверждения x_{30} . Переменной x_{33} присваивается результат замены в терме x_{10} вхождений подтерма x_{14} на терм x_{25} . В нашем примере он имеет вид " $ac = bc$ ". Переменной x_{34} присваивается результат объединения разности списков x_{12} и x_{29} , списка x_{24} с отброшенным равенством x_{26} и утверждения x_{31} . Выражение x_{27} упрощается относительно посылок x_{34} при помощи задачи на преобразование; результат присваивается переменной x_{36} . В нашем примере получается выражение "вектор0". Проверяется, что x_{36} не имеет параметров списка x_{16} . Переменной x_{37} присваивается равенство выражений x_{25} и x_{36} . Переменной x_{38} присваивается результат добавления к разности списков x_{12} и x_{29} левой части эквивалентности x_{22} , переменной x_{39} - результат добавления к x_{38} равенства x_{37} . При помощи задачи на доказательство проверяется, что x_{33} - следствие утверждений x_{39} . Затем создается импликация с антецедентами x_{38} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждения x_{33} дизъюнкции утверждений x_{11} и x_{37} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Переформулировка дополнительной теоремы с уменьшением глубины переменных

1. Переформулировка утверждения типа транзитивности с уменьшением глубины переменных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(\neg(d = e) \ \& \ \neg(a \in \text{прямая}(de)) \ \& \ \neg(b \in \text{прямая}(de)) \ \& \ \neg(c \in \text{прямая}(de)) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \text{однасторона}(a, b, \text{прямая}(de)) \ \& \ \text{однасторона}(b, \text{прямая}(de)) \rightarrow \text{однасторона}(a, c, \text{прямая}(de)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(C = D) \ \& \ \neg(A \in \text{прямая}(CD)) \ \& \ \neg(B \in \text{прямая}(CD)) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ B \in \text{плоскость}(ACD) \rightarrow \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \leftrightarrow \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(AB)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \text{непересек}(\text{отрезок}(AB), \text{прямая}(DE)) \ \& \ \text{непересек}(\text{отрезок}(BC), \text{прямая}(DE)) \rightarrow \text{непересек}(\text{отрезок}(AC), \text{прямая}(DE)))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяющий терм, переменной x_{11} - его параметры. В нашем примере x_{10} - правая часть эквивалентности. Проверяется, что x_{11} - список всех переменных теоремы. Переменной x_{12} присваивается заменяемый терм. Проверяется, что утверждения x_{10} и x_{12} элементарны и

бесповторны. Проверяется также, что глубина вхождения каждой переменной списка x_{11} в терм x_{10} не меньше глубины его вхождения в терм x_{12} , причем для хотя бы одной переменной - строго больше. Переменной x_{13} присваивается список подтермов утверждения x_{10} , имеющих максимальную сложность. В этом списке выбирается подтерм x_{14} ; переменной x_{15} присваивается его заголовок. В нашем примере x_{14} - "отрезок(AB)". По символу x_{15} справочник поиска теорем "перех" определяет указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{18} присваивается вхождение ее консеквента. Проверяется, что по этому вхождению расположен заголовок терма x_{10} . Переменной x_{19} присваивается список номеров существенных антецедентов дополнительной теоремы. Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x_{20} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{abcde}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \neg(d = e) \ \& \ \text{непересек}(\text{отрезок}(ab), \text{прямая}(de)) \ \& \ \text{непересек}(\text{отрезок}(bc), \text{прямая}(de)) \rightarrow \text{непересек}(\text{отрезок}(ac), \text{прямая}(de)))$$

Переменной x_{21} присваивается список всех антецедентов теоремы x_{20} , переменной x_{22} - подсписок ее существенных антецедентов. Проверяется, что каждое утверждение списка x_{22} имеет тот же заголовок, что и терм x_{10} (в нашем примере - "непересек"), причем содержит символ x_{15} (в нашем примере - "отрезок"). Переменной x_{23} присваивается результат переобозначения переменных исходной теоремы на переменные, не встречающиеся как в исходной теореме, так и в теореме x_{20} . Переменной x_{24} присваивается результат переобозначения переменных исходной теоремы на переменные, не встречающиеся как в исходной теореме, так и в теоремах x_{20} , x_{23} .

В нашем примере x_{23} получается из исходной теоремы переобозначением переменных A, B, C, D на f, g, h, i ; x_{24} - переобозначением этих же переменных на j, k, l, m .

Переменной x_{27} присваивается заменяющий терм теоремы x_{23} , переменной x_{28} - заменяющий терм теоремы x_{24} , переменной x_{29} - консеквент теоремы x_{20} , переменной x_{30} - параметры термов x_{10} , x_{27} , x_{28} , x_{29} и термов пары x_{22} . В нашем примере x_{27} имеет вид "непересек(прямая(hi) отрезок(fg))", переменная x_{28} - "непересек(прямая(lm) отрезок(jk))", переменной x_{29} - "непересек(отрезок(ac) прямая(de))". Список x_{30} состоит из переменных $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, A, B, C, D$.

Определяется подстановка S вместо переменных x_{30} , унифицирующая одновременно пары термов x_{10} и x_{29} , x_{27} и первого терма пары x_{22} , x_{28} и второго терма пары x_{22} . Переменной x_{32} присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям списка x_{21} , не вошедшим в список x_{22} , а также к антецедентам исходной теоремы и теорем x_{23} , x_{24} . Переменной x_{35} присваивается результат применения подстановки S к заменяемой части теоремы x_{23} , переменной x_{36} - результат применения этой подстановки к заменяемой части теоремы x_{24} . Утверждения x_{35} , x_{36} добавляется к списку x_{32} . Переменной x_{37} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_{12} . Переменной x_{38} присваивается результат обработки списка x_{32} процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{37} . Затем создается

импликация с антецедентами x38 и консеквентом x37. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.60 Характеристика "описатель"

Характеристикой "описатель(N)" снабжается тождество, используемое для перехода к более простым описателям либо для исключения описателей. N - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Вывод из определения класса условия принадлежности классу.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{afx}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow x \in \text{образ}(f, a) \leftrightarrow \exists_y(y \in a \ \& \ x = f(y)))$$

из теоремы

$$\forall_{af}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{set}_x(\exists_y(y \in a \ \& \ x = f(y))) = \text{образ}(f, a))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок "класс". Переменной x11 присваивается заменяющая часть, переменной x12 - связывающая приставка описателя "класс". Переменной x13 присваивается условие принадлежности набора x12 множеству x11. Если связывающая приставка состоит из единственной переменной, то в левой части принадлежности расположена переменная, иначе - выражение "набор(...)", перечисляющее переменные связывающей приставки. Создается импликация, антецеденты которой те же, что у исходной теоремы, а консеквент - эквивалентность x13 и последнего операнда описателя "класс".

2. Попытка подставить константу вместо функциональной переменной для варьирования тождества, исключаящего описатель.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(\neg(c = \emptyset) \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow b = \bigcap_{d, d \in c} b)$$

из теоремы

$$\forall_f(\neg(\text{Dom}(f) = \emptyset) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(f) \rightarrow \text{set}_a(\forall_x(x \in \text{Dom}(f) \rightarrow a \in f(x))) = \bigcap(f))$$

В антецедентах теоремы находится утверждение с заголовком "функция". Переменной x13 присваивается корневой операнд этого утверждения. Проверяется, что он представляет собой переменную. В нашем примере - "f". Проверяется, что в заменяемой части встречается подвыражение вида "значение(x13 ...)". Оператор "подстконст" определяет результат x14 подстановки в теорему константной функции в качестве x13. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{bc}(c - \text{set} \ \& \ \neg(\text{Dom}(\lambda_d(b, d \in c)) = \emptyset) \ \& \ \lambda_d(b, d \in c) - \text{функция} \ \& \\ \text{семействомножеств}(\lambda_d(b, d \in c)) \rightarrow \text{set}_a(\forall_x(x \in \text{Dom}(\lambda_d(b, d \in c)) \rightarrow a \in b)) = \\ \bigcap_{d, d \in c} b)$$

Антецеденты теоремы x14 обрабатываются оператором "нормантецеденты" относительно параметров ее консеквента. Значением переменной x14 становится измененная версия теоремы. Эта теорема обрабатывается оператором "Нормтеорема", при для упрощения используются все уже выведенные в том же цикле другие теоремы. Конъюнктивные члены результата обработки регистрируются в списке вывода.

3. Попытка подставить тождественную функцию вместо функциональной переменной для варьирования тождества, исключаяющего описатель.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq b \rightarrow a = \text{образ}(\lambda_c(c, c \in b), a))$$

из теоремы

$$\forall_{af}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{set}_x(\exists_y(y \in a \ \& \ x = f(y))) = \\ \text{образ}(f, a))$$

Проверяется, что консеквент - равенство. Переменной x11 присваивается набор антецедентов. В нем находится утверждение с заголовком "функция". Переменной x13 присваивается корневой операнд этого утверждения. Проверяется, что он представляет собой переменную. В нашем примере - переменную f . Проверяется, что в заменяемой части встречается выражение вида "значение(x13 ...)". Проверяется, что среди антецедентов нет других утверждений вида "функция(...)". Оператор "подсттожд" определяет результат x14 подстановки в теорему тождественной функции в качестве x13. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ \lambda_c(c, c \in b) - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(\lambda_c(c, c \in b)) \rightarrow \\ \text{set}_x(\exists_y(y \in a \ \& \ x = y)) = \text{образ}(\lambda_c(c, c \in b), a))$$

Антецеденты теоремы x14 обрабатываются оператором "нормантецеденты" относительно параметров ее консеквента. Значением переменной x14 становится измененная версия теоремы. Эта теорема обрабатывается оператором "Нормтеорема", при для упрощения используются все уже выведенные в том же цикле другие теоремы. Конъюнктивные члены результата обработки регистрируются в списке вывода.

4. Вывод условия непустоты константного множества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\neg(\mathbb{N} = \emptyset)$$

из теоремы

$$\mathbb{N} = \text{set}_n(n - \text{натуральное})$$

Проверяется, что исходная теорема имеет своим заголовком символ "равно". Переменной x9 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок "класс". Переменной x10 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что она элементарна. При помощи задачи на доказательство устанавливается истинность утверждения существования таких значений переменных связывающей приставки описателя "класс", при которых выполняется условие под описателем. Затем выводится отрицание равенства выражения x10 пустому множеству.

5. Переход к подмножеству операндов в операции над конечным семейством.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdfn}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ 0 \leq d - c \ \& \ 0 \leq c \ \& \ 0 \leq f \ \& \ f = n - d \rightarrow \sum_{k=c}^d (a^k b^{n-k} C_n^k) = (a + b)^n - \sum_{g=0}^{c-1} (a^g b^{n-g} C_n^g) - \sum_{g=0}^{f-1} (a^{n-g} b^g C_n^g))$$

из теоремы

$$\forall_{abn}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow \sum_{k=0}^n (a^k b^{n-k} C_n^k))$$

Теорема создается специально для приема, который будет "сворачивать" конечную сумму даже в том случае, когда пределы суммирования отличаются от "стандартных" на небольшое фиксированное число слагаемых. Эти слагаемые вычитаются в конечных суммах правой части, причем каждая из таких конечных сумм разворачивается приемом в обычную сумму.

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - список антецедентов, переменной x12 - заменяющая часть. Переменной x13 присваивается заголовок терма x10. В нашем примере - "сумма всех". Проверяется, что число корневых операндов терма x10 равно 1. Справочник "развертка" усматривает, что x13 - обобщение двуместной коммутативно-ассоциативной операции x14 (в нашем примере - "плюс") на наборы произвольной длины. Определяется тип x16 значений операции x15, и переменной x17 присваивается результат обращения к справочнику "перегруппировка" для символа x16. Проверяется, что x17 - тройка, первым элементом которой служит символ x14. Переменной x18 присваивается второй элемент тройки (в нашем примере - "минус"). Переменной x19 присваивается входение корневого операнда терма x10. Проверяется, что по входению x19 расположен символ "отображение". Переменной x20 присваивается связывающая приставка описателя x19. Проверяется, что она одноэлементна, и переменной x21 присваивается ее элемент. Переменной x22 присваивается входение предпоследнего операнда описателя. Проверяется, что по этому входению расположена конъюнкция трех утверждений, имеющих вид "целое(i)", "A ≤ i", "i ≤ B". Здесь i - переменная x21. Выражения A, B присваиваются выражениям x27 и x28. В нашем примере это 0 и n. Переменной x29 присваивается список из пяти переменных, не входящих в исходную теорему. В нашем примере это переменные c, d, e, f, g. Переменной x30 присваивается последняя из них. В нашем случае - g. Переменной x31 присваивается последний операнд описателя "отображение". В нашем примере он имеет вид $a^k b^{n-k} C_n^k$.

Проверяется, что терм х31 имеет хотя бы один общий параметр с выражениями х27, х28. Переменной х32 присваивается результат подстановки в х31 суммы выражений х27 и х30 вместо переменной х21. В нашем примере - выражения $0 + g$ вместо k . Переменной х33 присваивается результат подстановки в х31 разности выражений х28 и х30 вместо х21. В нашем примере - выражения $n - g$ вместо k .

Переменной х34 присваивается результат соединения операцией х14 (в нашем примере - сумма) выражения х12 и взятых со знаком х18 (в нашем случае - "минус") результатов замены в терме х10 описателя "отображения" на две версии такого же описателя, в первой из которых общий член равен х32, а во второй - х33. Соответственно, области изменения индекса в первом от 0 до $e - 1$, а во втором - от 0 до $f - 1$. Переменной х35 присваивается равенство, в левой части которого расположен результат замены в терме х10 описателя "отображение" на версию с измененными пределами варьируемой переменной: теперь она изменяется от c до d . В правой части равенства х35 расположено выражение х34. В нашем примере х35 имеет вид:

$$\sum_{k=c}^d (a^k b^{n-k} C_n^k) = (a+b)^n - \sum_{g=0}^{e-1} (a^{0+g} b^{n-(0+g)} C_n^{(0+g)}) - \sum_{g=0}^{f-1} (a^{n-g} b^{n-(n-g)} C_n^{n-g})$$

Переменной х36 присваивается результат добавления к списку х11 утверждений "целое(c)", "целое(d)", " $0 \leq d - c$ ", " $0 \leq e$ ", " $0 \leq f$ ". Список х36 обрабатывается процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма х35. Переменной х37 присваивается пара $(c - 0, n - d)$. Элементы этой пары упрощаются относительно посылок х36 задачами на преобразование. В результате значением переменной х37 становится пара " $(c, n - d)$ ". Переменной х38 присваивается терм "см(целое(e) целое(f))". Переменной х40 присваивается пара результатов упрощения общих членов семейств в правой части равенства х35 относительно списка х36, пополненного утверждениями из контекстов вхождений этих общих членов. В нашем примере х40 оказывается парой выражений " $a^g b^{n-g} C_n^g$ ", " $a^{n-g} b^g C_n^g$ ". Эти выражения замещают в равенстве х35 соответствующие общие члены.

Переменной х39 присваивается пара (e, f) . Просматриваются расположенные на соответствующих позициях пар х39 и х37 элементы - некоторая переменная x и терм t . Если t - переменная, то в списке х36, в равенстве х35 и в терме х38 происходит подстановка t вместо x . В нашем примере - подстановка c вместо e . Если t - не переменная, то к списку х36 добавляется равенство x и t . В нашем примере - равенство " $f = n - d$ ".

В заключение создается импликация с антецедентами х36 и консеквентом х35. Она регистрируется в списке вывода с характеристиками "развернуть(второй-терм)" и х38.

6. Переход к функциональной переменной при наличии подутверждения - принадлежности набора переменной (общий случай).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(\text{комплформа}(\text{set}_{bc}(a(b, c) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число})) = \text{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ a(\text{Re}(z), \text{Im}(z))))$$

из теоремы

$$\forall_A(A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{комплформа}(A) = \text{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ (\text{Re}(z), \text{Im}(z)) \in A))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Проверяется, что он не содержит символа "существует". В x_9 находится вхождение x_{10} символа "принадлежит". Проверяется, что левая часть принадлежности имеет заголовок "набор", правая - переменная. Эта переменная присваивается переменной x_{11} . В нашем примере - "A". Переменной x_{12} присваивается набор операндов подтерма "набор". В нашем примере - "Re(z)", "Im(z)". В x_8 находится включение x_{13} с переменной x_{11} в левой части и прямым произведением в правой. Переменной x_{14} присваивается набор операндов прямого произведения. В нашем примере - " \mathbb{R}, \mathbb{R} ". Проверяется, что длины наборов x_{12} и x_{14} равны. Переменной x_{15} присваивается результат отбрасывания в списке x_8 утверждения x_{13} и утверждения "множество(x_{11})". Проверяется, что в утверждениях x_{15} переменная x_{11} не встречается. Выбирается переменная x_{16} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{17} присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему и отличных от x_{16} . Длина этого списка такая же, как у x_{12} . В нашем примере x_{17} - переменные b, c .

Переменной x_{18} присваивается набор вхождения в терм x_9 подтермов вида "принадлежит(набор(...) x_{11})", у которых число операндов терма "набор(...)" равно длине набора x_{12} . В нашем примере этот набор одноэлементный. Переменной x_{19} присваивается список термов вида "значение(x_{16} набор(...))", у которых подтермы "набор(...)" суть первый операнды условий принадлежности из набора x_{18} . В нашем примере x_{19} состоит из единственного терма " $a(\text{Re}(z), \text{Im}(z))$ ". Переменной x_{20} присваивается результат замены в терме x_9 вхождений x_{18} на термы x_{19} . В нашем примере - "комплформа(A) = $\text{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ a(\text{Re}(z), \text{Im}(z)))$ ". Переменной x_{21} присваивается описатель "класс", связывающая приставка которого - x_{17} , а под ним расположена конъюнкция утверждения вида " $x_{16}(x_{17})$ " и всевозможных условий принадлежности переменных x_{17} соответствующим термам x_{14} . В нашем примере этот описатель имеет вид " $\text{set}_{bc}(a(b, c) \ \& \ b \in \mathbb{R} \ \& \ c \in \mathbb{R})$ ". Переменной x_{22} присваивается результат подстановки выражения x_{21} вместо переменной x_{11} в утверждение x_{20} . Затем создается импликация с антецедентами x_{15} и консеквентом x_{22} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

7. Переход к функциональной переменной при наличии подутверждения - принадлежности набора переменной (вырожденный случай).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(\text{комплформа}(\text{set}_{bc}(c = a(b) \ \& \ b - \text{число})) = \text{set}_z(a(\text{Re}(z)) = \text{Im}(z) \ \& \ z - \text{комплексное}))$$

из теоремы

$$\forall_A(A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{комплформа}(A) = \text{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ (\text{Re}(z), \text{Im}(z)) \in A))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Проверяется, что он не содержит символа "существует". В x_9 находится вхождение x_{10} символа "принадлежит". Проверяется, что левая часть принадлежности имеет заголовок "набор", правая - переменная. Эта переменная присваивается переменной x_{11} . В нашем примере - "A". Переменной x_{12} присваивается набор операндов подтерма "набор". В нашем примере - "Re(z)", "Im(z)". В x_8 находится включение x_{13} с переменной x_{11} в левой части и прямым произведением в правой. Переменной x_{14} присваивается набор операндов прямого произведения. В нашем примере - " \mathbb{R}, \mathbb{R} ". Проверяется, что длины наборов x_{12} и x_{14} равны. Переменной x_{15} присваивается результат отбрасывания в списке x_8 утверждения x_{13} и утверждения "множество(x_{11})". Проверяется, что в утверждениях x_{15} переменная x_{11} не встречается. Выбирается переменная x_{16} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{17} присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему и отличных от x_{16} . Длина этого списка такая же, как у x_{12} . В нашем примере x_{17} - переменные b, c .

Переменной x_{18} присваивается набор вхождения в терм x_9 подтермов вида "принадлежит(набор(...) x_{11})", у которых число операндов терма "набор(...)" равно длине набора x_{12} . В нашем примере этот набор одноэлементный.

Далее начинаются отличия. Проверяется, что набор x_{17} не менее чем двухэлементный. Переменной x_{19} присваивается вхождение в этот набор. В нашем примере - вхождение второго элемента c . Рассматриваются термы "набор(...)" - левые части принадлежностей списка x_{18} . Для каждого такого терма рассматривается равенство его корневого операнда, номер которого равен номеру вхождения x_{19} в список x_{17} , выражению "значение($x_{16} R$)", где R - набор оставшихся операндов терма "набор(...)". Все такие равенства образуют список x_{20} . В нашем примере этот список состоит из единственного равенства $\text{Im}(z) = a(\text{Re}(z))$. Переменной x_{21} присваивается результат замены вхождений x_{18} в терм x_9 на равенства x_{20} . В нашем примере получается: $\text{комплформа}(A) = \text{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ \text{Im}(z) = a(\text{Re}(z)))$. Пусть X - переменная списка x_{17} на вхождении x_{19} , Y - набор остальных переменных этого списка. Переменной x_{22} присваивается описатель "класс", связывающая приставка которого - x_{17} , а под ним расположена конъюнкция утверждения вида " $x_{16}(X) = Y$ " и всевозможных условий принадлежности переменных Y списка x_{17} соответствующим термам x_{14} . В нашем примере этот описатель имеет вид " $\text{set}_{bc}(c = a(b) \ \& \ b \in \mathbb{R})$ ". Переменной x_{23} присваивается результат подстановки в утверждение x_{21} вместо переменной x_{11} терма x_{22} . Затем создается импликация с антецедентами x_{15} и консеквентом x_{23} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

8. Попытка упростить заменяющее выражение, добавив к антецедентам необходимое условие непустоты класса.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acm}(m < 0 \& a - \text{число} \& c - \text{число} \& m - \text{целое} \& 0 \leq c - a \rightarrow \text{card}(\text{set}_n(m|n \& n - \text{целое} \& a \leq n \& n \leq c)) = 1 + [-c/m] + [a/m])$$

из теоремы

$$\forall_{acm}(m < 0 \& a - \text{число} \& c - \text{число} \& m - \text{целое} \rightarrow \text{card}(\text{set}_n(m|n \& n - \text{целое} \& a \leq n \& n \leq c)) = \max(1 + [-c/m] + [a/m], 0))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. В нем усматривается некорневое вхождение x11 описателя "класс". В нашем примере - "set_n(m|n & n - целое & a ≤ n & n ≤ c)". Проверяется, что заголовком утверждения под этим описателем не является квантор существования. Переменной x12 присваивается набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Проверяется, что все они элементарны. Переменной x13 присваивается связывающая приставка описателя. Переменной x14 присваивается список antecedентов теоремы, переменной x15 - объединение списков x14 и x12. Создается задача на исследование x16, посылками которой служат утверждения x15. Цели задачи - "косвнеизв", "неизвестные x13", "исключ x13", "известно". Цель "косвнеизв" указывает на получение неявного описания неизвестных. Задача x16 решается до максимального уровня x6. После этого в ее списке посылок находится утверждение x18, не содержащее параметров списка x13 и не входящее в набор x14. В нашем примере это утверждение "0 ≤ c - a". Проверяется, что комментарий (выводимо ...) к посылке x18 указывает на использование при получении x18 утверждений, содержащих параметры списка x13. Переменной x20 присваивается заменяющий терм теоремы. Переменной x21 присваивается результат добавления к набору x14 утверждения x18. Создается задача на преобразование x22, посылками которой служат утверждения x21, условием - выражение x20. Переменной x23 присваивается ответ задачи x22, решаемой до уровня 5. В нашем примере он имеет вид "(1 + [-c/m] + [a/m])". Проверяется, что длина данного ответа меньше длины терма x20. Создается импликация с antecedентами x21, консеквентом которой служит равенство выражения x10 и x23. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

9. Переход от параметрического описания класса к конечному списку.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{afn}(a - \text{слово} \& l(a) = n \& f - \text{функция} \& \{\lambda_i(a(i), i \in \{1, \dots, n\})\} \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{образ}(f, \{\lambda_i(a(i), i \in \{1, \dots, n\})\}) = \{\lambda_i(f(a(i)), i \in \{1, \dots, n\})\})$$

из теоремы

$$\forall_{fa}(a - \text{set} \& f - \text{функция} \& a \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{set}_x(\exists_y(y \in a \& x = f(y))) = \text{образ}(f, a))$$

Переменной x11 присваивается заменяемая часть. В ней усматривается вхождение x12 описателя "класс". В наше примере - описателя "set_x(∃_y(y ∈ a & x = f(y)))". Переменной x13 присваивается связывающая приставка описателя. Проверяется, что она одноэлементная и состоит из некоторой переменной X. Переменной x14 присваивается вхождение утверждения под описателем. Проверяется, что заголовком утверждения служит квантор существования. Переменной

x15 присваивается связывающая приставка квантора. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x16 присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная y . Переменной x17 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. Проверяется, что этот набор двухэлементный. В нем усматривается равенство x18 с переменной X в левой части. Переменной x19 присваивается правая часть равенства. В нашем примере - " $f(y)$ ". Переменной x20 присваивается другое утверждение набора x17. Проверяется, что оно имеет вид принадлежности переменной x16 некоторой переменной x21, являющейся параметром терма x11. В нашем примере x21 - переменная a . Проверяется, что переменная x21 не входит в равенство x18. Выбирается пара x22 переменных, не входящих в исходную теорему. По мере возможности, они трансформируются в переменные i, n . В нашем примере это возможно.

Переменной x23 присваивается выражение вида $\{\lambda_i(a(i), i \in \{1, \dots, n\})\}$. Здесь a - переменная x21. Переменной x24 присваивается результат подстановки в x19 вместо переменной x16 выражения "значение(x21 i)". В нашем случае x24 имеет вид " $f(a(i))$ ". Переменной x25 присваивается выражение вида $\{\lambda_i(f(a(i)), i \in \{1, \dots, n\})\}$. Здесь $f(a(i))$ - выражение x24.

Переменной x26 присваивается результат замены вхождения x12 в терм x11 на терм x25 и одновременной подстановки в оставшуюся часть терма x11 терма x23 вместо переменной x21. Переменной x27 присваивается результат подстановки в заменяющую часть теоремы терма x23 вместо переменной x21. Переменной x28 присваивается равенство выражений x27 и x26. Рассматривается набор результатов подстановки терма x23 вместо переменной x21 в antecedentes теоремы, и результат обработки его оператором "нормантецеденты" относительно параметров равенства x28 присваивается переменной x29. Переменной x30 присваивается результат добавления к списку x29 термов "слово(x21)", "равно(длинанабора(x21) n)". Затем создается импликация с antecedентами x30 и консеквентом x28, которая регистрируется в списке вывода.

10. Вывод импликации для условия принадлежности из параметрического описания класса.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{afy}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ y \in a \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow f(y) \in \text{образ}(f, a))$$

из теоремы

$$\forall_{af}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{set}_x(\exists_y(y \in a \ \& \ x = f(y))) = \text{образ}(f, a))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что он имеет заголовок "класс". Переменной x11 присваивается связывающая приставка описателя "класс". Проверяется, что она одноэлементна, и переменной x12 присваивается ее элемент. Проверяется, что заголовком утверждения под описателем класс является квантор существования; переменной x14 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. В наборе x14 находится равенство x15 с переменной x12 в левой части. Переменной x16

присваивается правая часть равенства. Переменной x17 присваивается конкатенация списка антецедентов исходной теоремы и отличных от x15 элементов списка x14. Создается импликация с антецедентами x17, консеквентом которой служит условие принадлежности выражения x16 заменяющей части исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Попытка использовать дополнительную эквивалентность для преобразования описателя

1. Попытка использовать декомпозирующую либо упрощающую эквивалентность для варьирования тождества, исключаящего описатель.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(\text{Dom}(b) = \text{Dom}(c) \ \& \ b - \text{функция} \ \& \ c - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(b) \ \& \ \text{семействомножеств}(c) \rightarrow \bigcup_{a,a \in \text{Dom}(c)}(b(a) \cup c(a)) = \bigcup(b) \cup \bigcup(c))$$

из теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(f) \rightarrow \bigcup(f) = \text{set}_x(\exists_y(y \in \text{Dom}(f) \ \& \ x \in f(y))))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Внутри него выбирается вхождение x11 символа "класс". Внутри описателя "класс" выбирается вхождение x12 неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - " $x \in f(y)$ ". Переменной x13 присваивается символ по вхождению x12. В нашем примере - символ "принадлежит". Проверяется, что x13 - предикатный символ. Справочник поиска теорем "упрощдн", "упрощкн", "упрощэкв" определяют по x13 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что эта теорема содержит лишь такие символы, которые встречаются в одном разделе с символами исходной теоремы. Проверяется наличие у дополнительной теоремы характеристики, заголовком которой служит один из символов "и", "или", "общнорм". Оператор "тождвывод" находит результат x18 преобразования вхождения x12 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "нормкласс". Если он не содержит описателя "класс", то регистрируется в списке вывода.

2. Попытка использовать декомпозирующую эквивалентность и подстановку константы для варьирования тождества, исключаящего описатель.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(d - \text{set} \ \& \ c - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(c) \rightarrow \bigcup_{a,a \in \text{Dom}(c)}(d \cap c(a)) = d \cap \bigcup(c))$$

из теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(f) \rightarrow \bigcup(f) = \text{set}_x(\exists_y(y \in \text{Dom}(f) \ \& \ x \in f(y))))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$$

Повторяются действия предыдущего пункта. Заметим, что дополнительная теорема теперь другая, хотя выбирается теми же средствами. Прием ориентирован на случай, когда результат x19 применения оператора "Нормтеорема" содержит описатель "класс". В нашем примере он имеет следующий вид:

$$\forall_{bc}(\text{Dom}(b) = \text{Dom}(c) \ \& \ b - \text{функция} \ \& \ c - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(b) \ \& \ \text{семействомножеств}(c) \rightarrow \bigcup_{a, a \in \text{Dom}(c)}(b(a) \cap c(a)) = \text{set}_x(\exists_y(x \in b(y) \ \& \ x \in c(y) \ \& \ y \in \text{Dom}(c))))$$

Проверяется, что x19 - кванторная импликация, причем число ее антецедентов с заголовком "функция" больше, чем у исходной теоремы. Выбирается антецедент импликации x19 с заголовком "функция"; переменной x21 присваивается его корневой операнд. В нашем примере - переменная b . Оператор "подстконст" определяет результат x22 подстановки в импликацию x21 константной функции, область определения которой та же, что была у b . Для обозначения значения этой функции используется новая переменная. В нашем примере x22 имеет вид:

$$\forall_{cde}(e - \text{set} \ \& \ \text{Dom}(\lambda_f(d, f \in e)) = \text{Dom}(c) \ \& \ \lambda_f(d, f \in e) - \text{функция} \ \& \ c - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(\lambda_f(d, f \in e)) \ \& \ \text{семействомножеств}(c) \rightarrow \bigcup_{a, a \in \text{Dom}(c)}(d \cap c(a)) = \text{set}_x(\exists_y(x \in d \ \& \ x \in c(y) \ \& \ y \in \text{Dom}(c))))$$

Теорема x22 обрабатывается оператором "Нормтеорема", причем при упрощениях разрешается использовать все уже имеющиеся в списке вывода теоремы. Проверяется, что результат не содержит символа "класс", и выполняется регистрация его в списке вывода.

3. Попытка упрощения операции над описателем "класс" с помощью параметрического описания подутверждения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{конечное}(a) \rightarrow \text{card}(\text{set}_{cd}(c < d \ \& \ c \in a \ \& \ d \in a)) = C_{\text{card}(a)}^2)$$

из теоремы

$$\forall_{an}(a - \text{set} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ 0 \leq n \rightarrow \text{card}(\text{set}_x(x - \text{set} \ \& \ x \subseteq a \ \& \ \text{card}(x) = n)) = C_{\text{card}(a)}^n)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ax}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow x - \text{set} \ \& \ x \subseteq a \ \& \ \text{card}(x) = 2 \leftrightarrow \exists_{ij}(i \in a \ \& \ j \in a \ \& \ i < j \ \& \ x = \{i, j\}))$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Внутри него выбирается вхождение x11 символа "класс". Внутри описателя "класс" выбирается вхождение x12 неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - "card(x)".

Переменной x13 присваивается символ по вхождению x12. В нашем примере - символ "мощность". Справочник поиска теорем "смпарам" находит по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается та часть эквивалентности в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок "существует". Оператор "тождвывод" определяет результат x19 преобразования утверждения под описателем "класс" при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_a(a - \text{set} \ \& \ 2 - \text{целое} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ 0 \leq 2 \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{card}(\text{set}_x(\exists_{cd}(c \in a \ \& \ d \in a \ \& \ c < d \ \& \ x = \{c; d\}))) = C_{\text{card}(a)}^2)$$

Переменной x21 присваивается заменяемая часть теоремы x19, переменной x22 - результат обработки оператором "нормантецеденты" списка антецедентов теоремы x19 относительно параметров консеквента. Переменной x24 присваивается результат упрощения терма x21 при помощи задачи на преобразование. Проверяется, что он не содержит символа "существует". Создается импликация с антецедентами x22, консеквентом которой служит равенство выражения x24 заменяющему терму теоремы x19. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Попытка использовать перестановочную эквивалентность для варьирования искомого описателя.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \text{sup}(\text{set}_n(n < a \ \& \ n - \text{целое})) = -[-a + 1])$$

из теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow \text{inf}(\text{set}_n(b < n \ \& \ n - \text{целое})) = [b + 1])$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow -b < a \leftrightarrow -a < b)$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Внутри него выбирается вхождение x11 символа "класс". Внутри описателя "класс" выбирается вхождение x12 неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - " $b < n$ ". Переменной x13 присваивается символ по вхождению x12. В нашем примере - "меньше". Проверяется, что x13 - предикатный символ. Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается список связанных переменных заменяемой части теоремы. В нашем примере - n . Оператор "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x12 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этому оператору передается опция (фикс x17), блокирующая подстановку вместо переменных списка x17. Импликация x18 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Попытка использовать дополнительное тождество для преобразования описателя

1. Попытка опрокинуть тождество для исключения либо упрощения описателя за счет сильного упрощения заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bf}(b - \text{set} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq b \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \text{сужение}(f, b) = f)$$

из теоремы

$$\forall_{fA}(f - \text{функция} \ \& \ A - \text{set} \rightarrow \text{сужение}(f, A) = \lambda_x(f(x), x \in A \cap \text{Dom}(f)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ c \subseteq b \rightarrow b \cap c = c)$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Внутри него выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - $A \cap \text{Dom}(f)$. Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. В нашем примере - "пересечение". Справочники поиска теорем "констнорм", "констнабор", "тожд", "поглощается", "поглощает", "констцелое", "конствхожд", "сократимо", "исклтерм", "сокращмн" используются для того, чтобы по символу x12 найти указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" определяет результат преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка повторной обработки тождества ранее выведенными упрощающими тождествами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ 0 \leq d - c \rightarrow d + 3 \cdot \sum_{x=c}^d x^2 - c + 1 + 3(c+d)(d-c+1)/2 = -c^3 + (d+1)^3)$$

из теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ 0 \leq d - c \rightarrow d + 3 \cdot \sum_{x=c}^d x + 3 \cdot \sum_{x=c}^d x^2 - c + 1 = -c^3 + (d+1)^3)$$

Проверяется, что число описателей "отображение" в консеквенте не менее 2. Исходная теорема обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому передается опция, разрешающая использовать для упрощений тождества, ранее выведенные в том же цикле вывода. В нашем примере используется тождество для суммы первых степеней, уже выведенное до этого. Проверяется, что результат x12 - кванторное тождество, имеющее в своем консеквенте меньшее число описателей "отображение", чем исходная теорема. Это тождество регистрируется в списке вывода.

3. Попытка проварьировать тождество определения характеристики класса с помощью дополнительного тождества и упростить утверждение под результирующим описателем.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ad}(d - \text{число} \ \& \ a - \text{натуральное} \rightarrow \text{card}(\text{set}_c(c - \text{число} \ \& \ (c+d) - \text{натуральное} \ \& \ a|(c+d))) = \text{счетное})$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{натуральное} \rightarrow \text{card}(\text{set}_b(a|b \ \& \ b - \text{натуральное})) = \text{счетное})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{be}(e - \text{set} \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{card}(\text{set}_a(a + b \in e \ \& \ a - \text{число})) = \text{card}(e))$$

Заметим, что выводимая теорема является лишь промежуточным звеном при выводе счетности множества натуральных чисел, имеющих заданное значение по заданному модулю.

Переменной x8 присваивается набор антецедентов, переменной x11 - вхождение заменяемой части, переменной x12 - заменяющая часть. Проверяется, что выражение x12 элементарно и что число операндов вхождения x11 равно 1. Проверяется, что заголовок единственного операнда этого вхождения - символ "класс". Переменной x14 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под описателем "класс", переменной x15 - связывающая приставка описателя. Проверяется, что все утверждения списка x14 элементарны, а глубина вхождения в них любой из переменных связывающей приставка x15 равна 1. Переменной x16 присваивается символ по вхождению x11. В нашем примере - "мощность". Справочник поиска теорем "равнтекст" находит по символу x16 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" определяет результат x22 преобразования заменяемой части исходной теоремы посредством дополнительной теоремы. Переменной x23 присваивается результат обработки импликации x22 оператором "нормтеорема". Проверяется, что все антецеденты теоремы x23 элементарны, а ее консеквент содержит символ x16. Затем теорема x23 регистрируется в списке вывода.

4. Попытка проварьировать тождество определения характеристики класса с помощью дополнительного тождества, имеющего свободную функциональную переменную.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{an}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \ \& \ \text{конечное}(a) \rightarrow \text{card}(\text{set}_b(n = l(b) \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq a \ \& \ \text{Возркортеж}(b))) = C_{\text{card}(a)}^n)$$

из теоремы

$$\forall_{an}(a - \text{set} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ 0 \leq n \rightarrow \text{card}(\text{set}_x(x - \text{set} \ \& \ x \subseteq a \ \& \ \text{card}(x) = n)) = C_{\text{card}(a)}^n)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_d(\text{card}(\text{set}_b(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d(b) \ \& \ \text{конечное}(b))) = \text{card}(\text{set}_a(d(\text{Val}(a)) \ \& \ \text{Возкрортеж}(a))))$$

Переменной x8 присваивается набор антецедентов, переменной x11 - вхождение заменяемой части, переменной x12 - заменяющая часть. Проверяется, что выражение x12 элементарно и что число операндов вхождения x11 равно 1. Проверяется, что заголовок единственного операнда x13 этого вхождения - символ "класс". Переменной x14 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под описателем "класс", переменной x15 - связывающая приставка описателя. Проверяется, что она одноэлементна, и переменной x16 присваивается ее единственный элемент. В нашем примере - переменная x . Переменной x17 присваивается символ по вхождению x11. В нашем примере - символ "мощность". Справочник поиска теорем "классточки" определяет по x17 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x20 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x20 имеет вид:

$$\forall_d(\text{card}(\text{set}_c(c - \text{set} \ \& \ c \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d(c) \ \& \ \text{конечное}(c))) = \text{card}(\text{set}_b(d(\text{Val}(b)) \ \& \ \text{Возкрортеж}(b))))$$

Переменной x22 присваивается вхождение одной из частей равенства в консеквенте теоремы x20, переменной x23 - вхождение другой части. В нашем примере x22 - вхождение левой части, x23 - правой. Переменной x25 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под описателем "класс", являющимся корневым операндом вхождения x22, переменной x26 - связывающая приставка этого описателя. Проверяется, что набор x26 одноэлементный, и переменной x27 присваивается его элемент. В нашем случае - переменная c . Среди элементов набора x25 находится терм x28 с заголовком "значение", вторым операндом которого служит переменная x27. Первым операндом является переменная x29. В нашем примере x28 - терм " $d(c)$ ". Проверяется, что переменная x29 имеет единственное вхождение в подтерме x22. Переменной x30 присваивается список антецедентов теоремы x20. Проверяется, что переменная x29 в них не встречается. Переменной x31 присваивается объединение списков x8 и x30, переменной x32 - соединение конъюнкцией отличных от x28 утверждений списка x25. В нашем примере - " $c - \text{set} \ \& \ c \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{конечное}(c)$ ". Переменной x33 присваивается результат подстановки в терм x32 переменной x16 (в нашем примере - x) вместо x27. Переменной x34 присваивается список всех элементов набора x14, не являющихся равенствами. В нашем примере - " $x - \text{set}$ " и " $x \subseteq a$ ". Проверяется, что этот список непуст, после чего переменной x35 присваивается импликация с антецедентами x34 и консеквентом x33. Она упрощается относительно посылок x31 вспомогательной задачей на преобразование. Результат присваивается переменной x36. В нашем примере он имеет вид " $a \subseteq \mathbb{R}$ ". Проверяется, что терм x36 не имеет связанных переменных. Переменной x38 присваивается подтерм по вхождению x23. Определяется список x39 вхождений переменной x29 (в нашем примере - d) в терм x38. В нашем примере - единственное вхождение " $d(\text{Val}(b))$ ". Проверяется, что каждое вхождение списка x39 - первый операнд терма "значение". Переменной x40 присваивается список результатов подстановки в утверждение под описателем x13 вторых операндов указанных термов

"значение" вместо переменной x16. В нашем примере x40 состоит из единственной конъюнкции "Val(b) – set & Val(b) \subseteq a & card(Val(b)) = n". Переменной x41 присваивается список входящих терм "значение", рассмотренных при определении набора x39. Переменной x42 присваивается результат замены входящих x41 в терм x38 на термы x40. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x31 и конъюнктивные члены утверждения x36, а консеквентом - равенство выражений x42 и x12. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Попытка подразбиения функциональной переменной в тождестве для двуместной операции над функциями.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{abcdfghi} (\neg(0 \in \text{Val}(f)) \ \& \ b = \text{предел}(h, i, a) \ \& \ c = \lim_{e \rightarrow a \setminus i} (d(e)/f(e)) \ \& \\ & \text{Dom}(d) = g \ \& \ \text{Dom}(f) = g \ \& \ \text{Dom}(h) = g \ \& \ g \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \ \& \\ & \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ h - \text{функция} \ \& \\ & b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(h, a, i) \ \& \\ & \text{Локопред}(\lambda_e(d(e)/f(e), e \in g), a, i) \rightarrow \lim_{e \rightarrow a \setminus i} (d(e)h(e)/f(e)) = bc \end{aligned}$$

из теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{abceghij} (\text{Dom}(h) = g \ \& \ \text{Dom}(j) = g \ \& \ g \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(j) \subseteq \mathbb{R} \ \& \\ & h - \text{функция} \ \& \ j - \text{функция} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(h, a, i) \ \& \\ & \text{Локопред}(j, a, i) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{предел}(h, i, a) = b \ \& \\ & \text{предел}(j, i, a) = c \rightarrow \lim_{e \rightarrow a \setminus i} (h(e)j(e)) = bc \end{aligned}$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe} (\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \cdot (a/b) = ae/b)$$

Переменной x11 присваивается заменяемая часть. В ней рассматривается входжение x12 корневого операнда - описателя "отображение". Переменной x14 присваивается связывающая приставка описателя. Проверяется, что она состоит из единственной переменной x15. В нашем примере - переменной e. Переменной x16 присваивается заголовок терма x11. В нашем примере - символ "предел". Переменной x17 присваивается входжение последнего операнда описателя, определяющего его значения. Проверяется, что число операндов входжения x17 равно 2, причем первый из них имеет вид "значение(x18 x15)", а второй - "значение(x19 x15)". Здесь x18, x19 - различные переменные. В нашем примере x18 - h, x19 - j. Проверяется, что для каждой из переменных x18, x19 среди антецедентов теоремы встречается равенство, одна из частей которого имеет заголовок x16 и содержит эту переменную. Переменной x20 присваивается символ по входжению x17. В нашем примере - "умножение". Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по x20 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x26 присваивается входжение заменяемой части дополнительной теоремы. Проверяется, что ее заголовок равен x20, а число корневых операндов равно 2. Проверяется также, что один из этих операндов - переменная x29, а другой операнд x28 - двуместная операция от переменных x30 и x31. В нашем примере x29 - e, x30 - a, x31 - b. Проверяется, что дополнительная теорема не

имеет переменных, отличных от x_{29} , x_{30} , x_{31} . Переменным x_{33} и x_{34} присваиваются переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере $x_{33} - d$, $x_{34} - f$. Переменной x_{35} присваивается заголовок операции x_{28} . В нашем случае - символ "дробь". Переменной x_{36} присваивается терм " $x_{35}(\text{значение}(x_{33} \ x_{15}) \ \text{значение}(x_{34} \ x_{15}))$ ". В нашем примере - " $d(e)/f(e)$ ". Если x_{29} - первый операнд заменяемой части дополнительной теоремы, то переменной x_{37} присваивается переменная x_{19} , а переменной x_{38} - первый корневой операнд вхождения x_{17} . Иначе переменной x_{37} присваивается переменная x_{18} , а переменной x_{38} - второй корневой операнд заменяемой части. Переменной x_{39} присваивается результат подстановки в заменяющую часть дополнительной теоремы вместо переменных x_{29} , x_{30} , x_{31} термов x_{38} , " $\text{значение}(x_{33} \ x_{15})$ ", " $\text{значение}(x_{34} \ x_{15})$ ". В нашем примере он имеет вид " $d(e)h(e)/f(e)$ ". Переменной x_{40} присваивается результат замены вхождения x_{17} в терм x_{11} на x_{39} . В нашем случае он имеет вид " $\lim_{e \rightarrow a \setminus i} (d(e)h(e)/f(e))$ ". Переменной x_{41} присваивается заменяющий терм исходной теоремы. Проверяется, что он не содержит переменной x_{37} . Среди антецедентов исходной теоремы находится равенство x_{42} области определения отображения x_{37} некоторому выражению x_{43} . Проверяется, что равенства " $\text{область}(x_{18}) = x_{43}$ " и " $\text{область}(x_{19}) = x_{43}$ " имеются среди антецедентов исходной теоремы. Переменной x_{44} присваивается выражение " $\text{отображение}(x_{15} \ \text{принадлежит}(x_{15} \ x_{43})x_{36})$ ". В нашем примере - выражение " $\lambda_e(d(e)/f(e), e \in g)$ ".

Переменной x_{45} присваивается результат удаления из списка антецедентов исходной теоремы утверждений x_{42} и " $\text{функция}(x_{37})$ ", с последующим добавлением утверждений " $\text{функция}(x_{33})$ ", " $\text{функция}(x_{34})$ ", " $\text{область}(x_{33}) = x_{43}$ ", " $\text{область}(x_{34}) = x_{43}$ ". Переменной x_{46} присваивается набор результатов подстановки выражения x_{44} вместо переменной x_{37} в утверждения x_{45} . Переменной x_{47} присваивается набор результатов подстановки термов x_{38} , " $\text{значение}(x_{33} \ x_{15})$ ", " $\text{значение}(x_{34} \ x_{15})$ " вместо переменных x_{29}, x_{30}, x_{31} в антецеденты дополнительной теоремы. Переменной x_{49} присваивается результат добавления к списку x_{46} всевозможных кванторных импликаций вида " $\text{длялюбого}(x_{15} \ \text{если принадлежит}(x_{15} \ x_{43}) \ \text{то } A)$ " для элементов A списка x_{47} . Создается импликация с антецедентами x_{49} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{40} и x_{41} . Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "сокращ" и регистрируется в списке вывода.

6. Попытка использовать тождество свертки для перехода от тождества с двумя функциональными переменными к одной функциональной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdgi} (\neg(c = 0) \ \& \ \forall_e (e \in g \rightarrow \neg(\cos(d(e)) = 0)) \ \& \ b = \lim_{e \rightarrow a \setminus i} \sin(d(e)) \ \& \\ c = \lim_{e \rightarrow a \setminus i} \cos(d(e)) \ \& \ \text{Dom}(d) = g \ \& \ g \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d - \text{функция} \ \& \\ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(d, a, i) \rightarrow \\ \lim_{e \rightarrow a \setminus i} \text{tg}(d(e)) = b/c$$

из теоремы

$$\forall_{abcghij} (\neg(0 \in \text{Val}(j)) \ \& \ \text{Dom}(h) = g \ \& \ \text{Dom}(j) = g \ \& \ g \subseteq \mathbb{R} \ \& \\ \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(j) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ h - \text{функция} \ \& \ j - \text{функция} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \\ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(h, a, i) \ \& \ \text{Локопред}(j, a, i) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \\ c - \text{число} \ \& \ \text{предел}(h, i, a) = b \ \& \ \text{предел}(j, i, a) = c \rightarrow \lim_{e \rightarrow a \setminus i} (h(e)/j(e)) = b/c$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \ \& \ \neg(\cos a = 0) \rightarrow \text{tg}(a) = \sin(a)/\cos(a))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x11 присваивается заменяемая часть. В ней рассматривается вхождение x12 корневого операнда - описателя "отображение". Переменной x14 присваивается связывающая приставка описателя. Проверяется, что она состоит из единственной переменной x15. В нашем примере - переменной e . Переменной x16 присваивается заголовок терма x11. В нашем примере - символ "предел". Переменной x17 присваивается вхождение последнего операнда описателя, определяющего его значения. Проверяется, что число операндов вхождения x17 равно 2, причем первый из них имеет вид "значение(x18 x15)", а второй - "значение(x19 x15)". Здесь x18, x19 - различные переменные. В нашем примере x18 - h , x19 - j . Проверяется, что для каждой из переменных x18, x19 среди антецедентов теоремы встречается равенство, одна из частей которого имеет заголовок x16 и содержит эту переменную. Переменной x20 присваивается символ по вхождению x17. В нашем примере - "дробь".

Дальше начинаются отличия. Справочник поиска теорем "опратом" находит по символу x20 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x23 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x23 имеет вид:

$$\forall_a(d - \text{число} \ \& \ \neg(\cos d = 0) \rightarrow \text{tg}(d) = \sin(d)/\cos(d))$$

Переменной x25 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте теоремы x23, которая имеет заголовок x20. Проверяется, что число операндов вхождения x25 равно 2, а число параметров консеквента равно 1. Переменной x28 присваивается этот параметр (в нашем примере - d). Проверяется, что теорема x23 не имеет других параметров. Переменной x29 присваивается антецедент "равно(область(x18) ...)". Переменной x30 - антецедент "равно(область(x19) ...)". Проверяется, что в правых частях этих равенств расположено одно и то же выражение x31. В нашем примере - переменная g . Переменной x32 присваивается результат подстановки в первый операнд двуместной операции x25 терма "значение(x28 x15)" вместо переменной x28, переменной x33 - результат такой же подстановки во второй операнд операции x25. В нашем примере имеем " $\sin(d(e))$ ", " $\cos(d(e))$ ". Переменной x34 присваивается результат данной подстановки в отличную от x25 часть равенства. В нашем случае - " $\text{tg}(d(e))$ ". Переменной x35 присваивается терм "отображение(x25 принадлежит(x15 x31)x32)", переменной x36 - терм "отображение(x15 принадлежит(x15 x31)x33)". В нашем примере - " $\lambda_e(\sin(d(e)), e \in g)$ ", " $\lambda_e(\cos(d(e)), e \in g)$ ". Переменной x37 присваивается список результатов подстановки термов x35, x36 вместо переменных x18 и x19 в антецеденты исходной теоремы, отличные от x29, x30 и от термов "функция(x18)", "функция(x19)". Переменной x38 присваивается результат добавления к x37 термов "функция(x28)", "равно(область(x28)x31)". Переменной x39 присваивается заменяющая часть исходной теоремы. Проверяется, что она не содержит переменных x18, x19. Переменной x40 присваивается результат вхождения x17 в заменяемую часть на x34. В

нашем примере - " $\lim_{e \rightarrow a} \text{tg}(d(e))$ ". Для каждого утверждения P , необходимого для сопровождения по о.д.з. терма $x34$, к списку $x38$ добавляется кванторная импликация "длялюбого($x15$ если принадлежит($x15$ $x31$)то P)". Затем создается импликация с антецедентами $x38$, консеквентом которой служит равенство выражений $x40$ и $x39$. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "сокращ" и регистрируется в списке вывода.

Попытка использования примера для упрощения и свертки описателя

1. Попытка использования примера для получения частного случая тождества, исключаяющего описатель.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \rightarrow \text{прообраз}(f, \emptyset) = \emptyset)$$

из теоремы

$$\forall_{af}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow \text{прообраз}(f, a) = \text{set}_x(x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f(x) \in a))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\neg(a \in \emptyset))$$

Переменной $x10$ присваивается вхождение заменяемой части. Внутри этого вхождения усматривается вхождение $x11$ описателя "класс". Внутри этого описателя выбирается вхождение $x12$ неоднобуквенного подтерма. Переменной $x13$ присваивается символ по вхождению $x12$. В нашем примере $x12$ - вхождение подтерма " $f(x) \in a$ ". Проверяется, что $x13$ - символ отношения; в нашем случае - символ "принадлежит". Справочник поиска теорем "пример" находит по символу $x13$ указанную выше дополнительную теорему. Переменной $x16$ присваивается вхождение ее консеквента, переменной $x17$ - сам консеквент, с отброшенным отрицанием, если оно есть. В нашем примере $x17$ имеет вид " $a \in \emptyset$ ". Внутри $x17$ выбирается вхождение $x18$ однобуквенного подтерма, состоящего из логического символа $x19$. В нашем примере - символа "пусто". Выбирается переменная $x20$, не встречающаяся в дополнительной теореме. В нашем примере - переменная b . Переменной $x21$ присваивается результат замены в терме $x17$ вхождения $x18$ на переменную $x20$. В нашем случае - " $a \in b$ ". Переменной $x22$ присваивается список параметров терма $x21$. Определяется подстановка S вместо этих параметров, переводящая $x21$ в подтерм $x12$. Переменной $x25$ присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам дополнительной теоремы. В нашем примере $x25$ пусто. Проверяется, что каждое утверждение списка $x25$ является следствием утверждения из области вхождения $x12$, усматриваемым с помощью проверочных операторов. Переменной $x27$ присваивается равенство выражения, в которое подстановка S переводит переменную $x20$, выражению $x19$. В нашем примере - " $a = \emptyset$ ". Проверяется, что параметры выражения $x27$ включаются в связывающую приставку исходной теоремы. Переменной $x28$ присваивается результат замены вхождения $x12$ в исходную теорему на логическую константу "ложь", если по вхождению $x16$ располагался символ "не", и на константу "истина" в противном случае. Создается импликация, полученная из $x28$ добавлением к антецедентам равенства

x27. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Попытка использовать дополнительное тождество для упрощения заменяемого термина

1. Упрощение заменяющего термина для исключения в нем невырожденного числового атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bn}(b - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq b \ \& \ 0 \leq n \rightarrow \text{card}(\text{set}_x(\text{card}(x) = n \ \& \ x - \text{set} \ \& \ x \subseteq \{1, \dots, b\})) = C_b^n)$$

из теоремы

$$\forall_{an}(a - \text{set} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ 0 \leq n \rightarrow \text{card}(\text{set}_x(x - \text{set} \ \& \ x \subseteq a \ \& \ \text{card}(x) = n)) = C_{\text{card}(a)}^n)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_n(n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \rightarrow \text{card}(\{1, \dots, n\}) = n)$$

Переменной x10 присваивается набор antecedентов, переменной x11 - заменяющий терм. В терме x11 выбирается невырожденный числовой атом x12. В нашем примере - $\text{card}(a)$. Рассматривается вхождение x13 термина x12 в заменяющую часть теоремы. Проверяется, что в консеквенте нет другого вхождения термина x12. Переменной x14 присваивается заголовок термина x12. В нашем примере - "мощность". Справочник поиска теорем "числатом" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" определяет результат x19 преобразования вхождения x13 при помощи дополнительной теоремы. Переменной x20 присваивается результат обработки импликации x19 оператором "нормтеорема". Проверяется, что заменяющая часть теоремы x20 не содержит невырожденных числовых атомов, после чего эта теорема регистрируется в списке вывода.

Вывод следствий с помощью задачи на описание

1. Попытка перехода от параметрического описания класса к обычному.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{целое} \rightarrow \text{card}(\text{set}_b(a + 1 \leq b \ \& \ b - \text{целое})) = \text{счетное})$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \text{card}(\text{set}_b(\exists_c(b = a + c \ \& \ c - \text{натуральное}))) = \text{счетное})$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. В нем находится вхождение x11 описателя "класс". Проверяется, что заголовок утверждения под описателем - символ "существует". Переменной x12 присваивается вхождение этого утверждения. Переменной x13 присваивается вхождение, операндом которого служит x11. Проверяется, что у x13 имеется единственный операнд и что

x13 - вхождение корня термина x10. Переменной x14 присваивается связывающая приставка квантора существования. В нашем примере - *c*. Переменной x15 присваивается набор конъюнктивных членов под квантором существования, переменной x16 - список антецедентов теоремы. Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения x16, а условиями - утверждения x15. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x14", "параметры x14". В нашем примере x15 - утверждения " $a + c = b$ ", " c - натуральное". Переменной x19 присваивается ответ задачи. Проверяется, что он отличен от символа "отказ". В нашем примере ответ имеет вид " b - число & $(b - a)$ - натуральное". Заметим что несущественная неизвестная *c* оказалась устранена. Проверяется, что утверждение x19 не содержит переменных x14. Переменной x20 присваивается связывающая приставка описателя "класс". В нашем примере - *b*. Переменной x21 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x19. Решается задача на описание x22, посылками которой служат утверждения x16, а условиями - утверждения x21. Цели задачи - "полный", "прямойответ", "попыткаспуска", "упростить", "допосылки", "неизвестные x20". Ответ присваивается переменной x23. В нашем примере он имеет вид " $a + 1 \leq b$ & b - целое".

Заметим, что цель "допосылки" позволила сработать приему, вводящему дополнительную посылку " $-a$ - целое". Эта посылка сохранена в комментарии (допосылки ...) к посылкам задачи x22.

Проверяется, что ответ x23 отличен от символов "отказ" и "ложь". Переменной x24 присваивается терм "класс(x20 x23)". В нашем случае - " $\text{set}_b(a + 1 \leq b \ \& \ b - \text{целое})$ ". Переменной x25 присваивается результат замены вхождения x11 в терм x10 на выражение x24. В нашем примере - " $\text{card}(\text{set}_b(a + 1 \leq b \ \& \ b - \text{целое}))$ ". Переменной x26 присваивается равенство выражения x25 заменяющему терму исходной теоремы. Переменной x27 присваивается результат обработки процедурой "нормантецеденты" результата добавления к антецедентам исходной теоремы утверждений, извлекаемых из комментария (допосылки ...) к посылкам задачи x22. Обработка происходит относительно параметров равенства x26. Переменной x28 присваивается импликация с антецедентами x27 и консеквентом x26. Она регистрируется в списке вывода.

2. Попытка подбора параметров, при которых подмножество целочисленного луча превращается в подмножество натуральных чисел.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(b \in \{0, \dots, a - 1\} \ \& \ a - \text{натуральное} \rightarrow \text{card}(\text{set}_c(c \pmod a) = b \ \& \ c - \text{натуральное})) = \text{счетное})$$

из теоремы

$$\forall_{abd}(b \in \{0, \dots, a - 1\} \ \& \ a - \text{натуральное} \ \& \ a | (d - b) \ \& \ d - \text{целое} \rightarrow \text{card}(\text{set}_c(c \pmod a) = b \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ d \leq c)) = \text{счетное})$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм. В нем находится вхождение x11 описателя "класс". Проверяется, что заголовок утверждения под описателем отличен от символа "существует". Переменной x12 присваивается набор

конъюнктивных членов этого утверждения. Проверяется, что все они элементарны. Переменной x_{13} присваивается связывающая приставка описателя x_{11} . Проверяется, что она одноэлементна, и переменной x_{14} присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная c . В списке x_{12} находятся утверждение " $\text{целое}(x_{14})$ ", " $\text{меньшеилиравно}(t \ x_{14})$ ". Переменной x_{17} присваивается выражение t . Проверяется, что оно не содержит переменной x_{14} . В нашем примере x_{17} - переменная d . Переменной x_{18} присваивается остаток списка x_{12} после удаления из него указанных двух утверждений. Проверяется, что он непуст. В нашем примере x_{18} состоит из утверждения " $c(\text{mod } a) = b$ ". Переменной x_{19} присваивается список параметров терма x_{17} , не входящих в термы x_{18} . Проверяется, что он непуст. В нашем примере x_{19} состоит из переменной d . Переменной x_{20} присваивается равенство описателя x_{11} выражению " $\text{класс}(x_{14} \text{ и}(x_{18} \ \text{натуральное}(x_{14})))$ ". В нашем примере оно имеет вид:

$$\text{set}_c(c(\text{mod } a) = b \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ d \leq c) = \text{set}_c(c(\text{mod } a) = b \ \& \ c - \text{натуральное})$$

Набор antecedентов теоремы подразбивается на поднабор x_{21} всех утверждений, содержащих параметры x_{19} , и поднабор x_{22} остальных утверждений. В нашем примере x_{21} состоит из утверждений " $a|(d - b)$ ", " $d - \text{целое}$ ". Переменной x_{23} присваивается результат добавления к x_{21} утверждения x_{20} . Решается задача на описание с посылками x_{22} и условиями x_{23} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "элементарно", "неизвестные x_{19} ", "упростить". Проверяется, что ответ x_{26} отличен от символа "отказ". В нашем примере он имеет вид:

$$d = b - a[(b - 1)/a]$$

Переменной x_{27} присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x_{19} на утверждение x_{26} . При помощи вспомогательной задачи на доказательство устанавливается, что x_{27} - следствие утверждений x_{22} . Рассматривается результат A замены в терме x_{10} вхождения x_{11} на выражение " $\text{класс}(x_{14} \ \text{и}(x_{18} \ \text{натуральное}(x_{14})))$ ". Создается импликация, antecedентами которой служат утверждения x_{22} , а консеквентом - равенство выражения A заменяющему терму исходной теоремы. Эта импликация регистрируется в списке вывода.

3. Попытка разрешения описания класса относительно варьируемой переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{an}(n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \ \& \ a - \text{целое} \ \rightarrow \ \text{card}(\text{set}_b(b - \text{число} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ b \leq a + n \ \& \ a + 1 \leq b)) = n)$$

из теоремы

$$\forall_{an}(a - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \ \rightarrow \ n = \text{card}(\text{set}_b(b - \text{число} \ \& \ (b - a) - \text{целое} \ \& \ b \leq a + n \ \& \ a + 1 \leq b)))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм. В нем находится вхождение x_{11} описателя "класс". Переменной x_{12} присваивается набор конъюнктивных

членов утверждения под описателем "класс". Проверяется, что все они элементарны. Переменной x13 присваивается связывающая приставка описателя. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x14 присваивается ее элемент. В нашем примере - "b". Проверяется, что в списке x12 существует утверждение, не имеющее заголовка "не", глубина вхождения в которое переменной x14 больше 1. Переменной x15 присваивается набор antecedентов теоремы. Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения x15, а условиями - утверждения x12. Цели задачи - "полный", "прямойответ", "попыткаспуска", "упростить", "допосылки", "неизвестные x14". Переменной x17 присваивается ответ. В нашем примере он имеет вид " b – число & b – целое & $b \leq a+n$ & $a+1 \leq b$ ". Проверяется, что ответ отличен от символов "отказ", "ложь". Переменной x18 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x17. Проверяется, что наибольшая глубина вхождения переменной x14 в утверждения x18 равна 1. Переменной x19 присваивается выражение "класс(x14 x17)", переменной x20 - результат замены вхождения x11 в терм x10 на x19. Переменной x21 присваивается равенство выражения x20 заменяющей части исходной теоремы. Переменной x22 присваивается результат обработки процедурой "нормантецеденты" объединения списка x15 с дополнительными посылками, введенными при решении задачи на описание. В нашем случае была введена посылка " $-a$ – целое". Создается импликация с antecedентами x22 и консеквентом x21, которая регистрируется в списке вывода.

4. Попытка вывода равенства, варьирующего класс при вычислении его характеристики.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(\text{card}(\text{set}_b(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d(b) \ \& \ \text{конечное}(b))) = \text{card}(\text{set}_a(d(\text{Val}(a)) \ \& \ \text{Возкртеж}(a))))$$

из теоремы

$$\forall_A(A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \text{подмножества}(\mathbb{R}) \ \& \ \text{конечные}(A) \rightarrow \text{card}(A) = \text{card}(\text{set}_a(\text{Val}(a) \in A \ \& \ \text{Возкртеж}(a))))$$

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - вхождение заменяющего. Проверяется, что вхождение x11 имеет единственный операнд, и переменной x12 присваивается заголовок данного операнда. Проверяется, что этот заголовок - переменная. В нашем примере - переменная A. Переменной x3 присваивается набор antecedентов. Проверяется, что этот набор содержит утверждение x14 вида " $A - \text{set}$ ". Проверяется, что заменяемая часть теоремы тоже имеет единственный операнд, причем заголовок этого операнда - символ "класс". Набор отличных от x14 antecedентов разбивается на поднабор x15 утверждений, содержащих переменную x12, и поднабор x16 остальных утверждений. Проверяется, что список x15 непуст. Решается задача на описание x18, посылками которой служат утверждения x16, а условиями - утверждения x15. Цели задачи - "редакция", "развертка". В нашем примере x15 состоит из двух утверждений " $A \subseteq \text{подмножества}(\mathbb{R})$ " и " $\text{конечные}(A)$ ". Ответ задачи x18 присваивается переменной x19. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_b(b \in A \rightarrow \forall_c(c \in b \rightarrow c - \text{число}) \ \& \ b - \text{set}) \ \& \ \forall_a(a \in A \rightarrow \text{конечное}(a))$$

Переменной x_{20} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{19} . Проверяется, что каждое утверждение списка x_{20} представляет собой кванторную импликацию с одноэлементной связывающей приставкой и единственным антецедентом - условием принадлежности варьируемой переменной множеству x_{12} . Других вхождений переменной x_{12} ни одна из этих импликаций не имеет. Проверяется, что переменная x_{12} имеет единственное вхождение в заменяемый терм x_{10} , причем это вхождение имеет вид принадлежности множеству x_{12} некоторого терма t . Переменной x_{22} присваивается вхождение символа "принадлежит". В нашем примере x_{22} имеет вид " $\text{Val}(a) \in A$ ". Переменной x_{25} присваивается набор консеквентов импликаций набора x_{20} , связанные переменные которых изменены на связанную переменную первой импликации списка x_{20} . В нашем примере x_{25} состоит из термов " $\forall_c(c \in b \rightarrow c - \text{число}) \ \& \ b - \text{set}$ ", " $\text{конечное}(b)$ ". Выбирается переменная x_{26} , не входящая в исходную теорему и в терм x_{19} . В нашем примере - переменная d . К списку x_{25} дописывается терм " $x_{26}(x_{24})$ ", где x_{24} - связанная переменная первой из импликаций списка x_{20} . В нашем случае дописывается " $d(b)$ ". Переменной x_{27} присваивается терм " $\text{класс}(x_{24} \text{ и } (x_{25}))$ ". В нашем примере - " $\text{set}_b(\forall_c(c \in b \rightarrow c - \text{число}) \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(b) \ \& \ d(b))$ ". Этот терм упрощается вспомогательной задачей на преобразование относительно посылок x_{16} . Задача имеет единственную цель "свертка". Ответ присваивается переменной x_{29} . В нашем примере он имеет вид:

" $\text{set}_b(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d(b) \ \& \ \text{конечное}(b))$ ".

Проверяется, что x_{29} имеет заголовок "класс". Переменной x_{30} присваивается единственная переменная его связывающей приставки. В нашем случае - " b ". Переменной x_{32} присваивается результат подстановки в утверждение под описателем x_{29} выражения t вместо переменной x_{30} . Затем находится результат x_{33} замены вхождения x_{22} в терм x_{10} на терм x_{32} . Он упрощается при помощи вспомогательной задачи на преобразование; результат присваивается переменной x_{34} . В нашем примере получаем:

$\text{card}(\text{set}_a(d(\text{Val}(a)) \ \& \ \text{Возкрортеж}(a)))$

Рассматривается заголовок s заменяющей части теоремы (в нашем примере - символ "мощность"), и переменной x_{36} присваивается равенство терма $s(x_{29})$ терму x_{34} . Создается импликация с антецедентами x_{16} и консеквентом x_{36} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительной эквивалентности для варьирования тождества, упрощающего либо исключаящего описатель

1. Варьирование тождества, исключаящего описатель, с помощью определения некоторого понятия.

В качестве примера рассмотрим вывод тождества

$$\forall_{cd}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ \text{конечное}(d) \rightarrow \text{card}(c \times d) = \text{card}(c)\text{card}(d))$$

из тождества

$$\forall_{abcd}(\neg(a = b) \& c\text{-set} \& d\text{-set} \& \text{конечное}(c) \& \text{конечное}(d) \rightarrow \text{card}(\text{set}_f(\text{Dom}(f) = \{a, b\} \& f(a) \in c \& f(b) \in d \& f - \text{функция})) = \text{card}(c)\text{card}(d))$$

и дополнительного тождества

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \& b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \& f(1) \in a \& f(2) \in b \& f - \text{слово})$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части, переменной x11 - расположенное внутри него вхождение описателя "класс". Переменной x12 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под описателем, переменной x13 - список antecedентов теоремы. Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения x13, а условиями - утверждения x12. Цели задачи - "прямойответ", "полный", "редакция", "развертка". Ответ присваивается переменной x15. В нашем примере он имеет вид:

$$\text{Dom}(f) = \{a, b\} \& f(a) \in c \& f(b) \in d \& f - \text{функция}$$

Переменной x16 присваивается результат замены утверждения под описателем "класс" на x15. Переменной x17 присваивается вхождение, которое терм x15 имеет в теореме x16. Переменной x18 присваивается список логических символов, входящих в терм x15. В этом списке выбирается символ x19. В нашем примере - символ "значение". Справочник поиска теорем "опред" находит по символу x19 указанную выше дополнительную теорему. По ее характеристике "определение(...)" находится терм x24, определением которого она является. В нашем случае - утверждение " $f \in a \times b$ ". Переменной x28 присваивается направление замены с помощью дополнительной теоремы, при котором заменяющим утверждением служит терм x24. Решается задача на описание, посылками которой служат antecedенты дополнительной теоремы, а условиями - конъюнктивные члены ее заменяемой части. Цели задачи - "полный", "прямойответ", "редакция", "развертка". Заменяемая часть дополнительной теоремы заменяется на ответ данной задачи. В нашем примере дополнительная теорема приобретает следующий вид:

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \& b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow \text{Dom}(f) = \{1, 2\} \& f - \text{функция} \& f(1) \in a \& f(2) \in b)$$

Оператор "тождвывод" преобразует вхождение x17 в теорему x16 при помощи измененной дополнительной теоремы. Результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка упрощения условия под описателем "класс" с помощью эквивалентности общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{AB}(\text{card}(A) = \text{card}(B) \& A - \text{set} \& B - \text{set} \& \text{конечное}(B) \rightarrow \text{card}(\text{set}_f(B = \text{Val}(f) \& \text{Dom}(f) = A \& f - \text{функция})) = \text{card}(B)!))$$

из теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{set} \& B - \text{set} \& \text{конечное}(B) \& \text{card}(A) \leq \text{card}(B) \rightarrow \text{card}(\text{set}_f(\text{Отображение}(f, A, B) \& \text{взаимнооднозначно}(f))) = \text{card}(B)! / (\text{card}(B) - \text{card}(A))!)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABf}(\text{card}(A) = \text{card}(B) \ \& \ \text{конечное}(A) \rightarrow \text{Отображение}(f, A, B) \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \leftrightarrow f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = A \ \& \ \text{Val}(f) = B)$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части исходной теоремы. Внутри него находится вхождение x11 описателя "класс". Переменной x12 присваивается вхождение утверждения под описателем. Проверяется, что по этому вхождению расположен символ "и". Переменной x13 присваивается вхождение конъюнктивного члена, переменной x14 - его заголовок. В нашем примере x13 - "Отображение(f, A, B)". Справочник поиска теорем "нормкн" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x19 преобразования вхождения x12 при помощи дополнительной теоремы. Он обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Попытка упрощения конъюнктивного члена под описателем "класс" с помощью разделяющей эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{комплформа}(a \times b) = \text{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ \text{Re}(z) \in a \ \& \ \text{Im}(z) \in b))$$

из теоремы

$$\forall_A(A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{комплформа}(A) = \text{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ (\text{Re}(z), \text{Im}(z)) \in A))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow (c, d) \in a \times b \leftrightarrow c \in a \ \& \ d \in b)$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части исходной теоремы. Внутри него находится вхождение x11 описателя "класс". Переменной x12 присваивается вхождение утверждения под описателем. Проверяется, что по этому вхождению расположен символ "и". Переменной x13 присваивается вхождение конъюнктивного члена. В нашем примере - " $(\text{Re}(z), \text{Im}(z)) \in A$ ". Внутри вхождения x13 выбирается вхождение x14 неоднобуквенного подтерма. Переменной x15 присваивается его заголовок. В нашем случае x14 - терм " $(\text{Re}(z), \text{Im}(z))$ ". Справочник поиска теорем "разделить" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат преобразования вхождения x13 при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема". Каждый конъюнктивный член полученной теоремы регистрируется в списке вывода.

4. Попытка упрощения конъюнктивного члена под описателем "класс" с помощью эквивалентности общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\text{card}(\text{set}_b(b - \text{натуральное} \ \& \ b - \text{even})) = \text{счетное}$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{натуральное} \rightarrow \text{card}(\text{set}_b(a|b \ \& \ b - \text{натуральное})) = \text{счетное})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{целое} \rightarrow a - \text{even} \leftrightarrow 2|a)$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части исходной теоремы. Внутри него находится вхождение x11 описателя "класс". Переменной x12 присваивается вхождение утверждения под описателем. Проверяется, что по этому вхождению расположен символ "и". Переменной x13 присваивается вхождение конъюнктивного члена, переменной x14 - символ по этому вхождению. В нашем примере x13 - утверждение "a|b". Справочник поиска теорем "упрощэв" определяет по символу x14 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет единственную переменную и что x14 не входит в ее заменяющую часть (в нашем примере - левую часть). Проверяется, что оценка сложности заменяющей части дополнительной теоремы меньше оценки сложности ее заменяемой части. Процедура "тождвывод" определяет результат преобразования вхождения x13 при помощи дополнительной теоремы. Он обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Попытка расширения типа значения параметра в описателе "класс" при помощи эквивалентности с характеристикой "подтип" (случай 1).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bn}(b - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow \{1 + [b], \dots, n\} = \text{set}_x(b < x \ \& \ x - \text{целое} \ \& \ x \leq n))$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow \{m, \dots, n\} = \text{set}_x(x - \text{целое} \ \& \ m \leq x \ \& \ x \leq n))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ax}(x - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow x < a \leftrightarrow [x] + 1 \leq a)$$

Переменной x10 присваивается набор антецедентов, переменной x11 - вхождение заменяемой части. Проверяется, что по вхождению x11 расположен описатель "класс". Внутри этого описателя выбирается вхождение x12 неоднобуквенного подтерма, и переменной x13 присваивается символ по данному вхождению. В нашем примере - утверждение $m \leq x$. Справочник поиска теорем "типзначения" определяет по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Находится ее характеристика с заголовком "подтип". В нашем примере - "подтип(целое второйтерм)". Первый операнд этой характеристики присваивается переменной x17. Среди антецедентов теоремы находится утверждение x18 с заголовком x17. В нашем примере - " $m - \text{целое}$ ". Переменной x19 присваивается переменная, являющаяся корневым операндом утверждения x18. В нашем примере - m . Проверяется, что эта переменная входит в терм x12. Переменной x21 присваивается второй операнд характеристики "подтип". В нашем случае - "второйтерм". Переменной x22 присваивается направление, противоположное направлению x21. В нашем примере - "первыйтерм". Оператор "тождвывод"

находит результат x23 преобразования вхождения x12 при помощи дополнительной теоремы. Этому оператору передаются опции (направл x22) и (фикс X), где X - список связанных переменных заменяемой части теоремы. Импликация x23 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

6. Попытка расширения типа значения параметра в описателе "класс" при помощи эквивалентности с характеристикой "подтип" (случай 2).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \{1 + [b], \dots, [c]\} = \text{set}_x(b < x \ \& \ x - \text{целое} \ \& \ x \leq c))$$

из теоремы

$$\forall_{bn}(b - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow \{1 + [b], \dots, n\} = \text{set}_x(b < x \ \& \ x - \text{целое} \ \& \ x \leq n))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ax}(x - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow a \leq [x] \leftrightarrow a \leq x)$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Внутри этой части рассматривается вхождение x11 символа "класс". Переменной x12 присваивается вхождение утверждения под описателем "класс". Проверяется, что это утверждение - конъюнкция. Переменной x13 присваивается вхождение некоторого конъюнктивного члена, переменной x14 - его заголовок. В нашем примере x13 - вхождение утверждения $x \leq n$. Справочник поиска теорем "типзначения" определяет по символу x14 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она представляет собой эквивалентность общей стандартизации, у которой заголовки обеих частей равны x14. Переменной x20 присваивается список параметров подтерма x13, не входящих в связывающую приставку описателя "класс". В нашем примере он состоит из переменной n. Проверяется, что каждая переменная списка x20 имеет единственное вхождение в описателе. Оператор "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождения x13 при помощи дополнительной теоремы. Ему передаются опции "направл(...)", задающая направление применения дополнительной теоремы для общей стандартизации (в нашем примере - "второйтерм"), а также (фикс ...), блокирующая подстановку вместо переменных связывающей приставки описателя. Переменной x22 присваивается результат обработки теоремы x21 оператором "нормтеорема". Проверяется, что каждое неконстантное подвыражение антецедентов теоремы x22 представляет собой переменную. Затем x22 регистрируется в списке вывода.

Обобщение теоремы

1. Попытка переброски в условное выражение антецедента, не используемого для сопровождения по о.д.з.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bf}(b - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(f \setminus b) \rightarrow \text{card}(\text{set}_a(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq f \ \& \ b \subseteq a)) = (2^{\text{card}(f \setminus b)} \text{ при } b \subseteq f, \text{ иначе } 0))$$

из теоремы

$$\forall_{bf}(b - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \ \& \ b \subseteq f \ \& \ \text{конечное}(f \setminus b) \rightarrow \text{card}(\text{set}_a(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq f \ \& \ b \subseteq a)) = 2^{\text{card}(f \setminus b)})$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть теоремы, переменной x11 - список ее антецедентов. В списке x11 выбирается элементарное утверждение x13, не используемое для сопровождения термина x10 по о.д.з. В нашем примере - " $b \subseteq f$ ". Если x13 - отрицание равенства переменной X не содержащему ее выражению T , то проверяется, что после подстановки в x10 выражения T вместо X и упрощения относительно отличных от x13 антецедентов не возникает терм с противоречивыми условиями на о.д.з.

Внутри x10 находится вхождение x14 описателя "класс". Переменной x15 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под данным описателем. Переменной x16 присваивается конкатенация x15 и набора антецедентов исходной теоремы с отброшенным утверждением x13. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x13 - следствие утверждений x16. Тогда переменной x18 присваивается результат замены вхождения x14 в терм x10 на символ пустого множества "пусто". Переменной x19 присваивается условное выражение "вариант(x13 P x18), где P - заменяющая часть теоремы. В нашем примере x19 имеет вид:

$$(2^{\text{card}(f \setminus b)} \text{ при } b \subseteq f, \text{ иначе } 0)$$

Создается импликация, антецеденты которой получаются из списка x11 отбрасыванием утверждения x13, а консеквентом служит равенство выражений x10 и x19. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка обобщения путем ввода вспомогательного параметра для подвыражения с неповторной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ce}(c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \text{set}_a(0 < a + c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ a + e \leq 0) = (-c, -e])$$

из теоремы

$$\forall_{be}(b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow (b, -e] = \text{set}_a(0 < a - b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ a + e \leq 0))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - список антецедентов, переменной x12 - заменяющий терм. Переменной x13 присваивается список имеющих наибольшую сложность подтермов термина x10. Проверяется, что он одноэлементный и состоит из самого термина x10. Выбирается параметр x14 термина x10. В нашем примере - " b ". Проверяется, что вхождение этого параметра в терм x10 единственное. Переменной x15 присваивается вхождение максимального содержащего x14 подвыражения термина x10, не имеющего связанных переменных в терме x10 и не содержащего подутверждений. В нашем примере x15 - вхождение выражения " $-b$ ". Проверяется, что x15 не является вхождением переменной x14. Выбирается переменная x16, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная c . Определяется тип T значений

выражения x15. В нашем примере - "число". Список антецедентов x11 разбивается на подсписок x18 утверждений, содержащих x14, и список x19 остальных утверждений.

Переменной x22 присваивается задача на описание, посылками которой служат утверждения x19, а условиями - равенство выражений x16 и x15 и утверждение $T(x16)$. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x14", "параметры x14", "упростить". В нашем примере задача x22 имеет условия " $b = -c$ " и " c - число". Единственная посылка - " e - число". Переменной x23 присваивается ответ на задачу x22. Проверяется, что этот ответ отличен от символа "отказ". В нашем примере он имеет вид " c - число". Переменной x24 присваивается результат добавления к антецедентам исходной теоремы конъюнктивных членов ответа. Переменной x25 присваивается результат замены вхождения x15 в терм x10 на переменную x16. В нашем примере - " $\text{set}_a(0 < a + c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ a + e \leq 0)$ ". Переменной x26 присваивается результат добавления к списку x24 равенства выражений x26 и x15. Выбирается отличная от x16 переменная x27, не входящая в исходную теорему.

Переменной x29 присваивается задача на описание, посылками которой служат утверждения x26, а единственным условием - равенство выражений x27 и x12. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x27", "известно X", "упростить". Здесь X - список переменных исходной теоремы, в котором x14 заменено на x16. В нашем примере условием задачи служит равенство " $d = (b, -e]$ ", посылками - утверждения " b - число", " e - число", " c - число", " $c = -b$ ". Неизвестной является d . Параметрами цели "известно" служат переменные a, e, c . Переменной x30 присваивается ответ задачи. В нашем примере он имеет вид " $d = (-c, -e]$ ". Проверяется, что ответ x30 - равенство для неизвестной x27. Переменной x31 присваивается правая часть этого равенства. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x19 и конъюнктивные члены утверждения x23, а консеквентом - равенство выражений x25 и x31. Эта импликация обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "равны", после чего регистрируется в списке вывода.

3. Учет пустой области применения серийной операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{mn}(n - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \rightarrow \sum_{k=n}^m k = ((m - n + 1)(m + n)/2 \text{ при } 0 \leq m - n + 1, \text{ иначе } 0))$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(n - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ 0 \leq m - n \rightarrow \sum_{k=n}^m k = (m - n + 1)(m + n)/2)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - ее заголовок. Справочник "роазвертка" усматривает, что x11 - обобщение двуместной ассоциативно-коммутативной операции x12 на наборы произвольной длины. Проверяется, что операнд вхождения x10 имеет заголовок "отображение", и переменной x13 присваивается вхождение этого описателя. Переменной x14 присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она одноэлементна, и переменной x15 присваивается ее элемент. Переменной x16 присваивается

набор конъюнктивных членов предпоследнего операнда описателя, определяющего условия на его варьируемую переменную. Проверяется, что этот набор состоит из утверждений "целое(x15)", "меньшеилиравно(A x15)", "меньшеилиравно(x15 B)", где A, B - переменные. Переменной x21 присваивается список antecedентов исходной теоремы. В нем находится утверждение x22 вида " $0 \leq B - A$ ". Находится единица E операции x12. Переменной x27 присваивается результат подстановки в заменяющую часть теоремы выражения $A - 1$ вместо переменной B . Этот результат упрощается задачей на преобразование относительно утверждений списка x21, в котором отброшено неравенство x22. Проверяется, что результат равен E . Переменной x30 присваивается утверждение " T при $0 \leq B - A + 1$, иначе E ", где T - заменяющая часть теоремы. Создается импликация, antecedентами которой служат отличные от x22 утверждения списка x21, а консеквентом - равенство выражений x10 и x30. Она регистрируется в списке вывода.

4. Попытка явного разрешения тождества относительно единственной численной операции над семейством.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ 0 \leq d - c \rightarrow \sum_{x=c}^d x = (c + d)(d - c + 1)/2)$$

из теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ 0 \leq d - c \rightarrow d + 2 \sum_{x=c}^d x - c + 1 = -c^2 + (d + 1)^2)$$

Переменной x10 присваивается консеквент теоремы, представляющий собой некоторое равенство. Проверяется, что оно не содержит символа "класс", но содержит единственное вхождение описателя "отображение". Переменной x12 присваивается это вхождение. Переменной x13 присваивается вхождение, операндом которого служит x12. Проверяется, что x13 не является вхождением одной из частей равенства и что число корневых операндов вхождения x13 равно 1. В нашем примере x13 - вхождение конечной суммы. Переменной x14 присваивается символ по вхождению x13. В нашем примере - "сумма всех". Проверяется, что тип x16 значения выражений с заголовком x14 - "число" либо "комплексное". Выбирается переменная x17, не встречающаяся в исходной теореме. В нашем примере - переменная a . Переменной x18 присваивается список antecedентов теоремы x2. Переменной x19 присваивается результат замены вхождения x13 на эту переменную. В нашем примере он имеет вид " $d + 2a - c + 1 = -c^2 + (d + 1)^2$ ".

Переменной x21 присваивается задача на описание, посылками которой служат утверждения x18, а условиями - утверждения x19 и "x16(x17)". Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "упростить", "неизвестные x17". Ответ задачи присваивается переменной x22. В нашем примере он имеет вид " $a = (c + d)(d - c + 1)/2$ ". Проверяется, что x22 отлично от символа "отказ". Переменной x23 присваивается результат подстановки в x22 подтерма x13 вместо переменной x17. Создается импликация с antecedентами x18 и консеквентом x23. Переменной x24 присваивается результат обработки ее оператором "норм-теорема". Проверяется, что x24 - кванторная импликация. Ее antecedенты об-

рабатываются оператором "нормантецеденты" относительно параметров консеквента (в нашем случае ничего не изменяется), и результат регистрируется в списке вывода.

5. Обобщение тождества для мощности класса путем варьирования множеств с сохранением их мощности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abB}(\forall_c(b(c) \rightarrow \text{card}(B(c)) = a) \ \& \ a - \text{целое} \rightarrow \text{card}(\text{set}_{fc}(\text{перестановка}(f, B(c)) \ \& \ b(c))) = \text{card}(\text{set}_c(b(c))) \cdot a!)$$

из теоремы

$$\forall_B(B - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(B) \rightarrow \text{card}(\text{set}_f(\text{перестановка}(f, B))) = \text{card}(B)!))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что ее заголовок - символ "мощность", а заголовок первого операнда - "класс". Переменной x12 присваивается связывающая приставка описателя "класс", переменной x13 - утверждение под описателем. Переменной x14 присваивается набор антецедентов теоремы. Переменной x15 присваивается список параметров утверждения x13. В нашем примере x13 - утверждение "перестановка(f, b)". Переменной x16 присваивается заменяющая часть теоремы. Переменной x17 присваивается список всех таких переменных X списка x15, которые входят в заменяющую часть, и притом только в виде "мощность(X)", а в антецедентах встречаются только как "множество(X)", "конечное(X)", "мощность(X)". В нашем примере x17 состоит из единственной переменной b. Проверяется, что список x17 непуст. Переменной x18 присваивается список переменных, не встречающихся в исходной теореме и имеющий такую же длину, как список x17. В нашем примере x18 состоит из единственной переменной a. Переменной x19 присваиваются пара переменных Y₁, Y₂, не встречающихся в исходной теореме и в списке x18. В нашем примере - переменные c, d. Переменной x20 присваивается набор термов "значение(F Y₂)", где F пробегает список x17. В нашем примере - единственный терм "b(d)". Переменной x21 присваивается результат подстановки термов x20 вместо переменных x17 в терм x13. В нашем примере он имеет вид "перестановка(f, b(d))". Переменной x22 присваивается терм "мощность(класс(x12 Y₂ и(x21 значение(Y₁ Y₂)))". В нашем примере - терм "card(set_{fd}(перестановка(f, b(d)) & c(d)))". Переменной x23 присваивается список вхождений в терм x16 выражений вида "мощность(Z)", где Z - переменная списка x17. В нашем примере имеем единственное вхождение термина "card(b)". Переменной x24 присваивается набор переменных списка x18, соответствующих переменным вхождениям x23. В нашем примере он состоит из "a". Переменной x25 присваивается результат замены в терме x16 вхождений x23 на термы x24. В нашем примере имеем "a!". Переменной x26 присваивается равенство выражения x22 произведению выражения "мощность(класс(Y₂ Y₁(Y₂)))" на x25.

Переменной x27 присваивается список всех антецедентов, не содержащих переменные списка x17. В нашем примере этот список пуст. Для каждого антецедента, имеющего вид "конечное(Z)", где Z - переменная списка x17, в x27 заносится утверждение "целое(Z')", где Z' - переменная списка x18, соответствующая

переменной Z списка x17. Если антецедент не имеет заголовков "множество" и "конечное", причем содержит переменную списка x17, то в нем находятся все вхождения подтермов "мощность(Z)" для переменных Z списка x17, которые заменяются в нем на соответствующие переменные списка x18, и результат добавляется к списку x27. В результате x27 в нашем примере состоит из утверждения " a – целое".

Вводится пустой накопитель x28. Для каждой пары Z, Z' соответствующих переменных списков x17 и x18 создается импликация "длялюбого(Y_2 если $Y_1(Y_2)$ то равно(мощность($Z(Y_2)$) Z'))". В нашем примере - единственная импликация " $\forall_d(c(d) \rightarrow \text{card}(b(d)) = a)$ ". Указанные импликации регистрируются в списках x27 и x28.

Создается импликация с антецедентами x27 и консеквентом x26, которая обрабатывается оператором "нормтеорема". При регистрации в списке вывода она сопровождается дополнительными характеристиками, определяющими обработантецедентов списка x28 вспомогательными задачами на упрощение для установления независимости мощности от варьируемого параметра.

6. Варьирование свободного параметра в тождестве вычисления мощности класса.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abn}(b - \text{set} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ \forall_d(a(d) \rightarrow \text{card}(d) = n) \rightarrow \text{card}(\text{set}_f(\text{кортеж}(f, n, b) \ \& \ a(\text{Val}(f)))) = n! \text{card}(\text{set}_d(a(d) \ \& \ d - \text{set} \ \& \ d \subseteq b)))$$

из теоремы

$$\forall_{bcn}(\text{card}(c) = n \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ c \subseteq b \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow \text{card}(\text{set}_f(c = \text{Val}(f) \ \& \ \text{кортеж}(f, n, b!))) = n!)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок "мощность", а ее корневой операнд - заголовок "класс". Переменной x11 присваивается вхождение описателя "класс", переменной x12 - его связывающая приставка. В нашем примере она состоит из единственной переменной f . Переменной x13 присваивается утверждение под описателем, переменной x14 - список антецедентов теоремы. Проверяется, что заменяющая часть неконстантная. Переменной x15 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x13. В нашем примере - утверждения " $c = \text{Val}(f)$ " и "кортеж(f, n, b)". Среди утверждений x15 выбирается равенство x16, в одной части которого расположена переменная x19, не входящая в связывающую приставку x12 и в заменяющий терм. В нашем примере x19 - переменная c . Проверяется, что x19 имеет единственное вхождение в терм x13. Переменной x20 присваивается противоположная часть равенства x16. В нашем примере - " $\text{Val}(f)$ ". Проверяется, что она содержит переменную списка f . Список антецедентов разбивается на список x21 утверждений, содержащих переменную x19, и список x22 остальных утверждений. В нашем примере x21 состоит из утверждений " $\text{card}(c) = n$ ", " $c - \text{set}$ ", " $c \subseteq b$ ". Переменной x23 присваивается конкатенация списка x22 и результата отбрасывания в списке x15 равенства x16. В нашем примере она состоит из утверждений " $b - \text{set}$ ", " $n - \text{целое}$ ", "кортеж(f, n, b)". Вводятся пустые накопители x24 и x25.

Просматриваются утверждения U списка x_{21} . Если результат подстановки в такое утверждение терма x_{20} вместо переменной x_{19} является следствием утверждений x_{23} , то утверждение U регистрируется в списке x_{24} , иначе - в списке x_{25} . В нашем примере x_{24} оказывается состоящим из утверждений " $c - \text{set}$ ", " $c \subseteq b$ "; x_{25} - из единственного утверждения " $\text{card}(c) = n$ ".

Выбирается переменная x_{26} , не входящая в теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{27} присваивается список, получаемый из x_{15} удалением равенства x_{15} и добавлением терма "значение(x_{26} x_{20})". В нашем примере x_{27} состоит из термов "кортеж(f, n, b)", " $a(\text{Val}(f))$ ". Переменной x_{28} присваивается терм "мощность(класс(x_{12} и(x_{27})))". Выбирается переменная x_{29} , не входящая в теорему и отличная от переменной x_{26} . В нашем примере - переменная d . Переменной x_{30} присваивается список, полученный подстановкой в утверждения набора x_{24} переменной x_{29} вместо переменной x_{19} и добавлением терма "значение(x_{26} x_{29})". Переменной x_{31} присваивается терм "мощность(класс(x_{29} и(x_{30})))". Переменной x_{32} присваивается результат добавления к списку x_{22} импликаций "длялюбого(x_{29} если значение(x_{26} x_{29})то T)", где T - результаты подстановки в термы списка x_{25} переменной x_{29} вместо переменной x_{19} . Наконец, формируется импликация с антецедентами x_{32} , консеквентом которой служит равенство выражения x_{28} произведению заменяющей части теоремы на выражение x_{31} . Эта импликация регистрируется в списке вывода.

7. Попытка исключения антецедента, связывающего между собой два параметра под описателем "класс".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ad}(a - \text{натуральное} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ 0 \leq d \rightarrow \text{card}(\text{set}_b(b - \text{натуральное} \ \& \ a \mid b \ \& \ b \leq d)) = [d/a])$$

из теоремы

$$\forall_{ac}(a - \text{натуральное} \ \& \ a \mid c \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ 0 \leq c \rightarrow \text{card}(\text{set}_b(b - \text{натуральное} \ \& \ a \mid b \ \& \ b \leq c)) = c/a)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть. В ней выделяется вхождение x_{11} описателя "класс". Переменной x_{12} присваивается подтерм по вхождению x_{11} , переменной x_{13} - связывающая приставка описателя, переменной x_{14} - набор конъюнктивных членов утверждения под описателем. Проверяется, что его длина не менее 2. Переменной x_{15} присваивается набор антецедентов теоремы. В списке x_{14} выбирается элементарное утверждение x_{16} . В нашем примере - " $b \leq c$ ". Выбирается параметр x_{17} утверждения x_{16} , являющийся также параметром терма x_{10} . В нашем примере - c . Проверяется, что переменная x_{17} имеет единственное вхождение в терм x_{10} . Рассматривается антецедент x_{18} , содержащий переменную x_{17} и имеющий не менее двух параметров, общих с параметрами терма x_{10} . В нашем примере - антецедент " $a \mid c$ ". Проверяется, что любая отличный от x_{18} антецедент, содержащий переменную x_{17} , имеет ее своим единственным параметром. Выбирается переменная x_{20} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная d . Переменной x_{21} присваивается набор результатов замены переменной x_{17} на x_{20} в антецедентах

теоремы, отличных от x_{18} . Проверяется, что набор x_{21} непуст. Переменной x_{22} присваивается результат замены переменной x_{17} на x_{20} в терме x_{16} . В нашем примере он имеет вид " $b \leq d$ ". Переменной x_{23} присваивается кванторная импликация со связывающей приставкой x_{13} , антецеденты которой получаются удалением из списка x_{14} терма x_{16} , а консеквент - эквивалентность x_{16} и x_{22} . В нашем примере x_{23} имеет вид " $\forall_b(b - \text{натуральное} \ \& \ a \mid b \rightarrow b \leq c \leftrightarrow b \leq d)$ ". Переменной x_{24} присваивается список всех содержащих x_{17} антецедентов исходной теоремы, к которому добавляется утверждение x_{23} .

Решается задача на описание с посылками x_{21} и условиями x_{24} , цели которой суть "полный", "явное", "прямойответ", "нормнеизв", "неизвестные x_{17} ". Ответ присваивается переменной x_{26} . В нашем примере он имеет вид " $c = a[d/a]$ ". Проверяется, что x_{26} отлично от символа "отказ", и переменной x_{27} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{26} . В нем находится равенство x_{28} переменной x_{17} некоторому выражению x_{29} . В нашем примере x_{29} имеет вид " $a[d/a]$ ". Переменной x_{31} присваивается результат замены вхождения подтерма x_{16} в x_{10} на x_{22} . В нашем примере он имеет вид " $\text{card}(\text{set}_b(b - \text{натуральное} \ \& \ a \mid b \ \& \ b \leq d))$ ". Переменной x_{32} присваивается результат подстановки выражения x_{29} вместо переменной x_{17} в заменяющий терм теоремы. В нашем примере он имеет вид " $a[d/a]/a$ ". Переменной x_{33} присваивается равенство выражений x_{31} и x_{32} . Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x_{21} и отличные от x_{28} утверждения списка x_{27} , а консеквент - x_{33} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

8. Попытка обобщения путем ввода вспомогательного параметра для сложного подвыражения с небесповторной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(b \in \{0, \dots, a-1\} \ \& \ a - \text{натуральное} \ \& \ a \mid (d-b) \ \& \ d - \text{целое} \rightarrow \text{card}(\text{set}_c(c \pmod a) = b \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ d \leq c) = \text{счетное})$$

из теоремы

$$\forall_{abn}(b \in \{0, \dots, a-1\} \ \& \ a - \text{натуральное} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow \text{card}(\text{set}_c(c \pmod a) = b \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ a + b + an \leq c) = \text{счетное})$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть, переменной x_{11} - список антецедентов, переменной x_{12} - заменяющая часть. Проверяется, что самое сложное подвыражение заменяемой части - она сама. Выбирается параметр x_{14} терма x_{10} . В нашем примере - n . Проверяется, что x_{14} имеет единственное вхождение в терм x_{10} . Переменной x_{15} присваивается максимальное надвыражение вхождения x_{14} в x_{10} , не имеющее внутри себя описателей и подутверждений. В нашем примере x_{15} - вхождение выражения " $a + b + an$ ". Проверяется, что подтерм T по вхождению x_{15} не однобуквенный. Выбирается переменная x_{16} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - d . Переменной x_{17} присваивается тип значения выражения x_{15} . В нашем примере - "число". Список антецедентов разбивается на подсписок x_{18} утверждений, содержащих переменную x_{14} , и подсписок x_{19} остальных утверждений. Переменной x_{21} присваивается результат добавления к списку x_{18} утверждений "равно($x_{16} \ T$)", " $x_{17}(x_{16})$ ".

В нашем примере x21 состоит из утверждений " n – целое", " $d = a + b + an$ ", "число(d)".

Решается задача на описание, посылки которой суть утверждения x19, а условия - x21. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x14", "параметры x14", "упростить". Ответ присваивается переменной x23. В нашем примере он имеет вид " d – целое & $a \mid (d - b)$ ". Проверется, что x23 отлично от символа "отказ", и переменной x24 присваивается объединение списка x11 с набором конъюнктивных членов утверждения x23. Переменной x25 присваивается результат замены в терме x10 вхождения x15 на переменную x16. В нашем примере он имеет вид " $\text{card}(\text{set}_c(c \pmod a = b \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ d \leq c))$ ".

Переменной x26 присваивается результат добавления к списку x24 равенства "равно(x16 T)". Выбирается переменная x27, не входящая в исходную теорему и отличная от переменной x16. В нашем примере - переменная e . Решается задача на описание, посылки которой суть утверждения x26, а единственное условие - равенство термов x27 и x12. В нашем примере оно имеет вид " $e = \text{счетное}$ ". Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x27", "известно X ", "упростить". Здесь X - список всех отличных от x14 переменных теоремы, к которому добавлена переменная x16. Ответ задачи присваивается переменной x30. Проверяется, что он имеет вид равенства для неизвестной x27. В нашем примере ответ совпадает с исходным условием. Переменной x31 присваивается правая часть равенства x30. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x19 и конъюнктивные члены утверждения x23, а консеквентом - равенство выражений x25 и x31. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "равны", после чего регистрируется в списке вывода.

9. Обобщение тождества путем ввода неповторного внешнего параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{adg}(\neg(d = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{lim}(g) - \text{число} \ \& \ \text{последовательность}(g, \mathbb{R}) \rightarrow \text{lim}(\lambda_n(ag(n)/d, n - \text{натуральное})) = a \text{lim}(g)/d)$$

из теоремы

$$\forall_{abg}(a - \text{число} \ \& \ \text{последовательность}(g, \mathbb{R}) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{lim}(g) = b \rightarrow \text{lim}(\lambda_c(ag(c), c - \text{натуральное})) = ab)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \cdot (a/b) = ae/b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. Проверяется, что заголовок заменяемой части не встречается в заменяющей. В терме x10 находится вхождение x12 символ "отображение". Внутри последнего операнда вхождения x12 выбирается вхождение x13 неоднобуквенного подтерма; переменной x14 присваивается символ по вхождению x13. В нашем примере x13 - вхождение выражения " $ag(c)$ ". Проверяется, что число операндов вхождения x13 равно 2. Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x20

присваивается заменяемая часть дополнительной теоремы. Проверяется, что она имеет заголовок x_{14} . Выбирается вхождение x_{21} корневого операнда терма x_{20} , имеющее два операнда. В нашем примере x_{21} - вхождение терма " a/b ". Определяется единица E операции x_{21} . Переменной x_{23} присваивается переменная, являющаяся первым операндом терма x_{21} , переменной x_{24} - переменная, являющаяся вторым операндом этого терма. В нашем примере $x_{23} - a$, $x_{24} - b$. Проверяется, что переменные x_{23} , x_{24} различны. Переменной x_{26} присваивается переменная, являющаяся корневым операндом терма x_{20} . В нашем примере - e . Переменной x_{27} присваивается вхождение того операнда операции x_{13} , по которому она имеет единицу. Переменной x_{28} присваивается переменная по вхождению x_{27} . В нашем примере - переменная a . Проверяется, что a - параметр терма x_{10} , имеющий в нем единственное вхождение. Переменной x_{29} присваивается вхождение корневого операнда терма x_{13} , отличное от x_{27} . В нашем примере - $g(c)$. Переменной x_{31} присваивается та из переменных x_{23} , x_{24} , по которой операция x_{21} имеет единицу, а переменной x_{30} - другая из них. Переменной x_{32} присваивается заменяющая часть дополнительной теоремы. Проверяется, что ее заголовок отличен от символа x_{14} , а число корневых операндов равно 2. Переменной x_{33} присваивается вхождение того корневого операнда терма x_{32} , который имеет заголовок x_{14} . Проверяется, что число корневых операндов вхождения x_{33} равно 2. Переменной x_{34} присваивается вхождение того операнда вхождения x_{33} , который равен x_{26} , а переменной x_{35} - вхождение операнда, равного x_{30} . В нашем примере - соответственно, e и a . Если операция x_{14} некоммутативна, проверяется, что номера операндов x_{21} и x_{35} равны. Переменной x_{36} присваивается вхождение того корневого операнда терма x_{32} , которое отлично от x_{33} . Проверяется, что по вхождению x_{36} расположен символ x_{31} .

Переменной x_{37} присваивается заголовок терма x_{32} . Проверяется избыточность ввода нового параметра: если x_{13} - операнд операции x_{37} , противоположным операндом которой служит неповторная в x_{10} переменная, то прием не применяется.

Переменной x_{38} присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - d . Переменной x_{39} присваивается результат соединения операцией x_{37} подтерма x_{13} и x_{38} , в котором номер операнда x_{38} такой же, как операнда x_{36} операции x_{32} . В нашем примере x_{39} имеет вид " $ag(c)/d$ ". Переменной x_{40} присваивается результат замены вхождения x_{13} в терм x_{10} на x_{39} , переменной x_{41} - результат подстановки в подтерм x_{21} переменных x_{28} и x_{38} вместо x_{30} и x_{31} . Переменной x_{42} присваивается результат подстановки в терм x_{11} выражения x_{41} вместо переменной x_{28} . В нашем примере x_{40} имеет вид " $\lim(\lambda_c(ag(c)/d, c - \text{натуральное}))$ ", x_{42} - вид " $(a/d) \cdot b$ ".

Переменной x_{44} присваивается результат подстановки в antecedentes дополнительной теоремы выражений x_{28} , x_{38} и x_{29} вместо переменных x_{30} , x_{31} и x_{26} . Переменной x_{45} присваивается объединение x_{44} с результатами подстановки терма x_{41} вместо переменной x_{28} в antecedentes исходной теоремы.

Снова анализируется избыточность ввода дополнительного параметра: выражение x_{40} обрабатывается относительно посылок x_{45} нормализаторами общей стандартизации и проверяется отсутствие сдвоенных переменных - беспо-

вторных переменных, являющихся операндами одной и той же ассоциативно-коммутативной операции.

Создается импликация с антецедентами x45, консеквентом которой служит равенство выражений x42 и x40, с сохранением ориентации исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Ввод вспомогательных обозначений для вычисляемых по рекурсии подвыражений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{af}(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ \lim(f) = a \rightarrow \lim(\lambda_c(-f(c), c - \text{натуральное})) = -a)$$

из теоремы

$$\forall_f(\lim(f) - \text{число} \ \& \ \text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \rightarrow \lim(\lambda_c(-f(c), c - \text{натуральное})) = -\lim(f))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - список антецедентов, переменной x12 - заменяющая часть. Переменной x13 присваивается набор имеющих наибольшую сложность подтермоа терма x12. В нашем примере он состоит из единственного терма " $\lim(f)$ ". Проверяется, что каждый из термов списка x13 имеет тот же заголовок, что и терм x10, является выражениями встречается в каком-либо антецеденте. Переменной x14 присваивается список не входящих в исходную теорему различных переменных, имеющих ту же длину, что и набор x13. В нашем примере x14 состоит из единственной переменной a . Переменной x15 присваивается набор наборов посылок, в которых имеется подтерма набора x13. В нашем примере x15 состоит из единственного одноэлементного набора, содержащего посылку " $\lim(f) - \text{число}$ ". Проверяется, что различные элементы списка x15 не пересекаются друг с другом. Переменной x16 присваивается список антецедентов, не вошедших в наборы x15. В нашем примере он состоит из единственного утверждения " $\text{последовательность}(f, \mathbb{R})$ ".

В наборах списка x15 подтермы x13 заменяются на обозначающие их переменные списка x14. В нашем примере получается список, состоящий из одноэлементного набора, содержащего терм " $a - \text{число}$ ".

К списку x16 добавляются утверждения наборов x15, а также равенства выражений x15 обозначающим их переменным списка x14. В нашем примере получаем список " $\text{последовательность}(f, \mathbb{R})$ ", " $a - \text{число}$ ", " $\lim(f) = a$ ". Переменной x17 присваивается результат замены в терме x12 выражений x13 на обозначающие их переменные x14. В нашем примере имеем " $-a$ ". Наконец, создается импликация с антецедентами x16 и консеквентом " $\text{равно}(x10 \ x17)$ ". Она регистрируется в списке вывода.

2. Получение теоремы для использования кванторной посылки, выражающей свойство функции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abf}(\forall_x(b(x) \rightarrow a = f(x)) \rightarrow \text{set}_x(x \in \text{Dom}(f) \ \& \ b(x)) \subseteq \text{слой}(f, a))$$

из теоремы

$$\forall_{af}(f - \text{функция} \rightarrow \text{слой}(f, a) = \text{set}_x(x \in \text{Dom}(f) \ \& \ a = f(x)))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок "класс". Переменной x11 присваивается заменяющая часть, переменной x12 - связывающая приставка описателя. Проверяется, что она одноэлементна. Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под описателем. Среди них выбирается элементарное утверждение x14, и в нем - вхождение x15 символа "значение". В нашем примере x14 имеет вид " $a = f(x)$ ". Переменной x16 присваивается переменная, являющаяся первым операндом вхождения x15. В нашем примере - f . Проверяется, что f не входит в терм x12. Переменной x17 присваивается переменная, являющаяся вторым операндом вхождения x15. В нашем примере - x . Проверяется, что она входит в терм x12. Выбирается переменная x18, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b . Переменной x19 присваивается кванторная импликация "длялюбого(x17 если значение(x18 x17) то x14)", переменной x20 - утверждение "содержится(класс(x17 P)x11)". Здесь P - конъюнкция отличных от x14 утверждений списка x13, к которым добавлено утверждение "значение(x18 x17)". В нашем примере x19 имеет вид " $\forall_x(b(x) \rightarrow a = f(x))$ ", x20 - вид " $\text{set}_x(x \in \text{Dom}(f) \ \& \ b(x)) \subseteq \text{слой}(f, a)$ ". Создается импликация, антецедентами которой служат отличные от терма "функция(x16)" антецеденты исходной теоремы, а также утверждения x19. Консеквентом ее является утверждение x20. Данная импликация регистрируется в списке вывода. Она снабжается характеристикой "функвых(x11)".

3. Переход от класса к объединению семейства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bce}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{функция} \ \& \ c - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(b) = e \ \& \ \text{Dom}(c) = e \ \& \ \text{семействомножеств}(b) \ \& \ \text{семействомножеств}(c) \rightarrow \text{set}_a(\exists_d(d \in e \ \& \ a \in b(d) \ \& \ a \in c(d))) = \bigcup_{d,d \in e} (b(d) \cap c(d)))$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow b \cap c = \text{set}_a(a \in b \ \& \ a \in c))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - список антецедентов, переменной x12 - заменяющая часть. Проверяется, что терм x10 имеет заголовок "класс", а выражение x12 элементарно и параметры его совпадают с параметрами терма x10. Переменной x13 присваивается этот общий список параметров. В нашем примере - b, c . Проверяется, что он непуст. Переменной x14 присваивается связывающая приставка описателя x10, переменной x15 - набор конъюнктивных членов утверждения под описателем. В нашем примере x15 состоит из утверждений " $a \in b$ ", " $a \in c$ ". Переменной x16

присваивается список элементов набора x_{15} , не имеющих параметров списка x_{13} . В нашем примере он пуст. Переменной x_{17} присваивается результат отбрасывания из списка x_{15} утверждений x_{16} . Выбираются переменные X, Y , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные d, e . Переменной x_{19} присваивается список выражений "значение($P X$)" для переменных P списка x_{13} . В нашем примере - " $b(d), c(d)$ ". Переменной x_{20} присваивается результат добавления утверждения "принадлежит(X, Y)" перед набором подстановок термов x_{19} вместо переменных x_{13} в термы списка x_{17} . В нашем примере x_{20} состоит из утверждений " $d \in e, a \in b(d), a \in c(d)$ ". Переменной x_{21} присваивается выражение "класс(x_{14} и(x_{16} существует(X и(x_{20}))))". В нашем примере - " $\text{set}_d(\exists d(d \in e \ \& \ a \in b(d) \ \& \ a \in c(d)))$ ". Переменной x_{22} присваивается результат подстановки в x_{12} выражений x_{19} вместо переменных x_{13} . В нашем примере имеем " $b(d) \cap c(d)$ ". Переменной x_{23} присваивается список, состоящий из утверждения "множество(Y)" и всевозможных утверждений "функция(F)", "равно(область(F) Y)" для переменных F списка x_{13} . Для каждого антецедента Q списка x_{11} создается кванторная импликация "длялюбого(X если принадлежит(X, Y) то Q)". Она сворачивается в элементарное утверждение при помощи задачи на преобразование, добавляемое к списку x_{23} . В итоге x_{23} оказывается состоящим из утверждений " $e - \text{set}$ ", " $b - \text{функция}$ ", " $c - \text{функция}$ ", " $\text{Dom}(b) = e$ ", " $\text{Dom}(c) = e$ ", "семействомножеств(b)", "семействомножеств(c)". Переменной x_{24} присваивается выражение "объединениевсех(отображение(X принадлежит($X Y$) x_{22}))". Создается импликация с антецедентами x_{23} , консеквентом которой является равенство выражений x_{21} и x_{24} . Она регистрируется в списке вывода.

4. Исключение описателя в группе посылок с помощью вспомогательной задачи на описание (случай пересечения).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcdeK}(\text{set}_a(c(a) \ \& \ d(a)) = e \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow b \in \text{точки}(\text{set}_a(c(a)), K) \ \& \ b \in \text{точки}(\text{set}_a(d(a)), K) \leftrightarrow b \in \text{точки}(e, K))$$

из теоремы

$$\forall_{AK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ A - \text{set} \rightarrow \text{точки}(A, K) = \text{set}_x(x - \text{точка} \ \& \ \text{коорд}(x, K) \in A))$$

Переменной x_9 присваивается список антецедентов, переменной x_{11} - заменяемый терм. Проверяется, что его заголовок - символ "класс". Переменной x_{12} присваивается набор конъюнктивных членов под описателем "класс". В этом наборе выбирается утверждение x_{13} с заголовком "принадлежит" либо "содержится". В нашем примере - утверждение " $\text{коорд}(x, K) \in A$ ". Переменной x_{14} присваивается переменная - второй операнд утверждения x_{13} . В нашем примере - переменная " A ". Проверяется, что переменная x_{14} имеет единственное вхождение в терме x_{11} . Переменной x_{15} присваивается заменяющий терм теоремы. Проверяется, что x_{14} имеет единственное вхождение в терм x_{15} . Выбирается список x_{16} из пяти переменных, не входящих в исходную теорему. В нашем примере - a, b, c, d, e . Они присваиваются, соответственно, переменным $x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{20}$ и x_{21} .

Переменной x_{22} присваивается результат подстановки выражения "класс(x_{17} значение(x_{19} x_{17}))" вместо переменной x_{14} в выражение x_{15} . В нашем примере имеем "точки($\text{set}_a(c(a)), K$)". Аналогично, переменной x_{23} присваивается результат подстановки выражения "класс(x_{17} значение(x_{20} x_{17}))" вместо переменной x_{14} в выражение x_{15} . В нашем примере имеем "точки($\text{set}_a(d(a)), K$)".

Переменной x_{24} присваивается утверждение "равно(класс(x_{17} и(значение(x_{19} x_{17}))значение(x_{20} x_{17}))) x_{21} ". В нашем примере - " $\text{set}_a(c(a) \& d(a)) = e$ ". Переменной x_{25} присваивается результат подстановки переменной x_{21} вместо x_{14} в терм x_{15} . В нашем примере - "точки(e, K)". Список антецедентов теоремы x_2 разбивается на список x_{26} утверждений, содержащих переменную x_{14} , и список x_{27} остальных утверждений. Переменной x_{28} присваивается результат объединения списка x_{27} с наборами результатов подстановки в утверждения x_{26} термов "класс(x_{17} значение(x_{19} x_{17}))" и "класс(x_{17} значение(x_{20} x_{17}))" вместо переменной x_{14} . Переменной x_{29} присваивается эквивалентность утверждений "и(принадлежит(x_{18} x_{22})принадлежит(x_{18} x_{23}))" и "принадлежит(x_{18} x_{25})". Переменной x_{30} присваивается результат обработки списка x_{28} процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{29} . Затем создается импликация с антецедентами x_{24} , x_{30} и консеквентом x_{29} . Она регистрируется в списке вывода.

5. Исключение описателя в группе посылок с помощью вспомогательной задачи на описание (случай разности).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcdeK}(\text{set}_a(c(a) \& \neg d(a)) = e \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow b \in \text{точки}(\text{set}_a(c(a)), K) \& \neg(b \in \text{точки}(\text{set}_a(d(a)), K)) \leftrightarrow b \in \text{точки}(e, K))$$

из теоремы

$$\forall_{AK}(\text{систкоорд}(K) \& A - \text{set} \rightarrow \text{точки}(A, K) = \text{set}_x(x - \text{точка} \& \text{коорд}(x, K) \in A))$$

Прием совершенно аналогичен предыдущему, и начала их программ совпадают.

6. Загрубление формулы нахождения производной для нормализатора "нормпроизводная".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow d \sin a / da = \cos a)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \& b \subseteq \mathbb{R} \& \text{Квазивнутр}(a, b) \rightarrow \text{производная}(\lambda_c(\sin c, c \in b), a) = \cos a)$$

Заметим, что в скобочной записи выводимая теорема имеет вид:

$$\text{"длялюбого}(x_1 \text{ если число}(x_1) \text{ то равно}(\text{производная}(\text{отображение}(x_3 \text{ число}(x_3) \text{ синус}(x_3))x_1) \text{ косинус}(x_1)))\text{"}$$

Смысл рассматриваемого "заглубления" заключается в том, что во всех шаблонах вычисления производных элементарных функций в решателе вместо указания фактической области определения функции стоит терм "число(x)" для связанной переменной x . Это ничуть не мешает аккуратному рассмотрению той точки, в которой производная вычисляется, и в действительности является лишь условным соглашением, упрощающим идентификацию термина "производная(...)".

Проверяется, что заменяющая часть имеет вид "производная(отображение($X A B$) C)", причем заголовок утверждения Аотличен от символа "число". Проверяется также, что заменяющая часть не содержит символа "производная". Переменной $x13$ присваивается результат обработки исходной теоремы оператором "Нормтеорема" с опцией "производная". Этот оператор обращается к задаче на преобразование, в которой срабатывает прием:

$$\forall_{ABt}(\forall_{axy}(x - \text{set} \ \& \ x \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Квазивнутр}(a, x) \ \& \ A(y) \rightarrow \text{производная}(\lambda_z(t(y, z), z \in x), a) = B(a, y)) \leftrightarrow \forall_{ay}(a - \text{число} \ \& \ A(y) \rightarrow dt(y, a)/da = B(a, y))$$

Этот прием применяется в задачах на преобразование, имеющих цель "нормтеорема" и комментарий "производная".

Реализация либо упрощение антецедента

1. Попытка реализации самого сложного антецедента с помощью ранее выведенных теорем данного цикла вывода.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ag}(a - \text{число} \ \& \ \text{lim}(g) - \text{число} \ \& \ \text{последовательность}(g, \mathbb{R}) \rightarrow \text{lim}(\lambda_c(ag(c), c - \text{натуральное})) = a\text{lim}(g))$$

из теоремы

$$\forall_{abfg}(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \ \& \ \text{последовательность}(g, \mathbb{R}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{lim}(f) = a \ \& \ \text{lim}(g) = b \rightarrow \text{lim}(\lambda_c(f(c)g(c), c - \text{натуральное})) = ab)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b = \lambda_c(a, c - \text{натуральное}) \rightarrow \text{lim}(b) = a)$$

Переменной $x8$ присваивается набор антецедентов, переменной $x9$ - оценка сложности конъюнкции антецедентов. Переменной $x12$ присваивается существенный антецедент, оценка сложности которого равна $x9$. Проверяется, что этот антецедент содержит лишь часть переменных связывающей приставки теоремы. В нашем примере $x12$ - равенство " $\text{lim}(f) = a$ ". В списке вывода выбирается теорема, имеющая характеристику с заголовком "подбор". В нашем примере это указанная выше дополнительная теорема. Переменной $x15$ присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере получаем:

$$\forall_{de}(d - \text{число} \ \& \ e = \lambda_h(d, h - \text{натуральное}) \rightarrow \text{lim}(e) = d)$$

Переменной x16 присваивается консеквент теоремы x15, переменной x17 - список его параметров. Определяется подстановка S вместо переменных x17, унифицирующая термы x16 и x12. Переменной x19 присваивается набор результатов применения S к антецедентам теоремы x15. Создается импликация, антецеденты которой суть отличные от x12 антецеденты исходной теоремы, а также утверждения списка x19. Консеквент ее такой же, как у исходной теоремы. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка сведения антецедента, выражающего свойство функции, к равенству для некоторой характеристики той же функции, определяемой в текущей ячейке вывода.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdefgj}(\text{предел}(g, j, c) = -\infty \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g \text{ — функция} \ \& \ \text{Локопред}(g, c, j) \ \& \ f \text{ — функция} \ \& \ \text{Число}(c) \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d \text{ — число} \ \& \ \text{Локопред}(f, c, j) \ \& \ \text{типпредела}(j) \ \& \ \text{Dom}(g) = e \ \& \ \text{Dom}(f) = e \ \& \ \text{предел}(f, j, c) = d \rightarrow \lim_{b \rightarrow c \setminus j}(g(b) + f(b)) = -\infty)$$

из теоремы

$$\forall_{aeghi}(\text{Dom}(g) = e \ \& \ \text{Dom}(h) = e \ \& \ \text{предел}(g, i, a) = -\infty \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g \text{ — функция} \ \& \ h \text{ — функция} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(g, a, i) \ \& \ \text{Локопред}(h, a, i) \ \& \ \text{локогрсверху}(h, a, i) \rightarrow \lim_{b \rightarrow a \setminus i}(g(b) + h(b)) = -\infty)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abfi}(f \text{ — функция} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b \text{ — число} \ \& \ \text{Локопред}(f, a, i) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{предел}(f, i, a) = b \rightarrow \text{локогрсверху}(f, a, i))$$

Переменной x8 присваивается набор антецедентов, переменной x9 - консеквент. Проверяется, что стартовая теорема списка вывода имеет характеристику вида "определение(равно($A \ B$)))". В нашем примере - "определение(равно(предел(f, i, a))минусбеск))". Переменной x12 присваивается заголовок терма A . В нашем примере - символ "предел". Проверяется, что консеквент - равенство. Переменной x13 присваивается вхождение той его части, которая имеет заголовок x12. Внутри x13 рассматривается вхождение x15 символа "значение". В нашем примере - вхождение подтерма $h(b)$. Переменной x16 присваивается переменная - первый операнд вхождения x15. В нашем примере - переменная h . Проверяется, что среди антецедентов нет равенства, содержащего оновременно символ x12 и переменную x16. Переменной x17 присваивается название раздела, к которому относится символ x12. В нашем примере - "пределы". Просматриваются теоремы x22 данного раздела, имеющие характеристику "попыткаспуска" либо "проверка". В нашем примере x22 - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x23 присваивается вхождение консеквента дополнительной теоремы, переменной x24 - заголовок консеквента. Переменной x25 присваивается вхождение антецедента исходной теоремы, имеющего заголовок x24. В нашем примере - антецедента "локогрсверху(h, a, i)". Проверяется, что дополнительная теорема имеет среди своих антецедентов равенство, содержащее символ x12.

Оператор "выводпосылки" определяет результат х26 замены в исходной теореме антецедента х25 на группу утверждений, следствием которых он является согласно дополнительной теореме. Переменной х27 присваивается список антецедентов теоремы х26, переменной х28 - ее консеквент. Переменной х29 присваивается список утверждений набора х27, представляющих собой равенства переменных выражениям, не содержащим этих переменных. В нашем примере х29 состоит из утверждений "Dom(g) = e", "Dom(f) = e", "предел(f, j, c) = d". Переменной х30 присваивается остаток списка х27. Каждое утверждение списка х30 заменяется на результат подстановки вместо переменных - частей равенств списка х29 - противоположных частей этих равенств. Далее список х30 обрабатывается процедурой "нормантецеденты" относительно своих параметров. Создается импликация, антецеденты которой получаются объединением списков х31 и х29, а консеквентом служит утверждение х28. Она регистрируется в списке вывода.

3. Попытка реализации кванторного антецедента, выражающего постоянство некоторой характеристики варьируемого объекта.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ce}(c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ e \subseteq c \ \& \ \text{конечное}(c) \rightarrow \text{card}(\text{set}_{ij}(i \in e \ \& \ j \in c \setminus \{i\})) = (-1 + \text{card}(c))\text{card}(e))$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{семействомножеств}(f) \ \& \ \text{конечные}(\text{Val}(f)) \ \& \ \text{card}(\text{Dom}(f)) = a \ \& \ \forall_i(i \in \text{Dom}(f) \rightarrow b = \text{card}f(i)) \rightarrow \text{card}(\text{set}_{ij}(i \in \text{Dom}(f) \ \& \ j \in f(i))) = ab)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c \in b \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(b \setminus \{c\}) = -1 + \text{card}(b))$$

Переменной х8 присваивается список антецедентов теоремы. В нем выбирается кванторная импликация х9. В нашем примере - " $\forall_i(i \in \text{Dom}(f) \rightarrow b = \text{card}f(i))$ ". Переменной х10 присваивается ее связывающая приставка. Проверяется, что она стоит из единственной переменной, и эта переменная присваивается переменной х11. Переменной х12 присваивается вхождение консеквента импликации х9. Проверяется, что этот консеквент - равенство. Переменной х15 присваивается та часть равенства, которая содержит подтерм вида "значение(х17 х11)", где х17 - переменная, отличная от х11. В нашем примере х11 - i , х17 - f . Проверяется, что х11 имеет единственное вхождение в терм х15. Переменной х18 присваивается противоположная часть равенства. В нашем примере - " b ". Проверяется, что х11 не входит в х18 и что х17 имеет единственное вхождение в х15. Переменной х19 присваивается заголовок терма х15. В нашем примере - "мощность". Определяется раздел х20, к которому относится символ х19. В нашем примере - "мощности". Просматриваются тождества х24 раздела х20, имеющие характеристику с заголовком "нормализация" либо "числатом". В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Переменной х27 присваивается та часть равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок х19; переменной х28 - другая часть равенства. В нашем

примере x_{27} имеет вид " $\text{card}(b \setminus \{c\})$ ", x_{28} - вид " $-1 + \text{card}(b)$ ". Проверяется, что параметры терма x_{27} исчерпывают все переменные дополнительной теоремы. Переменной x_{29} присваивается список параметров терма x_{28} . Проверяется, что он непуст и не включает списка параметров терма x_{27} . В нашем примере - не включает переменной c . Проверяется, что дополнительная теорема не имеет антецедента, начинающегося с символа "не".

Переменной x_{31} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере получаем:

$$\forall_{cd}(c - \text{set} \ \& \ d \in c \ \& \ \text{конечное}(c) \rightarrow \text{card}(c \setminus \{d\}) = -1 + \text{card}(c))$$

Переменной x_{32} присваивается результат замены вхождения x_{16} в терм x_{15} на переменную x_{17} . В нашем примере - " $\text{card}(f)$ ". Переменной x_{36} присваивается та часть равенства в консеквенте теоремы x_{31} , которая содержит все переменные данной теоремы, переменной x_{37} - другая часть. В нашем примере, соответственно, имеем " $\text{card}(c \setminus \{d\})$ " и " $-1 + \text{card}(c)$ ". Переменной x_{38} присваивается список параметров термов x_{36} , x_{37} , x_{32} , x_{18} . В нашем примере - " b, c, d, f ". Находится подстановка S вместо переменных x_{38} , унифицирующая x_{36} с x_{32} , а x_{37} - с x_{18} . Переменной x_{40} присваивается терм, подставляемый этой подстановкой вместо переменной x_{17} . В нашем примере - " $c \setminus \{d\}$ ". Переменной x_{41} присваивается результат применения подстановки S к терму x_{18} . В нашем примере - " $-a + \text{card}(c)$ ". Переменной x_{42} присваивается список параметров терма x_{40} , не являющихся параметрами терма x_{41} . Проверяется, что он одноэлементный, и переменной x_{43} присваивается его элемент. В нашем примере - d . Выбирается переменная x_{44} , не входящая в исходную теорему и в теорему x_{31} . В нашем случае - e . Переменной x_{45} присваивается терм " $\text{отображение}(x_{43} \ x_{44})x_{40}$ ". В нашем примере - " $\lambda_d(c \setminus \{d\}, d \in e)$ ".

Набор антецедентов исходной теоремы разбивается на поднабор x_{46} утверждений, содержащих переменную x_{17} , и поднабор x_{47} остальных утверждений. Переменной x_{48} присваивается результат добавления к x_{47} утверждения " $\text{множество}(x_{44})$ ". Переменной x_{49} присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_{31} . Этот набор разбивается на поднабор x_{50} утверждений, содержащих переменную x_{43} , и поднабор x_{51} остальных утверждений. К списку x_{48} добавляются утверждения набора x_{51} . Переменной x_{52} присваивается набор результатов подстановки переменной x_{43} вместо переменной x_{11} в антецеденты импликации x_9 .

Для каждого утверждения списка x_{53} создается кванторная импликация, консеквентом которой служит это утверждение, антецедентами - утверждения x_{52} , а единственной связанной переменной - x_{43} . Эта импликация упрощается вспомогательной задачей на преобразование. Если получается элементарное утверждение, то оно добавляется к списку x_{48} . Иначе - применение приема обрывается.

В подстановке S терм, подставлявшийся вместо переменной x_{17} , заменяется на терм x_{45} . Определяется набор x_{55} результатов применения скорректированной подстановки S к утверждениям x_{48} и отличным от x_9 элементам списка x_{46} .

Находится также результат х56 применения подстановки S к консеквенту исходной теоремы. Затем создается импликация с антецедентами х55 и консеквентом х56, которая обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- Использование другого тождества для сведения вычисления операции над сложной функцией к ее подфункции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{adghi}(\neg(\cos h = 0) \ \& \ \forall_e(e \in g \rightarrow \neg(\cos d(e) = 0)) \ \& \ h = \text{предел}(d, i, a) \ \& \ \text{Dom}(d) = g \ \& \ g \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(d, a, i) \rightarrow \lim_{e \rightarrow a \setminus i} \text{tg } d(e) = \text{tg } h)$$

из теоремы

$$\forall_{abcdgi}(\neg(c = 0) \ \& \ \forall_e(e \in g \rightarrow \neg(\cos d(e) = 0)) \ \& \ b = \lim_{e \rightarrow a \setminus i} \sin d(e) \ \& \ c = \lim_{e \rightarrow a \setminus i} \cos d(e) \ \& \ \text{Dom}(d) = g \ \& \ g \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(d, a, i) \rightarrow \lim_{e \rightarrow a \setminus i} \text{tg } d(e) = b/c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abghi}(\text{Dom}(h) = g \ \& \ g \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ h - \text{функция} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(h, a, i) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{предел}(h, i, a) = b \rightarrow \lim_{e \rightarrow a \setminus i} \sin h(e) = \sin b)$$

Переменной х9 присваивается набор антецедентов, переменной х11 - вхождение заменяемой части. Проверяется, что первым операндом вхождения х11 служит символ "отображение". Переменной х12 присваивается символ по вхождению х11. В нашем примере х12 - символ "предел". Переменной х13 присваивается вхождение антецедента теоремы, представляющего собой равенство для выражения с заголовком х12 и первым операндом - описателем "отображение". Переменной х14 присваивается вхождение той части равенства, которая является указанным выражением, переменной х16 - вхождение выражения под описателем "отображение". В нашем примере х14 имеет вид " $\lim_{e \rightarrow a \setminus i} \sin d(e)$ ", х16 - " $\sin d(e)$ ". Переменной х17 присваивается символ по вхождению х16. В нашем примере - "синус". Проверяется, что х17 отлично от символа "значение", но что символ "значение" в подтерме х16 встречается.

Просматриваются теоремы списка вывода. Переменной х19 присваивается теорема, имеющая характеристику "описатель(...)", причем такая, что ее консеквент - равенство, заменяемая часть которого имеет заголовок х12, а ее первый операнд - символ "отображение". В нашем примере х19 - указанная выше дополнительная теорема. Переменной х24 присваивается вхождение ее заменяемой части. Проверяется, что заголовок выражения под описателем "отображение" данной части равен х17 и что х12 не входит в заменяющую часть дополнительной теоремы. Переменной х25 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере имеем:

$\forall f h k l m (\text{Dom}(l) = k \ \& \ k \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(l) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ l - \text{функция} \ \& \ \text{Число}(f) \ \& \ \text{типпредела}(m) \ \& \ \text{Локопред}(l, f, m) \ \& \ h - \text{число} \ \& \ \text{предел}(l, m, f) = h \rightarrow \lim_{j \rightarrow f \setminus m} \sin l(j) = \sin h)$

Переменной x26 присваивается вхождение консеквента теоремы x25, переменной x27 - вхождение ее заменяемой части. Переменной x28 присваивается вхождение первого операнда вхождения x14. Иными словами, x28 - вхождение описателя "отображение" из антецедента исходной теоремы. Переменной x29 присваивается связывающая приставка описателя x28. В нашем примере x28 имеет вид " $\lambda_e(\sin d(e), e \in g)$ ", x29 состоит из переменной e . Переменной x30 присваивается вхождение первого операнда вхождения x27, т.е. описателя "отображение" из консеквента дополнительной теоремы. Переменной x31 присваивается связывающая приставка описателя x30. В нашем примере x30 имеет вид " $\lambda_j(\sin l(j), j \in k)$ ", x31 - переменная j . Переменной x32 присваивается результат подстановки в подтерм x26 переменных x29 вместо переменных x31. В нашем примере - " $\lim_{e \rightarrow f \setminus m} \sin l(e) = \sin h$ ". Переменной x33 присваивается подтерм по вхождению x13. В нашем примере - " $b = \lim_{e \rightarrow a \setminus i} \sin d(e)$ ".

Переменной x34 присваивается список переменных F , для которых в терме x32 либо x33 встречается подтерм "значение(F x29)". В нашем примере это переменные l, d . Проверяется, что список x34 непуст. Переменной x36 присваивается результат замены в терме x32 всех выражений вида "значение(F x29)", где F из x34, на F . Переменной x37 присваивается результат такой же замены для x33. В нашем примере x36 имеет вид " $\lim_{e \rightarrow f \setminus m} \sin l = \sin h$ ", x37 - вид " $b = \lim_{e \rightarrow a \setminus i} \sin d$ ". Переменной x38 присваивается список переменных связывающих приставок исходной теоремы и теоремы x25, являющихся параметрами термов x36, x37. В нашем примере x38 - список $a, b, d, g, i, f, h, k, l, m$. Определяется подстановка S вместо переменных x38, унифицирующая термы x36 и x37.

Переменной x40 присваивается результат применения подстановки S к предпоследнему терму описателя x28, указывающему условия на варьируемые переменные. В нашем примере получаем " $e \in g$ ".

Просматриваются термы T , на которые подстановка S заменяет переменные x38. Если такой терм отличен от переменной списка x34, но содержит переменные F списка x34, то каждая переменная F указанного списка заменяется в нем на терм "значение(F x29)". Затем терм T заменяется в подстановке S на "отображение(x29 x40 T)". В нашем примере подстановка S не изменяется.

Переменной x41 присваивается набор результатов применения подстановки S к утверждениям списка x9, отличным от x33, а также к антецедентам дополнительной теоремы. Переменной x42 присваивается результат применения подстановки S к подтерму консеквенту исходной теоремы. Создается импликация с антецедентами x41 и консеквентом x42, которая обрабатывается оператором "Нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Оператору "Нормтеорема" передается указание на использование для упрощения теоремы всех ранее полученных в данном списке вывода тождеств, в частности, тождества для предела косинуса, которым удастся воспользоваться из-за расширившегося набора антецедентов.

Склейка двух теорем

1. Попытка усмотрения системы из двух уравнений с двумя неизвестными операциями над семействами по данной теореме и другой теореме того же цикла вывода.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ 0 \leq b - a \rightarrow \sum_{e=a}^b \cos e = 2 \sin(-a/2 + b/2 + 1/2) \sin(1/2) \cos(a/2 + b/2) / (-\cos 1 + 1))$$

из теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ 0 \leq d - c \rightarrow (-1 + \cos 1) \sum_{x=c}^d \sin x + \sin 1 \sum_{x=c}^d \cos x = \sin c + \sin(d + 1))$$

$$\forall_{cd}(c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ 0 \leq d - c \rightarrow (-1 + \cos 1) \sum_{x=c}^d \cos x - \sin 1 \sum_{x=c}^d \sin x = -\cos c + \cos(d + 1))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - список вхождений в нее описателей "отображение". Проверяется, что этот список двухэлементный. Переменной x12 присваивается пара пар (внешняя операция для принадлежащего списка x11 описателя "отображение" - наиболее сложный символ выражения, определяющего значение отображения). В нашем примере x12 состоит из пар (сумма всех, синус) и (сумма всех, косинус). В списке вывода находится отличная от исходной теоремы кванторная импликация x14, имеющая характеристику "описатель(...)". В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Проверяется, что в ней встречаются все символы, перечисленные в парах x12. Переменной x15 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере имеем:

$$\forall_{ab}(a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ 0 \leq b - a \rightarrow (-1 + \cos 1) \sum_{e=a}^b \cos e - \sin 1 \sum_{e=a}^b \sin e = -\cos a + \cos(b + 1))$$

Переменной x16 присваивается вхождение консеквента теоремы x15, переменной x19 - ее заменяемая часть, переменной x20 - список вхождений в x19 описателей "отображение". Проверяется, что список x20 двухэлементный. По нему составляется пара пар x21, аналогичная паре x12. В нашем примере - пары (сумма всех, косинус) и (сумма всех, синус). Переменной x24 присваивается пара подтермов - описателей "отображение" для вхождений x11. В нашем примере - " $\lambda_x(\sin x, x - \text{целое} \ \& \ c \leq x \ \& \ x \leq d)$ " и " $\lambda_x(\cos x, x - \text{целое} \ \& \ c \leq x \ \& \ x \leq d)$ ". Переменной x26 присваивается список переменных термов x24. Затем определяется подстановка S вместо переменных x26, унифицирующая каждый из термов пары x24 с "соответствующим" подтермом пары описателей x20. Соответствие определяется по совпадению пар наборов x12 и x21. Переменной x28 присваивается объединение антецедентов теоремы x15 с результатами применения S к антецедентам исходной теоремы. Выбирается пара x29 переменных, не входящих в исходную теорему и теорему x15. В нашем примере - переменные f, g . Переменной x30 присваивается пара вхождений, операндами которых являются вхождения списка x11. Переменной x32 присваивается результат замены в терме x10 вхождений x30 на переменные x29. В нашем примере имеем

" $f(-1 + \cos 1 + g \sin 1)$ ". Переменной x_{33} присваивается результат применения к терму x_{32} подстановки S . В нашем примере она не изменяет терма x_{32} .

Переменной x_{34} присваивается пара вхождений x_{20} , переупорядоченных соответственно вхождениям x_{11} . Переменной x_{35} присваивается пара вхождений, операндами которых являются вхождения списка x_{34} . Переменной x_{36} присваивается результат замены этих вхождений в терме x_{19} на переменные x_{29} . В нашем примере имеем " $g(-1 + \cos 1) - f \sin 1$ ". Переменной x_{37} присваивается тип значений операции по первом из вхождений x_{30} . В нашем примере - "число". Аналогично, переменной x_{38} присваивается тип значения для второго из вхождений x_{30} . Переменной x_{39} присваивается результат применения подстановки S к заменяющему терму исходной теоремы. В нашем примере - " $-\sin a + \sin(b + 1)$ ". Создается задача на описание x_{41} , посылками которой служат утверждения x_{28} , а условиями - равенство выражений x_{33} и x_{39} , равенство выражения x_{36} заменяющей части теоремы x_{15} и утверждения " $x_{37}(X)$ ", " $x_{38}(Y)$ ", где X, Y - переменные пары x_{29} . В нашем примере эти условия суть: " $f(-1 + \cos 1) + g \sin 1 = -\sin a + \sin(b + 1)$ ", " $g(-1 + \cos 1) - f \sin 1 = -\cos a + \cos(b + 1)$ ", " f - число", " g - число". Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "редуцирование", "неизвестные x_{29} ". Ответ задачи присваивается переменной x_{42} . Проверяется, что он отличен от символа "отказ". Переменной x_{43} присваивается результат подстановки в этот ответа вместо переменных x_{29} подтермов по вхождениям пары x_{35} . Выбирается элемент x_{44} списка конъюнктивных членов утверждения x_{43} (заметим, что это утверждение - пара равенств для найденных значений неизвестных, замененных на соответствующие операции над семействами). Создается импликация с антецедентами x_{28} и консеквентом x_{44} , которая обрабатывается оператором "нормтеорема" и заносится в список вывода.

2. Склеивка двух импликаций, отличающихся антецедентами, выражающими равенство одного и того же выражения различным значениям.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acefgj} (\text{предел}(g, j, c) = -\infty \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g \text{ - функция} \ \& \ \text{Локопред}(g, c, j) \ \& \ f \text{ - функция} \ \& \ \text{Число}(c) \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Локопред}(f, c, j) \ \& \ \text{типпредела}(j) \ \& \ \text{Dom}(g) = e \ \& \ \text{Dom}(f) = e \ \& \ \text{предел}(f, j, c) = a \ \& \ (a = -\infty \ \vee \ a \text{ - число}) \rightarrow \lim_{b \rightarrow c \setminus j} (g(b) + f(b)) = -\infty)$$

из теоремы

$$\forall_{cdefgj} (\text{предел}(g, j, c) = -\infty \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g \text{ - функция} \ \& \ \text{Локопред}(g, c, j) \ \& \ f \text{ - функция} \ \& \ \text{Число}(c) \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d \text{ - число} \ \& \ \text{Локопред}(f, c, j) \ \& \ \text{типпредела}(j) \ \& \ \text{Dom}(g) = e \ \& \ \text{Dom}(f) = e \ \& \ \text{предел}(f, j, c) = d \rightarrow \lim_{b \rightarrow c \setminus j} (g(b) + f(b)) = -\infty)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cdefg} (\text{предел}(g, j, c) = -\infty \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g \text{ - функция} \ \& \ \text{Локопред}(g, c, f) \ \& \ d \text{ - функция} \ \& \ \text{Число}(c) \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Локопред}(d, c, f) \ \& \ \text{типпредела}(f) \ \& \ \text{предел}(d, f, c) = -\infty \ \& \ \text{Dom}(g) = e \ \& \ \text{Dom}(f) = e \rightarrow \lim_{b \rightarrow c \setminus f} (g(b) + f(b)) = -\infty)$$

Переменной x_9 присваивается набор антецедентов, переменной x_{11} - консеквент. В списке вывода находится отличная от исходной теорема x_{13} с характеристикой вида "описатель(...)", консеквент x_{14} которой имеет ту же длину, что и x_{11} . В нашем примере x_{13} - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x_{15} присваивается список параметров терма x_{14} . Проверяется, что x_{11} - результат применения к x_{14} некоторой подстановки S вместо переменных x_{15} . Переменной x_{17} присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам дополнительной теоремы. Переменной x_{18} присваивается разность списков x_{17} и x_9 , переменной x_{19} - разность списков x_9 и x_{17} . Проверяется, что каждый из списков x_{18} и x_{19} не более чем двухэлементный. В нашем примере x_{18} состоит из единственного утверждения "предел(f, j, c) = $-\infty$ ", x_{19} - из двух утверждений " d - число" и "предел(f, j, c) = d ". В списке x_{18} находится равенство x_{20} , в списке x_{19} - равенство x_{21} . Проверяется, что левые части этих равенств совпадают. Выбирается переменная x_{22} , не входящая в исходную теорему и в утверждения x_{17} . В нашем примере - переменная a . Переменной x_{23} присваивается равенство левой части равенства x_{20} переменной x_{22} . В нашем примере - "предел(f, j, c) = a ".

Переменной x_{24} присваивается пара списков, получаемых, соответственно, заменой в x_{18} равенства x_{20} на равенство переменной x_{22} правой части равенства x_{20} , и заменой в x_{19} равенства x_{21} на равенство переменной x_{22} правой части равенства x_{21} . Просматриваются более чем одноэлементные наборы E - элементы пары x_{24} . Если началом такого набора служит равенство, правой частью которого служит переменная X , не входящая в x_{11} и в общие термы списков x_9, x_{17} , то это равенство из набора E удаляется, а в оставшийся элемент подставляется x_{22} вместо X .

Переменной x_{25} присваивается дизъюнкция конъюнкций элементов пары x_{24} . В нашем примере - " $a = -\infty \vee a$ - число". Переменной x_{26} присваивается результат удаления из списка x_9 утверждений x_{19} . Переменной x_{27} присваивается результат добавления к x_{26} утверждений x_{23} и x_{25} . Затем создается импликация x_{28} с антецедентами x_{27} и консеквентом x_{11} . Исходная теорема и дополнительная теорема помечаются в списке вывода элементом "исключение", а импликация x_{28} регистрируется в списке вывода как их обобщение.

3. Склейка двух импликаций, отличающихся лишь заменой вхождений одного и того же подтерма на другой подтерм.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acdgi}(\text{предел}(g, i, a) = d \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g \text{ - функция} \ \& \ c \text{ - число} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(g, a, i) \ \& \ (d = -\infty \vee d = \infty) \rightarrow \lim_{b \rightarrow a \setminus i}(c + g(b)) = d)$$

из теоремы

$$\forall_{acgi}(\text{предел}(g, i, a) = -\infty \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g \text{ - функция} \ \& \ c \text{ - число} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(g, a, i) \rightarrow \lim_{b \rightarrow a \setminus i}(c + g(b)) = -\infty)$$

и дополнительной теоремы

$\forall_{acgi}(\text{предел}(g, i, a) = \infty \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(g, a, i) \rightarrow \lim_{b \rightarrow a \setminus i}(c + g(b)) = \infty)$

Переменной x9 присваивается набор антецедентов, переменной x11 - консеквент, представляющий собой равенство. В списке вывода находится отличная от исходной теорема x13 с характеристикой "описатель(...)". В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x14 присваивается ее консеквент и проверяется, что его длина равна длине терма x11, причем длины исходной и дополнительной теорем совпадают. Заметим, что $-\infty$ - символ "минусбеск". Далее, проверяется совпадение связывающих приставок исходной и дополнительной теорем. Оператор "разлтермов" определяет пары вхождений в исходную и дополнительную теоремы, где они различаются. В нашем примере - вхождения символов "минусбеск" и "плюсбеск". Проверяется, что все подтермы по точкам различия в каждой из теорем между собой совпадают (в нашем примере в исходной теореме везде в них расположен символ "минусбеск", в дополнительной - символ "плюсбеск"). Переменной x19 присваивается подтерм, расположенный на точках различия в первой теореме, переменной x20 - во второй. Проверяется, что подтермы x19, x20 элементарны и параметры их содержатся в связывающей приставке исходной теоремы. Выбирается переменная x21, не встречающаяся в исходной и дополнительной теоремах. В нашем примере - переменная d . Переменной x23 присваивается результат замены подтермов по точкам различия первой теоремы на переменную x21. Переменной x25 присваивается список, получаемый добавлением к антецедентам теоремы x23 дизъюнкции равенств переменной x21 термам x19 и x20. Создается импликация с антецедентами x25, консеквент которой совпадает с консеквентом теоремы x23. Она регистрируется в списке вывода как обобщения исходной и дополнительных теорем, помечаемых символом "исключение".

Использование альтернативы для объединения двух классов

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{bcf}(0 < c - b \ \& \ 0 < f - c \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow (b, c] \cup [c, f) = (b, f))$

из теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow (b, c] = \text{set}_a(b < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ a \leq c))$

и дополнительных теорем

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a \leq b \ \vee \ b \leq a)$

$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \text{set}_a(a - \text{число} \ \& \ b \leq a \ \& \ a < c) = [b, c))$

Переменной x9 присваивается набор антецедентов, переменной x11 - заменяемая часть равенства в консеквенте. Проверяется, что ее заголовок - символ "класс". Переменной x12 присваивается связывающая приставка описателя "класс". Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x13 присваивается ее элемент. В нашем примере x13 - переменная "a". Переменной x14 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под описателем. Проверяется, что он не менее чем двухэлементный и состоит из элементарных утверждений. В нем выбирается утверждение x15, содержащее переменную x13. В нашем примере - " $a \leq c$ ". Переменной x16 присваивается заголовок утверждения x15. Справочник поиска теорем "дизъюнкция" находит

по символу x_{16} указанную выше первую дополнительную теорему. Переменной x_{17} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{17} имеет вид:

$$\forall_{de}(d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d \leq e \vee e \leq d)$$

Переменной x_{20} присваивается вхождение консеквента теоремы x_{17} . Проверяется, что этот консеквент - дизъюнкция. Переменной x_{21} присваивается список ее операндов. В этом списке выбирается утверждение x_{22} с заголовком x_{16} . В нашем примере - " $d \leq e$ ". Переменной x_{23} присваивается список параметров утверждения x_{22} . Проверяется, что он включает в себя все переменные теоремы x_{17} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{23} , унифицирующая термы x_{22} и x_{15} . Переменной x_{25} присваивается элемент списка x_{21} , отличный от x_{22} . В нашем примере - " $e \leq d$ ". Переменной x_{26} присваивается результат применения к x_{25} подстановки S . В нашем примере - " $c \leq a$ ". Переменной x_{27} присваивается заменяющая часть исходной теоремы. Рассматривается ее подтерм x_{29} , имеющий максимальную сложность. В нашем примере - " (b, c) ". Переменной x_{30} присваивается заголовок терма x_{29} . В нашем примере - "промежуток". Переменной x_{31} присваивается название раздела, к которому относится понятие x_{30} . В нашем примере "числовоемножества". Предпринимается просмотр раздела x_{31} , имеющих характеристику вида "описатель(...)". В нашем примере это вторая дополнительная теорема. Проверяется, что консеквент этой теоремы - равенство, один из операндов которого элементарен, а другой - описатель "класс" с одноэлементной связывающей приставкой, причем заголовок утверждения x_{26} встречается среди заголовков конъюнктивных членов утверждения под описателем.

Переменной x_{36} присваивается результат переобозначения переменных второй дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере имеем:

$$\forall_{ef}(e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow \text{set}_a(d - \text{число} \ \& \ e \leq d \ \& \ d < f) = [e, f])$$

Переменной x_{38} присваивается вхождение того операнда консеквента теоремы x_{36} , который имеет заголовок "класс", переменной x_{40} - набор конъюнктивных членов утверждения под описателем x_{38} . Проверяется, что в нем не менее двух элементов. Среди них выбирается тот элемент x_{41} , заголовок которого совпадает с заголовком терма x_{26} . В нашем примере - " $e \leq d$ ". Переменной x_{42} присваивается список параметров терма x_{41} . Определяется подстановка R вместо переменных x_{42} , унифицирующая термы x_{26} и x_{41} . Переменной x_{44} присваивается связывающая переменная описателя x_{38} . В нашем случае - d . Проверяется, что подстановка R переводит эту переменную в переменную x_{13} . Переменной x_{45} присваивается результат применения подстановки R к конъюнкции отличных от x_{41} утверждений списка x_{40} . В нашем примере имеем " $a - \text{число} \ \& \ a < f$ ". Переменной x_{46} присваивается конъюнкция отличных от x_{15} утверждений списка x_{14} . В нашем примере - " $b < a \ \& \ a - \text{число}$ ". Переменной x_{47} присваивается список antecedентов теоремы x_{36} . Проверяется, что переменная x_{44} в них не встречается. Переменной x_{48} присваивается объединение списка antecedентов исходной теоремы, результатов применения подстановки R к утверждениям x_{47} , а также не содержащих переменной x_{13} результатов применения подстановки S к antecedентам теоремы x_{17} .

Переменной x_{49} присваивается терм "длялюбого(x_{13} если A x_{15} то x_{45})", переменной x_{50} - терм "длялюбого(x_{13} если B x_{26} то x_{46})". Здесь A - все конъюнктивные

члены утверждения $x46$, не имеющие других параметров, кроме $x13$; B - все конъюнктивные члены утверждения $x45$, не имеющие других параметров, кроме $x13$. В нашем примере $x49$ имеет вид " $\forall_a(a - \text{число} \ \& \ a \leq c \rightarrow a - \text{число} \ \& \ a < f)$ ", $x50$ - вид " $\forall_a(a - \text{число} \ \& \ c \leq a \rightarrow b < a \ \& \ a - \text{число})$ ".

Создается задача на описание, посылками которой служат утверждения $x48$, а условиями - $x49$ и $x50$. Задача имеет цели "полный", "прямоответ", "редакция", "свертка". Переменной $x52$ присваивается ответ задачи. В нашем примере - " $0 < f - c \ \& \ 0 < c - b$ ". Проверяется, что этот ответ отличен от символа "отказ", и переменной $x53$ присваивается набор его конъюнктивных членов. Проверяется, что все они элементарны. Переменной $x54$ присваивается результат применения подстановки R к отличному от $x38$ операнду консеквента теоремы $x36$. В нашем примере имеем " $[c, f]$ ". Переменной $x55$ присваивается терм "объединение($x27$ $x54$)". В нашем примере - " $(b, c) \cup [c, f]$ ". Переменной $x56$ присваивается выражение "класс($x13$ и($x45$ $x46$))". В нашем примере - " $\text{set}_a(a - \text{число} \ \& \ a < f \ \& \ b < a \ \& \ a - \text{число})$ ". Это выражение упрощается относительно посылок $x48$ с помощью вспомогательной задачи на преобразование. Ответ присваивается переменной $x58$. В нашем примере - " (b, f) ". Проверяется, что выражение $x58$ элементарно. Затем создается импликация, антецедентами которой служат утверждения $x48$ и $x53$, а консеквентом - равенство $x55$ и $x58$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Попытка варьирования дополнительной теоремы

1. Варьирование тождества с невырожденными числовыми атомами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bce}(\text{мточка}(b) \ \& \ \text{промежутки}(c, e) \ \& \ \text{Числотр}(c) \rightarrow \text{длина}(\text{Путь}(b, c)) = \sum_{i=1}^{l(e)} \text{длина}(\text{Путь}(b, e(i))))$$

из теоремы

$$\forall_{acP}(\text{мточка}(b) \ \& \ \text{промежутки}(c, e) \ \& \ \text{Числотр}(c) \rightarrow \text{Путь}(a, c) = \text{путь}(\lambda_i(\text{Путь}(a, P(i)), i \in \{1, \dots, l(P)\})))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{an}(\text{пути}(a) \ \& \ l(a) = n \rightarrow \text{длина}(\text{путь}(a)) = \sum_{i=1}^n \text{длина}(a(i)))$$

Здесь "Путь(A, B)" - ориентированная кривая, по которой материальная точка A перемещается в течение промежутка времени B ; "путь(A)" ориентированная кривая, возникающая при последовательном прохождении ориентированных кривых набора A ; "промежутки(A, B)" означает, что B есть набор невырожденных отрезков, объединение которых равно A , причем каждый следующий отрезок набора B имеет своим началом конец следующего; "пути(A)" означает, что A есть конечная последовательность ориентированных кривых, у которых начало каждой следующей кривой является концом предыдущей. Условие "Числотр(A)" означает, что A есть не сводящийся к точке числовой отрезок.

Переменной $x9$ присваивается список антецедентов, переменной $x11$ - заменяемая часть. Проверяется, что первый корневой операнд терма $x11$ имеет заголовок "отображение". Переменной $x13$ присваивается заголовок терма $x11$, переменной $x14$ - раздел, к которому относится $x13$. В нашем примере $x13$ - символ

"путь", x_{14} - "оркривые". Просматриваются теоремы x_{18} раздела x_{14} , имеющие характеристику "числзнач" либо "числатом". В нашем примере x_{18} - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x_{19} присваивается входжение ее консеквента, представляющего собой некоторое равенство. Переменной x_{20} присваивается набор антецедентов дополнительной теоремы. Переменной x_{21} присваивается входжение той части равенства x_{19} , которая представляет собой числовой атом. В нашем примере - "длина(путь(a))". Внутри входжения x_{21} выбирается входжение x_{24} символа x_{13} . Оператор "тождвывод" определяет результат x_{25} преобразования входжения x_{24} в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "Нормтеорема", с привлечением ранее выведенных теорем списка вывода, и регистрируется в списке вывода.

3.61 Характеристика "опр"

Характеристикой "опр(A)" снабжаются теоремы, представляющие собой определение функции, обозначенной символом A .

Использование тождества для упрощения заменяемой части дополнительной теоремы

1. Использование дополнительной теоремы, связанной с самым сложным понятием определяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_x (x - \text{число} \ \& \ 0 \leq 2x + \pi \ \& \ 0 \leq -2x + \pi \rightarrow \arcsin \sin x = x)$$

из теоремы

$$\text{обрфункция}(\lambda_x(\sin x, x \in [-\pi/2, \pi/2])) = \lambda_x(\arcsin x, x \in [-1, 1])$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_f (f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \text{обрфункция}(f) - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(\text{обрфункция}(f)) = \text{Val}(f) \ \& \ \forall_x (x \in \text{Dom}(f)) \rightarrow \text{обрфункция}(f)(f(x)) = x)$$

Переменной x_8 присваивается входжение консеквента. Проверяется, что это консеквент - равенство. Переменной x_9 присваивается символ A из текущей характеристики "опр(A)". В нашем примере - "арксинус". Переменной x_{11} присваивается входжение той части равенства, которая имеет заголовок "отображение", причем заголовок выражения, определяющего значение выражения, равен x_9 . Переменной x_{12} присваивается противоположная часть равенства. Переменной x_{13} присваивается набор самых сложных подтермов терма x_{12} . Проверяется, что он состоит из единственного терма, и переменной x_{14} присваивается заголовок данного терма. В нашем примере - "обрфункция". Переменной x_{15} присваивается заголовок терма x_{12} . В нашем примере - тоже "обрфункция". Просматриваются теоремы x_{19} того раздела, к которому относится x_{15} . В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x_{20} присваивается входжение символа x_{15} в дополнительную теорему. В нашем

примере - вхождение выражения "обрфункция(f)". Проверяется, что внутри вхождения x_{20} встречается символ x_{14} . В нашем примере он расположен непосредственно по вхождению x_{20} . Оператор "тождвывод" присваивает переменной x_{21} результат преобразования вхождения x_{20} в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Переменной x_{22} присваивается результат обработки утверждения x_{21} оператором "нормтеорема". В нашем примере x_{22} имеет вид:

$$\forall_x(x - \text{число} \ \& \ 0 \leq x + \pi/2 \ \& \ 0 \leq -x + \pi/2 \rightarrow \arcsin \sin x = x)$$

Антецеденты теоремы x_{22} обрабатываются оператором "нормантецеденты" относительно параметров ее консеквента, и результат регистрируется в списке вывода.

3.62 Характеристика "опратом"

Характеристикой "опратом(A)" снабжаются тождества, позволяющие определить числовой атом A при помощи равенства в посылках, фиксирующего значение более сложного числового атома.

Обобщение теоремы

1. Развязка переменных определяемого числового атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdef}(\neg(b = f) \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \neg(b = d) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(b = e) \ \& \ \text{точкалуча}(b, c, d) \ \& \ \text{точкалуча}(b, e, f) \ \& \ \text{скалумнож}(\text{вектор}(bd), \text{вектор}(bf)) = a \rightarrow a = \cos(\angle(cbe))l(db)l(bf))$$

из теоремы

$$\forall_{BCDa}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{скалумнож}(\text{вектор}(CB), \text{вектор}(CD)) = a \rightarrow a = \cos(\angle(BCD))l(BC)l(CD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = DE) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \ \& \ \text{точкалуча}(A, D, E) \rightarrow \angle(BAD) = \angle(CAE))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - терм A из текущей характеристики "опратом(A)". В нашем примере - " $\angle(BCD)$ ". Переменной x_{10} присваивается заголовок терма x_9 . Справочник поиска теорем "равнчисл" определяет по x_{10} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{15} присваивается направление замены, определенной характеристикой "варугол(...)" к этой теореме.

Проверяется "симметричность" дополнительной теоремы. Для этого переменной x_{16} присваивается набор ее антецедентов, переменной x_{18} - заменяемая

часть согласно направлению x15, переменной x19 - заменяющая часть. В нашем примере x18 - " $\angle(CAE)$ "; x19 - " $\angle(BAD)$ ". Проверяется, что x19 получено из x18 переобозначением переменных без отождествлений. Находится список x23 всех антецедентов, содержащих параметры терма x18, не входящие в x19. В нашем примере эти параметры суть C, E . Переменной x24 присваивается список остальных антецедентов. Рассматривается конъюнкция утверждений x23, к которой применяется подстановка, переводившая x18 в x19. В нашем примере эта конъюнкция имеет вид:

B - точка & D - точка & $\neg(A = D)$ & $\neg(A = B)$ & точкалуча(A, B, B) & точкалуча(A, D, D)

Проверяется, что данная конъюнкция - следствие утверждений x24. Если это не так, прием не применяется.

После приведенной выше проверки программа откатывается к точке, гдк первой не определенной переменной является x16. В консеквенте исходной теоремы находится вхождение x16 подтерма A . Оператор "тождвывод" определяет результат x17 преобразования этого вхождения при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$\forall_{abcdef}(\neg(d = b) \& \neg(b = f) \& d - \text{точка} \& b - \text{точка} \& f - \text{точка} \& \text{скалумнож}(\text{вектор}(bd), \text{вектор}(bf)) = a \& c - \text{точка} \& e - \text{точка} \& \neg(b = d) \& \neg(b = c) \& \neg(b = e) \& \text{точкалуча}(b, c, d) \& \text{точкалуча}(b, e, f) \rightarrow a = \cos(\angle(cbe))l(db)l(bf))$

Переменной x19 присваивается вхождение в консеквент теоремы x17, соответствующее вхождению x16 в исходную теорему. В нашем примере - вхождение терма " $\cos(\angle(cbe))$ ". Переменной x21 присваивается консеквент теоремы x17, переменной x22 - результат обработки ее антецедентов процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x21. Проверяется, что консеквент имеет вид равенства с некоторой переменной в одной из своих частей. Затем находится антецедент - равенство для той же переменной, и части данного равенства переставляются так, чтобы переменная оказалась справа. После этого создается импликация с антецедентами x22 и консеквентом x21, которая регистрируется в списке вывода.

2. Попытка отбрасывания избыточного отрицания равенства в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{abcdef}(\neg(b = e) \& f - \text{точка} \& e - \text{точка} \& \neg(b = c) \& d - \text{точка} \& c - \text{точка} \& b - \text{точка} \& \text{точкалуча}(b, c, d) \& \text{точкалуча}(b, e, f) \& \text{скалумнож}(\text{вектор}(bd), \text{вектор}(bf)) = a \rightarrow a = \cos(\angle(cbe))l(db)l(bf))$

из теоремы

$\forall_{abcdef}(\neg(b = e) \& f - \text{точка} \& e - \text{точка} \& \neg(b = c) \& d - \text{точка} \& c - \text{точка} \& b - \text{точка} \& \neg(b = d) \& \text{точкалуча}(b, c, d) \& \text{точкалуча}(b, e, f) \& \text{скалумнож}(\text{вектор}(bd), \text{вектор}(bf)) = a \rightarrow a = \cos(\angle(cbe))l(db)l(bf))$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - набор утверждений, сопровождающих консеквент по о.д.з. Среди антецедентов находится

отрицание x_{10} равенства переменной x_{13} не содержащему ее терму x_{14} . В нашем примере оно имеет вид " $\neg(b = d)$ ", причем $x_{13} - b$, $x_{14} - d$. Проверяется, что утверждение x_{10} не является сопровождающим по о.д.з. для конъюнкции остальных антецедентов. Составляется список x_{17} утверждений, получаемый добавлением к отличным от x_{10} антецедентам условий на их о.д.з., а также равенства, находящегося под отрицанием в терме x_{10} . При помощи задачи на доказательство устанавливается, что консеквент - следствие утверждений x_{17} . Тогда создается импликация, полученная из исходной отбрасыванием антецедента x_{10} . Она регистрируется в списке вывода, а исходная теорема помечается символом "исключение".

3.63 Характеристика "определение"

Характеристикой "определение(A)" снабжаются теоремы, представляющие собой определение терма A (утверждения либо выражения).

Логические следствия теоремы

1. Извлечение из определения с конъюнкцией в консеквенте кванторной импликации для одного конъюнктивного члена консеквента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{fx}(x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \text{обрфункция}(f)(f(x)) = x)$$

из теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \text{обрфункция}(f) - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(\text{обрфункция}(f)) = \text{Val}(f) \ \& \ \forall_x(x \in \text{Dom}(f) \rightarrow \text{обрфункция}(f)(f(x)) = x))$$

Эта теорема определяет терм "обрфункция(f)".

Проверяется, что заголовок консеквента - символ "и". Рассматривается вхождение x_{10} одного из конъюнктивных членов консеквента. В нашем примере - " $\forall_x(x \in \text{Dom}(f) \rightarrow \text{обрфункция}(f)(f(x)) = x)$ ". Создается импликация, антецеденты которой - те же, что у исходной теоремы, а консеквент - подтерм x_{10} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Извлечение из эквивалентности с конъюнкцией в заменяющей части импликации для усмотрения определяемого отношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \in b \ \& \ \text{нижняягрань}(a, b) \rightarrow \text{наименьший}(a, b))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{наименьший}(a, b) \leftrightarrow a \in b \ \& \ \forall_c(c \in b \rightarrow a \leq c))$$

Эта теорема определяет терм "наименьший(a, b)".

Проверяется, что консеквент - эквивалентность. Переменной x9 присваивается входение определяемой части, переменной x10 - определяющей. Проверяется, что x10 - конъюнкция. Создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы конъюнктивных членов подтерма x10, а консеквент - определяемая часть. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Извлечение из эквивалентности с конъюнкцией в заменяющей части импликации для усмотрения конъюнктивного члена этой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{afx}(a - \text{set} \ \& \ x \in \text{прообраз}(f, a) \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow x \in \text{Dom}(f))$$

из теоремы

$$\forall_{afx}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow x \in \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f(x) \in a)$$

Эта теорема определяет терм " $x \in \text{прообраз}(f, a)$ ".

Проверяется, что теорема представляет собой эквивалентность. Переменной x9 присваивается входение определяемой части, переменной x10 - определяющей. Проверяется, что по входению x10 расположен символ "и". Переменной x11 присваивается заменяемая часть; проверяется, что она элементарна. Переменной x12 присваивается набор конъюнктивных членов подтерма x10. Среди них выбирается элементарное утверждение x13. В нашем примере - " $x \in \text{Dom}(f)$ ". Проверяется, что x13 не является равенством. Затем создается импликация, антецедентами которой служат антецеденты исходной теоремы и утверждение x11, а консеквентом является x13. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Извлечение из конъюнктивного определения равенства утверждения существования.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow \exists_k(m(\text{mod } n) = k \ \& \ k \in \{0, \dots, n - 1\}))$$

из теоремы

$$\forall_{mnk}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow m(\text{mod } n) = k \leftrightarrow k \in \{0, \dots, n - 1\} \ \& \ \exists_p(p - \text{целое} \ \& \ m = k + np))$$

Эта теорема определяет терм " $m(\text{mod } n) = k$ ".

Проверяется, что теорема представляет собой эквивалентность. Переменной x9 присваивается входение определяемой части, переменной x10 - определяющей. Проверяется, что по входению x10 расположен символ "и". Переменной x11 присваивается заменяемая часть; проверяется, что она элементарна. Переменной x12 присваивается набор конъюнктивных членов подтерма x10. Среди них выбирается элементарное утверждение x13. В нашем примере - " $k \in \{0, \dots, n - 1\}$ ". Проверяется, что x13 не является равенством, а x11 - является

равенством переменной x_{16} выражению x_{17} , не содержащему этой переменной. В нашем примере x_{16} - переменная k . Проверяется, что k входит в терм x_{13} . Создается импликация, антецеденты которой те же, что у исходной теоремы, а консеквент - утверждение "существует(x_{16} и(x_{11} x_{13}))". Эта импликация регистрируется в списке вывода.

5. Извлечение из параметрического определения равенства эквивалентности для упрощения параметрических описаний.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{an}(n - \text{натуральное} \rightarrow \exists_m(m - \text{целое} \ \& \ a(m \pmod n)) \leftrightarrow \exists_k(k \in \{0, \dots, n - 1\} \ \& \ a(k))$$

из теоремы

$$\forall_{mnk}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow m \pmod n = k \leftrightarrow k \in \{0, \dots, n - 1\} \ \& \ \exists_p(p - \text{целое} \ \& \ m = k + np))$$

Эта теорема определяет терм " $m \pmod n = k$ ".

Проверяется, что теорема представляет собой эквивалентность. Переменной x_9 присваивается вхождение определяемой части, переменной x_{10} - определяющей. Проверяется, что по вхождению x_{10} расположен символ "и". Переменной x_{11} присваивается заменяемая часть; проверяется, что она элементарна и представляет собой равенство. Переменной x_{12} присваивается набор конъюнктивных членов подтерма x_{10} . Среди них выбирается утверждение x_{13} с заголовком "существует". В нашем примере - " $\exists_p(p - \text{целое} \ \& \ m = k + np)$ ". Переменной x_{14} присваивается связывающая приставка квантора x_{13} , переменной x_{15} - набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Среди них выбирается равенство x_{16} с переменной x_{17} в одной из своих частей. В нашем примере x_{16} - " $m = k + np$ ", x_{17} - m . Проверяется, что x_{17} имеет единственное вхождение в подтерм x_{10} . Проверяется, что заменяемая часть x_9 - равенство переменной x_{20} не содержащему ее выражению x_{21} . В нашем примере x_{20} - k , x_{21} - " $m \pmod n$ ". Антецеденты исходной теоремы разбиваются на подсписок x_{22} утверждений, содержащих переменную x_{17} , и подсписок x_{23} остальных утверждений. Переменной x_{24} присваивается результат отбрасывания в списке корневых операндов определяющей части теоремы утверждения x_{13} . Переменной x_{25} присваивается объединение списков x_{23} , x_{15} и x_{24} . Проверяется, что все утверждения списка x_{22} суть следствия утверждений x_{25} . Выбирается переменная x_{26} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{27} присваивается результат навешивания квантора существования по x_{17} на конъюнкцию утверждений x_{22} , к которым добавлен терм "значение(x_{26} x_{21})". В нашем примере x_{27} имеет вид " $\exists_m(m - \text{целое} \ \& \ a(m \pmod n))$ ". Переменной x_{28} присваивается результат навешивания квантора существования по x_{20} на конъюнкцию утверждений x_{24} , к которым добавлен терм "значение(x_{26} x_{20})". В нашем примере x_{28} имеет вид " $\exists_k(k \in \{0, \dots, n - 1\} \ \& \ a(k))$ ". Создается импликация с антецедентами x_{23} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{27} и x_{28} . Она регистрируется в списке вывода.

6. Вывод импликации для переформулировки антецедентов других теорем через определяемое понятие.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC} a(\neg(A = B) \& a \in \text{окружность}(AB) \& C \in \text{окружность}(AB) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \rightarrow l(AC) = l(aA))$$

из теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& \neg(A = B) \rightarrow \text{окружность}(AB) = \text{set}_C(C - \text{точка} \& l(AC) = l(AB)))$$

Эта теорема определяет терм "окружность(AB)".

Проверяется, что теорема - равенство. Переменной x10 присваивается вхождение определяемой части, переменной x11 - определяющей. Проверяется, что терм x11 имеет заголовок "класс". Переменной x12 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x13 - связывающая приставка описателя "класс", переменной x14 - набор конъюнктивных членов утверждения под этим описателем. В списке x14 выбирается утверждение x15, имеющее ровно два корневых операнда. В нашем примере - " $l(AC) = l(AB)$ ". Переменной x17 присваивается тот из корневых операндов, который имеет переменную связывающей приставки, переменной x18 - операнд, не имеющий такой переменной. В нашем примере x17 - " $l(AC)$ ", x18 - " $l(AB)$ ". Проверяется, что заголовок утверждения x15 - символ S транзитивного и коммутативного отношения. Выбирается список x19 переменных, не входящих в исходную теорему и имеющий ту же длину, что список x13. В нашем примере - единственная переменная a . Переменной x20 присваивается результат подстановки переменных x19 вместо x13 в терм x17. В нашем примере - " $l(Aa)$ ". Переменной x21 присваивается результат соединения отношением S выражений x17 и x20. Переменной x22 присваивается результат добавления к списку x12 утверждение "принадлежит(x13 x9)", "принадлежит(x19 x9)". Если списки x13, x19 более чем одноэлементны, их переменные в этих утверждениях объединяются в терм "набор(...)". Наконец, создается импликация с антецедентами x22 и консеквентом x21. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

7. Попытка усмотрения условия существования значения переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{AB}(B - \text{set} \rightarrow \exists_f(\text{Отображение}(f, A, B)) \leftrightarrow \neg(B = \emptyset) \& A - \text{set} \vee A = \emptyset)$$

из теоремы

$$\forall_{ABf}(\text{Отображение}(f, A, B) \leftrightarrow f - \text{функция} \& \text{Dom}(f) = A \& B - \text{set} \& \text{Val}(f) \subseteq B)$$

Эта теорема определяет терм "Отображение(f, A, B)".

Проверяется, что теорема представляет собой эквивалентность. Переменной x8 присваивается определяемое утверждение, переменной x10 - вхождение определяемой части, переменной x11 - вхождение определяющей. Переменной x12

присваивается набор конъюнктивных членов определяющей части, переменной x_{13} - набор антецедентов. Проверяется, что параметры антецедентов включаются в параметры терма x_8 . Среди параметров определяющей части выбирается переменная x_{14} . В нашем примере - f . Список x_{12} разбивается на подсписок x_{15} утверждений, содержащих x_{14} , и подсписок x_{16} остальных утверждений. В нашем примере x_{16} состоит из единственного утверждения " $B - set$ ". Проверяется, что все утверждения списка x_{16} используются для сопровождения по о.д.з. утверждений списка x_{15} . Проверяется, что все утверждения списка x_{12} элементарны и что определяемое утверждение имеет переменную, отличную от x_{14} . Переменной x_{17} присваивается список всех антецедентов теоремы, содержащих x_{14} . В нашем примере этот список пуст. Переменной x_{18} присваивается объединение списка не вошедших в x_{17} антецедентов теоремы, списка x_{16} и списка всех утверждений, обеспечивающих сопровождение по о.д.з. определяющей части и не содержащих переменной x_{14} . Переменной x_{19} присваивается объединение списков x_{15} и x_{17} . Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения x_{18} , а условиями - утверждения x_{19} . Ее цели - "пример", "максимум", "неизвестные x_{14} ", "параметры x_{14} ". Напомним, что цель "максимум" указывает на необходимость получения примера во всех тех случаях, когда он существует при заданных значениях известных параметров. Ответ задачи присваивается переменной x_{21} . В нашем примере он имеет вид " $\neg(A = \emptyset) \ \& \ \neg(B = \emptyset) \ \& \ A - set \ \vee \ A = \emptyset$ ". Проверяется, что x_{21} отлично от "отказ" и не является логической константой "истина" либо "ложь".

Если x_{21} содержит переменную x_{14} , то рассматривается результат навешивания квантора существования по x_{14} на утверждение x_{14} . Этот результат упрощается задачей на преобразование и переприсваивается переменной x_{21} .

Проверяется, что x_{21} не имеет связанных переменных. Создается импликация с антецедентами x_{18} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений "существует($x_{14} \ x_8$)" и x_{21} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

8. Упрощение условия принадлежности определяемому множеству.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABa}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \rightarrow a \in \text{интервал}(AB) \leftrightarrow \neg(a = A) \ \& \ \neg(a = B) \ \& \ a \in \text{отрезок}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \rightarrow \text{интервал}(AB) = \text{отрезок}(AB) \setminus \{A, B\})$$

Эта теорема определяет терм "интервал(AB)".

Проверяется, что консеквент - равенство. Переменной x_9 присваивается определяемый терм, переменной x_{10} - входение определяемой части, переменной x_{11} - входение определяющей части T . Проверяется, что либо заголовок терма T - символ "класс", либо этим заголовком является символ операции, принимающей в качестве своих значений множества. Выбирается переменная x_{12} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной

x13 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x14 - утверждение "принадлежит(x12 T)". Утверждение x14 упрощается при помощи вспомогательной задачи на преобразование. Ответ присваивается переменной x15. В нашем примере он имеет вид " $\neg(a = A) \& \neg(a = B) \& a \in \text{отрезок}(AB)$ ". Проверяется, что заголовок терма x15 отличен от символа "принадлежит". Создается импликация с антецедентами x13, консеквентом которой служит эквивалентность термов "принадлежит(x12 x9)" и x15. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

9. Упрощение условий включения, непересечения или равенства двух определяемых множеств, отличающихся единственным параметром.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \& b - \text{set} \& c - \text{set} \rightarrow a \triangle b \subseteq c \triangle b \leftrightarrow a \subseteq b \cup c \& b \cap c \subseteq a)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \& b - \text{set} \rightarrow a \triangle b = a \setminus b \cup b \setminus a)$$

Эта теорема определяет терм " $a \triangle b$ ".

Проверяется, что теорема - равенство. Переменной x9 присваивается определяемое выражение, переменной x10 - его вхождение в консеквент, переменной x11 - вхождение определяющего выражения T . Проверяется, что либо заголовок терма T - символ "класс", либо этим заголовком является символ операции, принимающей в качестве своих значений множества. Переменной x12 присваивается список параметров терма T . Выбирается переменная x13, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная c . В списке x12 выбирается переменная x14. В нашем примере - a . Переменной x15 присваивается результат замены в подтерме x11 переменной x14 на x13. В нашем случае имеем " $c \setminus b \cup b \setminus c$ ". Переменной x16 присваивается объединение набора антецедентов теоремы с результатами подстановки в эти же антецеденты переменной x13 вместо x14. Переменной x17 присваивается результат замены в терме T переменной x14 на x13. В нашем примере - $c \triangle b$. Поочередно и независимо друг от друга рассматриваются три случая:

- (a) x18 - включение подтерма x11 в x15, x19 - включение x9 в x17.
- (b) x18 - условие непересечения термов x11 и x15, x19 - условие непересечения термов x9 и x17.
- (c) x18 - условие равенства термов x11 и x15, x19 - условие равенства термов x9 и x17.

В нашем примере рассматривается первый случай, т.е. x18 имеет вид " $a \setminus b \cup b \setminus a \subseteq c \setminus b \cup b \setminus c$ ", x19 - вид " $a \triangle b \subseteq c \triangle b$ ".

Решается задача на описание, имеющая своими условиями утверждения списка x16 и утверждение x18. Единственная посылка - "истина"; цели - "полный", "явное", "прямойответ", "нормтеор", "упростить", "неизвестные X", где X - все параметры условий данной задачи. Ответ присваивается переменной x22. В

нашем примере он имеет вид " $b\text{-set} \ \& \ a \subseteq b \cup c \ \& \ a\text{-set} \ \& \ b \cap c \subseteq a \ \& \ c\text{-set}$ ". Проверяется, что x_{22} отлично от символа "отказ". Переменной x_{23} присваивается конъюнкция не вошедших в список x_{16} конъюнктивных членов утверждения x_{22} . Переменной x_{24} присваивается результат ее упрощения относительно посылок x_{16} . В нашем примере он совпадает с x_{23} . Проверяется, что утверждение x_{24} не имеет связанных переменных. Создается импликация с антецедентами x_{16} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{19} и x_{24} . Она регистрируется в списке вывода.

10. Извлечение из эквивалентности с квантором существования среди конъюнктивных членов заменяющей части кванторной импликации для вывода квантора существования.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ D \text{ — точка} \ \& \ \text{внешкасаются}(\text{окружность}(AB), \text{окружность}(CD))) \rightarrow \\ \exists_E(E \in \text{отрезок}(AC) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(CB) \ \& \ E \text{ — точка}))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ D \text{ — точка} \ \& \ \text{внешкасаются}(\text{окружность}(AB), \text{окружность}(CD))) \leftrightarrow \\ \exists_E(E \in \text{отрезок}(AC) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(CB) \ \& \ E \text{ — точка}))$$

Эта теорема определяет терм " $\text{внешкасаются}(\text{окружность}(AB), \text{окружность}(CD))$ ".

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема имеет вид эквивалентности. Переменной x_{12} присваивается набор конъюнктивных членов определяющей части. В нем выбирается утверждение x_{14} с заголовком "существует". Проверяется отсутствие у теоремы характеристики "развертка". Создается импликация, антецеденты которой суть антецеденты исходной теоремы и утверждение x_8 , а консеквент - x_{14} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

11. Попытка кванторной расшифровки определяющего утверждения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_f(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \rightarrow \text{сходится}(f)) \leftrightarrow \exists_a(\forall_d(0 < d \ \& \ d \text{ — число} \rightarrow \\ \exists_g(\forall_e(e \text{ — натуральное} \ \& \ g \leq e \rightarrow | -a + f(e) | < d) \ \& \ g \text{ — натуральное})) \ \& \ a \text{ — число}))$$

из теоремы

$$\forall_f(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \rightarrow \text{сходится}(f)) \leftrightarrow \exists_a(a \text{ — число} \ \& \ a = \lim(f))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ \text{последовательность}(b, \mathbb{R}) \rightarrow \lim(b) = a \leftrightarrow \forall_e(e - \text{число} \ \& \ 0 < e \rightarrow \exists_n(n - \text{натуральное} \ \& \ \forall_m(m - \text{натуральное} \ \& \ n \leq m \rightarrow |b(m) - a| < e))))$$

Эта теорема определяет терм "сходится(f)".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_9 присваивается определяемый терм, переменной x_{12} - определяющий. В определяющем терме рассматривается вхождение x_{13} некоторого равенства. Переменной x_{14} присваивается вхождение операнда этого равенства, имеющего своим заголовком логический символ. Этот символ присваивается переменной x_{16} . В нашем примере x_{13} - вхождение равенства " $a = \lim(f)$ ", x_{16} - символ "пределпослед". Справочник поиска теорем "опрзнач" находит по символу x_{16} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{19} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере получаем:

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ \text{последовательность}(c, \mathbb{R}) \rightarrow \lim(c) = b \leftrightarrow \forall_d(d - \text{число} \ \& \ 0 < d \rightarrow \exists_g(g - \text{натуральное} \ \& \ \forall_e(e - \text{натуральное} \ \& \ g \leq e \rightarrow |c(e) - b| < d))))$$

Переменной x_{20} присваивается вхождение консеквента теоремы x_{19} . Проверяется, что этот консеквент - эквивалентность. Переменной x_{23} присваивается та часть эквивалентности, которая является равенством, переменной x_{22} - вхождение другой части. Проверяется, что внутри подтерма x_{22} встречается квантор. Переменной x_{24} присваивается равенство по вхождению x_{13} , переменной x_{25} - список параметров этого равенства, не встречающихся среди параметров определяющего терма исходной теоремы. В нашем примере x_{25} состоит из единственной переменной a . Переменной x_{26} присваивается объединение параметров терма x_{23} с параметрами терма x_{24} , не входящими в список x_{25} . В нашем примере - " b, c, f ". Определяется подстановка S вместо переменных x_{26} , унифицирующая термы x_{23} и x_{24} . Переменной x_{29} присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_{19} . Переменной x_{30} присваивается список тех утверждения из x_{29} , параметры которых пересекаются со списком x_{25} . В нашем примере - единственное утверждение " a - число". Переменной x_{31} присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы с утверждениями из области вхождения x_{13} . В нашем примере - утверждения "последовательность(f, \mathbb{R})", " a - число". Переменной x_{32} присваивается набор результатов применения подстановки S к утверждениям x_{31} . В нашем примере он совпадает с набором x_{31} . Проверяется, что каждое утверждение списка x_{30} является следствием утверждений x_{32} . Переменной x_{33} присваивается объединение списка результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и списка не входящих в x_{30} утверждений набор x_{29} . В нашем примере x_{33} состоит из двух экземпляров терма "последовательность(f, \mathbb{R})". Переменной x_{34} присваивается результат применения подстановки S к терму x_9 , переменной x_{35} - результат применения этой подстановки к терму, полученному из x_{12} заменой вхождения x_{13} на подтерм x_{22} . Создается импликация с антецедентами x_{33} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждения x_{34} и x_{35} . Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

12. Перенесение в антецеденты всех конъюнктивных членов заменяющей части, имеющих более чем двуместные отношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{четырёхугольник}(ABCD) \rightarrow \text{параллелограмм}(ABCD) \leftrightarrow \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \rightarrow \text{параллелограмм}(ABCD) \leftrightarrow \text{четырёхугольник}(ABCD) \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD))$$

Эта теорема определяет терм "параллелограмм($ABCD$)".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_9 присваивается определяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x_{12} присваивается определяющее утверждение. Проверяется, что оно представляет собой конъюнкцию, и переменной x_{13} присваивается набор его конъюнктивных членов. Проверяется, что все они элементарны. Переменной x_{14} присваивается список всех элементов списка x_{13} , имеющих отношения с более чем двумя операндами. Проверяется, что список x_{14} непуст и не совпадает со списком x_{13} . В нашем примере он состоит из единственного утверждения "четырёхугольник($ABCD$)". Переменной x_{15} присваивается результат добавления утверждений x_{14} к антецедентам теоремы. Создается импликация с антецедентами x_{15} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждения x_9 конъюнкции не вошедших в x_{14} утверждений x_{13} . Она регистрируется в списке вывода.

13. Усмотрение приема, использующего равенство для атомарного выражения при нахождении числового атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABab}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB) \ \& \ \text{длина}(a) = b \rightarrow l(AB) = b)$$

из теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(AB)) = l(AB))$$

Эта теорема определяет терм "длина(вектор(AB))".

Переменной x_8 присваивается входжение консеквента и проверяется, что этот консеквент - равенство. Переменной x_9 присваивается входжение определяемой части, переменной x_{10} - определяющей. Переменной x_{11} присваивается список антецедентов, переменной x_{12} - сама определяющая часть, переменной x_{13} - определяемая. Проверяется, что x_{12} - числовой атом. В выражении x_{13} находится некорневое входжение x_{15} неоднобуквенного подтерма. Переменной x_{16} присваивается этот подтерм. В нашем примере - "вектор(AB)". Проверяется, что выражение x_{16} атомарное (тип его значения отличается от типа значения хотя бы одного из операндов). Переменной x_{17} присваивается список параметров терма x_{12} . Проверяется, что все они являются параметрами терма x_{16} и что все их входжения в терм x_{13} расположены внутри входжения x_{15} . Выбираются

переменные X, Y , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - a, b . Переменной x_{19} присваивается результат добавления к списку x_{11} равенства " $X = x_{16}$ " и равенства " $T = Y$ ". Здесь T - результат замены вхождения x_{15} в терм x_{13} на переменную X . В нашем примере имеем равенства " $a = \text{вектор}(AB)$ " и " $\text{длина}(a) = b$ ". Переменной x_{20} присваивается импликация с антецедентами x_{19} , консеквентом которой служит равенство " $x_{12} = Y$ ". Эта импликация регистрируется в списке вывода. Она сопровождается единственной характеристикой " $\text{опрнеизв}(n)$ ", где n - номер предпоследнего антецедента.

14. Занесение дополнительного операнда под сокращенную запись серийной операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_n (n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \rightarrow (n + 1)! = (n + 1)n!)$$

из теоремы

$$\forall_n (n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \rightarrow n! = \prod_{i=1}^n i)$$

Эта теорема определяет терм " $n!$ ".

Переменной x_8 присваивается вхождение консеквента и проверяется, что этот консеквент - равенство. Переменной x_{10} присваивается вхождение определяемой части x_9 , переменной x_{11} - определяющей. Переменной x_{12} присваивается сама определяющая часть, переменной x_{13} - список антецедентов. Проверяется, что терм x_{12} неоднобуквенный, причем является операцией от описателя "отображение". Переменной x_{14} присваивается вхождение этого описателя в x_{12} , переменной x_{15} - заголовок термина x_{12} . В нашем примере x_{15} - символ "произведениевсех". Справочник "развертка" усматривает, что x_{15} - обобщение двуместной ассоциативно-коммутативной операции x_{16} на наборы произвольной длины. В нашем примере x_{16} - "умножение". Переменной x_{17} присваивается связывающая приставка описателя x_{14} . Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x_{18} присваивается ее единственный элемент. В нашем примере - i . Переменной x_{19} присваивается набор конъюнктивных членов предпоследнего операнда описателя (он задает условия на варьируемую переменную). Проверяется, что x_{19} - трехэлементный список, состоящий из утверждений " $\text{целое}(x_{18})$ ", " $\text{меньшеилиравно}(M \ x_{18})$ ", " $\text{меньшеилиравно}(x_{18} \ N)$ ". В нашем примере $M = 1, N = n$. Проверяется, что N - переменная, имеющая единственное вхождение в x_{12} . Переменной x_{24} присваивается выражение, определяющее значения описателя "отображение". В нашем примере - i . Переменной x_{25} присваивается выражение " $\text{плюс}(N \ 1)$ ". Переменной x_{26} присваивается результат подстановки x_{25} вместо переменной x_{18} в терм x_{24} , переменной x_{27} - результат соединения операцией x_{16} выражений x_9 и x_{26} . В нашем примере x_{27} имеет вид " $n!(n + 1)$ ". Переменной x_{28} присваивается результат подстановки x_{25} вместо переменной x_{23} в выражение x_9 . В нашем примере - $(n + 1)!$. Переменной x_{29} присваивается равенство выражений x_{28} и x_{27} . Проверяется, что результаты подстановки x_{25} вместо x_{23} в содержащие переменную x_{23} антецеденты теоремы являются следствиями списка антецедентов. Затем создается импликация с антецедентами x_{13} и консеквентом x_{29} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

15. Извлечение из эквивалентности с дизъюнкцией в определяющей части импликаций для усмотрения определяемого понятия в частных случаях.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(C = D) \ \& \ B \in \text{плоскость}(ACD) \ \& \ \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{прямая}(AB)) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \rightarrow \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \leftrightarrow \text{непересек}(\text{отрезок}(AB), \text{прямая}(CD)) \ \& \ B \in \text{плоскость}(ACD) \ \vee \ A \in \text{прямая}(CD) \ \vee \ B \in \text{прямая}(CD))$$

Эта теорема определяет терм "однасторона(A, B, прямая(CD))".

Переменной x8 присваивается вхождение консеквента. Проверяется, что этот консеквент - эквивалентность. Переменной x9 присваивается определяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x12 присваивается определяющая часть. Проверяется, что она содержит символ "или". Утверждение x12 приводится к виду дизъюнктивной нормальной формы, после чего переменной x13 присваивается список ее дизъюнктивных членов. Проверяется, что он не менее чем двухэлементный.

Переменной x14 присваивается элемент списка x13. В нашем примере - "непересек(отрезок(AB), прямая(CD)) & B ∈ плоскость(ACD)". Переменной x15 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x14. Проверяется, что все они элементарны. Переменной x16 присваивается объединение списка antecedентов со списком x15. Затем создается импликация с antecedентами x16 и консеквентом x9. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

16. Вывод тождества для частичной разгруппировки серийной операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcn}(n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ c = b - n \ \& \ 0 < c \rightarrow b! = n! \prod_{i=n+1}^b i)$$

из теоремы

$$\forall_n(n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \rightarrow n! = \prod_{i=1}^n i)$$

Эта теорема определяет терм "n!".

Начало программы совпадает с программой одного из предшествующих приемов. Для удобства чтения повторим его. Проверяется, что консеквент теоремы - равенство. Переменной x9 присваивается определяемый терм, переменной x10 - вхождение определяемой части консеквента. Переменной x12 присваивается определяющая часть, переменной x13 - список antecedентов. Проверяется, что терм x12 неоднобуквенный, причем является операцией от описателя "отображение". Переменной x14 присваивается вхождение этого описателя в x12,

переменной x_{15} - заголовок термина x_{12} . В нашем примере x_{15} - символ "произведение всех". Справочник "развертка" усматривает, что x_{15} - обобщение двуместной ассоциативно-коммутативной операции x_{16} на наборы произвольной длины. В нашем примере x_{16} - "умножение". Переменной x_{17} присваивается связывающая приставка описателя x_{14} . Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x_{18} присваивается ее единственный элемент. В нашем примере - i . Переменной x_{19} присваивается набор конъюнктивных членов предпоследнего операнда описателя (он задает условия на варьируемую переменную). Проверяется, что x_{19} - трехэлементный список, состоящий из утверждений "целое(x_{18})", "меньшеилиравно(M x_{18})", "меньшеилиравно(x_{18} N)". В нашем примере $M = 1, N = n$. Проверяется, что N - переменная, имеющая единственное вхождение в x_{12} . Переменной x_{24} присваивается выражение, определяющее значения описателя "отображение". В нашем примере - i .

Далее начинаются отличия. Проверяется, что N - единственный параметр термина x_{12} . Переменной x_{25} присваивается результат переобозначения переменных исходной теоремы на новые переменные. В нашем примере x_{25} имеет вид:

$$\forall_b(b - \text{целое} \ \& \ 0 \leq b \rightarrow b! = \prod_{a=1}^b a)$$

Переменной x_{26} присваивается объединение списков антецедентов исходной теоремы и теоремы x_{25} . Переменной x_{27} присваивается вхождение определяемой части в теорему x_{25} , переменной x_{28} - вхождение определяющей части. Переменной x_{29} присваивается подтерм по вхождению x_{28} . В нашем примере - " $\prod_{a=1}^b a$ ". Переменной x_{30} присваивается вхождение в x_{29} , соответствующее вхождению x_{14} в терм x_{12} . В нашем примере x_{30} - вхождение термина " $\lambda_a(a, a - \text{целое} \ \& \ 1 \leq a \ \& \ a \leq b)$ ". Переменной x_{31} присваивается вхождение переменной N в терм x_{12} , переменной x_{32} - переменная, расположенная на соответствующем вхождении в терме x_{29} . В нашем примере x_{32} - переменная b . Переменной x_{33} присваивается результат замены в терме x_{12} предпоследнего операнда описателя x_{14} (он задает условия на варьируемую переменную) на конъюнкцию "и(целое(x_{18}) меньшеилиравно($N + 1$ x_{18}) меньшеилиравно(x_{18} x_{32}))". В нашем примере x_{33} имеет вид " $\prod_{i=n+1}^b i$ ". Переменной x_{34} присваивается равенство подтерма x_{27} результату соединения операцией x_{16} определяемой части исходной теоремы и термина x_{33} . Выбирается переменная x_{35} , не входящая в исходную теорему и в теорему x_{25} . Создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к списку x_{26} равенства переменной x_{35} терму "плюс(x_{32} минус(N))" и неравенства "меньше(0 x_{35})". Консеквентом импликации служит утверждение x_{34} . Эта импликация регистрируется в списке вывода.

17. Попытка разрешить простейшее уравнение с определяемой двуместной операцией.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{afg}(\text{Dom}(a) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a\text{-функция} \ \& \ f\text{-функция} \ \& \ g\text{-функция} \rightarrow a = f+g \leftrightarrow f = a-g)$$

из теоремы

$$\forall_{fg}(f - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f + g = \lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f)))$$

Эта теорема определяет терм " $f + g$ ". Имеется в виду операция "плюсфунк" сложения числовых функций.

Проверяется, что консеквент теоремы - равенство. Переменной x_9 присваивается входение определяемой части, переменной x_{10} - входение определяющей части, переменной x_{11} - непустой список антецедентов. Проверяется, что число корневых операндов определяемого выражения равно 2 и эти операнды суть переменные x_{12} , x_{13} . В нашем примере $x_{12} - f$, $x_{13} - g$. Проверяется, что связывающая приставка теоремы включается в список x_{12} , x_{13} . Проверяется, что в списке вывода нет другой теоремы с характеристикой "определение(...)".

Выбирается переменная x_{14} , не входящая в теорему. В нашем примере - a . Переменной x_{15} присваивается равенство подтерма x_{10} этой переменной. В нашем примере оно имеет вид $\lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f)) = a$. Поочередно и независимо друг от друга рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{16} присваивается x_{12} . Во втором - проверяется, что в списке вывода нет указания на коммутативность определяемой двуместной операции, и переменной x_{16} присваивается x_{13} . В нашем примере $x_{16} - f$. Список x_{11} разбивается на подсписок x_{17} утверждений, содержащих переменную x_{16} , и подсписок x_{18} остальных утверждений. Переменной x_{19} присваивается результат добавления к x_{17} равенства x_{15} . Решается задача на описание с посылками x_{18} и условиями x_{19} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "смтеор", "неизвестные x_{16} ". Ответ присваивается переменной x_{21} . В нашем примере он имеет вид:

$$\text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Dom}(g) = \text{Dom}(a) \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ f = \lambda_x(-g(x) + a(x), x \in \text{Dom}(a))$$

Проверяется, что x_{21} отлично от символа "отказ", и переменной x_{22} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{21} . В этом наборе находится равенство x_{23} для неизвестной x_{16} . Переменной x_{24} присваивается список остальных утверждений набора x_{22} . Проверяется, что они не содержат переменной x_{16} . Переменной x_{25} присваивается объединение списков x_{11} и x_{24} , переменной x_{26} - эквивалентность равенства определяемой части исходной теоремы переменной x_{14} равенству x_{23} . Создается импликация с антецедентами x_{25} и консеквентом x_{26} . Результат обработки ее оператором "нормтеорема" присваивается переменной x_{27} . В нашем примере он имеет следующий вид:

$$\forall_{afg}(\text{Dom}(a) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \rightarrow a = f + g \leftrightarrow f = \lambda_x(-g(x) + a(x), x \in \text{Dom}(g)))$$

Если в одной из частей эквивалентности - консеквента теоремы x_{27} - встречается описатель, то эта часть упрощается относительно антецедентов при помощи задачи на преобразование, имеющей цели "упростить", "класс". При этом все блокировки снимаются. В нашем примере правая часть эквивалентности преобразуется в равенство $f = a - g$, использующее операции "минусфунк" и "плюсфунк". Далее результат регистрируется в списке вывода.

18. Попытка общей стандартизации определения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(\text{вероятность}(A, C) = 0) \ \& \ A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ A \in \text{события}(C) \ \& \ B \in \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{вероятность}(A \cap B, C) = \text{вероятность}(A, C) \text{услвероятн}(B, A, C))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ \neg(\text{вероятность}(A, C) = 0) \ \& \ B \in \text{события}(C) \ \& \ A \in \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{услвероятн}(B, A, C) = \text{вероятность}(A \cap B, C) / \text{вероятность}(A, C))$$

Эта теорема определяет терм "услвероятн(B, A, C)".

Проверяется, что консеквент теоремы - равенство, причем имеется комментарий "числовойатом". Тогда исходная теорема обрабатывается оператором "Норм-теорема" с опцией "числовойатом", и результат регистрируется в списке вывода.

19. Следствия из определения принадлежности множеству.

(a) Усмотрение непустоты множества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ a \in b \ \& \ a \in c \rightarrow \neg(b \cap c = \emptyset))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$$

Эта теорема определяет терм " $a \in b \cap c$ ".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x8 присваивается определяемый терм, переменной x11 - вхождение определяющей части, переменной x12 - набор антецедентов. Проверяется, что терм x8 - условие принадлежности переменной x13 выражению x14, не содержащему этой переменной. В нашем примере x13 - a , x14 - $b \cap c$. Переменной x15 присваивается набор конъюнктивных членов подтерма x11. Проверяется, что все они элементарны. Переменной x17 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" объединения списковой x12 и x15 относительно параметров терма x8. Создается импликация x18 с антецедентами x17, консеквентом которой служит утверждение "не(равно(x14 пусто))". Она регистрируется в списке вывода.

(b) Вывод параметрического описания условия непустоты множества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{af}(f - \text{функция} \rightarrow \neg(\text{слой}(f, a) = \emptyset) \leftrightarrow \exists_x(x \in \text{Dom}(f) \ \& \ a = f(x)))$$

из теоремы

$$\forall_{afx}(f - \text{функция} \rightarrow x \in \text{слой}(f, a) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(f) \ \& \ a = f(x))$$

Эта теорема определяет терм " $x \in \text{слой}(f, a)$ ".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_8 присваивается определяемый терм, переменной x_{11} - вхождение определяющей части, переменной x_{12} - набор антецедентов. Проверяется, что терм x_8 - условие принадлежности переменной x_{13} выражению x_{14} , не содержащему этой переменной. В нашем примере x_{13} - переменная x , x_{14} - $\text{слой}(f, a)$. Переменной x_{15} присваивается набор конъюнктивных членов подтерма x_{11} . Проверяется, что все они элементарны. Проверяется, что среди утверждений x_{15} встречается равенство, у которого в одной из частей расположена переменная, не имеющая других вхождений в подтерм x_{11} . Переменной x_{16} присваивается утверждение " $\text{существует}(x_{13} \text{ и } (x_{15}))$ ". Создается импликация с антецедентами x_{12} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждения " $\text{не}(\text{равно}(x_{14} \text{ пусто}))$ " утверждению x_{16} . Она регистрируется в списке вывода.

- (с) Вывод условия, когда определяемое подмножество совпадает с множеством.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{af}(a - \text{set} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq a \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \text{Dom}(f) = \text{прообраз}(f, a))$$

из теоремы

$$\forall_{afx}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow x \in \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f(x) \in a)$$

Эта теорема определяет терм " $x \in \text{прообраз}(f, a)$ ".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_8 присваивается определяемый терм, переменной x_{11} - вхождение определяющей части, переменной x_{12} - набор антецедентов. Проверяется, что терм x_8 - условие принадлежности переменной x_{13} выражению x_{14} , не содержащему этой переменной. В нашем примере x_{13} - переменная x , x_{14} - $\text{слой}(f, a)$. Переменной x_{15} присваивается набор конъюнктивных членов подтерма x_{11} . Проверяется, что все они элементарны и что их количество больше 1. Среди утверждений x_{15} усматривается принадлежность x_{16} переменной x_{13} некоторому не содержащему x_{13} выражению x_{17} . В нашем примере - " $x \in \text{Dom}(f)$ ". Переменной x_{18} присваивается утверждение " $\text{длялюбого}(x_{13} \text{ если } x_{16} \text{ то } Q)$ ", где Q - конъюнкция отличных от x_{16} утверждений списка x_{15} . В нашем примере x_{18} имеет вид " $\forall_x(x \in \text{Dom}(f) \rightarrow f(x) \in a)$ ". Утверждение x_{18} упрощается относительно посылок x_{12} вспомогательной задачей на преобразование, имеющей цели "упростить", "свертка". Ответ присваивается переменной x_{20} . В нашем случае он имеет вид " $\text{Val}(f) \subseteq a$ ". Проверяется, что утверждение x_{20} не имеет связанных переменных. Создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к списку x_{12} утверждения x_{20} , а консеквен - равенство x_{14} и x_{17} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (d) Вывод условия включения множеств.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow a \times b \subseteq c \times d \leftrightarrow a \subseteq c \ \& \ b \subseteq d \vee a = \emptyset \vee b = \emptyset)$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(a\text{-set} \& b\text{-set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \& f(1) \in a \& f(2) \in b \& f\text{-слово})$$

Эта теорема определяет терм " $f \in a \times b$ ".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x8 присваивается определяемый терм, переменной x11 - вхождение определяющей части, переменной x12 - набор антецедентов. Проверяется, что терм x8 - условие принадлежности переменной x13 выражению x14, не содержащему этой переменной. В нашем примере x13 - переменная f , x14 - $a \times b$. Переменной x15 присваивается набор конъюнктивных членов подтерма x11. Проверяется, что терм x8 содержит все переменные теоремы. Переменной x16 присваивается список параметров терма x14. Переменной x17 присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему и имеющий такую же длину, как список x16. В нашем примере x16 - a, b ; x17 - c, d . Переменной x18 присваивается объединение набора антецедентов теоремы с результатами замены в этих антецедентах переменных x16 на x17. Переменной x19 присваивается результат такой же замены переменных в подтерме x11. Переменной x20 присваивается импликация "длялюбого(x13 если x15 то x19)". В нашем примере она имеет вид:

$$\forall_f(l(f) = 2 \& f(1) \in a \& f(2) \in b \& f\text{-слово} \rightarrow l(f) = 2 \& f(1) \in c \& f(2) \in d \& f\text{-слово})$$

Переменной x21 присваивается список всех утверждений набора x18, содержащих параметры списка x16, переменной x22 - остаток набора x18. Переменной x23 присваивается результат добавления к списку x21 утверждения x20. Решается задача на описание с посылками x22 и условиями x23. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x16". Ответ задачи присваивается переменной x25. В нашем примере он имеет вид:

$$a = \emptyset \& b\text{-set} \vee b = \emptyset \& a\text{-set} \vee a\text{-set} \& b\text{-set} \& a \subseteq c \& b \subseteq d$$

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и имеет менее 60 символов. Переменной x26 присваивается результат замены переменных x16 на x17 в терме x14, переменной x27 - терм "содержится(x14 x26)". Создается импликация с антецедентами x18, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x27 и x25. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

(e) Вывод условия непересечения множеств.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(a\text{-set} \& b\text{-set} \& c\text{-set} \& d\text{-set} \rightarrow \text{непересек}(a \times b, c \times d) \leftrightarrow \text{непересек}(a, c) \vee \text{непересек}(b, d))$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(a\text{-set} \& b\text{-set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \& f(1) \in a \& f(2) \in b \& f\text{-слово})$$

Эта теорема определяет терм " $f \in a \times b$ ".

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x8 присваивается определяемый терм, переменной x11 - вхождение определяющей части, переменной x12 - набор антецедентов. Проверяется, что терм x8 - условие принадлежности переменной x13 выражению x14, не содержащему этой переменной. В нашем примере x13 - переменная f , x14 - $a \times b$. Переменной x15 присваивается набор конъюнктивных членов подтерма x11. Проверяется, что терм x8 содержит все переменные теоремы. Переменной x16 присваивается список параметров терма x14. Переменной x17 присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему и имеющий такую же длину, как список x16. В нашем примере x16 - a, b ; x17 - c, d . Переменной x18 присваивается объединение набора антецедентов теоремы с результатами замены в этих антецедентах переменных x16 на x17. Переменной x19 присваивается результат такой же замены переменных в подтерме x11.

Дальше начинаются небольшие отличия. Переменной x20 присваивается импликация "длялюбого(x13 если x15 то не(x19))". В нашем примере она имеет вид:

$$\forall_f(l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово} \rightarrow \neg(l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in c \ \& \ f(2) \in d \ \& \ f - \text{слово}))$$

Переменной x21 присваивается список всех утверждений набора x18, содержащих параметры списка x16, переменной x22 - остаток набора x18. Переменной x23 присваивается результат добавления к списку x21 утверждения x20. Решается задача на описание с посылками x22 и условиями x23. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x16". Ответ задачи присваивается переменной x25. В нашем примере он имеет вид:

$$a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, c) \ \vee \ a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(b, d)$$

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и имеет менее 60 символов. Переменной x26 присваивается результат замены переменных x16 на x17 в терме x14, переменной x27 - терм "непересек(x14 x26)". Создается импликация с антецедентами x18, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x27 и x25. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

(f) Вывод условия равенства множеств.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow a \times b = c \times d \leftrightarrow (a = \emptyset \ \vee \ b = \emptyset) \ \& \ (c = \emptyset \ \vee \ d = \emptyset) \ \vee \ a = c \ \& \ b = d)$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово})$$

Эта теорема определяет терм " $f \in a \times b$ ".

Программа приема почти дословно воспроизводит программы двух предыдущих приемов. У импликации x20 в консеквенте возникает эквивалентность подтерма x11 и терма x19, терм x27 представляет собой равенство термов x14 и x26. При решении задачи на описание вводится ограничитель трудоемкости.

20. Усмотрение неотждествляемых параметров определяемого утверждения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \& \neg(A = D) \& \neg(C \in \text{прямая}(AB)) \& \text{биссектриса}(BACD) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow \neg(B = D))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \neg(A = B) \& \neg(A = D) \& \neg(A = C) \rightarrow \text{биссектриса}(BACD) \leftrightarrow \angle(CAD) = \angle(DAB) \& \text{разностороны}(B, C, \text{прямая}(AD)) \& \angle(CAD) \leq \pi/2)$$

Эта теорема определяет терм "биссектриса(BACD)".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x8 присваивается определяемый терм, переменной x12 - набор конъюнктивных членов определяющего. Переменной x13 присваивается список antecedентов. Проверяется, что он непуст, а утверждение x8 отлично от равенства и неповторно. Переменной x14 присваивается список параметров терма x8. Проверяется, что его длина равна 3 либо 4. В списке x14 выбирается переменная x16. В нашем примере - B. Переменной x18 присваивается переменная, расположенная в списке x14 правее переменной x16. В нашем примере - D. Переменной x19 присваивается отрицание равенства переменных x16 и x18. Проверяется, что из объединения списков x12 и x13 не усматривается истинность утверждения x19. Переменной x21 присваивается результат добавления к объединению списков x12 и x13 обработанного оператором "станд" равенства переменных x16 и x18.

Решается задача на исследование, посылками которой служат утверждения x21. Задача имеет цели "известно", "теорема", "неизвестные X", где X - все параметры посылок. Проверяется, что после этого в списке посылок задачи не оказалась константа "ложь". В списке посылок находится утверждение x24, не имеющее заголовка "актив", не содержащееся в списках x12, x13 и отличное от равенства переменных x16, x18. В нашем примере - "C ∈ прямая(AB)". По комментарию "выводимо" ксылке x24 проверяется, что при ее получении было использовано равенство переменных x16, x18. Проверяется, что вспомогательная задача на доказательство не позволяет вывести x24 из посылок x12, x13. Затем переменной x27 присваивается результат добавления к списку x13 определяемого утверждения x8 и отрицания утверждения x24. Переменной x28 присваивается результат обработки списка x27 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x19. Создается импликация с antecedентами x28 и консеквентом x19. Она обрабатывается оператором "нормлог" и регистрируется в списке вывода.

21. Вывод двух эквивалентностей, соответствующих альтернативным подслучаям.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ax}(\neg(a = \text{вектор}0) \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(x) \rightarrow \text{коллинеарны}(a, x) \leftrightarrow \exists_y(x = ya \ \& \ y - \text{число}))$$

из теоремы

$$\forall_{ax}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(x) \rightarrow \text{коллинеарны}(a, x) \leftrightarrow a = \text{вектор}0 \ \vee \neg(a = \text{вектор}0) \ \& \ \exists_y(y - \text{число} \ \& \ x = ya))$$

Эта теорема определяет терм "коллинеарны(a, x)".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_9 присваивается определяемое утверждение, переменной x_{12} - определяющее. Проверяется, что x_{12} - дизъюнкция. Переменной x_{13} присваивается набор ее дизъюнктивных членов. Проверяется, что набор x_{13} двухэлементный. Переменной x_{14} присваивается набор конъюнктивных членов первого из утверждений x_{13} , переменной x_{15} - второго. Переменной x_{16} присваивается список всех элементарных утверждений набора x_{14} , отрицание которых входит в набор x_{15} . В нашем примере x_{16} состоит из единственного утверждения " $a = \text{вектор}0$ ". Проверяется, что x_{16} непусто. Переменной x_{17} присваивается список antecedентов теоремы. Поочередно рассматриваются два случая: либо x_{18} равно x_{16} , а x_{19} - конъюнкции не вошедших в x_{16} утверждений списка x_{14} , либо x_{18} - набор отрицаний утверждений списка x_{16} , а x_{19} - конъюнкция не вошедших в x_{18} утверждений списка x_{15} . В нашем примере рассматривается второй случай, т.е. x_{18} состоит из утверждения " $\neg(a = \text{вектор}0)$ ", а x_{19} имеет вид " $\exists_y(y - \text{число} \ \& \ x = ya)$ ". Создается импликация, antecedентами которой являются утверждения списков x_{17} и x_{18} , а консеквентом - эквивалентность x_9 и x_{19} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

22. Вывод из косвенного определения эквивалентности для равенства определяемому выражению.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(a - \text{set} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ \neg(a = \emptyset) \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow c = \text{inf}(a) \leftrightarrow \text{наибольший}(c, \text{set}_b(\text{нижнягрань}(b, a))))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ \neg(a = \emptyset) \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{наибольший}(\text{inf}(a), \text{set}_b(\text{нижнягрань}(b, a))))$$

Эта теорема определяет терм "inf(a)".

Проверяется, что заголовок консеквента теоремы отличен от символов "равно", "эквивалентно", "и", "или", "существует", "не", "длялюбого", "Существует". Рассматривается вхождение x_9 корневого операнда консеквента, равного определяемому терму. Переменной x_{10} присваивается переменная, не входящая в теорему. В нашем примере - c . Создается импликация, antecedенты которой те

же, что у исходной теоремы, а консеквент - эквивалентность равенства переменной x_{10} определяемому выражению результату замены в консеквенте исходной теоремы вхождения x_9 на переменную x_{10} . Эта импликация регистрируется в списке вывода.

23. Перенесение в antecedentes отрицаний дизъюнктивных членов определяющей части, соответствующих вырожденным случаям.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(C = D) \& \neg(A \in \text{прямая}(CD)) \& \neg(B \in \text{прямая}(CD)) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \leftrightarrow B \in \text{плоскость}(ACD) \& \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(AB)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \neg(C = D) \rightarrow \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \leftrightarrow \text{непересек}(\text{отрезок}(AB), \text{прямая}(CD)) \& B \in \text{плоскость}(ACD) \vee A \in \text{прямая}(CD) \vee B \in \text{прямая}(CD))$$

Эта теорема определяет терм " $\text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD))$ ".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_9 присваивается определяемое утверждение, переменной x_{12} - определяющее. Проверяется, что x_{12} - дизъюнкция. Переменной x_{13} присваивается набор ее дизъюнктивных членов. Переменной x_{14} присваивается список параметров терма x_9 , переменной x_{15} - список утверждений набора x_{13} , содержащих все параметры x_{14} . Проверяется, что список x_{15} одноэлементный; переменной x_{16} присваивается его элемент. В нашем примере он имеет вид " $\text{непересек}(\text{отрезок}(AB), \text{прямая}(CD)) \& B \in \text{плоскость}(ACD)$ ". Переменной x_{17} присваивается объединение списка antecedentes теоремы с отрицаниями отличных от x_{16} элементов списка x_{13} . Создается импликация с antecedентами x_{17} , консеквентом которой служит эквивалентность определяемого утверждения и утверждения x_{16} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

24. Перенесение отрицаний всех элементарных дизъюнктивных членов определяющей части в antecedенты и выбор единственного конъюнктивного члена единственного оставшегося дизъюнктивного члена в качестве консеквента выводимой импликации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(C = D) \& \neg(A \in \text{прямая}(CD)) \& \neg(B \in \text{прямая}(CD)) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \rightarrow \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(AB)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \neg(C = D) \rightarrow \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)) \leftrightarrow \text{непересек}(\text{отрезок}(AB), \text{прямая}(CD)) \& B \in \text{плоскость}(ACD) \vee A \in \text{прямая}(CD) \vee B \in \text{прямая}(CD))$$

Эта теорема определяет терм "однасторона(A, B , прямая(CD))".

В отличие от предыдущего пункта, выводится не эквивалентность, а импликация.

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_8 присваивается определяемое утверждение, переменной x_{11} - вхождение определяющего утверждения. Проверяется, что это утверждение является дизъюнкцией, и переменной x_{12} присваивается набор дизъюнктивных членов. Переменной x_{13} присваивается поднабор набора x_{12} , образованный всеми элементарными утверждениями. Проверяется, что этот поднабор непуст. Переменной x_{14} присваивается остаток набора x_{12} . Проверяется, что он одноэлементный, причем переменной x_{15} присваивается данный элемент. Проверяется, что его заголовок - символ "и". В нашем примере x_{15} имеет вид "непересек(отрезок(AB), прямая(CD)) & $B \in \text{плоскость}(ACD)$ ". Среди конъюнктивных членов терма x_{15} выбирается утверждение x_{16} . В нашем примере - "непересек(отрезок(AB), прямая(CD))". Переменной x_{17} присваивается объединение списка antecedентов теоремы, набора отрицаний утверждений списка x_{13} , а также утверждения x_8 . Создается импликация с antecedентами x_{17} и консеквентом x_{16} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

25. Замена условия равенства точек на конъюнкцию равенств координат.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{DKabcde}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (b, c) \ \& \ \text{коорд}(a, K) = (d, e) \rightarrow D = a \leftrightarrow b = d \ \& \ c = e)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, D) \rightarrow \text{коорд}(D, K) = (l(AD)/l(AB), 0))$$

Эта теорема определяет терм "коорд(D, K)". В действительности данный терм определяется не одной теоремой, а группой теорем, для различных частных случаев расположения точки D относительно координатных прямых. Так как описываемому приему достаточно лишь понимать, что символ "коорд" обозначает координату, причем по умолчанию объект должен однозначно определяться своими координатами, то выбор конкретной теоремы из группы не важен. Любая из таких теорем лишь запускает работу приема. В нашем примере рассматривается частный случай, когда точка лежит на оси абсцисс вправо от начала координат.

Проверяется, что теорема - равенство. Переменной x_{10} присваивается вхождение определяющей части, переменной x_{11} - список antecedентов. Переменной x_{12} присваивается заголовок определяемого выражения. В нашем случае - "коорд". Справочник "координаты" устанавливает, что выражения с заголовком x_{12} обозначают координатные наборы. Переменной x_{13} присваивается список корневых операндов выражения x_{12} . В нашем примере - D, K . Проверяется, что эти операнды - переменные. Первая из них присваивается переменной x_{15} ,

вторая - переменной x16. Проверяется, что подтерм x10 имеет заголовок "набор". Переменной x14 присваивается список корневых операндов этого подтерма. Переменной x17 присваивается список антецедентов, не имеющих переменных, отличных от x15 и x16. В нашем примере - единственное утверждение "систкоорд(K)". Выбирается переменная x18, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - a. Переменной x19 присваивается результат добавления переменной x18 к списку переменных теоремы. Переменной x20 присваивается список переменных, не входящих в x19, причем длина этого списка равна длине списка x14. В нашем примере - переменные b, c. Переменные x20 добавляются к списку x19. Переменной x21 присваивается список переменных, не входящих в x19, причем длина его равна длине списка x14. В нашем примере - переменные d, e. Переменной x22 присваивается результат добавления к списку x17 результатов замены в утверждениях этого списка переменной x15 на x18. В нашем примере x22 совпадает с x17. Переменной x23 присваивается равенство определяемого выражения выражению "набор(x20)", переменной x24 - результат подстановки в x23 вместо переменных x15, x20 термов x18, x21. В нашем примере x23 имеет вид "коорд(D, K) = (b, c)", x24 - вид "коорд(a, K) = (d, e)". Утверждения x23, x24 добавляются к списку x22. Переменной x25 присваивается эквивалентность равенства переменных x15, x18 конъюнкции равенств соответствующих переменных списков x20 и x21. Затем создается импликация с антецедентами x22 и консеквентом x25, которая регистрируется в списке вывода.

26. Извлечение параметрического описания для значений неизвестной из неявного определения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \rightarrow d(\log_a b) \leftrightarrow \exists_c(d(c) \ \& \ b = a^c))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \rightarrow a^{\log_a b} = b)$$

Эта теорема определяет терм " $\log_a b$ ".

Проверяется, что теорема - равенство. Переменной x9 присваивается вхождение той части равенства, внутри которой выделяется вхождение x11 определяемого выражения. Переменной x10 присваивается противоположная часть равенства. Проверяется, что она представляет собой переменную x12. В нашем примере - b. Выбираются переменные X, Y, не входящие в теорему. В нашем примере - переменные c, d. Переменной x14 присваивается результат замены вхождения x11 в подтерме x9 на переменную X. В нашем примере получаем a^c . Проверяется, что переменная x12 не входит в x14. Переменной x15 присваивается терм " $Y(T)$ ", где T - определяемое выражение. В нашем примере имеем " $d(\log_a b)$ ". Переменной x16 присваивается терм " $\text{существует}(X \ \text{и} \ (Y(X) \ \text{равно}(x12 \ x14)))$ ". Создается импликация, антецеденты которой такие же, как у исходной теоремы, а консеквент - эквивалентность термов x15 и x16. Она регистрируется в списке вывода и снабжается характеристиками "неизвтермы(x12 второйтерм)" и "указатель(символ(Y))".

27. Подстановка нуля либо единицы в определяемую часть равенства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \text{Re}(a) = a)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{Re}(a + bi) = a)$$

Эта теорема определяет терм " $\text{Re}(a + bi)$ ".

Проверяется, что теорема - равенство. Переменной x_9 присваивается определяемое выражение, переменной x_{10} - вхождение его в консеквент, переменной x_{11} - противоположная часть консеквента. Рассматривается подчиненное x_{10} вхождение x_{12} неоднобуквенного подтерма, имеющего ровно два корневых операнда. В нашем примере - подтерма bi . Переменной x_{13} присваивается символ по вхождению x_{12} . Выбирается операнд вхождения x_{12} , представляющий собой переменную x_{15} . В нашем случае - переменную b . Поочередно находятся результаты x_{17} обращения к справочникам "единица" и "ноль" на символе x_{13} . В нашем примере x_{17} - константа 0. Проверяется, что значение x_{17} относится к тому операнду вхождения x_{12} , которым является x_{15} . Затем создается импликация, полученная из исходной добавлением к антецедентам равенства " $\text{равно}(x_{15} \ x_{17})$ ". Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

28. Попытка подстановки нуля в определяющую часть эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_n(n - \text{целое} \rightarrow 0|n \leftrightarrow n = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(k - \text{целое} \ \& \ n = mk))$$

Эта теорема определяет терм " $m|n$ ".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_9 присваивается определяемое утверждение, переменной x_{11} - вхождение определяющего. Внутри вхождения x_{11} выбирается вхождение x_{12} двуместной операции x_{13} , имеющей своим операндом переменную x_{15} , не связанную внутри определяющей части. Проверяется, что число таких вхождений не более 3. В нашем примере x_{12} - вхождение выражения mk , x_{15} - переменная m . Переменной x_{17} присваивается ноль операции x_{13} . Проверяется, что он относится к переменной x_{15} . Затем создается импликация, полученная из исходной добавлением к антецедентам равенства " $\text{равно}(x_{15} \ x_{17})$ ". Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

29. Попытка подстановки нулей вместо всех элементов участвующего в определении набора.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{def}(d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (0, 0, 0)))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdef}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d, e, f)) \leftrightarrow \exists_{uv}(u - \text{число} \ \& \ v - \text{число} \ \& \ \neg(u^2 + v^2 = 0) \ \& \ au + dv = 0 \ \& \ bu + ev = 0 \ \& \ cu + fv = 0))$$

Эта теорема определяет терм "пропорцнаборы((a, b, c), (d, e, f))".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x9 присваивается определяемое утверждение, переменной x11 - вхождение определяющего. Проверяется, что число вхождений двуместных операций в определяющее утверждение, имеющих своим операндом переменную, не связанную внутри определяющей части, больше 3. Внутри вхождения x11 рассматривается вхождение x12 подтерма с заголовком "набор", операнды которого суть различные переменные. Переменной x13 присваивается список этих переменных. В нашем примере x12 - вхождение терма "(a, b, c)". Переменной x14 присваивается начало списка x13. В нашем примере - a. Внутри определяющей части находится вхождение x15 двуместной операции x16, имеющей своим операндом переменную x14. В нашем примере - вхождение подтерма au. Переменной x19 присваивается ноль операции x16. В нашем примере - 0. Проверяется, что этот ноль относится к переменной x14. Проверяется, что для всех прочих переменных списка x13 внутри определяющего терма имеется вхождение двуместной операции x16, операндом которой служит эта переменная. Затем создается импликация, полученная из исходной добавлением к антецедентам равенств нулю x19 всех переменных списка x13. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

30. Вывод утверждения о типе значения переменной - надтипе явно указанного в определении типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ f \in a \times b \rightarrow f - \text{функция})$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово})$$

Эта теорема определяет терм " $f \in a \times b$ ".

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x10 присваивается вхождение в теорему определяемого терма, переменной x12 - набор конъюнктивных членов определяющей части, переменной x13 - список антецедентов. Проверяется отсутствие у теоремы существенных посылок. Выбирается элемент x14 списка x12, заголовком

x_{15} которого служит название типа данных. В нашем случае x_{14} имеет вид " f – слово", x_{15} – символ "слово". Справочник "род" определяет по символу x_{15} список x_{16} всех надтипов типа x_{15} . В нашем случае x_{16} состоит из единственного символа "функция". В списке x_{16} выбирается элемент x_{17} , и переменной x_{18} присваивается запись " $x_{17}(T)$ ", где T – корневой операнд терма x_{14} . Создается импликация, antecedentes которой получены добавлением к списку x_{13} подтерма x_{10} , а консеквентом служит x_{18} . Она регистрируется в списке вывода.

31. Усмотрение типа объекта из параметрического описания.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{rational} \rightarrow a - \text{число})$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{rational} \leftrightarrow \exists_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ a = m/n))$$

Эта теорема определяет терм " $a - \text{rational}$ ".

Проверяется, что теорема представляет собой эквивалентность, причем определяющая часть x_{10} имеет своим заголовком квантор существования, а определяемая часть x_9 является одноместным отношением от переменной x_{11} . Переменной x_{12} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. В нем выбирается равенство x_{13} переменной x_{11} выражению, заголовком которого служит логический символ x_{16} . В нашем случае x_{16} – символ "дробь". Справочник "тип" определяет по x_{16} тип T значения выражений с заголовком x_{16} . В нашем примере этот тип – "число". Создается импликация, antecedentes которой суть antecedentes исходной теоремы и определяемое утверждение, а консеквент – " $T(x_{11})$ ". Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

32. Усмотрение существования объектов, находящихся в отношении, определенном с помощью квантора существования.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\exists_a(a - \text{rational})$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{rational} \leftrightarrow \exists_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ a = m/n))$$

Эта теорема определяет терм " $a - \text{rational}$ ".

Проверяется, что теорема представляет собой эквивалентность, определяющая часть которой является квантором существования. Переменной x_{11} присваивается связывающая приставка квантора, переменной x_{12} – набор antecedents теоремы, переменной x_{13} – определяемый терм. Переменной x_{14} присваивается список параметров терма x_{13} , не входящих в утверждения x_{12} . В нашем примере – a . Проверяется, что список x_{14} непуст. Переменной x_{15} присваивается

результат объединения списков $x11$ и $x14$, переменной $x16$ - набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. Решается задача на описание с посылками $x12$ и условиями $x16$. Цели задачи - "полный", "пример", "неизвестные $x15$ ", "параметры $x15$ ". Ответ присваивается переменной $x19$. В нашем примере он имеет вид " $n = 1$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Это уже означает существование значений неизвестных, при которых истинны условия. Поэтому создается импликация с антецедентами $x12$, консеквентом которой служит утверждение "существует($x14$ $x13$)". Она регистрируется в списке вывода.

33. Извлечение из определения операции, использующего вспомогательные параметры, эквивалентности для устранения данной операции от выражений с неизвестными.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{an}(a - \text{число} \rightarrow [a] = n \leftrightarrow n - \text{целое} \ \& \ n \leq a \ \& \ a < n + 1)$$

из теоремы

$$\forall_{an}(a - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ n \leq a \ \& \ a < n + 1 \rightarrow [a] = n)$$

Эта теорема определяет терм " $[a]$ ".

Проверяется, что теорема является тождеством и имеет характеристику "определено". Такая характеристика означает, что теорема определяет некоторую операцию через вспомогательные переменные, входящие в антецеденты и не входящие в эту операцию. Для любых значений переменных определяемой части, удовлетворяющих всем содержащим только такие переменные антецедентам, существуют подходящие значения вспомогательных переменных.

Переменной $x11$ присваивается список антецедентов, переменной $x12$ - определяемое выражение, переменной $x13$ - список его параметров. Переменной $x14$ присваивается список утверждений набора $x11$, параметры которых включаются в список $x13$. Проверяется, что список $x14$ непуст. Переменной $x15$ присваивается остаток списка $x11$. Проверяется, что этот остаток непуст. Переменной $x16$ присваивается импликация с антецедентами $x14$, консеквентом которой служит эквивалентность консеквента исходной теоремы конъюнкции утверждений $x15$. Она регистрируется в списке вывода и снабжается единственной характеристикой "неизводенка(второйтерм K)", где K - конъюнкция термов "не(известно(X))", формируемых для всех переменных X списка $x13$. В нашем примере эта характеристика имеет вид "неизводенка(второйтерм не(известно(a)))".

34. Извлечение из косвенного определения операции через совокупность условий на ее значение простейших следствий.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow [a] - \text{целое})$$

из теоремы

$$\forall_{an}(a - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ n \leq a \ \& \ a < n + 1 \rightarrow [a] = n)$$

Эта теорема определяет терм "[a]".

Проверяется, что теорема является тождеством и имеет характеристику "определено". Переменной x11 присваивается список антецедентов, переменной x12 - определяемое выражение. Проверяется, что определяющий терм представляет собой переменную x13. Переменной x14 присваивается список антецедентов, не содержащих переменную x13, переменной x15 - список остальных антецедентов. В списке x15 выбирается утверждение x16. В нашем примере - "n - целое". Переменной x17 присваивается результат подстановки в терм x16 выражения x12 вместо переменной x13. В нашем примере - "[a] - целое". Создается импликация с антецедентами x14 и консеквентом x17. Она регистрируется в списке вывода.

35. Вывод условия равенства значений операции, определяемой через параметрическое описание.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bmn}(n - \text{натуральное} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \rightarrow b(\text{mod } n) = m(\text{mod } n) \leftrightarrow \exists_a(b = m + an \ \& \ a - \text{целое}))$$

из теоремы

$$\forall_{mnk}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow m(\text{mod } n) = k \leftrightarrow k \in \{0, \dots, n - 1\} \ \& \ \exists_p(p - \text{целое} \ \& \ m = k + np))$$

Эта теорема определяет терм " $m(\text{mod } n) = k$ ".

Переменной x8 присваивается определяемый терм, переменной x10 - его вхождение в теорему. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x12 присваивается набор антецедентов, переменной x13 - определяющая часть. Проверяется, что x10 - равенство переменной x16 некоторому выражению x17. В нашем примере x16 - k, x17 - " $m(\text{mod } n)$ ". Проверяется, что вхождение переменной x16 в терм x8 единственное. Переменной x19 присваивается набор конъюнктивных членов терма x13. Среди них выбирается утверждение x20 с заголовком "существует". В нашем примере - " $\exists_p(p - \text{целое} \ \& \ m = k + np)$ ". Переменной x21 присваивается связывающая приставка утверждения x20, переменной x22 - список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. Среди них выбирается равенство x23, в одной из частей которого расположена переменная x26, имеющая единственное вхождение в терм x13 и в терм x8. В нашем примере x23 имеет вид " $m = k + np$ ", x26 - переменная m.

Переменной x27 присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему и имеющий такую же длину, как список x21. В нашем примере x21 состоит из единственной переменной p, x27 - из переменной a. Выбирается переменная x28, не входящая в теорему о в список x27. В нашем примере - переменная b. Переменной x29 присваивается объединение списка x12, списка x19 с отброшенным утверждением x20, а также списка x22. Переменной x30 присваивается результат подстановки в утверждения x22 вместо переменных x26, x21 переменных x28, x27. В нашем примере x30 состоит из утверждений "a - целое",

" $b = k + na$ ". Решается задача на описание с посылками x_{29} и условиями x_{30} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{28} ", "известно A ", где A - отличные от x_{16} параметры утверждений x_{29} , а также переменные x_{27} . Ответ присваивается переменной x_{32} . В нашем примере он имеет вид " $b = m + an - np \ \& \ a - \text{целое}$ ". Проверяется, что x_{32} отлично от "отказ", и переменной x_{33} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{32} . Переменной x_{34} присваивается объединение списков x_{29} и x_{33} . При помощи задачи на доказательство проверяется, что конъюнкция утверждений x_{30} является следствием утверждений x_{34} . Затем переменной x_{36} присваивается утверждение "существует($x_{27} \ x_{32}$)". В нашем примере - " $\exists_a(b = m + an - np \ \& \ a - \text{целое})$ ". Переменной x_{37} присваивается объединение списка x_{12} и списка x_{22} , в котором отброшен элемент x_{23} . Решается задача на преобразование с посылками x_{37} и условием x_{36} . Цели задачи - "упростить", "нормтеорема". Ответ присваивается переменной x_{39} . В нашем примере он имеет вид " $\exists_a(b = m + an \ \& \ a - \text{целое})$ ". Проверяется, что среди параметров терма x_{39} нет переменных x_{21} . Переменной x_{40} присваивается результат подстановки в терм x_{17} переменной x_{28} вместо x_{26} , переменной x_{41} - эквивалентность равенства выражений x_{40} , x_{17} утверждению x_{39} . Переменной x_{42} присваивается список всех содержащих переменную x_{26} утверждений набора x_{12} , переменной x_{44} - объединение списка x_{12} с результатами замены в утверждениях x_{42} переменной x_{26} на x_{28} . Затем создается импликация с антецедентами x_{44} и консеквентом x_{41} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

36. Вывод равенства числовых атомов, однозначно определяемых прочими параметрами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{KT} ab(\text{неподв}(b, T) \ \& \ \text{неподв}(K, T) \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \ \& \ \text{мтело}(b) \ \& \ \text{мтело}(K) \rightarrow \text{длина}(\text{Скорость}(a, K, T)) = \text{длина}(\text{Скорость}(a, b, T)))$$

из теоремы

$$\forall_{KTast}(s - \text{число} \ \& \ t - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \ \& \ \text{мтело}(K) \ \& \ T = [t, s] \ \& \ \text{неподв}(K, T) \rightarrow l(\text{Место}(a, t)\text{Место}(a, s)) = \text{длина}(\text{Скорость}(a, K, T))\text{длина}(T))$$

Эта теорема определяет терм "Скорость(a, K, T)".

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема представляет собой тождество и имеет характеристику "числовойатом". Переменной x_{10} присваивается консеквент, переменной x_{11} - набор антецедентов. Рассматривается входящий в консеквент числовой атом x_{12} . В нашем примере - " $\text{длина}(\text{Скорость}(a, K, T))$ ". Переменной x_{13} присваивается вхождение в этот атом определяемого выражения. Проверяется, что список параметров определяемого выражения, имеющих в консеквенте единственное вхождение, одноэлементный. В нашем примере он состоит из переменной K . Переменной x_{15} присваивается вхождение числового атома x_{12} в консеквент. Проверяется, что каждый надтерм вхождения x_{15} - либо имеет своим заголовком один из символов "минус", "плюс", "равно", либо имеет заголовок "умножение", причем

усматривается, что коэффициент при содержащем вхождение x_{15} члене ненулевой.

Выбирается переменная x_{16} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Список x_{11} разбивается на подсписок x_{17} утверждений, содержащих переменную x_{14} , и подсписок x_{18} остальных утверждений. Переменной x_{19} присваивается набор результатов подстановки переменной x_{16} вместо x_{14} в утверждения x_{17} . Переменной x_{20} присваивается результат такой же подстановки в x_{12} . Создается импликация, антецеденты которой получены объединением списков x_{11} и x_{19} , а консеквент - равенство выражений x_{12} и x_{20} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

37. Вывод транзитивного отношения путем варьирования уникального параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{KT} ab(\text{неподв}(b, T) \ \& \ \text{неподв}(K, T) \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \ \& \ \text{мтело}(b) \ \& \ \text{мтело}(K) \rightarrow \text{однаправлены}(\text{Скорость}(a, b, T), \text{Скорость}(a, K, T)))$$

из теоремы

$$\forall_{KT} ast(s - \text{число} \ \& \ t - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \ \& \ \text{мтело}(K) \ \& \ T = [t, s] \ \& \ \text{неподв}(K, T) \rightarrow \text{однаправлены}(\text{Скорость}(a, K, T), \text{вектор}(\text{Место}(a, t)\text{Место}(a, s))))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ \text{однаправлены}(a, b) \ \& \ \text{однаправлены}(b, c) \rightarrow \text{однаправлены}(a, c))$$

Здесь исходная теорема определяет терм "Скорость(a, K, T)".

Переменной x_8 присваивается определяемый терм, переменной x_9 - вхождение консеквента, переменной x_{10} - символ по вхождению x_9 . Проверяется, что этот символ отличен от равенства и эквивалентности, но коммутативен. Справочник поиска теорем "транзитоперанд" определяет по x_{10} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет ровно два существенных антецедента. Переменной x_{14} присваивается набор антецедентов исходной теоремы, переменной x_{15} - набор антецедентов дополнительной теоремы. Переменной x_{16} присваивается пара существенных антецедентов дополнительной теоремы. В нашем примере - "однаправлены(a, b)" и "однаправлены(b, c)". Проверяется, что оба утверждения x_{16} имеют заголовок x_{10} . Проверяется, что число корневых операндов подтерма x_9 равно 2. Переменной x_{17} присваивается пара этих операндов. В нашем примере - "Скорость(a, K, T)" и "вектор(Место(a, t)Место(a, s))". Переменной x_{18} присваивается подтерм x_9 . Переменной x_{19} присваивается список параметров терма x_{18} , имеющих в нем единственное вхождение. Если в x_{14} имелось равенство, то его параметры исключаются из списка x_{19} . В нашем примере после этого x_{19} состоит из единственной переменной K . Переменной x_{20} присваивается элемент списка x_{19} , переменной x_{21} - элемент списка x_{17} , содержащий переменную x_{20} . В нашем примере $x_{20} - K$, $x_{21} -$

"Скорость(a, K, T)". Выбирается переменная x_{22} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b . Список x_{14} разбивается на подсписок x_{23} утверждений, содержащих x_{20} , и подсписок x_{24} остальных утверждений. Переменной x_{25} присваивается список результатов подстановки переменной x_{22} вместо x_{20} в утверждения набора x_{23} . Переменной x_{26} присваивается результат такой же подстановки в терм x_{21} . Переменной x_{27} присваивается терм " $x_{10}(x_{21} x_{26})$ ". В нашем примере - "однонаправлены(Скорость(a, b, T), Скорость(a, K, T))". Переменной x_{28} присваивается объединение списков x_{14} и x_{25} . Создается импликация с антецедентами x_{28} и консеквентом x_{27} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

38. Усмотрение монотонности определяемого предиката относительно включения множеств.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d \subseteq a \ \& \ \text{нижняягрань}(b, a) \rightarrow \text{нижняягрань}(b, d))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{нижняягрань}(b, a) \leftrightarrow b - \text{число} \ \& \ \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$$

Эта теорема определяет терм "нижняягрань(b, a)".

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема представляет собой эквивалентность. Переменной x_{12} присваивается определяющая часть. Внутри нее усматривается вхождение x_{13} квантора общности. В нашем примере - " $\forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c)$ ". Переменной x_{14} присваивается связывающая приставка этого квантора. Проверяется, что она одноэлементна, и переменной x_{15} присваивается этот элемент. Переменной x_{16} присваивается набор антецедентов квантора x_{13} . Проверяется, что он одноэлементный. Переменной x_{17} присваивается этот элемент. Проверяется, что он имеет вид условия принадлежности переменной x_{15} некоторой переменной x_{18} . В нашем примере x_{15} - c , x_{18} - a . Проверяется, что вхождение переменной x_{18} в подтерм x_{13} единственное и что эта переменная входит как в параметры терма x_{12} , так и в определяемый терм. Проверяется, что каждый надтерм квантора общности x_{13} в терме x_{12} либо имеет своим заголовком один из символов "и", "или", "существует", либо представляет собой квантор общности, у которого вхождение x_{13} расположено в консеквенте.

Переменной x_{19} присваивается список антецедентов исходной теоремы. Он разбивается на подсписок x_{20} утверждений, содержащих переменную x_{18} , и подсписок x_{21} остальных утверждений. Выбирается переменная x_{22} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная d . Переменной x_{23} присваивается список результатов подстановки x_{22} вместо x_{18} в утверждения набора x_{20} , переменной x_{24} - объединение списков x_{19} и x_{23} , к которому добавлено утверждение "содержится($x_{22} x_{18}$)".

Просматриваются все вхождения x_{25} переменной x_{18} в терм x_{12} , не расположенные внутри квантора x_{13} . В нашем примере таких нет. Проверяется, что существует такое надутверждение x_{26} вхождения x_{25} , что его заголовок x_{27}

отличен от символов "и", "или", "существует", причем каждое надутверждение вхождения х26 имеет своим заголовком один из символов "и", "или", "существует". При этом рассматриваются результат х28 замены в подтерме х26 переменной х18 на х22, а также объединение х29 списка х24 со всеми не содержащими х18 утверждениями контекста вхождения х26 и с подтермом х26. Проверяется, что х28 - следствие утверждений х29. Если хотя бы для одного из указанных вхождений х25 данная проверка не оказывается успешной, то срабатывание приема отменяется.

После просмотра вхождений х25 переменная х25 снова оказывается не определенной, и ей присваивается результат подстановки в определяемый терм х8 переменной х22 вместо х18. затем создается импликация с антецедентами х24 и консеквентом х25. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

39. Попытка рассмотреть набор одинаковых элементов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{Aax}(A - \text{set} \ \& \ a - \text{натуральное} \rightarrow x \in \prod_{c=1}^a A \leftrightarrow \text{кортеж}(x, a, A))$$

из теоремы

$$\forall_{Ax}(\text{семействомножеств}(A) \ \& \ A\text{-слово} \ \& \ \neg(A = \text{пустоеслово}) \rightarrow x \in \prod_{i=1}^{l(A)} A(i) \leftrightarrow x - \text{слово} \ \& \ l(x) = l(A) \ \& \ \forall_i(i \in \{1, \dots, l(A)\} \rightarrow x(i) \in A(i)))$$

Эта теорема определяет терм " $x \in \prod_{i=1}^{l(A)} A(i)$ ".

Переменной х8 присваивается определяемый терм, переменной х10 - вхождение его в теорему. Проверяется, что теорема представляет собой эквивалентность. Переменной х12 присваивается список антецедентов. Внутри вхождения х10 находится вхождение х13 символа "значение". Первым операндом вхождения х13 служит переменная х14. В нашем примере х13 - вхождение терма " $A(i)$ ", х14 - переменная A . Проверяется, что в списке х12 имеется утверждение "слово(х14)". Вторым операндом вхождения х13 служит переменная х15. В нашем примере - i . Переменной х16 присваивается вхождение описателя "отображение", внутри которого расположено вхождение х13. Проверяется, что связывающая приставка этого описателя состоит из единственной переменной х15. Выбираются переменные х18 и х19, не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b . Переменной х20 присваивается терм "отображение(х19 и(целое(х19) меньшеилиравно(1 х19)меньшеилиравно(х19 х18)) х14)". В нашем примере - " $\lambda_b(A, b - \text{целое} \ \& \ 1 \leq b \ \& \ b \leq a)$ ". Переменной х21 присваивается список вхождений в исходную теорему терма "длина набора(х14)". Проверяется, что этот список непуст. Переменной х22 присваивается результат замены всех этих вхождений на переменную х18. Переменной х23 присваивается набор антецедентов импликации х22. Переменной х24 присваивается список результатов подстановки терма х20 вместо переменной х14 в утверждения набора х23, к которому добавляется утверждение "натуральное(х18)". Переменной х25 присваивается результат подстановки в консеквент импликации х22 переменной х20 вместо х14. Затем создается импликация с антецедентами х24 и консеквентом х25. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

40. Попытка рассмотреть константную функцию.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{af}(a - \text{set} \rightarrow \text{семействомножеств}(\lambda_b(f, b \in a)) \leftrightarrow a = \emptyset \vee f - \text{set})$$

из теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \rightarrow \text{семействомножеств}(f) \leftrightarrow \forall_x(x \in \text{Dom}(f) \rightarrow f(x) - \text{set}))$$

Эта теорема определяет терм "семействомножеств(f)".

Переменной x_8 присваивается определяемый терм, переменной x_{10} - вхождение его в теорему, переменной x_{11} - вхождение определяющей части. Проверяется, что теорема представляет собой эквивалентность. Переменной x_{12} присваивается список антецедентов. Внутри вхождения x_{11} находится вхождение x_{13} символа "значение". Первым операндом вхождения x_{13} служит переменная x_{14} . В нашем примере x_{13} - вхождение терма " $f(x)$ ", x_{14} - переменная f . Проверяется, что в списке x_{12} имеется утверждение "функция(x_{14})". Вторым операндом вхождения x_{13} служит переменная x_{15} . В нашем примере - x . Переменной x_{16} присваивается вхождение квантора, которому подчинено вхождение x_{13} . Проверяется, что связывающая приставка этого квантора состоит из единственной переменной x_{15} . Выбираются переменные x_{18} и x_{19} , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b . Переменной x_{20} присваивается терм "отображение(x_{19} принадлежит(x_{19} x_{18}) x_{14})". В нашем примере - " $\lambda_b(f, b \in a)$ ". Переменной x_{21} присваивается результат подстановки в консеквент теоремы терма x_{20} вместо переменной x_{14} . Переменной x_{22} присваивается список результатов подстановки терма x_{20} вместо переменной x_{14} в утверждения набора x_{12} , к которому добавляется утверждение "множество(x_{18})". Переменной x_{23} присваивается импликация с антецедентами x_{22} и консеквентом x_{21} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода после проверки того, что ее консеквент не содержит символа "вариант".

Развертка по определению с преобразованием и обратной сверткой

1. Усмотрение сохранения истинности определяемого утверждения при переходе к надмножеству.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ a \in b \cap c \ \& \ b \subseteq d \rightarrow a \in d \cap c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$$

Эта теорема определяет терм " $a \in b \cap c$ ".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_9 присваивается определяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x_{12} присваивается определяющая часть. Выбирается параметр x_{13} терма x_9 . В нашем примере - b . Проверяется, что он имеет единственное вхождение в терм

x12. Переменной x14 присваивается это вхождение, переменной x15 - вхождение, операндом которого служит x14. В нашем примере x15 имеет вид " $a \in b$ ". Проверяется, что по вхождению x15 расположен один из символов "принадлежит", "содержится", причем x14 - второй операнд вхождения x15. Проверяется, что каждый надтерм вхождения x15 либо имеет своим заголовком один из символов "и", "или", "существует", либо является кванторной импликацией, содержащей x15 в своем консеквенте. Выбирается переменная x16, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная d . Переменной x17 присваивается результат подстановки переменной x16 вместо x13 в терм x9. Переменной x18 присваивается список результатов подстановки переменной x16 вместо x13 в те antecedенты теоремы, которые содержат переменную x13. Переменной x19 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" объединения antecedентов теоремы с утверждениями x18, а также с x9 и "содержится(x13 x16)". Обработка ведется относительно параметров терма x17. После этого создается импликация с antecedентами x19 и консеквентом x17, которая регистрируется в списке вывода.

2. Усмотрение симметрии для параметра и связанной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \rightarrow \\ C \in \text{окружность}(AB) \leftrightarrow B \in \text{окружность}(AC))$$

из теоремы

$$\forall_{AB}(A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \rightarrow \text{окружность}(AB) = \\ \text{set}_C(C \text{ — точка} \ \& \ l(AC) = l(AB)))$$

Эта теорема определяет терм "окружность(AB)".

Проверяется, что теорема - равенство. Переменной x9 присваивается определяемый терм. Переменной x10 присваивается вхождение определяемой части в теорему, переменной x11 - определяющей. Проверяется, что x11 - вхождение описателя "класс". Переменной x12 присваивается список antecedентов теоремы. Проверяется, что он непуст. Переменной x13 присваивается связывающая приставка описателя "класс", переменной x14 - набор конъюнктивных членов утверждения под этим описателем. В этом наборе выбирается утверждение x15. В нашем примере - " $l(AC) = l(AB)$ ". Оператор "симметричные пары" определяет набор x16 лексикографически упорядоченных пар переменных терма x15, перестановка которых не изменяет этого терма (с точностью до изменения порядка операндов коммутативных операций). В нашем примере - единственная пара (B, C) . Выбирается элемент x17 набора x16. Рассматривается переменная x18 пары x17, входящая в список x13. В нашем примере - переменная C . Переменной x19 присваивается другая переменная пары x17. Проверяется, что она не входит в x13. В нашем примере x19 - B . Переменной x20 присваивается конъюнкция отличных от x15 утверждений списка x14. В нашем примере - " C — точка". Проверяется, что x19 не входит в параметры терма x20. Переменной x21 присваивается результат подстановки переменной x19 вместо x18 в терм x20. В нашем примере - " B — точка". Проверяется, что x21 - следствие

антецедентов теоремы. Переменной x23 присваивается набор результатов подстановки переменной x18 вместо x19 в утверждения списка x12, переменной x24 - объединение списков x12 и x23. Переменной x25 присваивается результат подстановки переменной x18 вместо x19 в терм x9. Создается импликация с антецедентами x24, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений "принадлежит(x18 x9)" и "принадлежит(x19 x25)". Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Использование симметрии операндов транзитивного отношения в определении класса.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \& C \in \text{окружность}(AB) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \rightarrow \text{окружность}(AB) = \text{окружность}(AC))$$

из теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& \neg(A = B) \rightarrow \text{окружность}(AB) = \text{set}_C(C - \text{точка} \& l(AC) = l(AB)))$$

Эта теорема определяет терм "окружность(AB)".

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Проверяется, что теорема - равенство. Переменной x9 присваивается определяемый терм. Переменной x10 присваивается вхождение определяемой части в теорему, переменной x11 - определяющей. Проверяется, что x11 - вхождение описателя "класс". Переменной x12 присваивается список антецедентов теоремы. Проверяется, что он непуст. Переменной x13 присваивается связывающая приставка описателя "класс", переменной x14 - набор конъюнктивных членов утверждения под этим описателем. В этом наборе выбирается утверждение x15. В нашем примере - " $l(AC) = l(AB)$ ".

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что число корневых операндов утверждения x15 равно 2, после чего переменной x16 присваивается набор этих операндов. Среди них выбирается терм x17, имеющий переменную списка x13, и терм x18, не имеющий такой переменной. В нашем примере x17 - " $l(AC)$ ", x18 - " $l(AB)$ ". Проверяется, что заголовком термина x15 служит символ транзитивного симметричного отношения. Находится подстановка S вместо переменных x13, унифицирующая термы x17 и x18. Проверяется, что она подставляет вместо переменных x13 набор x20 попарно различных переменных. В нашем примере x13 состоит из переменной C , x20 - из переменной B . Переменной x21 присваивается результат отбрасывания из списка x14 утверждения x15. Проверяется, что термы списка x21 не имеют переменных x20. Переменной x22 присваивается результат подстановки переменных x13 вместо переменных x20 в терм x9, переменной x23 - результат добавления к списку x12 утверждения "принадлежит(x13 x9)". Затем создается импликация с антецедентами x23, консеквентом которой служит равенство выражений x9 и x22. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Сохранение свойства функции при навешивании внешней операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{af}(f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \text{Dom}(a) \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{четнаяфункция}(f) \rightarrow \text{четнаяфункция}(\lambda_b(a(f(b)), b \in \text{Dom}(f))))$$

из теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{четнаяфункция}(f) \leftrightarrow \forall_x(x \in \text{Dom}(f) \rightarrow -x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f(-x) - f(x) = 0))$$

Эта теорема определяет терм "четнаяфункция(f)".

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема является эквивалентностью. Переменной x_{12} присваивается определяющая часть. Проверяется, что она содержит квантор. Переменной x_{13} присваивается список антецедентов. В нем находится утверждение x_{14} с заголовком "функция", операндом которого служит переменная x_{15} , входящая в список параметров терма x_8 . В нашем примере x_{15} - переменная f . Проверяется, что параметры антецедентов включаются в параметры определяемого терма. Среди антецедентов выбирается утверждение x_{16} с заголовком "содержится", первый операнд которого имеет вид "значение($x_{15} \ x_{17}$)". В нашем примере x_{17} - " \mathbb{R} ". Проверяется, что переменная x_{15} встречается в каждом отличном от x_{16} антецеденте только как операнд символа "функция" либо "область". Проверяется также, что переменная x_{15} не встречается в терме x_{17} . В терме x_{12} рассматривается вхождение x_{18} символа "равно". Проверяется, что любое не расположенное внутри x_{18} вхождение переменной x_{15} в терм x_{12} является операндом символа "область". Переменной x_{19} присваивается пара частей равенства x_{18} . В нашем примере x_{18} имеет вид " $f(-x) - f(x) = 0$ ".

Если x_{18} имеет вид равенства "разности" двух выражений "нулю", то x_{19} переприсваивается пара данных выражений. В нашем примере x_{19} становится состоящим из выражений " $f(-x)$ ", " $f(x)$ ". Проверяется, что x_{19} состоит из выражений вида "значение($x_{15} \dots$)", где второй операнд не содержит переменной x_{15} . Выбираются переменные X, Y , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - a, b . Переменной x_{22} присваивается терм "отображение(Y принадлежит(Y область(x_{15})) значение(X значение($x_{15} \ Y$)))". В нашем примере - " $\lambda_b(a(f(b)), b \in \text{Dom}(f))$ ". Переменной x_{23} присваивается результат подстановки терма x_{22} вместо переменной x_{15} в терм x_8 . В нашем примере - "четнаяфункция($\lambda_b(a(f(b)), b \in \text{Dom}(f))$)". Переменной x_{24} присваивается результат добавления к списку x_{13} утверждений "функция(X)", "содержится(значения(x_{15})область(X))", "содержится(значения(X) x_{17})", x_8 . Создается импликация с антецедентами x_{24} и консеквентом x_{23} , которая регистрируется в списке вывода.

5. Усмотрение симметричных переменных.

В качестве примера рассмотрим вывод протокола

$$\text{"схемаоперанда(биссектриса набор(0 2 4 набор(1 1 3)))"}$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = C) \rightarrow \text{биссектриса}(BACD) \leftrightarrow \angle(CAD) = \angle(DAB) \ \& \ \text{разныестороны}(B, C, \text{прямая}(AD)) \ \& \ \angle(CAD) \leq \pi/2)$$

Эта теорема определяет терм "биссектриса($BACD$)".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_9 присваивается вхождение определяемого терма, переменной x_{10} - определяющей. Переменной x_{11} присваивается набор вхождений корневых операндов определяемого терма. Проверяется, что он не менее чем трехэлементный. Перебираются пары x_{12} , x_{14} различных вхождений в список x_{11} , таких, что x_{14} идет после x_{12} . Проверяется, что x_{12} - вхождение некоторой переменной x_{13} , x_{14} - переменной x_{15} , причем обе эти переменные имеют единственное вхождение в определяемый терм. Переменной x_{16} присваивается конъюнкция антецедентов теоремы. Переменной x_{17} присваивается результат подстановки в x_{16} переменных x_{15} и x_{13} , соответственно, вместо x_{13} и x_{15} . Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" термов x_{16} и x_{17} совпадают. Переменной x_{18} присваивается подтерм x_{10} , переменной x_{19} - результат подстановки в x_{18} переменных x_{15} и x_{13} , соответственно, вместо x_{13} и x_{15} . Проверяется, что при добавлении к антецедентам теоремы любого из утверждений x_{18} , x_{19} другое из этих утверждений усматривается как следствие.

Переменной x_{20} присваивается набор, начинающийся с нуля и далее перечисляющий номера вхождений в список x_{11} , отличных от x_{12} и x_{14} . Нумерация вхождений начинается с единицы. Переменной x_{21} присваивается терм "набор($1 \ i_1 \ i_2$)", где i_1, i_2 - номера вхождений x_{12} и x_{14} . Наконец, создается терм "схемаоперандов(S набор($x_{20} \ x_{21}$))", где S - заголовок определяемого утверждения. Этот терм регистрируется в списке вывода и снабжается единственной характеристикой "протокол".

6. Развязка пары числовых атомов, содержащих все переменные определяющей эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcfghij}(\neg(b = f) \ \& \ \neg(c = f) \ \& \ \neg(f = g) \ \& \ \neg(f = h) \ \& \ \neg(f = i) \ \& \ \neg(f = j) \ \& \ \text{биссектриса}(ifbg) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ i - \text{точка} \ \& \ j - \text{точка} \ \& \ \text{точкалуча}(f, b, c) \ \& \ \text{точкалуча}(f, g, h) \ \& \ \text{точкалуча}(f, i, j) \rightarrow \text{биссектриса}(jfch))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = C) \rightarrow \text{биссектриса}(BACD) \leftrightarrow \angle(CAD) = \angle(DAB) \ \& \ \text{разныестороны}(B, C, \text{прямая}(AD)) \ \& \ \angle(CAD) \leq \pi/2)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \ \& \ \text{точкалуча}(A, D, E) \rightarrow \angle(BAD) = \angle(CAE))$$

Исходная теорема определяет терм "биссектриса($BACD$)".

Проверяется, что теорема представляет собой эквивалентность. Переменной x_8 присваивается определяемый терм, переменной x_{12} - набор антецедентов, переменной x_{13} - определяющее утверждение. Переменной x_{14} присваивается список всех невырожденных числовых атомов терма x_{13} . В нашем примере - " $\angle(CAD)$ ", " $\angle(DAB)$ ". Проверяется, что список x_{14} двухэлементный и его параметры включают все переменные теоремы. Переменной x_{15} присваивается первый элемент списка x_{14} , переменной x_{16} - второй. Переменной x_{17} присваивается общий заголовок термов x_{15} и x_{16} . В нашем примере x_{17} - "угол". Справочник поиска теорем "равнчисл" определяет по символу x_{17} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{21} присваивается направление замены для дополнительной теоремы, определяемое по характеристике "варугол". В нашем примере - "второйтерм". Переменной x_{22} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{22} имеет вид:

$$\forall_{abcde}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \neg(a = e) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \text{точкалуча}(a, b, c) \ \& \ \text{точкалуча}(a, d, e) \rightarrow \angle(bad) = \angle(cae))$$

Переменной x_{23} присваивается результат повторного переобозначения переменных теоремы x_{18} - на этот раз на переменные, не входящие в исходную теорему и в теорему x_{22} . Получаем:

$$\forall_{fghij}(f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ i - \text{точка} \ \& \ j - \text{точка} \ \& \ \neg(f = j) \ \& \ \neg(f = h) \ \& \ \neg(f = g) \ \& \ \neg(f = i) \ \& \ \text{точкалуча}(f, g, h) \ \& \ \text{точкалуча}(f, i, j) \rightarrow \angle(gfi) = \angle(hfj))$$

Переменной x_{24} присваивается результат переобозначения в исходной теореме переменных на переменные, не входящие в теоремы x_2 , x_{22} , x_{23} . Получаем:

$$\forall_{klmn}(k - \text{точка} \ \& \ l - \text{точка} \ \& \ m - \text{точка} \ \& \ n - \text{точка} \ \& \ \neg(k = l) \ \& \ \neg(k = n) \ \& \ \neg(k = m) \rightarrow \text{биссектриса}(lkmn) \leftrightarrow \angle(mkn) = \angle(nkl) \ \& \ \text{разныестороны}(l, m, \text{прямая}(kn)) \ \& \ \angle(mkn) \leq \pi/2)$$

Переменной x_{25} присваивается входжение консеквента теоремы x_{22} , переменной x_{26} - входжение консеквента теоремы x_{23} . Переменной x_{28} присваивается связывающая приставка исходной теоремы, переменной x_{29} - связывающая приставка теоремы x_{24} . Переменной x_{30} присваивается результат подстановки в терм x_{15} переменных x_{29} вместо x_{28} , переменной x_{31} - результат такой же подстановки в терм x_{16} . В нашем примере x_{30} имеет вид " $\angle(mkn)$ ", x_{31} - вид " $\angle(nkl)$ ". Переменной x_{32} присваивается список переменных, входящих в исходную теорему и теоремы x_{22} , x_{23} , x_{24} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{32} , унифицирующая одновременно терм x_{15} с заменяемой частью входжения x_{25} , x_{16} - с заменяемой частью входжения x_{26} , x_{30} - с заменяющей частью входжения x_{25} , x_{31} - с заменяющей частью входжения x_{26} . В нашем примере " $\angle(CAD)$ " унифицируется с " $\angle(bad)$ ", " $\angle(DAB)$ " - с " $\angle(gfi)$ ", " $\angle(mkn)$ " - с " $\angle(cae)$ ", " $\angle(nkl)$ " - с " $\angle(hfj)$ ".

Переменной x_{34} присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы, а также к антецедентам теорем x_{22} , x_{23} , x_{24} .

Переменной x_{35} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_{13} , переменной x_{36} - результат применения S к подтерму теоремы x_{24} , соответствующему определяющей части исходной теоремы. В нашем примере x_{35} имеет вид " $\angle(bfg) = \angle(gfi) \ \& \ \text{разныестороны}(i, b, \text{прямая}(fg)) \ \& \ \angle(bfg) \leq \pi/2$ ", x_{36} - вид " $\angle(cf h) = \angle(hf j) \ \& \ \text{разныестороны}(j, c, \text{прямая}(fh)) \ \& \ \angle(cf h) \leq \pi/2$ ". Переменной x_{37} присваивается результат применения подстановки S к консеквенту теоремы x_{22} , переменной x_{38} - результат применения ее к консеквенту теоремы x_{23} . В нашем примере x_{37} имеет вид " $\angle(bfg) = \angle(cf h)$ ", x_{38} - вид " $\angle(gfi) = \angle(hf j)$ ". Переменной x_{39} присваивается объединение списков x_{34} , набора конъюнктивных членов утверждения x_{35} и пары утверждений x_{37} , x_{38} . При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x_{36} - следствие утверждений x_{39} .

Переменной x_{41} присваивается результат применения подстановки S к терму x_8 , переменной x_{42} - результат применения ее к подтерму теоремы x_{24} , соответствующему определяемой части исходной теоремы. В нашем примере x_{41} имеет вид "биссектриса($ifbg$)", x_{42} - вид "биссектриса($jfch$)". Переменной x_{43} присваивается результат добавления к списку x_{34} утверждения x_{41} . При помощи задачи на исследование проверяется непротиворечивость списка x_{43} . Затем формируется импликация с антецедентами x_{43} и консеквентом x_{42} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Теореме передается характеристика "варопер(X)", где X - список всех параметров терма x_{42} , не вошедших в терм x_{41} . В нашем примере он состоит из переменных c, h, j .

7. Развязка переменных в единственном числовом атоме определяющей части равенства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(a = e) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \text{точкалуча}(a, b, c) \ \& \ \text{точкалуча}(a, d, e) \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(ad)) = \text{уголмежду}(\text{вектор}(ac), \text{вектор}(ae)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(AC)) = \angle(BAC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \ \& \ \text{точкалуча}(A, D, E) \rightarrow \angle(BAD) = \angle(CAE))$$

Исходная теорема определяет терм "уголмежду(вектор(AB), вектор(AC))".

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема представляет собой тождество. Переменной x_{12} присваивается список антецедентов, переменной x_{13} - определяющее выражение. Переменной x_{14} присваивается список невырожденных числовых атомов выражения x_{13} . Проверяется, что он состоит из единственного терма x_{15} . В нашем примере - " $\angle(BAC)$ ".

Проверяется, что этот терм содержит все переменные исходной теоремы. Переменной x16 присваивается заголовок терма x15. В нашем случае - "угол". Справочник поиска теорем "равнчисл" определяет по x16 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x20 присваивается направление замены для дополнительной теоремы, определяемое по характеристике "варугол(...)". В нашем примере - "второйтерм". Переменной x21 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{abcde}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \neg(a = e) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \text{точкалуча}(a, b, c) \ \& \ \text{точкалуча}(a, d, e) \rightarrow \angle(bad) = \angle(cae))$$

Переменной x22 присваивается результат переобозначения переменных исходной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему и в теорему x21. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{fgh}(f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ \neg(f = h) \ \& \ \neg(f = g) \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(fg), \text{вектор}(fh)) = \angle(ghf))$$

Переменной x23 присваивается вхождение в теорему x22, соответствующее вхождению определяющего выражения в исходную теорему. В нашем примере - вхождение " $\angle(ghf)$ ". Переменной x24 присваивается набор антецедентов теоремы x22, переменной x25 - подтерм x23. Переменной x26 присваивается невырожденный числовой атом терма x25. Переменной x28 присваивается заменяемая часть теоремы x21, переменной x29 - заменяющая. Переменной x30 присваивается список переменных исходной теоремы и теорем x21, x22. Определяется подстановка S вместо переменных x30, унифицирующая терм x15 с термом x28 и одновременно - терм x26 с термом x29. Переменной x32 присваивается список результатов применения подстановки S к наборам антецедентов исходной теоремы и теорем x21, x22. Переменной x33 присваивается равенство выражения x8 подтерму теоремы x22, соответствующему определяемому выражению исходной теоремы. Переменной x34 присваивается результат применения подстановки S к равенству x33. Затем создается импликация с антецедентами x32 и консеквентом x34. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

8. Упрощение заменяющей части и обратная свертка по определению данного раздела - случай конъюнктивной заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bd}(\text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Трехмерн}(d) \rightarrow \text{вверх}(-b, d) \leftrightarrow \text{вниз}(b, d))$$

из теоремы

$$\forall_{aK}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вверх}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 1) = 0 \ \& \ \text{крд}(a, K, 2) = 0 \ \& \ 0 \leq \text{крд}(a, K, 3))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{aKi}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \ \& \ i \in \{1, 2, 3\} \rightarrow \text{крд}(-a, K, i) = -\text{крд}(a, K, i))$$

Исходная теорема определяет терм "вверх(a, K)".

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_{12} присваивается список ее антецедентов, переменной x_{13} - определяющая часть. Проверяется, что терм x_{13} не имеет связанных переменных. Внутри вхождения определяющей части в теорему выбирается вхождение x_{14} неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - подтерма "крд($a, K, 1$)". Переменной x_{15} присваивается заголовок терм x_{14} . В нашем примере - "крд". Справочник поиска теорем "компоненты" определяет по x_{15} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{20} присваивается направление замены для нее, определяемое характеристикой "компоненты(...)". В нашем примере - "второйтерм". Оператор "тождвывод" определяет результат x_{21} преобразования вхождения x_{14} при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{bd}(\text{Вектор}(-b) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ 1 \in \{1, 2, 3\} \rightarrow \text{вверх}(-b, d) \leftrightarrow \neg \text{крд}(b, d, 1) = 0 \ \& \ \text{крд}(-b, d, 2) = 0 \ \& \ 0 \leq \text{крд}(-b, d, 3))$$

Переменной x_{22} присваивается результат обработки импликации x_{21} оператором "нормтеорема. В нашем примере получаем:

$$\forall_{bd}(\text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вверх}(-b, d) \leftrightarrow \text{крд}(b, d, 1) = 0 \ \& \ \text{крд}(b, d, 2) = 0 \ \& \ \text{крд}(b, d, 3) \leq 0)$$

Проверяется, что x_{22} - кванторная импликация, и переменной x_{23} присваивается вхождение ее консеквента. Проверяется, что этот консеквент - эквивалентность. Переменной x_{24} присваивается правая часть данной эквивалентности, переменной x_{25} - список антецедентов теоремы x_{22} . Решается задача на описание с посылками x_{25} и единственным условием x_{24} . Единственная ее цель - "редакция". Переменной x_{27} присваивается набор дизъюнктивных членов ответа. Проверяется, что этот набор одноэлементный. Переменной x_{28} присваивается этот элемент. В нашем примере - утверждение, совпадающее с правой частью эквивалентности x_{22} . В списке вывода находится теорема x_{30} , имеющая характеристику "определение(...)". Она будет использоваться для обратной свертки по определению. Переменной x_{32} присваивается результат переобозначения связанных переменных теоремы x_{30} на переменные, не входящие в терм x_{22} . В нашем примере имеем:

$$\forall_{aK}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вниз}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 1) = 0 \ \& \ \text{крд}(a, K, 2) = 0 \ \& \ \text{крд}(a, K, 3) \leq 0)$$

Переменной x_{33} присваивается вхождение консеквента теоремы x_{32} . Проверяется, что этот консеквент - эквивалентность. Переменной x_{34} присваивается ее правая часть. Переменной x_{35} присваивается список параметров терма x_{34} . Проверяется, что в нем содержатся все переменные теоремы x_{32} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{35} , переводящая терм x_{34} в x_{28} . В нашем примере - терм "крд($a, K, 1$) = 0 & крд($a, K, 2$) = 0 & крд($a, K, 3$) ≤ 0" в терм "крд($b, d, 1$) = 0 & крд($b, d, 2$) = 0 & крд($b, d, 3$) ≤ 0". Переменной x_{38} присваивается результат применения подстановки S к левой части эквивалентности x_{33} . Переменной x_{39} присваивается эквивалентность левой части эквивалентности x_{23} и утверждения x_{38} . Переменной x_{40} присваивается объединение списка

x25 с набором результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x32. Затем создается импликация с антецедентами x40 и консеквентом x39. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

9. Упрощение заменяющей части и обратная свертка по определению данного раздела - случай дизъюнктивной заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bce}(0 < b \ \& \ b\text{-число} \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ \text{Трехмерн}(e) \rightarrow \text{вправо}(bc, e) \leftrightarrow \text{вправо}(c, e))$$

из теоремы

$$\forall_{aK}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вправо}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 2) = 0 \ \& \ \text{крд}(a, K, 3) = 0 \ \& \ 0 \leq \text{крд}(a, K, 1))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abKi}(a \text{ - число} \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \ \& \ i \in \{1, 2, 3\} \rightarrow \text{крд}(ab, K, i) = a \cdot \text{крд}(b, K, i))$$

Исходная теорема определяет терм "вправо(a, K)".

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x12 присваивается список ее антецедентов, переменной x13 - определяющая часть. Проверяется, что терм x13 не имеет связанных переменных. Внутри вхождения определяющей части в теорему выбирается вхождение x14 неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - подтерма "крд($a, K, 3$)". Переменной x15 присваивается заголовок терм x14. В нашем примере - "крд". Справочник поиска теорем "компоненты" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x20 присваивается направление замены для нее, определяемое характеристикой "компоненты(...)". В нашем примере - "второйтерм". Оператор "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождения x14 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{bce}(\text{Вектор}(bc) \ \& \ \text{Трехмерн}(e) \ \& \ b \text{ - число} \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ 3 \in \{1, 2, 3\} \rightarrow \text{вправо}(bc, e) \leftrightarrow \neg \text{крд}(bc, e, 2) = 0 \ \& \ b \cdot \text{крд}(c, e, 3) = 0 \ \& \ 0 \leq \text{крд}(bc, e, 1))$$

Переменной x22 присваивается результат обработки импликации x21 оператором "нормтеорема. В нашем примере получаем:

$$\forall_{bce}(b \text{ - число} \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ \text{Трехмерн}(e) \rightarrow \text{вправо}(bc, e) \leftrightarrow (\text{крд}(c, e, 2) = 0 \ \& \ \text{крд}(c, e, 3) = 0 \ \vee \ b = 0) \ \& \ 0 \leq b \cdot \text{крд}(c, e, 1))$$

Проверяется, что x22 - кванторная импликация, и переменной x23 присваивается вхождение ее консеквента. Проверяется, что этот консеквент - эквивалентность. Переменной x24 присваивается правая часть данной эквивалентности, переменной x25 - список антецедентов теоремы x22. Решается задача на описание с посылками x25 и единственным условием x24. Единственная ее цель -

"редакция". Переменной x27 присваивается набор дизъюнктивных членов ответа.

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что набор x27 более чем одноэлементный. В нашем примере он состоит из утверждений " $\text{крд}(c, e, 2) = 0 \ \& \ \text{крд}(c, e, 3) = 0 \ \& \ b \leq 0 \ \& \ \text{крд}(c, e, 1) \leq 0$ ", " $b = 0 \ \& \ \text{крд}(c, e, 1) \leq 0$ ", " $\text{крд}(c, e, 2) = 0 \ \& \ \text{крд}(c, e, 3) = 0 \ \& \ 0 \leq b \ \& \ 0 \leq \text{крд}(c, e, 1)$ ", " $b = 0 \ \& \ 0 \leq \text{крд}(c, e, 1)$ ".

Переменной x28 присваивается набор наборов конъюнктивных членов утверждений списка x27. В списке вывода находится теорема x30, имеющая характеристику "определение(...)". В нашем примере она совпадает с исходной теоремой. Теорема x30 будет использоваться для обратной свертки по определению. Переменной x32 присваивается результат переобозначения ее связанных переменных на переменные, не входящие в терм x22. В нашем примере имеем:

$$\forall_{aK}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вправо}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 2) = 0 \ \& \ \text{крд}(a, K, 3) = 0 \ \& \ 0 \leq \text{крд}(a, K, 1))$$

Переменной x33 присваивается вхождение консеквента теоремы x32. Проверяется, что этот консеквент - эквивалентность. Переменной x34 присваивается набор конъюнктивных членов ее правой части. Переменной x35 присваивается список параметров термов x34. Проверяется, что в нем содержатся все переменные теоремы x32. В списке x28 выбирается элемент x36. В нашем примере он состоит из утверждений " $\text{крд}(c, e, 2) = 0$ ", " $\text{крд}(c, e, 3) = 0$ ", " $0 \leq b$ ", " $0 \leq \text{крд}(c, e, 1)$ ". Проверяется, что список x36 не короче списка x34. Определяется подстановка S вместо переменных x35, переводящая термы списка x34 в подмножество x38 термов списка x36. Переменной x39 присваивается остаток списка x36. В нашем примере он состоит из единственного утверждения " $0 \leq b$ ". Переменной x40 присваивается список параметров термов x38. Проверяется, что он не пересекается а параметрами термов списка x39.

Переменной x41 присваивается список x38. Просматриваются отличные от x36 элементы x42 набора x28. Переменной x43 присваивается список всех утверждений набора x42, параметры которых включаются в список x40. Если в каком-либо случае набор x43 оказывается пуст, то переход к рассмотрению другого x36. Иначе - к списку x41 добавляются отрицания конъюнкций утверждений списка x43.

По окончании просмотра списка x28 в нашем примере получаем список x41 вида " $0 \leq b$ ", " $\neg(b \leq 0)$ ", " $\neg(b = 0)$ ", " $\neg(b = 0)$ ". При этом переменные, начиная с x42, снова оказываются не определены. Переменной x42 присваивается список всех утверждений набора x25, параметры которых включаются в x40. В нашем примере - утверждение " b —число". Решается задача на описание с единственной посылкой "истина", условиями которой служат утверждения x41 и x42. Цели задачи - "полный", "прямойответ", "редакция". Ответ присваивается переменной x45. В нашем примере он имеет вид " $0 < b \ \& \ b$ —число". Проверяется, что x45 - не символ "отказ". Переменной x46 присваивается результат отбрасывания из списка конъюнктивных членов утверждения x45 элементов набора x42. Проверяется, что все утверждения списка x46 элементарны и ни одно из них не является константой "ложь". Переменной x47 присваивается объединение

списков x25, x46 и списка результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x32. Переменной x48 присваивается результат применения подстановки S к левой части эквивалентности x33. Затем создается импликация с антецедентами x47, консеквентом которой служит эквивалентность левой части эквивалентности x23 и утверждения x48. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Реализация определяющей части

1. Рассмотрение случая, когда числовой атом в определяющем терме обращается в константу.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

"конечное(\emptyset)"

из теоремы

$\forall_a(a - \text{set} \rightarrow \text{конечное}(a) \leftrightarrow \text{card}(a) - \text{число})$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{set} \rightarrow \text{card}(a) = 0 \leftrightarrow a = \emptyset)$

Эта теорема определяет терм "конечное(a)".

Проверяется, что теорема - кванторная импликация с эквивалентностью в консеквенте. Переменной x9 присваивается определяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. В определяющей части рассматривается вхождение x12 неоднобуквенного подтерма. Переменной x13 присваивается его заголовок. В нашем примере x12 - вхождение подтерма "card(a)", x13 - символ "мощность". Справочник поиска теорем "числ" определяет по x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается результат переобозначения в дополнительной теореме переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере имеем:

$\forall_b(b - \text{set} \rightarrow \text{card}(b) = 0 \leftrightarrow b = \emptyset)$

Переменной x20 присваивается заменяемая часть теоремы x18, определяемая по характеристике "общнорм". В нашем примере - "card(b) = 0". Проверяется, что x20 - равенство. Переменной x23 присваивается та его часть, которая имеет заголовок x13, переменной x24 - список ее параметров. В нашем примере x23 имеет вид "card(b)", x24 состоит из единственной переменной b . Переменной x25 присваивается список антецедентов теоремы x18. Проверяется, что все параметры утверждений x25 включаются в список x24. Определяется подстановка S вместо переменных x24, переводящая терм x23 в подтерм x12. Переменной x27 присваивается результат замены в консеквенте исходной теоремы вхождения x12 на отличную от x23 часть равенства x20. В нашем примере имеем "конечное(a) \leftrightarrow 0 - число". Переменной x28 присваивается набор результатов применения подстановки S к утверждениям x25, переменной x29 - результат применения этой подстановки к заменяющей части теоремы x18. В нашем примере x29 имеет вид " $a = \emptyset$ ". Переменной x30 присваивается объединение списка

антецедентов исходной теоремы со списком x28 и утверждением x29. Создается импликация с антецедентами x30 и консеквентом x27. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка подобрать пример элемента класса.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{AC}(\neg(A = C) \ \& \ A \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \rightarrow C \in \text{окружность}(AC))$$

из теоремы

$$\forall_{AB}(A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{окружность}(AB) = \text{set}_C(C \text{ — точка} \ \& \ l(AC) = l(AB)))$$

Эта теорема определяет терм "окружность(AB)".

Проверяется, что теорема - кванторное тождество. Переменной x9 присваивается определяемый терм. Проверяется, что определяющее выражение имеет заголовок "класс". Переменной x12 присваивается набор антецедентов теоремы, переменной x13 - связывающая приставка описателя "класс", переменной x14 - набор конъюнктивных членов утверждения под описателем. Решается задача на описание с посылками x12 и условиями x14. Цели задачи - "полный", "пример", "прямойответ", "перечисление", "неизвестные x13". Цель "перечисление" указывает на режим перечисления различных ответов. Они сохраняются в комментарии (ответзадачи ...) к данной задаче. При решении вводится ограничитель трудоемкости. По завершении решения рассматриваются различные ответы x17, извлекаемые из указанного комментария. В нашем примере x17 имеет вид "C = B". Переменной x18 присваивается объединение списка x12 и набора конъюнктивных членов ответа x17, переменной x19 - утверждение "принадлежит(x13 x9)". Создается импликация с антецедентами x18 и консеквентом x19. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Примерка кванторного определения свойства функции на константную и тождественную функции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{agi}(g \text{ — число} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \rightarrow \lim_{e \rightarrow a} g = g)$$

из теоремы

$$\forall_{abfi}(f \text{ — функция} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ b \text{ — число} \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(f, a, i) \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{предел}(f, i, a) = b \leftrightarrow \forall_c(c \text{ — число} \ \& \ 0 < c \rightarrow \exists_d(0 < d \ \& \ d \text{ — число} \ \& \ \forall_x(x \text{ — число} \ \& \ x \in \text{Окрестность}(a, d, i) \rightarrow |f(x) - b| < c))))$$

Эта теорема определяет терм "предел(f, i, a) = b".

Напомним смысл используемых в теоремах обозначений. Условие "Число(a)" означает, что a - вещественное число либо один из символов "минусбеск", "плюсбеск". Условие "типпредела(i)" означает, что i - указатель типа предела, т.е.

либо 0 (двусторонний предел), либо 1 (предел слева), либо 2 (предел справа). Условие "Локопред(f, a, i)" означает, что функция f определена в некоторой непустой проколотой окрестности точки a , причем i - указатель типа окрестности (см. "типпредела"). Выражение "Окрестн(a, d, i)" обозначает проколотую окрестность точки a , размеры которой определяются положительным числом d , причем i - указатель типа окрестности. Наконец, "предел(f, i, a)" обозначает предел функции f в точке a , причем i - указатель типа рассматриваемой окрестности.

Перейдем к описанию приема. Переменной $x8$ присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной $x12$ присваивается определяющий терм. Проверяется, что он содержит квантор. Переменной $x13$ присваивается список антецедентов. В этом списке находится утверждение $x14$ с заголовком "функция". Переменной $x15$ присваивается операнд этого утверждения. Проверяется, что он представляет собой переменную, входящую в список параметров терма $x8$. В нашем примере $x15$ - переменная f . Проверяется, что все параметры утверждений $x13$ являются параметрами терма $x8$. В списке $x13$ находится утверждение $x16$, имеющее вид включения множества значений функции $x15$ в некоторое множество M . Выбирается переменная $x17$, не используемая в теореме. В нашем примере - переменная e . Переменной $x18$ присваивается результат добавления к списку $x13$ утверждения "принадлежит($x17 M$)". В нашем примере - утверждения " $e \in \mathbb{R}$ ". Решается задача на исследование с посылками $x18$ и единственной целью (неизвестные $x17$). После этого в списке посылок задачи находится утверждение $x21$ вида " $P(x17)$ ", у которого P - обозначение типа объекта. В нашем примере - "число". Выбираются различные переменные $x23$ и $x24$, не входящие в исходную теорему и отличные от переменной $x17$. Поочередно рассматриваются три случая. В первом из них переменной $x25$ присваивается выражение "отображение($x17$ принадлежит($x17 x24$) $x23$)", во втором - "отображение($x17 x21 x23$)", в третьем - "отображение($x17 x21 x17$)". Первые два случая соответствуют константной функции с различием в задании области определения, третий - тождественной функции. В нашем примере берется второй случай, т.е. $x25$ имеет вид " $\lambda_e(g, e - \text{число})$ ".

Переменной $x26$ присваивается результат подстановки в терм $x8$ выражения $x25$ вместо переменной $x15$. В нашем примере - " $\lim_{e \rightarrow a \setminus i} g$ ". Переменной $x27$ присваивается результат такой же подстановки в терм $x12$. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_c(c - \text{число} \ \& \ 0 < c \rightarrow \exists_d(0 < d \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \forall_x(x - \text{число} \ \& \ x \in \text{Окрестность}(a, d, i) \rightarrow |\lambda_e(g, e - \text{число})(x) - b| < c))$$

Переменной $x28$ присваивается список результатов подстановки $x25$ вместо $x15$ в утверждения списка $x13$. Переменной $x29$ присваивается список параметров терма $x27$. В нашем примере - a, b, g, i . Переменной $x30$ присваивается список утверждений набора $x28$, содержащих переменные списка $x29$. В нашем примере $x30$ состоит из утверждений:

$$\text{"Число}(a), \text{"}b - \text{число}, \text{"типпредела}(i), \text{"Локопред}(\lambda_e(g, e - \text{число}), a, i), \\ \text{"Dom}(\lambda_e(g, e - \text{число})) \subseteq \mathbb{R}, \text{"Val}(\lambda_e(g, e - \text{число})) \subseteq \mathbb{R}.$$

Переменной x31 присваивается остаток списка x28. Переменной x32 присваивается объединение списка x30 и набора конъюнктивных членов утверждения x27. Проверяется, что список x29 непуст. Решается задача на описание с посылками x31 и условиями x32. Цели ее - "полный", "прямойответ", "попыткаспуска", "неизвестные x29". Ответ присваивается переменной x34. В нашем примере он имеет вид " $(a) \& b$ - число & типпредела(i) & $g = b$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и не имеет связанных переменных. Создается импликация, антецедентами которой служат конъюнктивные члены утверждения x34, а консеквентом - терм x26. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому разрешается использовать все уже имеющиеся в списке вывода теоремы. Выбирается конъюнктивный член x37 результата такой обработки, который регистрируется в списке вывода.

4. Примерка кванторного определения свойства функции на элементарные операции раздела.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aghij}(\text{Dom}(h) = g \& \text{Dom}(j) = g \& g \subseteq \mathbb{R} \& \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Val}(j) \subseteq \mathbb{R} \& \\ h - \text{функция} \& j - \text{функция} \& \text{предел}(h, i, a) - \text{число} \& \text{предел}(j, i, a) - \text{число} \& \\ \text{Число}(a) \& \text{типпредела}(i) \& \text{Локопред}(h, a, i) \& \text{Локопред}(j, a, i) \rightarrow \\ \lim_{e \rightarrow a \setminus i}(h(e) + j(e)) = \text{предел}(h, i, a) + \text{предел}(j, i, a))$$

из теоремы

$$\forall_{abfi}(f - \text{функция} \& \text{Число}(a) \& b - \text{число} \& \text{типпредела}(i) \& \text{Локопред}(f, a, i) \& \\ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{предел}(f, i, a) = b \leftrightarrow \forall_c(c - \text{число} \& 0 < c \rightarrow \\ \exists_d(0 < d \& d - \text{число} \& \forall_x(x - \text{число} \& x \in \text{Окрестность}(a, d, i) \rightarrow |f(x) - b| < c)))$$

Эта теорема определяет терм "предел(f, i, a) = b ".

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x12 присваивается определяющий терм. Проверяется, что он содержит квантор. Переменной x13 присваивается список антецедентов. В этом списке находится утверждение x14 с заголовком "функция". Переменной x15 присваивается операнд этого утверждения. Проверяется, что он представляет собой переменную, входящую в список параметров терма x8. В нашем примере x15 - переменная f . Проверяется, что все параметры утверждений x13 являются параметрами терма x8. В списке x13 находится утверждение x16, имеющее вид включения множества значений функции x15 в некоторое множество M . Выбирается переменная x17, не используемая в теореме. В нашем примере - переменная e . Переменной x18 присваивается результат добавления к списку x13 утверждения "принадлежит(x17 M)". В нашем примере - утверждения " $e \in \mathbb{R}$ ". Решается задача на исследование с посылками x18 и единственной целью (неизвестные x17). После этого в списке посылок задачи находится утверждение x21 вида " $P(x17)$ ", у которого P - обозначение типа объекта. В нашем примере - "число".

Дальше начинаются различия. Перечисляются по возрастанию те разделы x23, к которым относится понятие P . В нашем примере x23 - "элементарная алгебра". Переменной x24 присваивается набор логических символов, относящихся

к разделу x23 и его подразделам. В списке x24 выбирается символ x25, не являющийся предикатным символом, причем такой, что список типов значений выражений с заголовком x25 содержит символ P . В нашем примере x25 - "плюс". Проверяется, что арность x27 символа x25 отлична от 0 и от символа "натуральное" (последнее указывает на возможность произвольного натурального числа операндов и встречается крайне редко, например, у символа "набор"). В нашем примере x27 равно 2. Переменной x28 присваивается список переменных, не встречающихся в исходной теореме, длина которого равно $x27+2$. В нашем примере x28 состоит из переменных e, g, h, j . Переменным x29 и x30 присваиваются две первых переменных списка x28, переменной x31 - остальные переменные этого списка. В нашем примере x29 - e , x30 - g , x31 - h, j . Переменной x32 присваивается терм, получающийся соединением операцией x25 выражений "значение(X x29)" по всем переменным X списка x31. В нашем примере x32 имеет вид " $h(e) + j(e)$ ". Переменной x33 присваивается терм "отображение(x29 принадлежит(x29 x30)x32)". В нашем примере - " $\lambda_e(h(e) + j(e), e \in g)$ ". Переменной x34 присваивается список результатов подстановки терма x33 вместо переменной x15 в утверждения x13, переменной x35 - результат добавления к x34 утверждений "функция(X)", "равно(область(X)x30)" для всех переменных X из x31. Определяется о.д.з. терма, полученного навешиванием операции x25 на список переменных x31. Для каждого утверждения P из этой о.д.з. определяется результат P' подстановки в него вместо переменных X списка x31 термов "значение(X , x29)". Затем к списку x35 добавляется кванторная импликация "длялюбого(x29 если принадлежит(x29 x30) то P')". В нашем примере x35 состоит из следующих утверждений:

" $\lambda_e(h(e) + j(e), e \in g)$ - функция", "Число(a)", " b - число", "типпредела(i)", "Локопред($\lambda_e(h(e) + j(e), e \in g), a, i$)", "Dom($\lambda_e(h(e) + j(e), e \in g)$) $\subseteq \mathbb{R}$ ", "Val($\lambda_e(h(e) + j(e), e \in g)$) $\subseteq \mathbb{R}$ ", " h - функция", " j - функция", "Dom(h) = g ", "Dom(j) = g ", " $\forall_e(e \in g \rightarrow j(e) - \text{число})$ ", " $\forall_e(e \in g \rightarrow h(e) - \text{число})$ ".

Переменной x36 присваивается результат подстановки терма x33 вместо переменной x15 в терм x12. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_c(c - \text{число} \ \& \ 0 < c \rightarrow \exists_d(0 < d \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \forall_x(x - \text{число} \ \& \ x \in \text{Окрестность}(a, d, i) \rightarrow |\lambda_e(h(e) + j(e), e \in g)(x) - b| < c))$$

Переменной x37 присваивается результат обработки списка x35 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x36. В нашем примере он имеет следующий вид:

"Локопред(j, a, i)". "Число(a)", " b - число", "типпредела(i)", "Локопред(h, a, i)", " $g \subseteq \mathbb{R}$ ", " h - функция", " j - функция", "Dom(h) = g ", "Dom(j) = g ", "Val(j) $\subseteq \mathbb{R}$ ", "Val(h) $\subseteq \mathbb{R}$ ".

Решается задача на описание x38, посылками которой служат утверждения x37, а единственным условием - утверждение x36. Задача имеет цели "прямойответ", "неизвестные x31", "разделение x31". Ответ задачи присваивается переменной x39. В нашем примере он имеет вид "предел(j, i, a) - число & предел(h, i, a) - число & предел(h, i, a) + предел(j, i, a) = b ".

Собственно, основная работа выполняется задачей x38. Ее цель "разделение x31" указывает, что требуется преобразовать условия к такому виду, в котором

никакие две переменные списка $x31$ (в нашем примере - h, j) не встречаются в одном и том же условии. Вкратце, последовательность действий при решении задачи такова. Сначала предпринимается исключение кванторной импликации в условии путем перехода к задаче с целью "независит". Затем отбрасывается квантор существования и его связывающая приставка добавляется к неизвестным. После этого снова удаляется квантор общности - путем перехода к задаче с целью "независит". В итоге список условий оказывается состоящим из утверждений " $| - h(c) - j(c) + b| < e$ ", " $d - \text{число}$ ", " $0 < d$ ". При этом неизвестными служат переменные h, j, d , несущественной неизвестной - d , имеется цель "независит c, e ", но переменной d разрешается зависеть от e . Сохраняется цель "разделение h, j ". Далее срабатывает специальный прием, созданный для цели "разделение". Его теорема имеет следующий вид:

$$\forall_{abcd}(\exists_{xyzv}(|b+x| < y \ \& \ |c+z| < v \ \& \ x+y = a \ \& \ y+v \leq d \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ v - \text{число}) \rightarrow |a+b+c| < d)$$

Прием имеет заголовок "подборзначений". Указатель "контекст" определяет дополнительную идентификацию цели "разделение X ". Переменная a идентифицируется со всеми слагаемыми, не содержащими переменных X , переменная b - со всем слагаемыми, содержащими некоторую выбираемую приемом переменную w списка X , переменная c - с остальными слагаемыми. Проверяется, что как b , так и c содержат переменные списка X . Прием сводит реализацию консеквента к реализации квантора существования - antecedента теоремы. По существу, используется неравенство для модуля суммы, разбиваемой с учетом цели "разделение". Для вывода теорем о пределе суммы и дроби созданы аналогичные приемы. Разумеется, для успешного применения приема вывода теорем эти заготовки, ориентированные на разделение переменных, должны быть созданы заранее. Впрочем, логика их возникновения из простейших свойств указанных операций вполне ясна и впоследствии может быть автоматизирована.

После применения указанного приема происходит исключение квантора существования. В результате появляются условия " $k + m \leq e$ ", " $m - \text{число}$ ", " $l - \text{число}$ ", " $k - \text{число}$ ", " $f - \text{число}$ ", " $0 < -|-j(c)+l|+m$ ", " $0 < -|-h(c)+f|+k$ ", " $f + l = b$ ", " $d - \text{число}$ ", " $0 < d$ ".

Для исключения неравенства " $0 < -|-j(c)+l|+m$ " используется еще один прием, созданный для цели "разделение":

$$\forall_{abcdfgi}(f - \text{функция} \ \& \ \text{Число}(d) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c \in \text{Окрестн}(d, m, i) \ \& \ \text{Локопред}(f, d, i) \ \& \ \text{предел}(f, i, d) = a \ \& \ 0 < b \ \& \ c \in \text{Окрестн}(d, g(b), i) \ \& \ \forall_x(x - \text{число} \ \& \ 0 < x \rightarrow g(x) - \text{число} \ \& \ 0 < g(x)) \rightarrow 0 < b - |a - f(c)|)$$

Прием имеет заголовок "подборзначений". Он вводит новую переменную g , причем шестой, седьмой и восьмой antecedенты во вспомогательной задаче замещают консеквент, а девятый antecedент заносится в этой задаче в посылки. Хотя прием и относится к той же ячейке вывода, что и получаемая теорема, он непосредственно извлекается из определения предела.

Аналогичным образом исключается и второе неравенство, а далее применяются стандартные приемы исключения несущественных неизвестных и подбора значений.

Возвращаемся к рассмотрению работы приема вывод теорем. Переменной x40 присваивается элемент набора дизъюнктивных членов утверждения, получаемого после преобразования x39 к виду д.н.ф. В нашем примере x40 совпадает с x39. Проверяется, что среди конъюнктивных членов утверждения x40 нет равенства с переменной списка x31 в одной из своих частей. Переменной x41 присваивается результат подстановки терма x33 вместо переменной x15 в терм x8. В нашем примере - " $\lim_{e \rightarrow a} (h(e) + j(e)) = b$ ". Переменной x42 присваивается объединение списка x37 с набором конъюнктивных членов утверждения x40. Переменной x43 присваивается результат обработки списка x42 оператором "нормантецеденты" относительно параметры терма x41. Наконец, создается импликация с антецедентами x43 и консеквентом x41. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому разрешается использовать уже имеющиеся в списке вывода теоремы. После проверки того, что антецеденты не имеют связанных переменных, регистрируется в списке вывода.

Заметим, что приведенный прием применялся к определениям многих различных свойств функций. В общей сложности, с его участием выведено более сотни утверждений, зарегистрированных в базе теорем.

5. Примерка кванторного определения свойства функции на двуместные операции раздела, с подстановкой константы вместо одного из операндов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acde} (\text{Dom}(e) = c \ \& \ a - \text{set} \ \& \ a \subseteq c \ \& \ c \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{убывает}(e, a) \rightarrow \text{убывает}(\lambda_b(d + e(b), b \in c), a))$$

из теоремы

$$\forall_{afg} (a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{убывает}(f, a) \leftrightarrow \forall_{xy} (x \in a \ \& \ y \in a \ \& \ 0 < y - x \rightarrow 0 < f(x) - f(y))$$

Эта теорема определяет терм "убывает(f, a)".

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x12 присваивается определяющий терм. Проверяется, что он содержит квантор. Переменной x13 присваивается список антецедентов. В этом списке находится утверждение x14 с заголовком "функция". Переменной x15 присваивается операнд этого утверждения. Проверяется, что он представляет собой переменную, входящую в список параметров терма x8. В нашем примере x15 - переменная f . Проверяется, что все параметры утверждений x13 являются параметрами терма x8. В списке x13 находится утверждение x16, имеющее вид включения множества значений функции x15 в некоторое множество M . Выбирается переменная x17, не используемая в теореме. В нашем примере - переменная b . Переменной x18 присваивается результат добавления к списку x13 утверждения "принадлежит(x17 M)". В нашем примере - утверждения " $b \in \mathbb{R}$ ". Решается задача на исследование с посылками x18 и единственной целью (неизвестные x17). После этого в списке посылок задачи находится утверждение x21 вида

" $P(x_{17})$ ", у которого P - обозначение типа объекта. В нашем примере - "число".

Перечисляются по возрастанию те разделы x_{23} , к которым относится понятие P . В нашем примере x_{23} - "элементарная алгебра". Переменной x_{24} присваивается набор логических символов, относящихся к разделу x_{23} и его подразделам. В списке x_{24} выбирается символ x_{25} , не являющийся предикатным символом, причем такой, что список типов значений выражений с заголовком x_{25} содержит символ P . В нашем примере x_{25} - "плюс". Проверяется, что арифметичность x_{27} символа x_{25} отлична от 0 и от символа "натуральное" (последнее указывает на возможность произвольного натурального числа операндов и встречается крайне редко, например, у символа "набор"). В нашем примере x_{27} равно 2. Переменной x_{28} присваивается список переменных, не встречающихся в исходной теореме, длина которого равно $x_{27}+2$. В нашем примере x_{28} состоит из переменных b, c, d, e . Переменным x_{29} и x_{30} присваиваются две первых переменных списка x_{28} , переменной x_{31} - остальные переменные этого списка. В нашем примере x_{29} - b , x_{30} - c , x_{31} - d, e .

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что x_{27} равно 2. Поочередно в качестве значения переменной x_{32} рассматриваются термы " $x_{25}(X \text{ значение}(Y \ x_{29}))$ ", " $x_{25}(\text{значение}(Y \ x_{29}) \ X)$ ". Соответственно, переменной x_{33} присваивается либо Y , либо X . Здесь X - первая из переменных x_{31} , Y - вторая. Если символ x_{25} коммутативный, второй случай не рассматривается. В нашем примере x_{32} - " $d + e(b)$ ", x_{33} - e . Переменной x_{34} присваивается терм "отображение(x_{29} принадлежит($x_{29} \ x_{30}$) x_{32})". В нашем примере - " $\lambda_b(d + e(b), b \in c)$ ". Переменной x_{35} присваивается список результатов подстановки терма x_{34} вместо переменной x_{15} в утверждения списка x_{13} . Переменной x_{36} присваивается объединение списка x_{35} с утверждениями "функция(Y)", "область(Y) = x_{30} ".

Просматриваются утверждения Q из о.д.з. терма x_{32} . Если Y не входит в это утверждение, а X - входит, то оно добавляется к списку x_{36} . Если же Y и x_{29} входят в Q , то к списку x_{36} добавляется импликация "для любого(x_{29} если принадлежит($x_{29} \ x_{30}$) то Q)".

Переменной x_{37} присваивается результат подстановки терма x_{34} вместо x_{15} в терм x_{12} . В нашем примере имеем:

$$\forall_{xy}(x \in a \ \& \ y \in a \ \& \ 0 < y - x \rightarrow 0 < \lambda_b(d + e(b), b \in c)(x) - \lambda_b(d + e(b), b \in c)(y))$$

Переменной x_{38} присваивается результат обработки списка x_{36} процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{37} . В нашем примере получаем:

" a - set", " $a \subseteq c$ ", " $c \subseteq \mathbb{R}$ ", " e - функция", " $\text{Dom}(e) = c$ ", " $\text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R}$ ", " d - число".

Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения x_{38} , а единственным условием - x_{37} . Цели задачи - "прямой ответ", "неизвестные x_{31} ", "разделение x_{33} ", "конст". Ответ присваивается переменной x_{40} . В нашем примере он имеет вид "убывает(e, a)".

Цель "разделение" в данном случае относится к единственной переменной. Она играет несколько другую роль - активирует приемы, выносящие указанную в данной цели переменную из-под сложной операции. В нашем примере такие приемы не требуются. После исключения квантора общности и перехода к задаче с целью "независит" возникает единственное условие " $0 < -e(f) + e(b)$ ". Здесь срабатывает следующий прием подбора примера, устраняющий зависимость от b :

$$\forall_{A, f, x, y} (x \in A \ \& \ y \in A \ \& \ A \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ 0 < x - y \ \& \ \text{убывает}(f, A) \rightarrow 0 < f(y) - f(x))$$

В результате задача приобретает условие "убывает(e, a)", которое и выдается как ответ.

После получения ответа x_{40} выбирается утверждение x_{41} , входящее в список дизъюнктивных членов результата преобразования x_{40} к виду д.н.ф. Проверяется, что среди конъюнктивных членов утверждения x_{41} нет равенства с переменной списка x_{31} в одной из своих частей. Переменной x_{42} присваивается результат подстановки терма x_{34} вместо переменной x_{15} в терм x_8 . Переменной x_{43} присваивается объединение списка x_{38} со списком конъюнктивных членов утверждения x_{41} . Переменной x_{43} присваивается результат обработки списка x_{43} процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{42} . Наконец, создается импликация с антецедентами x_{44} и консеквентом x_{42} . Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому разрешается использовать уже имеющиеся в списке вывода теоремы. После проверки того, что антецеденты не имеют связанных переменных, регистрируется в списке вывода.

6. Примерка кванторного определения свойства последовательности на константную и тождественную последовательности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\lim(\lambda_b(b, b - \text{натуральное})) = \infty$$

из теоремы

$$\forall_f(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \rightarrow \lim(f) = \infty \leftrightarrow \forall_a(a - \text{число} \rightarrow \exists_n(n - \text{натуральное} \ \& \ \forall_m(m - \text{натуральное} \ \& \ n < m \rightarrow a < f(m))))))$$

Эта теорема определяет терм " $\lim(f) = \infty$ ". Здесь символ \lim - "пределпослед".

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_{12} присваивается определяющий терм. Проверяется, что он содержит квантор. Переменной x_{13} присваивается набор антецедентов. В нем находится терм x_{14} вида "последовательность($X \ T$)", где X - переменная, входящая в параметры определяемого терма. В нашем примере - переменная f . Проверяется, что все параметры антецедентов входят в определяемый терм. Выбирается переменная x_{17} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b . Переменной x_{18} присваивается результат добавления к списку x_{13} утверждения "принадлежит($x_{17} \ T$)". В нашем примере - утверждение " $b \in \mathbb{R}$ ". Создается задача на исследование x_{19} , посылками которой

служат утверждения x_{18} . После ее решения в списке посылок находится утверждение вида " $P(x_{17})$ ", где P - название типа объектов. В нашем примере - "число". Выбирается переменная x_{23} , отличная от x_{17} и не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная s . Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{24} присваивается выражение "отображение(x_{17} натуральное(x_{17}) x_{23})", во втором - выражение "отображение(x_{17} натуральное(x_{17}) x_{17})". В нашем примере рассматривается второй случай, т.е. x_{24} имеет вид " $\lambda_b(b, b - \text{натуральное})$ ". Переменной x_{25} присваивается результат подстановки в терм x_8 выражения x_{24} вместо переменной x_{15} , переменной x_{26} - результат такой же подстановки в терм x_{12} . Переменной x_{27} присваивается список результатов подстановки x_{24} вместо x_{15} в утверждения списка x_{13} . Переменной x_{28} присваивается набор параметров термина x_{26} .

В нашем примере x_{25} имеет вид " $\lim(\lambda_b(b, b - \text{натуральное})) = \infty$ ", x_{26} - вид " $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \exists_n(n - \text{натуральное} \ \& \ \forall_m(m - \text{натуральное} \ \& \ n < m \rightarrow a < \lambda_b(b, b - \text{натуральное}(m))))$ ". Список x_{28} пуст.

Переменной x_{29} присваивается список утверждений набора x_{27} , содержащих параметр списка x_{28} , переменной x_{30} - остаток набора x_{27} . Переменной x_{31} присваивается результат добавления к списку x_{29} набора конъюнктивных членов утверждения x_{26} . Далее рассматриваются два случая:

- (a) Список x_{28} пуст. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x_{26} - следствие утверждений x_{30} . Затем создается импликация с пустым списком антецедентов и консеквентом x_{25} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.
- (b) Список x_{28} непуст. Решается задача на описание с посылками x_{30} и условиями x_{31} . Цели задачи - "полный", "прямойответ", "попыткаспуска", "неизвестные x_{28} ". Проверяется, что ответ x_{33} отличен от символа "отказ" и не имеет связанных переменных. Создается импликация, антецедентами которой служат конъюнктивные члены утверждения x_{33} , а консеквентом - утверждение x_{25} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

7. Примерка кванторного определения свойства последовательности на элементарные операции раздела.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{fg}(\lim(f) - \text{число} \ \& \ \lim(g) - \text{число} \ \& \ \text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \ \& \ \text{последовательность}(g, \mathbb{R}) \rightarrow \lim(\lambda_c(f(c) + g(c), c - \text{натуральное})) = \lim(f) + \lim(g))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ \text{последовательность}(b, \mathbb{R}) \rightarrow \lim(b) = a \leftrightarrow \forall_e(e - \text{число} \ \& \ 0 < e \rightarrow \exists_n(n - \text{натуральное} \ \& \ \forall_m(m - \text{натуральное} \ \& \ n \leq m \rightarrow |b(m) - a| < e))))$$

Эта теорема определяет терм " $\lim(b) = a$ ". Символ \lim - "пределпослед". Пример аналогичен рассмотренному выше примеру для предела суммы двух функций.

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_{12} присваивается определяющий терм. Проверяется, что он содержит квантор. Переменной x_{13} присваивается набор антецедентов. В нем находится терм x_{14} вида "последовательность($X T$)", где X - переменная, входящая в параметры определяемого терма. В нашем примере - переменная b . Проверяется, что все параметры антецедентов входят в определяемый терм. Выбирается переменная x_{17} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - c . Переменной x_{18} присваивается результат добавления к списку x_{13} утверждения "принадлежит($x_{17} T$)". В нашем примере - утверждение " $c \in \mathbb{R}$ ". Создается задача на исследование x_{19} , посылками которой служат утверждения x_{18} . После ее решения в списке посылок находится утверждение вида " $P(x_{17})$ ", где P - название типа объектов. В нашем примере - "число".

Дальше идет фрагмент, аналогичный фрагменту из приема для предела суммы функций. Повторим и его. Перечисляются по возрастанию те разделы x_{23} , к которым относится понятие P . В нашем примере x_{23} - "элементарная алгебра". Переменной x_{24} присваивается набор логических символов, относящихся к разделу x_{23} и его подразделам. В списке x_{24} выбирается символ x_{25} , не являющийся предикатным символом, причем такой, что список типов значений выражений с заголовком x_{25} содержит символ P . В нашем примере x_{25} - "плюс". Проверяется, что арность x_{27} символа x_{25} отлична от 0 и от символа "натуральное" (последнее указывает на возможность произвольного натурального числа операндов и встречается крайне редко, например, у символа "набор"). В нашем примере x_{27} равно 2. Переменной x_{28} присваивается список переменных, не встречающихся в исходной теореме, длина которого равно $x_{27} + 2$. В нашем примере x_{28} состоит из переменных c, d, f, g . Переменной x_{29} присваивается первая переменная списка x_{28} , переменной x_{30} - переменные этого списка, кроме первых двух. В нашем примере x_{29} - c , x_{30} - f, g . Переменной x_{31} присваивается терм, получающийся соединением операцией x_{25} выражений "значение($X x_{29}$)" по всем переменным X списка x_{30} . В нашем примере x_{31} имеет вид " $f(c) + g(c)$ ". Переменной x_{32} присваивается терм "отображение(x_{29} натуральное(x_{29}) x_{31})". В нашем примере - " $\lambda_c(f(c) + g(c), c - \text{натуральное})$ ". Переменной x_{33} присваивается список результатов подстановки терма x_{32} вместо переменной x_{15} в утверждения x_{13} , переменной x_{34} - результат добавления к x_{33} утверждений "последовательность(X, T)" для всех переменных X из x_{30} .

Определяется о.д.з. терма, полученного навешиванием операции x_{25} на список переменных x_{30} . Для каждого утверждения P из этой о.д.з. определяется результат P' подстановки в него вместо переменных X списка x_{30} термов "значение(X, x_{29})". Затем к списку x_{34} добавляется кванторная импликация "для любого(x_{29} если натуральное(x_{29}) то P')". В нашем примере x_{34} состоит из следующих утверждений:

" a - число", "последовательность($\lambda_c(f(c) + g(c), c - \text{натуральное}), \mathbb{R}$)",
 "последовательность(f, \mathbb{R})", "последовательность(g, \mathbb{R})", " $\forall_c(c - \text{натуральное} \rightarrow g(c) - \text{число})$ ", " $\forall_c(c - \text{натуральное} \rightarrow f(c) - \text{число})$ ".

Переменной x35 присваивается результат подстановки терма x32 вместо переменной x15 в терм x12. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_e(e - \text{число} \ \& \ 0 < e \rightarrow \exists_n(n - \text{натуральное} \ \& \ \forall_m(m - \text{натуральное} \ \& \ n \leq m \rightarrow |\lambda_c(f(c) + g(c), c - \text{натуральное})(m) - a| < e)))$$

Переменной x36 присваивается результат обработки списка x34 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x35. В нашем примере он имеет следующий вид:

$$"a - \text{число}", \ "\forall_c(c - \text{натуральное} \rightarrow f(c) + g(c) \in \mathbb{R})", \ "\text{последовательность}(f, \mathbb{R})", \ "\text{последовательность}(g, \mathbb{R})".$$

Решается задача на описание x37, посылками которой служат утверждения x36, а единственным условием - утверждение x35. Задача имеет цели "прямойответ", "неизвестные x30", "разделение x30". Ответ задачи присваивается переменной x38. В нашем примере он имеет вид "lim(g) - число", "lim(f) - число", "lim(f) + lim(g) = a".

Задача x37 решается аналогично рассмотренной выше задаче для предела суммы функций. Разделение переменных f, g обеспечивается тем же самым приемом для неравенства с модулем. Небольшое отличие состоит лишь в том, что после разделения неравенства исключаются другим приемом:

$$\forall_{abcfg}(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{натуральное} \ \& \ \lim(f) = a \ \& \ 0 < b \ \& \ g(b) \leq c \ \& \ \forall_x(x - \text{число} \ \& \ 0 < x \rightarrow g(x) - \text{натуральное}) \rightarrow 0 < b - |a - f(c)|)$$

Возвращаемся к рассмотрению работы приема вывод теорем. Проверяется, что ответ x38 не имеет связанных переменных. Переменной x39 присваивается дизъюнктивный член утверждения x38. Проверяется, что среди конъюнктивных членов утверждения x39 нет равенства с переменной списка x30 в одной из своих частей. Переменной x40 присваивается результат подстановки терма x32 вместо переменной x15 в терм x8. В нашем примере - "lim(f(c) + g(c), c - натуральное) = a". Переменной x41 присваивается объединение списка x36 с набором конъюнктивных членов утверждения x39. Переменной x42 присваивается результат обработки списка x41 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x40. Наконец, создается импликация с антецедентами x42 и консеквентом x40. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

8. Примерка конъюнктивно-дизъюнктивного определения свойства функции на элементарные операции раздела: попытки реализации подслучаев с помощью имеющихся теорем и склейки результатов с помощью того же определения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{adei}(\text{Dom}(d) = \text{Dom}(e) \ \& \ \lim_{b \rightarrow a \setminus i}(d(b)e(b)) = \text{неопред} \ \& \ \text{предел}(e, i, a) < 0 \ \& \ \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{предел}(e, i, a) - \text{число} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(d, a, i) \ \& \ \text{Локопред}(e, a, i) \rightarrow \text{предел}(d, i, a) = \text{неопред})$$

из теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{afi}(f - \text{функция} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(f, a, i) \ \& \\ & \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{предел}(f, i, a) = \text{неопред} \leftrightarrow \\ & \neg(\text{предел}(f, i, a) - \text{число}) \ \& \ \neg(\text{предел}(f, i, a) = \infty) \ \& \ \neg(\text{предел}(f, i, a) = -\infty) \end{aligned}$$

Эта теорема определяет терм "предел(f, i, a) = неопред". Здесь "предел(f, i, a)" - предел функции f в точке a , i - указатель типа окрестности. Заметим, что выводимая теорема является лишь промежуточным утверждением, используемым для получения условия несуществования предела дробного выражения. Переход к дробям обеспечивается другим приемом, подставляющим вместо $d(b)$ дробное выражение, исключающее произведение под пределом в антецеденте.

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_{12} присваивается определяющий терм. Проверяется, что его заголовок "и" либо "или". В нашем примере - "и". Переменной x_{13} присваивается набор корневых операндов терма x_{12} . Проверяется, что все они элементарны. Проверяется, что каждое из утверждений списка x_{13} имеет единственный подтерм максимальной сложности, причем заголовки этих подтермов одинаковые, а оценка сложности не меньше 7. Переменной x_{14} присваивается общий заголовок данных подтермов. В нашем примере - символ "предел". Проверяется, что каждое вхождение символа x_{14} в терм x_{12} является операндом равенства либо указателя типа объекта. Переменной x_{15} присваивается список антецедентов теоремы.

В списке x_{15} находится утверждение "функция(F)", где F - параметр терма x_8 . В нашем примере F - переменная f . Проверяется, что параметры антецедентов включаются в параметры терма x_8 . Среди антецедентов находится утверждение x_{18} вида " $\text{Val}(F) \subseteq M$ ". В нашем примере - " $\text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ ". Переменной x_{19} присваивается переменная, не входящая в теорему. В нашем примере - b . Переменной x_{20} присваивается результат добавления к списку x_{15} утверждение "принадлежит($x_{19} M$)". В нашем примере - утверждения " $b \in \mathbb{R}$ ". Решается задача на исследование со списком посылок x_{20} и единственной целью "известные x_{19} ". После ее решения в ее списке посылок находится утверждение $P(19)$, где P - тип объекта. В нашем примере - символ "число".

Перечисляются по возрастанию те разделы x_{25} , к которым относится понятие P . В нашем примере x_{25} - "элементарная алгебра". Переменной x_{26} присваивается набор логических символов, относящихся к разделу x_{25} и его подразделам. В списке x_{26} выбирается символ x_{27} , не являющийся предикатным символом, причем такой, что список типов значений выражений с заголовком x_{27} содержит символ P . В нашем примере x_{27} - "умножение". Проверяется, что арность x_{29} символа x_{27} отлична от 0 и от символа "натуральное". В нашем примере x_{29} равно 2. Проверяется, что x_{27} не является одноместной операцией над конечным семейством, обобщающей обычную ассоциативно-коммутативную операцию.

Переменной x_{30} присваивается список переменных, не встречающихся в исходной теореме, длина которого равно $x_{29} + 2$. В нашем примере x_{30} состоит из переменных b, c, d, e . Переменным x_{31} и x_{32} присваиваются две первых переменных списка x_{30} , переменной x_{33} - остальные переменные этого списка. В нашем

примере $x31 - b$, $x32 - c$, $x33 - d, e$. Переменной $x34$ присваивается терм, получающийся соединением операций $x27$ выражений "значение(X $x31$)" по всем переменным X списка $x33$. В нашем примере $x34$ имеет вид " $d(b)e(b)$ ". Переменной $x35$ присваивается терм "отображение($x31$ принадлежит($x31$ $x32$) $x34$)". В нашем примере - " $\lambda_b(d(b)e(b), b \in c)$ ". Переменной $x36$ присваивается список результатов подстановки терма $x35$ вместо переменной $x15$ в утверждения $x15$, переменной $x37$ - результат добавления к $x36$ утверждений "функция(X)", "равно(область(X) $x32$)" для всех переменных X из $x33$.

Определяется о.д.з. терма, полученного навешиванием операции $x27$ на список переменных $x33$. Для каждого утверждения Q из этой о.д.з. определяется результат Q' подстановки в него вместо переменных X списка $x33$ термов "значение(X , $x31$)". Затем к списку $x37$ добавляется кванторная импликация "длялюбого($x31$ если принадлежит($x31$ $x32$) то Q')". В нашем примере $x37$ состоит из следующих утверждений:

" $\lambda_b(d(b)e(b), b \in c) -$ функция", "Число(a)", "типпредела(i)",
 "Локопред($\lambda_b(d(b)e(b), b \in c), a, i$)", "Dom($\lambda_e(d(b)e(b), b \in c) \subseteq \mathbb{R}$ ",
 "Val($\lambda_b(d(b)e(b), b \in c) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $d -$ функция", " $e -$ функция", "Dom($d) = c$ ",
 "Dom($e) = c$ ", " $\forall_b(b \in c \rightarrow e(b) -$ число)", " $\forall_b(b \in c \rightarrow d(b) -$ число)".

Переменной $x38$ присваивается результат подстановки терма $x35$ вместо переменной $x17$ в терм $x12$. В нашем примере он имеет вид:

$\neg(\lim_{b \rightarrow a \setminus i} d(b)e(b) - \text{число}) \ \& \ \neg(\lim_{b \rightarrow a \setminus i} d(b)e(b) = \infty) \ \& \ \neg(\lim_{b \rightarrow a \setminus i} d(b)e(b) = -\infty)$

Переменной $x39$ присваивается результат обработки списка $x37$ процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма $x38$. В нашем примере он имеет следующий вид:

"Локопред(e, a, i)". "Число(a)", "типпредела(i)", "Локопред(d, a, i)", " $c \subseteq \mathbb{R}$ ",
 " $d -$ функция", " $e -$ функция", "Dom($d) = c$ ", "Dom($e) = c$ ",
 "Val($e) \subseteq \mathbb{R}$ ", "Val($d) \subseteq \mathbb{R}$ ".

Переменной $x40$ присваивается результат подстановки терма $x35$ вместо переменной $x17$ в терм $x8$. В нашем примере - " $\lim_{b \rightarrow a \setminus i} d(b)e(b) =$ неопред".

Если заголовок утверждения $x38$ - "и", то $x38$ заменяется на дизъюнкцию отрицанию конъюнктивных членов утверждения $x38$, а $x40$ - на отрицание $x40$. В нашем примере $x38$ приобретает вид:

" $\lim_{b \rightarrow a \setminus i} d(b)e(b) - \text{число} \vee \lim_{b \rightarrow a \setminus i} d(b)e(b) = \infty \vee \lim_{b \rightarrow a \setminus i} d(b)e(b) = -\infty$ ", а $x40$ - вид " $\neg(\lim_{b \rightarrow a \setminus i} d(b)e(b) = \text{неопред})$ ".

Переменной $x41$ присваивается набор дизъюнктивных членов утверждения $x38$. Вводится накопитель $x42$, длина которого равна длине списка $x41$. В данном накопителе будут регистрироваться условия, добавление которых к утверждениям $x39$ влечет истинность элементов набора $x41$.

Чтобы заполнять накопитель $x42$, определяется раздел $x43$, к которому относится символ $x14$. В нашем примере - "пределы". Просматриваются теоремы

x47 данного раздела, представляющие собой кванторные равенства двух выражений, первое из которых содержит символы x14 и x27, а второе - не содержит символа x14. Проверяется, что каждый входящий в левую часть равенства подтерм с заголовком x14 содержит только такие неоднобуквенные подтермы, заголовок которых встречается в терме x38. Переменной x49 присваивается результат переобозначения в теореме x47 переменных на переменные, не входящие в термы списка x39 и в терм x38. Переменной x50 присваивается консеквент теоремы x49. Для заполнения накопителя x42 начинается синхронный просмотр списков x41 и x42. Переменной x53 присваивается текущий элемент списка x41, переменной x52 - текущее вхождение в список x42. В нашем примере будем рассматривать теорему x49 вида:

$$\forall_{f,h,j,k,l} (\text{Dom}(j) = h \ \& \ \text{Dom}(l) = h \ \& \ \text{предел}(l, k, f) = 0 \ \& \ h \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(j) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(l) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ j - \text{функция} \ \& \ l - \text{функция} \ \& \ \text{огрвточке}(j, f) \ \& \ \text{Число}(f) \ \& \ \text{типпредела}(k) \ \& \ \text{Локопред}(j, f, k) \ \& \ \text{Локопред}(l, f, k) \rightarrow \lim_{g \rightarrow f \setminus k} j(g)l(g) = 0)$$

Пусть, например, x53 - первый элемент списка x41, т.е. " $\lim_{b \rightarrow a \setminus i} d(b)e(b)$ - число".

Рассматриваются два случая:

- (а) Переменной x54 присваивается заголовок терма x53. Проверяется, что он является названием типа объектов. В нашем примере - "число". Переменной x55 присваивается вхождение того операнда равенства x50, который имеет заголовок x14. Проверяется, что противоположный операнд имеет тип x54. Переменной x58 присваивается подтерм x55, переменной x59 - список его переменных. В нашем примере x58 - " $\lim_{g \rightarrow f \setminus k} j(g)l(g)$ ". Усматривается, что корневой операнд терма x53 получается из x58 постановкой S вместо переменных x59. Переменной x61 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x49, переменной x62 - результат удаления из x61 утверждений x39. Переменной x63 присваивается результат удаления из списка параметров терма x62 переменных терма x53. Переменной x64 присваивается терм "существует(x63 x62)". Переменной x65 присваивается результат упрощения x64 относительно посылок x39. В нашем примере он имеет вид " $\text{предел}(e, i, a) = 0 \ \& \ \text{огрвточке}(d, a)$ ". Наконец, терм x65 добавляется в накопитель x42 к списку, расположенному на позиции x52.
- (б) Предыдущий случай не имеет места. В нашем примере это произойдет, если x53 - второй элемент списка x41, т.е. имеет вид " $\lim_{b \rightarrow a \setminus i} d(b)e(b) = \infty$ ", причем теорема x49 - вид:

$$\forall_{f,h,k,l,m,j,g} (l - \text{функция} \ \& \ m - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(l) = k \ \& \ \text{Dom}(m) = k \ \& \ \text{Val}(l) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(m) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ k \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Число}(j) \ \& \ \text{типпредела}(g) \ \& \ f = \text{предел}(l, g, j) \ \& \ (f = \infty \vee f = -\infty) \ \& \ h = \text{предел}(m, g, j) \ \& \ (f = \infty \ \& \ (h = \infty \vee h - \text{число} \ \& \ 0 < h) \vee f = -\infty \ \& \ (h = -\infty \vee h - \text{число} \ \& \ h < 0)) \rightarrow \lim_{n \rightarrow j \setminus g} l(n)m(n) = \infty)$$

Переменной x54 присваивается список переменных терма x50. Проверяется, что x53 - результат некоторой подстановки S вместо переменных x54 в терм x50. Переменной x56 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x49, переменной x57 - результат

удаления из х56 утверждений х39. Переменной х58 присваивается результат удаления из списка параметров терма х57 переменных терма х53. Переменной х59 присваивается терм "существует(х58 х57)". Переменной х60 присваивается результат упрощения х59 относительно посылок х39. В нашем примере он имеет вид:

$$\begin{aligned} & ((0 < \text{предел}(e, i, a) \ \& \ \text{предел}(e, i, a) - \text{число} \ \vee \ \text{предел}(e, i, a) = \infty) \ \& \\ & \text{предел}(d, i, a) = \infty \ \vee \ (\text{предел}(e, i, a) < 0 \ \& \ \text{предел}(e, i, a) - \text{число} \ \vee \\ & \text{предел}(e, i, a) = -\infty) \ \& \ \text{предел}(d, i, a) = -\infty) \ \& \ (\text{предел}(d, i, a) = \infty \ \vee \\ & \text{предел}(d, i, a) = -\infty) \end{aligned}$$

Далее терм х60 добавляется в накопитель х42 к списку, расположенному на позиции х52.

По окончании просмотра теорем х47 все переменные, начиная с х43, снова становятся не определенными. При этом в нашем примере возникает трехэлементный набор х42. Первый его элемент - пара утверждений "предел(e, i, a) = 0 & огрвточке(d, a)", "предел(d, i, a) - число & предел(e, i, a) - число". Второй элемент состоит из приведенного выше примера для х60, третий - из аналогичного терма:

$$\begin{aligned} & ((0 < \text{предел}(e, i, a) \ \& \ \text{предел}(e, i, a) - \text{число} \ \vee \ \text{предел}(e, i, a) = \infty) \ \& \\ & \text{предел}(d, i, a) = -\infty \ \vee \ (\text{предел}(e, i, a) < 0 \ \& \ \text{предел}(e, i, a) - \text{число} \ \vee \\ & \text{предел}(e, i, a) = -\infty) \ \& \ \text{предел}(d, i, a) = \infty) \ \& \ (\text{предел}(d, i, a) = \infty \\ & \vee \ \text{предел}(d, i, a) = -\infty) \end{aligned}$$

Проверяется, что все элементы набора х42 суть непустые списки. Как уже говорилось выше, каждый из элементов списка набора х42 влечет (совместно с утверждениями х39) истинность соответствующего утверждения набора х41.

Просматриваются элементы х44 списка х42. Каждое утверждение списка х44 преобразуется к виду д.н.ф. Каждый дизъюнктивный член этой д.н.ф. определяет набор своих конъюнктивных членов. Из списка H полученных наборов исключаются те, которые содержат другие наборы данного списка. После этого х44 заменяется в списке х42 на набор H . В нашем примере первый элемент списка х42 заменяется на пару наборов, первый из которых имеет вид "предел(e, i, a) = 0", "огрвточке(d, a)", а второй - вид "предел(d, i, a) - число", "предел(e, i, a) - число".

После указанного цикла все переменные начиная с х43 снова оказываются не определенными. Переменной х43 присваивается: если заголовок терма х12 - "и", то список отрицаний операндов этого терма; в противном случае - список самих операндов. В нашем примере х43 состоит из утверждений

"предел(f, i, a) - число", "предел(f, i, a) = ∞ ", "предел(f, i, a) = $-\infty$ ".

Вводится пустой накопитель х44, необходимый для блокировки повторных рассмотрений используемых ниже подстановок. Просматриваются элементы х45 первого разряда набора х42. Рассматривается элемент х46 набора х45, содержащий символ х14. Просматриваются элементы х47 списка х43. Переменной х48 присваиваются параметры терма х47. Проверяется, что х48 включает все переменные исходной теоремы. Определяется подстановка R вместо переменных

x48, переводящая терм x47 в терм x46. Проверяется, что ее набор x49 подставляемых термов не встречается в списке x44, после чего этот набор регистрируется в списке x44. В нашем примере x45 - второй элемент первого разряда набора x42, x46 - терм "предел(d, i, a) - число", x47 - терм "предел(f, i, a) - число". Переменной x50 присваивается список результатов применения подстановки R к элементам набора x43. В нашем примере получаем "предел(d, i, a) - число", "предел(d, i, a) = ∞ ", "предел(d, i, a) = $-\infty$ ". Оператор "группшаг" перечисляет такие продолжения x51 набора x50, которые возникают за счет групп элементов наборов, расположенных начиная со второго элемента списка x42 и содержащих термы набора x50. В нашем примере x51 состоит из утверждений "предел(d, i, a) - число", "предел(e, i, a) - число", " $0 < \text{предел}(e, i, a)$ ", "предел(d, i, a) = ∞ ", "предел(d, i, a) = $-\infty$ ".

Переменной x52 присваивается результат удаления из x51 утверждений x50. В нашем примере - "предел(e, i, a) - число", " $0 < \text{предел}(e, i, a)$ ". Переменной x53 присваивается объединение списков x39 и x52. Переменной x54 присваивается результат применения подстановки R к терму x8. В нашем примере - "предел(d, i, a) = неопред". Переменной x55 присваивается: если заголовок терма x12 - "и", то отрицание терма x54, иначе - терм x54. В нашем примере x55 имеет вид " $\neg(\text{предел}(d, i, a) = \text{неопред})$ ". Переменной x56 присваивается результат подстановки терма x35 вместо переменной x27 в терм x8. В нашем примере имеем " $\lim_{b \rightarrow a} d(b)e(b) = \text{неопред}$ ". Переменной x57 присваивается: если заголовок x12 - "и", то отрицание терма x56, иначе - терм x56. В нашем примере x57 имеет вид " $\neg(\lim_{b \rightarrow a} d(b)e(b) = \text{неопред})$ ". Если заголовки терма x55 и x57 - отрицания, то x55 заменяется на корневой операнд терма x57, а x57 - на корневой операнд терма x55. В нашем примере x55 приобретает вид " $\lim_{b \rightarrow a} d(b)e(b) = \text{неопред}$ ", а x57 - вид "предел(d, i, a) = неопред".

Переменной x58 присваивается результат добавления к списку x53 терма x55. Переменной x59 присваивается результат обработки списка x58 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x57. Затем создается импликация с антецедентами x59 и консеквентом x57. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

9. Вывод приема подбора примера с помощью подбора примера для самого сложного конъюнктивного члена в кванторном определении.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_f(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \ \& \ \exists_a(f = \lambda_c(a, c - \text{натуральное} \ \& \ a - \text{число}) \rightarrow \text{сходится}(f)))$$

из теоремы

$$\forall_f(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \rightarrow \text{сходится}(f) \leftrightarrow \exists_a(a - \text{число} \ \& \ a = \lim(f)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ax}(a - \text{число} \ \& \ x = \lambda_n(a, n - \text{натуральное}) \rightarrow \lim(x) = a)$$

Исходная теорема определяет терм "сходится(f)".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x9 присваивается определяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x12 присваивается определяющее утверждение. Проверяется, что его заголовок - квантор существования. Переменной x13 присваивается связывающая приставка этого квантора, переменной x14 - подкванторное утверждение. Проверяется, что оно имеет единственный подтерм максимальной сложности, и этот подтерм присваивается переменной x16. В нашем примере - " $\lim(f)$ ". Переменной x17 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x14. В нем выбирается элемент x18, содержащий подтерм x16. В нашем примере - " $a = \lim(f)$ ". Справочник поиска теорем "значперем" находит по x19 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x21 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере имеем:

$$\forall_{bd}(b - \text{число} \ \& \ d = \lambda_c(b, c - \text{натуральное}) \rightarrow \lim(d) = b)$$

Переменной x22 присваивается консеквент теоремы x21, переменной x23 - параметры консеквента. Определяется подстановка S вместо переменных x23, унифицирующая термы x18 и x22. Переменной x25 присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x21. Переменной x26 присваивается утверждение " $\text{существует}(x13 \ \text{и} \ (Q \ x25))$ ", где Q - остаток набора x17 после дулаения утверждения x18. В нашем примере x26 имеет вид " $\exists_a(a - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ f = \lambda_c(a, c - \text{натуральное}))$ ". Переменной x27 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка антецедентов исходной теоремы, пополненного утверждением x26. Обработка ведется относительно параметров терма x9. Создается импликация x28 с антецедентами x27 и консеквентом x9. Рассматривается список x29 всех параметров терма x9, для которых в x25 имеется равенство с этим параметром в одной из частей. Проверяется, что он одноэлементный и состоит из переменной X . В нашем примере - из переменной f . В списке x27 находится утверждение с заголовком "существует" и определяется его номер i (нумерация начинается с 1). Затем x28 регистрируется в списке вывода и сопровождается единственной характеристикой "подбор($f \ i$)".

10. Примерка использующего описатели определения операции над функцией на элементарные операции раздела.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aeg}(\text{Dom}(e) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \\ a \in \text{Dom}(g) \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ \text{дифференцируема}(e, a) \ \& \\ \text{дифференцируема}(g, a) \rightarrow \text{производная}(\lambda_c(e(c) + g(c), c \in \text{Dom}(g)), a) = \\ \text{производная}(e, a) + \text{производная}(g, a))$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \in \text{Dom}(f) \ \& \ \text{типпредела}(b) \\ \ \& \ \text{локопред}(f, a, b) \ \& \ \text{дифференцируема}(f, a) \rightarrow \text{производная}(f, a) = \\ \lim_{x \rightarrow a \setminus b}(f(x) - f(a))/(x - a))$$

Эта теорема определяет терм "производная(f, a)". Утверждение "локопред(f, a, b)" означает, что функция f определена в некоторой ненулевой окрестности точки a , причем b - указатель типа окрестности: 0 - двусторонняя, 1 - левая, 2 - правая.

Переменной x_8 присваивается определяемый терм, переменной x_9 - вхождение консеквента. Проверяется, что теорема - равенство либо эквивалентность. Переменной x_{12} присваивается определяющая часть. Проверяется, что в ней встречается описатель "класс" либо "отображение". Переменной x_{13} присваивается список антецедентов. В нем находится утверждение "функция(x_{15})", где x_{15} - переменная, входящая в список параметров терма x_8 . В нашем примере x_{15} - f . В списке x_{13} находится утверждение x_{16} вида "содержится(значения(x_{15}) T)". В нашем примере - " $\text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ ". Выбирается переменная x_{17} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная c . Переменной x_{18} присваивается результат добавления к списку x_{13} утверждения "принадлежит($x_{17} T$)". В нашем примере - " $c \in \mathbb{R}$ ". Решается задача на исследование x_{19} , имеющая список посылок x_{18} и цель "неизвестные x_{17} ". После этого в ее списке посылок находится утверждение вида " $P(17)$ ", где P - обозначение типа объектов. В нашем примере - "число".

Перечисляются по возрастанию те разделы x_{23} , к которым относится понятие P . В нашем примере x_{23} - "элементарная алгебра". Переменной x_{24} присваивается набор логических символов, относящихся к разделу x_{23} и его подразделам. В списке x_{24} выбирается символ x_{25} , не являющийся предикатным символом, причем такой, что список типов значений выражений с заголовком x_{25} содержит символ P . В нашем примере x_{25} - "плюс". Проверяется, что арность x_{27} символа x_{25} отлична от 0 и от символа "натуральное" (последнее указывает на возможность произвольного натурального числа операндов и встречается крайне редко, например, у символа "набор"). В нашем примере x_{27} равно 2. Переменной x_{28} присваивается список переменных, не встречающихся в исходной теореме, длина которого равно $x_{27}+2$. В нашем примере x_{28} состоит из переменных c, d, e, g . Переменным x_{29} и x_{30} присваиваются две первых переменных списка x_{28} , переменной x_{31} - остальные переменные этого списка. В нашем примере x_{29} - c , x_{30} - d , x_{31} - e, g . Переменной x_{32} присваивается терм, получающийся соединением операцией x_{25} выражений "значение(X x_{29})" по всем переменным X списка x_{31} . В нашем примере x_{32} имеет вид " $e(c) + g(c)$ ". Переменной x_{33} присваивается терм "отображение(x_{29} принадлежит($x_{29} x_{30}$) x_{32})". В нашем примере - " $\lambda_c(e(c) + g(c), c \in d)$ ". Переменной x_{34} присваивается список результатов подстановки терма x_{33} вместо переменной x_{15} в утверждения x_{13} , переменной x_{35} - результат добавления к x_{34} утверждений "функция(X)", "равно(область(X) x_{30})" для всех переменных X из x_{31} .

Определяется о.д.з. терма, полученного навешиванием операции x_{25} на список переменных x_{31} . Для каждого утверждения P из этой о.д.з. определяется результат P' подстановки в него вместо переменных X списка x_{31} термов "значение(X, x_{29})". Затем к списку x_{35} добавляется кванторная импликация "для любого(x_{29} если принадлежит($x_{29} x_{30}$) то P')". В нашем примере x_{35} состоит из следующих утверждений:

" $\lambda_c(e(c) + g(c), c \in d)$ - функция", " $\text{Dom}(\lambda_c(e(c) + g(c), c \in d)) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{Val}(\lambda_c(e(c) + g(c), c \in d)) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $a \in \text{Dom}(\lambda_c(e(c) + g(c), c \in d))$ ", "тип предела(b)",

"локопред($\lambda_c(e(c) + g(c), c \in d), a, b$)", "дифференцируема($\lambda_c(e(c) + g(c), c \in d), a$)", " e – функция", " g – функция", " $\text{Dom}(e) = d$ ", " $\text{Dom}(g) = d$ ", " $\forall_c(c \in d \rightarrow g(c) - \text{число})$ ", " $\forall_c(c \in d \rightarrow e(c) - \text{число})$ ".

Переменной x_{36} присваивается результат подстановки терма x_{33} вместо переменной x_{15} в терм x_{12} . В нашем примере он имеет вид:

$$\lim_{x \rightarrow a \setminus b} (\lambda_c(e(c) + g(c), c \in d)(x) - \lambda_c(e(c) + g(c), c \in d)(a)) / (x - a)$$

Переменной x_{37} присваивается результат обработки списка x_{35} процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{36} . В нашем примере он имеет следующий вид:

"квазивнутр(a, d, b)", "локопред(g, a, b)", " $d \subseteq \mathbb{R}$ ", "дифференцируема($\lambda_c(e(c) + g(c), c \in d), a$)", " e – функция", " g – функция", " $\text{Dom}(e) = d$ ", " $\text{Dom}(g) = d$ ", " $\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R}$ ".

Переменной x_{39} присваивается результат упрощения терма x_{36} относительно посылок x_{37} при помощи вспомогательной задачи на преобразование. В нашем примере имеем:

$$\lim_{x \rightarrow a \setminus b} (-e(a) - g(a) + e(x) + g(x)) / (x - a)$$

В терме x_{12} рассматривается вхождение x_{40} символа "отображение", причем проверяется, что такое вхождение единственное. Переменной x_{41} присваивается выражение, определяющее значение отображения, переменной x_{42} - связывающая приставка описателя. В нашем примере x_{41} имеет вид " $(f(x) - f(a)) / (x - a)$ ", x_{42} состоит из переменной x . Переменной x_{43} присваивается пара Y, Z переменных, не входящих в исходную теорему. В нашем примере - Y - переменная c , Z - переменная d . Переменной x_{44} присваивается самый длинный из содержащих переменные списка x_{42} подтермов терма x_{41} , имеющих вид "значение($x_{15} \dots$)". В нашем примере - " $f(x)$ ".

Переменной x_{46} присваивается результат замены в x_{41} вхождений подтерма x_{44} на Y . В нашем примере - " $(c - f(a)) / (x - a)$ ". Переменной x_{47} присваивается равенство выражения x_{46} переменной Z . В нашем примере - " $(c - f(a)) / (x - a) = d$ ". Определяется тип G значений выражений с тем же заголовком, что у x_{41} . В нашем примере этот заголовок - "дробь", и G - символ "число". Переменной x_{49} присваивается объединение списка x_{13} и списка конъюнктивных членов предпоследнего терма описателя x_{40} , к которому добавляется терм " $G(Z)$ ". В нашем примере - терм "число(d)". К x_{49} присоединяются все не содержащие Y утверждения из о.д.з. терма x_{46} . В нашем примере x_{49} состоит из утверждений:

" f – функция", " $\text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $a \in \text{Dom}(f)$ ", "типпредела(b)", "локопред(f, a, b)", "дифференцируема(f, a)", " x – число", " $\text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ ", " d – число", " a – число", " $f(a)$ – число", " $\neg(x - a = 0)$ ".

Решается задача на описание с посылками x_{49} , имеющая единственное условие x_{47} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "одз", "неизвестные Y ". Ответ присваивается переменной x_{51} . В нашем примере он

имеет вид " $c = d(x - a) + f(a)$ ". Проверяется, что x_51 представляет собой равенство с переменной Y в левой части. Переменной x_52 присваивается правая часть. В нашем примере - " $d(x - a) + f(a)$ ".

Переменной x_53 присваивается набор переменных, не входящих в консеквент исходной теоремы, а также в теоремы списка x_37 и в теорему x_39 . Длина этого набора такая же, как у набора x_31 . В нашем примере он состоит из переменных e, g . Переменной x_54 присваивается список результатов подстановки в терм x_52 термов " V " и " $W(\text{набор}(x_42))$ " вместо переменных x_15, Z . Здесь V, W - всевозможные пары соответствующих друг другу переменных списковой x_31 и x_53 . В нашем примере x_54 состоит из термов " $c(x)(x - a) + e(a)$ ", " $h(x)(x - a) + g(x)$ ".

Просматриваются переменные U списка x_31 . Для текущей такой переменной определяется результат x_57 подстановки ее вместо x_15 в терм x_44 . Все вхождения подтерма x_57 в x_39 заменяются на терм списка x_54 , соответствующий переменной U .

По окончании данного цикла переменные начиная с x_55 снова оказываются не определены. Терм x_39 в нашем примере приобретает вид:

$$\lim_{x \rightarrow a \setminus b} (-e(a) - g(a) + (c(x)(x - a) + e(a)) + (h(x)(x - a) + g(a)))/(x - a)$$

Проверяется, что переменная x_15 не входит в x_39 . Для каждой переменной U списка x_31 к списку x_37 добавляются результаты подстановки U вместо x_15 в утверждения списка x_13 , содержащие переменную x_15 . Переменной x_37 присваивается результат обработки списка x_37 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x_39 . В результате он приобретает вид:

" e - функция", " g - функция", " $\text{Dom}(e) = d$ ", " $\text{Dom}(g) = d$ ", " $\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R}$ ", "локопред(e, a, b)", "дифференцируема(e, a)", " $d \subseteq \mathbb{R}$ ", " $a \in d$ ", "дифференцируема(g, a)".

Далее проверяется, что x_9 - равенство. Переменной x_55 присваивается список x_37 , и предпринимается просмотр переменных U списка x_31 и соответствующих им переменных V списка x_53 . Для текущей такой переменной определяется результат x_59 замены в x_12 последнего операнда вхождения x_40 на терм "значение($V, \text{набор}(x_42)$)". Переменной x_60 присваивается результат подстановки в x_8 переменной U вместо переменной x_15 . Затем к списку x_55 добавляется равенство выражений x_59 и x_60 . В нашем примере таким образом оказываются добавлены равенства: " $\lim_{x \rightarrow a \setminus b} c(x) = \text{производная}(e, a)$ ", " $\lim_{x \rightarrow a \setminus b} h(x) = \text{производная}(g, a)$ ".

По окончании цикла переменные начиная с x_56 снова оказываются не определенными. Решается задача на преобразование с посылками x_55 и условием x_39 . Единственная ее цель - "упростить". Ответ присваивается переменной x_57 . В нашем примере он имеет вид " $\text{производная}(e, a) + \text{производная}(g, a)$ ". Дробное выражение под пределом x_39 обычной цепочкой упрощений приводится к виду суммы, а далее срабатывает прием для предела суммы и используются посылки.

Проверяется, что x_57 не содержит описателей. Определяется результат x_58 подстановки в терм x_8 выражения x_33 вместо переменной x_15 , и переменной x_59

присваивается равенство термов x58, x57. Переменной x60 присваивается результат обработки списка x37 процедурой "нормантецеденты" относительно параметры терма x59. Затем создается импликация с антецедентами x60 и консеквентом x59. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

11. Примерка использующего описатели определения свойства функции на константную и тождественную функции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ad}(a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \text{дифференцируема}(\lambda_c(d, c - \text{число}), a))$$

из теоремы

$$\forall_{af}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{локопред}(f, a, b) \ \& \ \text{типпредела}(b) \rightarrow \text{дифференцируема}(f, a) \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a \setminus b} (f(x) - f(a))/(x - a) - \text{число})$$

Эта теорема определяет терм "дифференцируема(f, a)".

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Переменной x8 присваивается определяемый терм, переменной x9 - вхождение консеквента. Проверяется, что теорема - равенство либо эквивалентность. Переменной x12 присваивается определяющая часть. Проверяется, что в ней встречается описатель "класс" либо "отображение". Переменной x13 присваивается список антецедентов. В нем находится утверждение "функция(x15)", где x15 - переменная, входящая в список параметров терма x8. В нашем примере x15 - f . В списке x13 находится утверждение x16 вида "содержится(значения(x15)T)". В нашем примере - " $\text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ ". Выбирается переменная x17, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная c . Переменной x18 присваивается результат добавления к списку x13 утверждения "принадлежит(x17 T)". В нашем примере - " $c \in \mathbb{R}$ ". Решается задача на исследование x19, имеющая список посылок x18 и цель "неизвестные x17". После этого в ее списке посылок находят утверждение вида " $P(17)$ ", где P - обозначение типа объектов. В нашем примере - "число".

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Выбираются различные переменные x23 и x24, не входящие в исходную теорему и отличные от переменной x17. Поочередно рассматриваются четыре случая. В первом из них переменной x25 присваивается выражение "отображение(x17 принадлежит(x17 x24)x23)", во втором - "отображение(x17 x21 x23)", в третьем - "отображение(x17 принадлежит(x17 x24)x17)", в четвертом - "отображение(x17 x21 x17)". В нашем примере берется второй случай, т.е. x25 имеет вид " $\lambda_c(d, c - \text{число})$ ".

Переменной x26 присваивается результат подстановки в терм x8 выражения x25 вместо переменной x15. В нашем примере - "дифференцируема($\lambda_c(d, c - \text{число}), a$)". Переменной x27 присваивается результат такой же подстановки в терм x12. В нашем примере он имеет вид:

$$\lim_{x \rightarrow a \setminus b} (\lambda_c(d, c - \text{число})(x) - \lambda_c(d, c - \text{число})(a))/(x - a) - \text{число}$$

Переменной x_{28} присваивается список результатов подстановки x_{25} вместо x_{15} в утверждения списка x_{13} . Переменной x_{29} присваивается список параметров терма x_{27} . В нашем примере - a, b, d . Переменной x_{30} присваивается список утверждений набора x_{28} , содержащих переменные списка x_{29} . В нашем примере x_{30} состоит из утверждений:

" $\lambda_c(d, c - \text{число}) - \text{функция}$ ", " $a - \text{число}$ ", " $\text{Dom}(\lambda_c(d, c - \text{число})) \subseteq \mathbb{R}$ ",
" $\text{Val}(\lambda_c(d, c - \text{число})) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{локопред}(\lambda_c(d, c - \text{число}), a, b)$ ", " $\text{типпредела}(b)$ ".

Переменной x_{31} присваивается остаток списка x_{28} . Переменной x_{32} присваивается объединение списка x_{30} и набора конъюнктивных членов утверждения x_{27} . Проверяется, что список x_{29} непуст. Решается задача на описание с посылками x_{31} и условиями x_{32} . Цели ее - "полный", "прямойответ", "попыткаспуска", "неизвестные x_{29} ". Ответ присваивается переменной x_{34} . В нашем примере он имеет вид " $a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{типпредела}(b)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и не имеет связанных переменных. Создается импликация, антецедентами которой служат конъюнктивные члены утверждения x_{34} , а консеквентом - терм x_{26} . Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому разрешается использовать все уже имеющиеся в списке вывода теоремы. Выбирается конъюнктивный член x_{37} результата такой обработки, который регистрируется в списке вывода.

12. Примерка использующего описатели определения свойства функции на элементарные операции раздела.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aeg} (\text{Dom}(e) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \\ e - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ \text{дифференцируема}(e, a) \ \& \\ \text{дифференцируема}(g, a) \rightarrow \ \& \ \text{дифференцируема}(\lambda_c(e(c) + g(c), c \in \text{Dom}(g)), a))$$

из теоремы

$$\forall_{af} (f - \text{функция} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{локопред}(f, a, b) \ \& \\ \text{типпредела}(b) \rightarrow \text{дифференцируема}(f, a) \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a \setminus b} (f(x) - f(a)) / (x - a) - \\ \text{число})$$

Эта теорема определяет терм "дифференцируема(f, a)".

Начало программы приема совпадает с программой приема "Примерка использующего описатели определения операции над функцией на элементарные операции раздела". Для удобства чтения повторим его. Переменной x_8 присваивается определяемый терм, переменной x_9 - входение консеквента. Проверяется, что теорема - равенство либо эквивалентность. Переменной x_{12} присваивается определяющая часть. Проверяется, что в ней встречается описатель "класс" либо "отображение". Переменной x_{13} присваивается список антецедентов. В нем находится утверждение "функция(x_{15})", где x_{15} - переменная, входящая в список параметров терма x_8 . В нашем примере $x_{15} - f$. В списке x_{13} находится утверждение x_{16} вида "содержится(значения(x_{15}) T)". В нашем примере - " $\text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ ". Выбирается переменная x_{17} , не входящая в исходную теорему.

В нашем примере - переменная s . Переменной x_{18} присваивается результат добавления к списку x_{13} утверждения "принадлежит($x_{17} T$)". В нашем примере - " $s \in \mathbb{R}$ ". Решается задача на исследование x_{19} , имеющая список посылок x_{18} и цель "неизвестные x_{17} ". После этого в ее списке посылок находится утверждение вида " $P(17)$ ", где P - обозначение типа объектов. В нашем примере - "число".

Перечисляются по возрастанию те разделы x_{23} , к которым относится понятие P . В нашем примере x_{23} - "элементарная алгебра". Переменной x_{24} присваивается набор логических символов, относящихся к разделу x_{23} и его подразделам. В списке x_{24} выбирается символ x_{25} , не являющийся предикатным символом, причем такой, что список типов значений выражений с заголовком x_{25} содержит символ P . В нашем примере x_{25} - "плюс". Проверяется, что аридность x_{27} символа x_{25} отлична от 0 и от символа "натуральное" (последнее указывает на возможность произвольного натурального числа операндов и встречается крайне редко, например, у символа "набор"). В нашем примере x_{27} равно 2. Переменной x_{28} присваивается список переменных, не встречающихся в исходной теореме, длина которого равно $x_{27} + 2$. В нашем примере x_{28} состоит из переменных c, d, e, g . Переменным x_{29} и x_{30} присваиваются две первых переменных списка x_{28} , переменной x_{31} - остальные переменные этого списка. В нашем примере x_{29} - c , x_{30} - d , x_{31} - e, g . Переменной x_{32} присваивается терм, получающийся соединением операцией x_{25} выражений "значение(X x_{29})" по всем переменным X списка x_{31} . В нашем примере x_{32} имеет вид " $e(c) + g(c)$ ". Переменной x_{33} присваивается терм "отображение(x_{29} принадлежит($x_{29} x_{30}$) x_{32})". В нашем примере - " $\lambda_c(e(c) + g(c), c \in d)$ ". Переменной x_{34} присваивается список результатов подстановки терма x_{33} вместо переменной x_{15} в утверждения x_{13} , переменной x_{35} - результат добавления к x_{34} утверждений "функция(X)", "равно(область(X) x_{30})" для всех переменных X из x_{31} .

Определяется о.д.з. терма, полученного навешиванием операции x_{25} на список переменных x_{31} . Для каждого утверждения P из этой о.д.з. определяется результат P' подстановки в него вместо переменных X списка x_{31} термов "значение(X, x_{29})". Затем к списку x_{35} добавляется кванторная импликация "для любого(x_{29} если принадлежит($x_{29} x_{30}$) то P')". В нашем примере x_{35} состоит из следующих утверждений:

" $\lambda_c(e(c) + g(c), c \in d)$ - функция", " a - число", " $\text{Dom}(\lambda_c(e(c) + g(c), c \in d)) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{Val}(\lambda_c(e(c) + g(c), c \in d)) \subseteq \mathbb{R}$ ", "локопред($\lambda_c(e(c) + g(c), c \in d)$)", "типпредела(b)", " e - функция", " g - функция", " $\text{Dom}(e) = d$ ", " $\text{Dom}(g) = d$ ", " $\forall_c(c \in d \rightarrow g(c) - \text{число})$ ", " $\forall_c(c \in d \rightarrow e(c) - \text{число})$ ".

Переменной x_{36} присваивается результат подстановки терма x_{33} вместо переменной x_{15} в терм x_{12} . В нашем примере он имеет вид:

$$\lim_{x \rightarrow a \setminus b} (\lambda_c(e(c) + g(c), c \in d)(x) - \lambda_c(e(c) + g(c), c \in d)(a)) / (x - a) - \text{mbox}$$

Переменной x_{37} присваивается результат обработки списка x_{35} процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{36} . В нашем примере он имеет следующий вид:

"квазивнутр(a, d, b)", " a - число", " $d \subseteq \mathbb{R}$ ", "локопред(e, a, b)", " e - функция", " g - функция", " $\text{Dom}(e) = d$ ", " $\text{Dom}(g) = d$ ", " $\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R}$ ".

Переменной x_{39} присваивается результат упрощения терма x_{36} относительно посылок x_{37} при помощи вспомогательной задачи на преобразование. В нашем примере имеем:

$$\lim_{x \rightarrow a} (-e(a) - g(a) + e(x) + g(x)) / (x - a)$$

В терме x_{12} рассматривается вхождение x_{40} символа "отображение", причем проверяется, что такое вхождение единственное. Переменной x_{41} присваивается выражение, определяющее значение отображения, переменной x_{42} - связывающая приставка описателя. В нашем примере x_{41} имеет вид " $(f(x) - f(a)) / (x - a)$ ", x_{42} состоит из переменной x . Переменной x_{43} присваивается пара Y, Z переменных, не входящих в исходную теорему. В нашем примере - Y - переменная c , Z - переменная d . Переменной x_{44} присваивается самый длинный из содержащих переменные списка x_{42} подтермов терма x_{41} , имеющих вид "значение($x_{15} \dots$)". В нашем примере - " $f(x)$ ".

Переменной x_{46} присваивается результат замены в x_{41} вхождений подтерма x_{44} на Y . В нашем примере - " $(c - f(a)) / (x - a)$ ". Переменной x_{47} присваивается равенство выражения x_{46} переменной Z . В нашем примере - " $(c - f(a)) / (x - a) = d$ ". Определяется тип G значений выражений с тем же заголовком, что у x_{41} . В нашем примере этот заголовок - "дробь", и G - символ "число". Переменной x_{49} присваивается объединение списка x_{13} и списка конъюнктивных членов предпоследнего терма описателя x_{40} , к которому добавляется терм " $G(Z)$ ". В нашем примере - терм "число(d)". К x_{49} присоединяются все не содержащие Y утверждения из о.д.з. терма x_{46} . В нашем примере x_{49} состоит из утверждений:

" x - число", " f - функция", " a - число", " $\text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ ",
 "локопред(f, a, b)", "типпредела(b)", " d - число", " $f(a)$ - число", " $\neg(x - a = 0)$ ".

Решается задача на описание с посылками x_{49} , имеющая единственное условие x_{47} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "одз", "неизвестные Y ". Ответ присваивается переменной x_{51} . В нашем примере он имеет вид " $c = d(x - a) + f(a)$ ". Проверяется, что x_{51} представляет собой равенство с переменной Y в левой части. Переменной x_{52} присваивается правая часть. В нашем примере - " $d(x - a) + f(a)$ ".

Переменной x_{53} присваивается набор переменных, не входящих в консеквент исходной теоремы, а также в теоремы списка x_{37} и в теорему x_{39} . Длина этого набора такая же, как у набора x_{31} . В нашем примере он состоит из переменных e, g . Переменной x_{54} присваивается список результатов подстановки в терм x_{52} термов " V " и " $W(\text{набор}(x_{42}))$ " вместо переменных x_{15}, Z . Здесь V, W - всевозможные пары соответствующих друг другу переменных списковой x_{31} и x_{53} . В нашем примере x_{54} состоит из термов " $c(x)(x - a) + e(a)$ ", " $h(x)(x - a) + g(x)$ ".

Просматриваются переменные U списка x_{31} . Для текущей такой переменной определяется результат x_{57} подстановки ее вместо x_{15} в терм x_{44} . Все вхождения подтерма x_{57} в x_{39} заменяются на терм списка x_{54} , соответствующий переменной U .

По окончании данного цикла переменные начиная с x_{55} снова оказываются не определены. Терм x_{39} в нашем примере приобретает вид:

$\lim_{x \rightarrow a \setminus b} (-e(a) - g(a) + (c(x)(x - a) + e(a)) + (h(x)(x - a) + g(a)))/(x - a)$ - число

Проверяется, что переменная x15 не входит в x39. Для каждой переменной U списка x31 к списку x37 добавляются результаты подстановки U вместо x15 в утверждения списка x13, содержащие переменную x15. Переменной x37 присваивается результат обработки списка x37 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x39. В результате он приобретает вид:

" a - число", " e - функция", " g - функция", " $\text{Dom}(e) = d$ ", " $\text{Dom}(g) = d$ ", " $\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $d \subseteq \mathbb{R}$ ", "локопред(g, a, b)".

Далее начинаются отличия. Проверяется, что x9 - эквивалентность. Переменной x55 присваивается список x37, и предпринимается просмотр переменных U списка x31 и соответствующих им переменных V списка x53. Для текущей такой переменной определяется результат x59 замены в x12 последнего операнда вхождения x40 на терм "значение(V , набор(x42))". Переменной x60 присваивается результат подстановки в x8 переменной U вместо переменной x15. Затем к списку x55 добавляется утверждение x59, а к списку x37 - утверждение x60.

В нашем примере к списку x55 добавляются утверждения " $\lim_{x \rightarrow a \setminus b} c(x)$ - число", " $\lim_{x \rightarrow a \setminus b} h(x)$ - число", а к списку x37 - "дифференцируема(e, a)" и "дифференцируема(g, a)". По завершении цикла переменные начиная с x56 становятся не определенными. Решается задача на доказательство с посылками x55 и условием x39. При получении ответа "истина" определяется результат x57 подстановки в терм x8 выражения x33 вместо переменной x15. Переменной x58 присваивается результат обработки списка x37 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x57. Затем создается импликация с антецедентами x58 и консеквентом x57. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

13. Попытка подобрать примеры определяемых объектов при помощи вспомогательной задачи на описание.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq c - b \rightarrow (b + c)/2 \in [b, c])$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a \in [b, c] \leftrightarrow a - \text{число} \ \& \ 0 \leq a - b \ \& \ 0 \leq c - a)$$

Эта теорема определяет терм " $a \in [b, c]$ ".

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x11 присваивается вхождение определяющей части, переменной x12 - набор антецедентов. Проверяется, что заголовок определяющей части отличен от символа "существует". Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов определяющей части. Проверяется, что все они элементарны. Переменной x14 присваивается список параметров терма x8, не являющихся параметрами утверждений x12. В нашем примере он состоит из переменной a . Проверяется, что список x14 непуст. Решается задача на описание с посылками x12 и условиями x13. Цели задачи - "пример", "прямойответ",

"перечисление", "неизвестные x14", "упростить". Для сохранения различных вариантов ответа вводится комментарий (ответзадачи пустоеслово). По окончании решения из этого комментария извлекается утверждение x19 (один из вариантов ответа). В нашем примере оно имеет вид " $a = (b + c)/2 \ \& \ 0 \leq c - b$ ". Переменной x20 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x19. Переменной x21 присваивается список утверждений набора x20, не содержащих переменных x14, переменной x22 - остаток набора x20. Переменной x23 присваивается объединение списков x21 и x12.

Если список x21 непуст, то решается задача на описание, имеющая единственную посылку "истина" и условия x23. Неизвестными служат параметры ее условий. Кроме того, имеются цели "полный", "явное", "прямойответ". Если получен отличный от символа "отказ" ответ, то x23 переприсваивается список его конъюнктивных членов. В нашем примере x23 будет иметь вид " $b - \text{число}$ ", " $b \leq c$ ", " $c - \text{число}$ ".

Переменной x24 присваивается объединение списков x22 и x23. Если оно не содержит утверждений с заголовком "существует", то переменной x24 переприсваивается результат обработки списка x24 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x8.

Создается импликация с антецедентами x24 и консеквентом x8. Она обрабатывается оператором "нормантецеденты" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "подборнеизвестных($t_1 \dots t_n$)". Здесь t_1, \dots, t_n - правые части равенств набора x22, определяющих значения переменных списка x14. В нашем примере - единственное выражение " $(b + c)/2$ ".

14. Попытка получить пример определяемого предиката с помощью подбора примера конъюнктивного члена определяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

1 – натуральное

из теоремы

$\forall_n(n - \text{натуральное} \leftrightarrow n - \text{целое} \ \& \ 1 \leq n)$

и дополнительной теоремы

$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a \leq a)$

Исходная теорема определяет терм " $n - \text{натуральное}$ ".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x9 присваивается определяемый терм. Проверяется, что он элементарный. Переменной x12 присваивается определяющий терм. Проверяется, что он представляет собой конъюнкцию, и переменной x13 присваивается набор его конъюнктивных членов. В списке x13 выбирается утверждение x14, заголовок x15 которого не является названием типа объекта. В нашем примере - утверждение " $1 \leq n$ ". Справочник поиска теорем "пример" определяет по x15 указанную выше дополнительную

теорему. Переменной x18 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x18 совпадает с x16. Переменной x19 присваивается консеквент теоремы x18, переменной x20 - параметры термов x19 и x14. В нашем примере - " a, n ". Определяется подстановка S вместо переменных x20, унифицирующая термы x14 и x19. Переменной x22 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и теоремы x18. Переменной x23 присваивается конъюнкция отличных от x14 утверждений списка x13. В нашем примере - " $n - \text{целое}$ ". Переменной x24 присваивается результат применения подстановки S к терму x23. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x24 - следствие утверждений x22. Переменной x26 присваивается результат применения подстановки S к терму x9. Переменной x27 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка x22 относительно параметров x26. Переменной x28 присваивается импликация с антецедентами x27 и консеквентом x26. Она регистрируется в списке вывода.

15. Попытка использовать тождество, определяющее значение отдельной координаты.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c(\text{Трехмерн}(c) \rightarrow \text{влево}(\text{вектор0}, c))$$

из теоремы

$$\forall_{aK}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{влево}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 2) = 0 \ \& \ \text{крд}(a, K, 3) = 0 \ \& \ \text{крд}(a, K, 1) \leq 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{Ki}(\text{Трехмерн}(K) \ \& \ i \in \{1, 2, 3\} \rightarrow \text{крд}(\text{вектор0}, K, i) = 0)$$

Исходная теорема определяет терм " $\text{влево}(a, K)$ ".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x9 присваивается определяемый терм. Проверяется, что он элементарен. В определяющей части выбирается вхождение x12 неоднобуквенного подтерма. Переменной x13 присваивается его заголовок. В нашем примере x12 имеет вид " $\text{крд}(a, K, 2)$ ". Проверяется, что x13 - название отдельного разряда координат. Справочник поиска теорем "Крд" определяет по x13 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x18 преобразования вхождения x12 при помощи дополнительной теоремы. Он обрабатывается процедурой "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

16. Попытка использовать определение самого сложного понятия заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{Kad}(\text{коорд}(a, K) = (0, 0, d) \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вертикалнпр}(a, K))$$

из теоремы

$$\forall_{Ka}(\text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Вектор}(a) \rightarrow \text{вертикнапр}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 1) = 0 \ \& \ \text{крд}(a, K, 2) = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{AKabc}(\text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Вектор}(A) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \rightarrow \text{крд}(A, K, 1) = a \ \& \ \text{крд}(A, K, 2) = b \ \& \ \text{крд}(A, K, 3) = c)$$

Исходная теорема определяет терм "вертикнапр(a, K)".

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_{12} присваивается определяющий терм. Переменной x_{13} присваивается список подтермов терма x_{12} , имеющих максимальную оценку сложности. В нашем примере он состоит из термов "крд($a, K, 1$)", "крд($a, K, 2$)". Проверяется, что все эти термы имеют один и тот же заголовок x_{15} . В нашем примере - "крд". Справочник поиска теорем "определение" находит по символу x_{15} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{18} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{efbcd}(\text{Трехмерн}(f) \ \& \ \text{Вектор}(e) \ \& \ \text{коорд}(e, f) = (b, c, d) \rightarrow \text{крд}(e, f, 1) = b \ \& \ \text{крд}(e, f, 2) = c \ \& \ \text{крд}(e, f, 3) = d)$$

Переменной x_{19} присваивается список antecedентов теоремы x_{18} , переменной x_{20} - ее консеквент. Проверяется, что этот консеквент не является эквивалентностью и содержит символ x_{15} . Переменной x_{21} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{20} , переменной x_{22} - набор конъюнктивных членов утверждения x_{12} . Переменной x_{23} присваивается список таких утверждений U набора x_{21} , что в наборе x_{22} существует утверждение V , представляющее собой результат некоторой подстановки в U . В нашем примере x_{23} имеет вид "крд($e, f, 1$) = b ", "крд($e, f, 2$) = c ". Проверяется, что длины наборов x_{22} и x_{23} равны. Переменной x_{24} присваивается список параметров утверждений x_{23} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{24} , переводящая список x_{23} в x_{22} . Переменной x_{27} присваивается набор результатов применения подстановки S к утверждениям x_{19} . Создается импликация, antecedенты которой суть утверждения x_{27} и antecedенты исходной теоремы, а консеквент - x_8 . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

17. Примерка использующего вспомогательные переменные определения одноместной операции на двуместные элементарные операции раздела.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{целое} \rightarrow [a + b] = b + [a])$$

из теоремы

$$\forall_{an}(a - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ n \leq a \ \& \ a < n + 1 \rightarrow [a] = n)$$

Эта теорема определяет терм " $[a]$ ".

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - тождество. Проверяется, что число корневых операндов терма x_8 равно 1.

Проверяется, что исходная теорема имеет характеристику "определено". Она означает, что теорема представляет собой тождество, определяющее некоторую операцию через вспомогательные переменные, входящие в антецеденты и не входящие в эту операцию. Для любых значений переменных определяемой части, удовлетворяющих всем содержащим только такие переменные антецедентам, существуют подходящие значения вспомогательных переменных.

Переменной x_{12} присваивается список антецедентов теоремы x_2 . Проверяется, что корневым операндом определяемого термина служит переменная. Она присваивается переменной x_{13} . Выбирается антецедент x_{14} , указывающий тип значения x_{15} переменной x_{13} . В нашем примере x_{15} - символ "число". Рассматриваются раздел символа x_{15} и его подразделы. В нашем примере - "элементарная алгебра". В этих разделах рассматриваются символы x_{18} двуместных операций, список типов значения которых содержит x_{15} . В нашем примере x_{18} - символ "плюс". Переменной x_{20} присваивается определяющая часть теоремы, переменной x_{21} - список ее параметров. В нашем примере x_{21} состоит из единственной переменной n . Переменной x_{22} присваивается список всех антецедентов теоремы, содержащих переменные списка x_{21} . Переменной x_{23} присваивается результат удаления из списка x_{12} утверждений x_{22} . Выбирается переменная x_{24} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Переменной x_{25} присваивается результат соединения операцией x_{18} переменных x_{13} и x_{24} . В нашем примере - " $a + b$ ". Проверяется, что справочник "типа данных" определяет для каждого корневого операнда термина x_{25} значение x_{15} . Переменной x_{26} присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему и отличных от переменной x_{24} . Длина его равна длине списка x_{21} . В нашем примере x_{26} состоит из переменной c . Переменной x_{27} присваивается набор результатов подстановки в утверждения списка x_{22} переменных x_{26} и термина x_{25} вместо переменных x_{21} и x_{13} . В нашем примере x_{27} состоит из утверждений " c - целое", " $c \leq a + b$ ", " $a + b - 1 < c$ ". Переменной x_{28} присваивается результат добавления к списку x_{12} термина " $x_{15}(x_{24})$ ". В нашем примере - " b - число". Решается задача на описание с посылками x_{28} и условиями x_{27} . Цели задачи - "пример", "прямой ответ", "независит x_{13} ", "неизвестные x_{26} ". Ответ присваивается переменной x_{30} . В нашем примере он имеет вид " $(b+n)$ - целое & $c = b+n$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{31} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{30} . Переменной x_{32} присваивается набор правых частей равенств для переменных x_{26} , входящих в список x_{31} . В нашем примере - единственное выражение " $b+n$ ". Проверяется, что длины списков x_{32} и x_{26} равны. Переменной x_{33} присваивается результат подстановки термов x_{32} вместо переменных x_{21} в терм x_{20} . В нашем примере он имеет вид " $b + n$ ". Переменной x_{35} присваивается результат замены вхождения термина x_{20} в терм x_{33} на терм x_8 . Проверяется, что x_{35} не содержит переменных x_{21} . Переменной x_{36} присваивается равенство термина $P(25)$ терму x_{35} . Здесь P - заголовок выражения x_8 . В нашем примере x_{36} имеет вид " $[a + b] = b + [a]$ ". Переменной x_{37} присваивается объединение списка x_{23} со списком результатов подстановки выражения x_{25} вместо переменной x_{13} в утверждения x_{23} .

Просматриваются утверждения x_{38} списка x_{31} , параметры которых не пересекаются со списком x_{26} . Если эти параметры не пересекаются со списком x_{21} , то утверждение x_{38} добавляется к списку x_{37} . Иначе - проверяется, что в x_{38}

имеется вхождение термина x_{20} , при замене которого на x_8 получается терм x_{40} , не содержащий переменных x_{21} . В этом случае к списку x_{37} добавляется утверждение x_{40} . Если от переменных списка x_{21} указанным образом избавиться не удалось, срабатывание приема отменяется.

По завершении цикла создается импликация с антецедентами x_{37} и консеквентом x_{36} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Вывод элементарных следствий обеих частей определения элементарного утверждения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\text{параллелограмм}(ABCD) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow 2l(AB)^2 + 2l(AD)^2 - l(AC)^2 - l(BD)^2 = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{параллелограмм}(ABCD) \leftrightarrow \text{четыреугольник}(ABCD) \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD))$$

Эта теорема определяет терм "параллелограмм($ABCD$)".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_9 присваивается определяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x_{12} присваивается определяющая часть. Проверяется, что ее заголовок - не квантор существования. Переменной x_{13} присваивается список антецедентов, переменной x_{14} - результат добавления к x_{13} утверждения x_9 и списка конъюнктивных членов утверждения x_{12} .

Решается задача на исследование со списком посылок x_{14} . Цели задачи - "известно", "неизвестные X ", "теорема". Здесь X - список параметров посылок. Цель "теорема" указывает на то, что задача решается для вывода теорем. Она снимает многие блокировки, работающие при решении обычных задач, и активирует дополнительные приемы.

В нашем примере, прежде всего, выводятся соотношения для углов параллелограмма и равенства длин противоположных сторон. Затем дважды применяется теорема косинусов, и далее - полученные соотношения складываются для исключения угла. Так получается соотношение $2l(AB)^2 + 2l(AD)^2 - l(AC)^2 - l(BD)^2 = 0$. Фактически, цель "теорема" ориентирует на получение исчерпывающей системы связей между объектами задачи.

После решения задачи x_{15} просматриваются ее элементарные послылки x_{18} , имеющие заголовка "актив" либо "пассив" и отличные от реализации "старых" теорем. В нашем примере - отбрасываются соотношения для теоремы косинусов. Здесь используются комментарии "теорвывод", создаваемые приемами, выводящими соотношения. Отбрасываются послылки, совпадающие с

антецедентами теоремы либо с определяемым утверждением. Проверяется, что параметры утверждения x18 включаются в параметры списка x14. Отбрасываются те утверждения x18, которые являются следствиями антецедентов. Это проверяется при помощи вспомогательных задач на доказательство.

Для каждого найденного указанным образом утверждения x18 создается импликация, антецедентами которой служат антецеденты исходной теоремы и утверждение x9, а консеквентом является x18. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Вывод элементарных следствий обеих частей определения элементарного утверждения, имеющего параметры, не входящие в антецеденты.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDE}(B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{квадрат}(BCDE) \ \& \ \text{центр}(A, \text{фигура}(BCDE)) \rightarrow \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{квадрат}(BCDE) \rightarrow \text{центр}(A, \text{фигура}(BCDE)) \leftrightarrow A - \text{точка} \ \& \ A \in \text{отрезок}(BD) \ \& \ A \in \text{отрезок}(CE))$$

Эта теорема определяет терм "центр(A, фигура(BCDE))".

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x9 присваивается определяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x12 присваивается определяющая часть. Проверяется, что ее заголовок - не квантор существования. Переменной x13 присваивается список антецедентов, переменной x14 - результат добавления к x13 утверждения x9 и списка конъюнктивных членов утверждения x12.

Решается задача на исследование x15 со списком посылок x14. Цели задачи - "известно", "неизвестные X", "теорема". Здесь X - список параметров посылок.

Дальше начинаются отличия. Переменной x18 присваивается список параметров определяемого термина, не входящих в антецеденты. В нашем примере он состоит из единственной переменной A. Проверяется, что список x18 непуст, и решается задача на исследование x19 с тем же списком посылок x14, что был у задачи x15. Во избежание искажений, каждый раз берется исходная версия списка x14. Цели задачи x19 - "известно", "неизвестные X", "фокус x18", "теорема". Цель "фокус $y_1 \dots y_n$ " задачи на исследование указывает на приоритет переформулировки посылок с использованием переменных y_1, \dots, y_n . В нашем примере - с использованием переменной A. Условие перпендикулярности диагоналей квадрата выводилось еще в задаче x15. Однако, в их обозначении центр квадрата не фигурировал. Цель "фокус" инициирует срабатывание приемов, переобозначающих прямые этих диагоналей с использованием точки A. В итоге среди посылок задачи x19 оказывается утверждение "прямая(AB) \perp прямая(AC)".

По окончании решения задачи x19 среди ее посылок выбирается элементарное утверждение x21, не входящее в список посылок задачи x15 и содержащее

переменные списка x18. Проверяется, что это утверждение не является реализацией "старой" теоремы (по отсутствию комментария "теорвывод"), не входит в список антецедентов теоремы и не является определяемым утверждением. Проверяется, что x21 не имеет заголовков "актив", "пассив" и что его параметры включаются в параметры списка x14. Отбрасываются те утверждения x21, которые являются следствиями антецедентов. Это проверяется при помощи вспомогательных задач на доказательство. В нашем примере x21 имеет вид "прямая(AB) \perp прямая(AC)".

Для каждого найденного указанным образом утверждения x218 создается импликация, антецедентами которой служат антецеденты исходной теоремы и утверждение x9, а консеквентом является x21. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Вывод следствий обеих частей определения элементарного утверждения с исключением кванторов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{abf}(\text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ f \text{ — функция} \ \& \ a \text{ — число} \ \& \text{ дифференцируема}(f, a) \ \& \ \text{типпредела}(b) \ \& \ \text{локопред}(f, a, b) \rightarrow \text{непрерывно}(f, a))$
из теоремы

$\forall_{af}(f \text{ — функция} \ \& \ a \text{ — число} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{локопред}(f, a, b) \ \& \ \text{типпредела}(b) \rightarrow \text{дифференцируема}(f, a) \leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) / (x - a) \text{ — число})$

Эта теорема определяет терм "дифференцируема(f, a)".

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x9 присваивается определяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x12 присваивается определяющая часть. Проверяется, что ее заголовок - не квантор существования. Переменной x13 присваивается список антецедентов, переменной x14 - результат добавления к x13 утверждения x9 и списка конъюнктивных членов утверждения x12.

Решается задача на исследование x15 со списком посылок x14. Цели задачи - "известно", "неизвестные X", "теорема". Здесь X - список параметров посылок.

Дальше начинаются отличия. Проверяется наличие в посылках задачи x15 утверждения, внутри которого расположена кванторная импликация. В нашем примере такое утверждение имеет вид:

$\exists_c(\forall_d(0 < d \ \& \text{-число} \rightarrow \exists_e(\forall_x(x \in \text{Окрестность}(a, e, b) \ \& \ x \text{ — число} \rightarrow |c - (f(x) - f(a)) / (x - a)| < d) \ \& \ 0 < e \ \& \ e \text{ — число})) \ \& \ c \text{ — число})$

Переменной x19 присваивается список параметров определяемого терма. Если список переменных X набора x19, для которых в антецедентах встречается утверждение "функция(X)", непуст, то x19 заменяется на данный список. В нашем примере x19 оказывается состоящим из переменной f .

Решается задача на исследование x20, посылки которой - копия списка посылок задачи x15 после ее решения. Цели задачи x20 - "квантимплик", "фокус x19".

Целью "квантимплик" означает, что нужно исключить кванторы с помощью комментариев (квантимплик ...) и ввода сколемовских функций. Комментарии (квантимплик $A_1 A_2$) вводятся приемами, заменяющими кванторную импликацию в посылках на ее группу antecedентов и консеквент. A_1 - одна из переменных связывающей приставки импликации, A_2 - конъюнкция содержащих эту переменную antecedентов. Такой комментарий означает, что все выведенные в задаче утверждения, содержащие переменную A_1 , будут истинными, как только истинны утверждения A_2 (и, разумеется, аналогичные утверждения для прочих указанных комментариями "квантимплик" переменных рассматриваемого утверждения).

Проследим действия решателя при решении задачи x20. Прежде всего, исключается квантор существования: вводится новая переменная g , и указанная выше сложная посылка с кванторами заменяется на две новых:

$$\forall_d(0 < d \ \& \text{число} \rightarrow \exists_e(\forall_x(x \in \text{Окрестность}(a, e, b) \ \& \ x - \text{число} \rightarrow |g - (f(x) - f(a))/(x - a)| < d) \ \& \ 0 < e \ \& \ e - \text{число}))$$

$g - \text{число}$)

Кванторная импликация заменяется на свои antecedенты и консеквент, с переобозначением своей связанной переменной d на новую переменную c :

$$\exists_e(\forall_x(x \in \text{Окрестность}(a, e, b) \ \& \ x - \text{число} \rightarrow |g - (f(x) - f(a))/(x - a)| < c) \ \& \ 0 < e \ \& \ e - \text{число})$$

$0 < c$

$c - \text{число}$

Предварительно проверяется, что каждый antecedент содержит не более одной переменной связывающей приставки. Для каждой такой переменной проверяется, что существование ее значения, для которого истинна конъюнкция содержащих ее antecedентов, вытекает из прочих посылок. Создаются соответствующие комментарии (квантимплик ...). В нашем примере - (квантимплик c $0 < c \ \& \ c - \text{число}$).

Далее квантор существования устраняется с помощью ввода сколемовских функций:

$$\forall_x(x \in \text{Окрестность}(a, d(c), b) \ \& \ x - \text{число} \rightarrow |g - (f(x) - f(a))/(x - a)| < c)$$

$0 < d(c)$

$d(c) - \text{число}$)

Последняя кванторная импликация снова заменяется на свои antecedенты и консеквент:

$$|g - (f(x) - f(a))/(x - a)| < c$$

$e \in \text{Окрестн}(a, d(c), b)$

e — число

Здесь создается комментарий (квантимплик $e \in \text{Окрестн}(a, d(c), b)$ & e — число).

Далее срабатывает прием развязки переменных, учитывающий комментарий (квантимплик $e \dots$). Его теорема имеет вид:

$$\forall_{abcdx}(0 < b \rightarrow x \in \text{Окрестн}(a, b, c) \leftrightarrow x \in \text{Окрестн}(a, d, c) \& 0 < d \& d - \text{число} \& d \leq b)$$

Замена выполняется слева направо. Прием вводит новую переменную d и создает для нее комментарий (квантимплик $0 < d \& d$ — число & $d \leq b$). В нашем примере посылка $e \in \text{Окрестн}(a, d(c), b)$ заменяется на

$$0 < h$$

$$e \in \text{Окрестн}(a, h, b)$$

h — число

$$h \leq d(c)$$

Создается комментарий (квантимплик $0 < h \& h$ — число & $h \leq d(c)$).

В неравенстве с модулем исключается дробь:

$$0 < ch - |g \cdot (e - a) - f(e) + f(a)|$$

Выводится следствие:

$$0 < -|f(a) - f(e)| + |g \cdot (e - a)| + ch$$

Модуль разности заменяется на размер окрестности:

$$0 < -|f(e) - f(a)| + h|g| + ch$$

Далее применяется специальный прием, усматривающий предел при помощи комментария "квантимплик". Его теорема имеет вид:

$$\forall_{Aabcepqfx}(\exists_y(p \leq e \& A) \& x - \text{число} \& x \in \text{Окрестность}(a, b, c) \& 0 < p - |f(x) + q| \rightarrow \lim_{x \rightarrow a \setminus c} f(x) = -q)$$

Здесь A — утверждение, извлекаемое из комментария (квантимплик $y A$); y — свободная переменная терма p . Этот терм и терм q не содержат x . Истинность первого antecedента усматривается задачей на доказательство, которой передаются дополнительные посылки " e — число", " $0 < e$ "; e — новая переменная. Переменная x не встречается в прочих посылках задачи.

В нашем примере переменная y — это h . Имеем: " $\lim_{e \rightarrow a \setminus b} f(e) = f(a)$ ". Отсюда выводится условие "непрерывно(f, a)".

По окончании решения задачи x20 в ее списке посылок находится элементарное утверждение x22, не встречающееся среди посылок задачи x15, содержащее переменные списка x19 и не содержащее переменных, не встречающихся в утверждениях x13. В нашем примере x22 - "непрерывно(f, a)". Создается импликация, антецеденты которой получены добавлением к списку x13 утверждения x9, а консеквент - утверждение x22. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Приведенный прием вывода теорем показывает, что по мере усложнения теорем, происхождение которых нужно объяснить, все большую роль будут играть не сами приемы вывода теорем, а ориентированные на вывод теорем приемы решателя.

4. Использование следствий обеих частей определения элементарного утверждения и однозначной определенности вспомогательного параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(\neg(D = E) \ \& \ F \in \text{прямая}(AC) \ \& \ F \in \text{окружность}(DE) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \text{окружность}(DE) \ \text{вписана в фигура}(ABC) \rightarrow F \in \text{отрезок}(AC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \Delta(ABC) \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(D = E) \rightarrow \text{окружность}(DE) \ \text{вписана в фигура}(ABC) \leftrightarrow \text{отрезок}(AB) - \text{касательная к окружность}(DE) \ \& \ \text{отрезок}(BC) - \text{касательная к окружность}(DE) \ \& \ \text{отрезок}(AC) - \text{касательная к окружность}(DE))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{отрезок}(AB) - \text{касательная к окружность}(DE) \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ C \in \text{окружность}(DE) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ F \in \text{окружность}(DE) \ \& \ F \in \text{прямая}(AB) \rightarrow C = F)$$

Исходная теорема определяет терм "окружность(DE) вписана в фигура(ABC)".

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x9 присваивается определяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x12 присваивается определяющая часть. Проверяется, что ее заголовок - не квантор существования. Переменной x13 присваивается список антецедентов, переменной x14 - результат добавления к x13 утверждения x9 и списка конъюнктивных членов утверждения x12.

Решается задача на исследование x15 со списком посылок x14. Цели задачи - "известно", "неизвестные X", "теорема". Здесь X - список параметров посылок.

Дальше начинаются отличия. Переменной x18 присваивается список параметров посылок задачи x15, не являющихся параметрами списка x14, т.е. появившихся в процессе решения. В нашем примере - переменные F, G, H для точек

касания, соответственно, прямых AC , BC , AB . Выбирается переменная x_{19} списка x_{18} . В нашем примере - переменная F . В списке посылок задачи x_{15} находится утверждение вида $P(19)$. В нашем примере - утверждение " F – точка". Справочник поиска теорем "равно" определяет по символу P указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{22} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере имеем:

$$\begin{aligned} & \forall_{abcdef} (a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \neg(d = e) \ \& \\ & \neg(a = b) \ \& \ \text{отрезок}(ab) - \text{касательная к окружность}(de) \ \& \ c - \text{точка} \ \& \\ & c \in \text{окружность}(de) \ \& \ c \in \text{прямая}(ab) \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ f \in \text{окружность}(de) \ \& \\ & f \in \text{прямая}(ab) \rightarrow c = f) \end{aligned}$$

Переменной x_{25} присваивается вхождение консеквента теоремы x_{22} . Согласно типу дополнительной теоремы, этот консеквент - равенство двух переменных. Переменной x_{26} присваивается левая переменная. В нашем примере - c . Переменной x_{27} присваивается список antecedентов теоремы x_{22} . Переменной x_{28} присваивается правая переменная консеквента. В нашем примере - f . Переменной x_{29} присваивается список всех утверждений из x_{27} , не содержащих переменной x_{28} . Переменной x_{30} присваивается список результатов подстановки переменной x_{19} вместо x_{26} в утверждения x_{29} . Переменной x_{31} присваивается список отличных от x_{19} параметров утверждений x_{30} . В нашем примере - a, b, d, e . Проверяется, что список x_{31} непуст. Процедура "Подборзначений" находит подстановку S вместо переменных x_{31} , реализующую утверждения x_{30} посылками задачи x_{15} . В нашем примере подставляются, соответственно, переменные A, C, D, E . Переменной x_{33} присваивается список использованных для реализации посылок, переменной x_{34} - его подсписок, образованный утверждениями, содержащими переменную x_{19} .

Переменной x_{35} присваивается список antecedентов исходной теоремы. В посылках задачи x_{15} выбирается утверждение x_{36} , содержащее переменную x_{19} и не входящее в список x_{34} . В нашем примере - утверждение " $F \in \text{отрезок}(AC)$ ". Проверяется, что его параметры содержатся в параметрах утверждений x_{35} и x_{33} . Переменной x_{37} присваивается объединение списков x_{35} и x_{34} . Проверяется, что вспомогательная задача на доказательство не усматривает истинность x_{36} из посылок x_{37} . Затем создается импликация, antecedенты которой суть утверждения x_{37} и утверждение x_9 , а консеквент - x_{36} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Попытка исключения дублирования в определяющей части с использованием ее элементарного следствия.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{Af} (A - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(A) \rightarrow \text{перестановка}(f, A) \leftrightarrow \exists_a (\text{Dom}(f) = \{1, \dots, a\} \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ 0 \leq a) \ \& \ A = \text{Val}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f))$$

из теоремы

$$\forall_{Af} (A - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(A) \rightarrow \text{перестановка}(f, A) \leftrightarrow f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = \{1, \dots, \text{card}(A)\} \ \& \ \text{Val}(f) = A)$$

Эта теорема определяет терм "перестановка(f, A)".

Начало программы приема совпадает с началом программы одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_9 присваивается определяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x_{12} присваивается определяющая часть. Проверяется, что ее заголовок - не квантор существования. Переменной x_{13} присваивается список antecedентов, переменной x_{14} - результат добавления к x_{13} утверждения x_9 и списка конъюнктивных членов утверждения x_{12} .

Решается задача на исследование x_{15} со списком посылок x_{14} . Цели задачи - "известно", "неизвестные X ", "теорема". Здесь X - список параметров посылок.

После решения задачи x_{15} просматриваются ее элементарные посылки x_{18} , не имеющие заголовка "актив" либо "пассив" и отличные от реализации "старых" теорем. Проверяется, что параметры утверждения x_{18} включаются в параметры списка x_{14} . В нашем примере x_{18} - утверждение "взаимнооднозначно(f)".

Дальше начинаются отличия. Переменной x_{20} присваивается список параметров утверждения x_{12} . В нашем примере - A, f . Проверяется, что связанных переменных утверждение x_{12} не имеет. Переменной x_{21} присваивается элемент списка x_{20} , имеющий более одного вхождения в терм x_{12} . В нашем примере - A . Переменной x_{22} присваивается числовой атом терма x_{12} , имеющий единственную переменную x_{21} . В нашем примере - "card(A)". Выбирается переменная x_{23} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - a . Переменной x_{25} присваивается результат замены всех вхождений терма x_{22} в x_{12} на переменную x_{23} . В нашем примере имеем:

f - функция & $\text{Dom}(f) = \{1, \dots, a\}$ & $\text{Val}(f) = A$

Переменной x_{26} присваивается объединение списка x_{13} со списком конъюнктивных членов утверждения x_{25} и с утверждением x_{18} . Переменной x_{27} присваивается равенство термов x_{22} и x_{23} . В нашем примере x_{26} состоит из утверждений " $A - \text{set}$ ", "конечное(A)", " (f) ", " f - функция", " $\text{Dom}(f) = \{1, \dots, a\}$ ", " $\text{Val}(f) = A$ ". Утверждение x_{27} имеет вид "card(A) = a ".

Переменной x_{28} присваивается результат добавления утверждения x_{27} к списку x_{26} . Решается задача на исследование с посылками x_{28} и целями (неизвестные X), (исключ x_{21}). Здесь X - параметры посылок задачи. Затем к x_{26} добавляются: во-первых, посылки вида $P(x_{23})$; во-вторых, утверждения, необходимые для сопровождения по о.д.з. термов списка x_{26} . В нашем примере добавляются: " $0 \leq a$ ", " a - целое", " $A - \text{set}$ ".

Далее - откат, после которого все переменные начиная с x_{28} оказываются не определены. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x_{27} - следствие утверждений x_{26} . Далее переменной x_{29} присваивается результат удаления из списка x_{26} утверждений x_{13} , переменной x_{30} - подсписок утверждений x_{29} , содержащих переменную x_{23} . Переменной x_{31} присваивается конъюнкция остатка утверждений x_{29} и утверждения "существует(x_{23} и(x_{30}))". Создается импликация с antecedентами x_{13} , консеквентом которой служит экви-

валентность утверждений x_9 и x_{31} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

6. Вывод не содержащих описателей следствий из консеквента, содержащего описатель "класс".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(\neg(a = \emptyset) \ \& \ a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \rightarrow \text{нижнягрань}(\text{inf}(a), a))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ \neg(a = \emptyset) \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{наибольший}(\text{inf}(a), \text{set}_b(\text{нижнягрань}(b, a))))$$

Эта теорема определяет терм "inf(a)".

Проверяется, что консеквент отличен от равенства и эквивалентности. Переменной x_9 присваивается консеквент. Проверяется, что он содержит описатель "класс" и не содержит кванторов. Переменной x_{10} присваивается результат добавления к списку антецедентов исходной теоремы утверждения x_9 . Решается задача на исследование с посылками x_{10} и единственной целью "теорема". После этого в ее посылках находится элементарное утверждение либо простая импликация x_{14} , имеющая вхождение определяемого термина. В нашем примере x_{14} имеет вид "нижнягрань(inf(a), a)". Напомним, что простая импликация имеет элементарные антецеденты и консеквент.

Создается импликация, антецеденты которой те же, что у исходной теоремы, а консеквент - x_{14} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

7. Попытка вывода следствий из условия принадлежности определяемому множеству.

В качестве приема рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABa}(\neg(A = B) \ \& \ a \in \text{окружность}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow l(aA) = l(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{окружность}(AB) = \text{set}_C(C - \text{точка} \ \& \ l(AC) = l(AB)))$$

Эта теорема определяет терм "окружность(AB)".

Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x_9 присваивается вхождение определяемой части R , переменной x_{10} - вхождение определяющей части Q . Переменной x_{11} присваивается список типов значения подтерма x_{10} . Проверяется, что в этом списке встречается символ "множество". Выбирается переменная x_{12} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{13} присваивается список антецедентов теоремы. Переменной

x14 присваивается утверждение "принадлежит(x12 Q)". В нашем примере - " $a \in \text{set}_C(C - \text{точка} \ \& \ l(AC) = l(AB))$ ". Переменной x15 присваивается результат добавления утверждения x14 к списку x13. Решается задача на исследование с посылками x15 и целью "неизвестные x12". После решения в ее списке посылок находится отличное от x14 элементарное утверждение x18, содержащее переменную x12 и не имеющее заголовка "актив". Проверяется, что параметры утверждения x18 включаются в параметры антецедентов x13, пополненные переменной x12. В нашем примере x18 имеет вид " $l(aA) = l(AB)$ ". Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x13 и утверждение "принадлежит(x12 R)", а консеквентом - утверждение x18. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

8. Попытка вывода следствий из условия принадлежности множеству определяемого типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cE}(c \in E \ \& \ \text{эллипс}(E) \rightarrow c - \text{точка})$$

из теоремы

$$\forall_E(\text{эллипс}(E) \leftrightarrow E - \text{set} \ \& \ \exists_{ABCKab}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \ \& \ E \subseteq \text{плоскость}(ABC) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 \leq a - b \ \& \ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$$

Эта теорема определяет утверждение "эллипс(E)".

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x9 присваивается определяемый терм, переменной x12 - определяющий. Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x12. Среди них находится утверждение x14 с заголовком "существует". Переменной x15 присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что определяемый терм имеет вид " $P(X)$ ", где X - переменная. В нашем примере - переменная E . Переменной x17 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x18 - набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. Проверяется, что в одном из списков x13, x17 содержится утверждение "множество(X)". Выбирается переменная x19, не входящая в теорему. В нашем примере - переменная c . Переменной x20 присваивается объединение списков x17, x18, к которому добавляется утверждение "принадлежит(x19 X)". Решается задача на исследование с посылками x20. Цели задачи - "известно", "неизвестные Z", где Z - параметры ее посылок. По окончании решения в посылках находится неконстантное утверждение x23, не имеющее своим заголовком символы "актив" и "пассив", причем параметрами его могут служить только переменные X и x19. В нашем примере x23 имеет вид " c - точка". Создается импликация, посылки которой суть утверждения x17, а также x9 и "принадлежит(x19 X)". Консеквентом является утверждение x23. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

9. Попытка усмотрения пары необходимых условий, дающих эквивалентное определение.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(CD) \ \& \ l(AD) = l(BC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{четырёхугольник}(ABCD) \rightarrow \text{параллелограмм}(ABCD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{параллелограмм}(ABCD) \leftrightarrow \text{четырёхугольник}(ABCD) \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD))$$

Эта теорема определяет терм "параллелограмм($ABCD$)".

Начало программы приема совпадает с программой одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной $x9$ присваивается определяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной $x12$ присваивается определяющая часть. Проверяется, что ее заголовок - не квантор существования. Переменной $x13$ присваивается список антецедентов, переменной $x14$ - результат добавления к $x13$ утверждения $x9$ и списка конъюнктивных членов утверждения $x12$.

Решается задача на исследование $x15$ со списком посылок $x14$. Цели задачи - "известно", "неизвестные X ", "теорема". Здесь X - список параметров посылок.

Дальше начинаются отличия. Переменной $x18$ присваивается набор конъюнктивных членов утверждения $x12$. Проверяется, что все они элементарны. Переменной $x19$ присваивается список всех утверждений набора $x18$, содержащих более чем двуместный предикатный символ. В нашем примере $x19$ состоит из единственного утверждения "четырёхугольник($ABCD$)". Проверяется, что $x19$ короче списка $x18$. Переменной $x20$ присваивается результат добавления к антецедентам теоремы утверждений $x19$. Составляется список $x21$ элементарных посылок задачи $x15$, не входящих в список $x20$, отличных от определяемого утверждения, не имеющих заголовком символ "актив" либо "пассив". Для каждого такого утверждения проверяется, что оно не является реализацией "старой" теоремы и не выводится из списка $x20$. Первое делается с помощью комментариев "теорвывод", второе - с помощью проверочных операторов. В нашем примере $x21$ оказалось достаточно большим: " $2l(AB)^2 + 2l(AD)^2 - l(AC)^2 - l(BD)^2 = 0$ ", " $l(AB) = l(CD)$ ", " $l(AD) = l(BC)$ ", " $-\angle(BAD) + \pi = \angle(ADC)$ ", " $\angle(BAD) = \angle(BCD)$ ", " $-\angle(BAD) + \pi = \angle(ABC)$ ", " $\text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD)$ ", " $\text{прямая}(AD) \parallel \text{прямая}(BC)$ ", " $\angle(ABC) = \angle(ADC)$ ".

Просматриваются пары равенств списка $x21$, у которых правые части совпадают. Составляется равенство левых частей двух таких равенств. Все такие не входящие в $x21$ новые равенства отбираются в список $x23$. В нашем примере $x23$ оказывается состоящим из единственного равенства " $\angle(ABC) = \angle(ADC)$ ". Проверяется, что число элементов в списке $x23$ меньше 5. Список $x21$ пополняется этими элементами, после чего все утверждения списка $x21$ обрабатываются оператором "станд". Переменной $x24$ присваивается список результатов обработки оператором "станд" утверждений списка $x18$, не вошедших в список $x19$.

В нашем примере x24 состоит из утверждений "прямая(AB) \parallel прямая(CD)", "прямая(AD) \parallel прямая(BC)".

Переменной x23 переписывается одноэлементный набор, образованный списком x24. Набор x23 будет служить накопителем обработанных подслучаев. Проверяется, что длина списка x21 меньше 10. Просматриваются пары x25, x27 вхождений в список x21. Составляются список x26 заголовков невырожденных числовых атомов утверждения x25 и список x28 таких заголовков для утверждения x27. Проверяется, что x28 - подсписок списка x26. В нашем примере по вхождению x25 расположено равенство " $l(AB) = l(CD)$ ", по вхождению x27 - равенство " $l(AD) = l(BC)$ ". Составляется пара x29 утверждений, расположенных по вхождениям x25 и x27. Проверяется, что такая пара не является надмножеством элемента списка x23. Переменной x30 присваивается объединение списков x20 и x29. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что конъюнкция утверждений x24 - следствие утверждений x30. Затем создается импликация с антецедентами x20 и консеквентом x29. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

10. Попытка усиления конъюнктивного члена определяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \neg(E = F) \ \& \ \text{окружность}(EF) \ \text{описана около фигура}(ABCD) \ \& \ \text{квадрат}(ABCD) \rightarrow \angle(CDE) = \pi/4)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \neg(E = F) \rightarrow \text{окружность}(EF) \ \text{описана около фигура}(ABCD) \leftrightarrow \text{четырёхугольник}(ABCD) \ \& \ A \in \text{окружность}(EF) \ \& \ B \in \text{окружность}(EF) \ \& \ C \in \text{окружность}(EF) \ \& \ D \in \text{окружность}(EF))$$

Эта теорема определяет терм "окружность(EF) описана около фигура($ABCD$)".

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x12 присваивается набор конъюнктивных членов определяющей части, переменной x13 - набор антецедентов. Проверяется, что набор x12 не менее чем двухэлементный. В нем выбирается утверждение x14, и переменной x15 присваивается заголовок данного утверждения. В нашем примере x14 - "четырёхугольник($ABCD$)". Справочник "усиление" перечисляет символы x16, усиливающие предикат x15. В нашем примере x16 - "квадрат". Проверяется, что заголовок термина x8 не является усилением отношения x15. Переменной x17 присваивается утверждение, получаемое из x14 заменой заголовка на x16. В нашем примере - "квадрат($ABCD$)". Переменной x18 присваивается результат добавления к списку x13 списка x12, в котором вместо x14 присутствует x17. Решается задача на исследование x19 с посылками x18 и целями "известно", "неизвестные X ", "теорема". Здесь X - параметры утверждений x18.

В списке посылок задачи x19 находится элементарное утверждение x20, не входящее в списки x13, x12, не равное x17 и не имеющее заголовка "актив". В нашем примере x20 - " $\angle(CDE) = \pi/4$ ". При помощи задач на доказательство проверяется, что x20 не является следствием объединения списков утверждений x12, x13, а также следствием списка x13, к которому добавлено утверждение x17. Затем создается импликация с антецедентами x13, x8 и x17, консеквентом которой служит x20. Она регистрируется в списке вывода.

11. Повторное применение операции к атомарному выражению.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABab}(\neg(A = B) \ \& \ 0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ b \leq 0 \rightarrow b(\text{авектор}(AB)) = (ab)\text{вектор}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCa}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ 0 \leq a \ \& \ l(AC) = al(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \rightarrow \text{авектор}(AB) = \text{вектор}(AC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCa}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ a \leq 0 \ \& \ l(AC) = -al(AB) \ \& \ A \in \text{отрезок}(BC) \rightarrow \text{авектор}(AB) = \text{вектор}(AC))$$

Обе эти теоремы определяют терм "авектор(AB)".

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что консеквент теоремы - равенство. Находится характеристика "Атомарное(s)" исходной теоремы. В нашем примере s - "Вектор". Переменной x14 присваивается список антецедентов, переменной x15 - определяющее выражение. Проверяется, что x15 - атомарное выражение типа s. Проверяется, что число корневых операндов определяемого терма равно 2, причем один из них (он присваивается переменной x20) имеет тот же заголовок, что и x15, а другой представляет собой переменную x19. В нашем примере x19 - "a", x20 - "(AB)". Проверяется, что переменная x19 не входит в терм x20.

В списке вывода находится определение терма x23, длина которого равна длине терма x8 (допускается его совпадение с исходной теоремой). В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Проверяется, что терм x23 получается из x8 переобозначением переменных без их отождествления. В нашем примере x23 совпадает с x8. Переменной x25 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную. В нашем примере имеем:

$$\forall_{bcde}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ e \in \text{прямая}(cd) \ \& \ b \leq 0 \ \& \ l(ce) = -bl(cd) \ \& \ c \in \text{отрезок}(de) \rightarrow b\text{вектор}(cd) = \text{вектор}(ce))$$

Переменной x_{26} присваивается результат такого же переобозначения в терме x_{23} . В нашем примере - " b вектор(cd)". Переменной x_{28} присваивается вхождение терма x_{26} в консеквент теоремы x_{25} , переменной x_{29} - вхождение противоположной части консеквента. Проверяется, что число корневых операндов вхождения x_{28} равно 2, причем один из них - переменная x_{32} , другой - выражение x_{33} с тем же заголовком, что x_{15} . В нашем примере x_{32} - b , x_{33} - "вектор(cd)". Проверяется, что x_{32} не входит в x_{33} . Переменной x_{34} присваивается список параметров терма x_{33} . Проверяется, что он непуст. Определяется подстановка S вместо переменных x_{34} , переводящая терм x_{33} в терм x_{15} . Переменной x_{36} присваивается список антецедентов теоремы x_{25} , переменной x_{37} - объединение списка x_{14} со списком результатов применения подстановки S к утверждениям x_{36} . Переменной x_{38} присваивается результат замены вхождения терма x_{33} в подтерм x_{28} на x_8 . В нашем примере - " b (авектор(AB))". Переменной x_{39} присваивается результат применения подстановки S к подтерму x_{29} . В нашем примере - "Вектор(Ae)". Переменной x_{40} присваивается равенство выражений x_{38} и x_{39} .

Рассматривается список x_{41} параметров утверждений x_{37} , не являющихся параметрами терма x_{40} . Если он непуст, то переменной x_{42} присваивается список утверждений набора x_{37} , содержащих параметры x_{41} . В нашем примере список x_{41} состоит из переменной C . Переменной x_{43} присваивается остаток списка x_{37} . Решается задача на описание с посылками x_{43} и условиями x_{42} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{41} ", "параметры x_{41} ", "исключ".

В нашем примере x_{42} состоит из утверждений " C - точка", " $e \in$ прямая(AB)", " $l(AC) = al(AB)$ ", "точкалуча(A, B, C)", " $\neg(A = C)$ ", " $e \in$ прямая(AC)", " $l(Ae) = -bl(AC)$ ", " $A \in$ отрезок(Ce)", x_{43} - из утверждений " a - число", " A - точка", " B - точка", " $\neg(A = B)$ ", " $0 \leq a$ ", " b - число", " e - точка", " $b \leq 0$ ".

Если ответ задачи отличен от символа "отказ" и не содержит переменных x_{41} , то список его конъюнктивных членов добавляется к списку x_{37} . Иначе - переход к рассмотрению другой версии дополнительной теоремы. В нашем примере ответ имеет вид " $\neg(a = 0) \& e \in$ прямая(AB) $\&$ $-abl(AB) = l(eA) \& A \in$ отрезок(eB)".

После указанных действий со списком x_{41} все переменные начиная с x_{41} снова оказываются не определены. Выбирается новая переменная x_{41} . В нашем примере - переменная c . Переменной x_{42} присваивается результат добавления к списку x_{37} равенства переменной x_{41} выражению x_{39} . В нашем примере - равенства " $c =$ вектор(Ae)". В итоге список x_{42} содержит следующие утверждения: " a - число", " A - точка", " B - точка", " $\neg(A = B)$ ", " $0 \leq a$ ", " b - число", " e - точка", " $b \leq 0$ ", " $\neg(a = 0)$ ", " $e \in$ прямая(AB)", " $-abl(AB) = l(eA)$ ", " $A \in$ отрезок(eB)", " $c =$ вектор(Ae)".

Переменной x_{43} присваивается список параметров выражения x_{39} , не входящих в параметры терма x_{38} . В нашем примере он состоит из переменной e . Проверяется, что список x_{43} непуст. Решается задача на исследование x_{44} с посылками x_{42} . Цели задачи - "исключ x_{43} ", "известно", "нормтеорема", "неизвестные X ",

где X - параметры посылок задачи. Задача сопровождается комментарием (см-теор...), обеспечивающим возможность использовать при ее решении теоремы, уже имеющиеся в списке вывода. По окончании решения задачи $x44$ в ее списке посылок выбирается равенство $x46$, одним из операндов которого служит переменная $x41$. В нашем примере - равенство " (ab) вектор(AB) = c ". Переменной $x49$ присваивается противоположный операнд данного равенства. Проверяется, что он не содержит переменных списка $x43$. Переменной $x50$ присваивается равенство выражений $x38$ и $x49$. В нашем примере - " b (авектор(AB)) = (ab) вектор(AB)".

Переменной $x51$ присваивается список параметров утверждений $x37$, не входящих в терм $x50$. В нашем примере он состоит из единственной переменной e . Если список $x51$ непуст, то переменной $x52$ присваивается список утверждений набора $x37$, содержащих параметры $x51$. Переменной $x53$ присваивается остаток списка $x37$. Решается задача на описание с посылками $x54$ и условиями $x52$. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные $x51$ ", "параметры $x51$ ", "исключ".

В нашем примере $x52$ состоит из утверждений " e - точка", " $e \in$ прямая(AB)", " $-abl(AB) = l(eA)$ ", " $A \in$ отрезок(eB)". Список $x53$ состоит из утверждений " a - число", " A - точка", " B - точка", " $\neg(A = B)$ ", " $0 \leq a$ ", " b - число", " $b \leq 0$ ", " $\neg(a = 0)$ ".

Если ответ задачи отличен от символа "отказ" и не содержит переменных $x51$, то список его конъюнктивных членов добавляется к списку $x37$. Иначе - переход к рассмотрению другой версии дополнительной теоремы. В нашем примере ответом служит константа "истина".

После указанных действий со списком $x51$ все переменные начиная с $x51$ снова оказываются не определены. Создается импликация с антецедентами $x37$ и консеквентом $x50$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

12. Попытка рассмотреть одноместную характеристику определяемого объекта.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABa}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ 0 \leq a \rightarrow \\ \text{длина}(a \cdot \text{вектор}(AB)) = a \cdot \text{длина}(\text{вектор}(AB)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCa}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \\ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ 0 \leq a \ \& \ l(AC) = al(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \rightarrow \\ a \cdot \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(AC))$$

Эта теорема определяет терм " $a \cdot$ вектор(AB)".

Переменной $x8$ присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - равенство. Находится характеристика "Атомарное(s)" исходной теоремы. В нашем примере s - "Вектор". Переменной $x14$ присваивается список антецедентов,

переменной x_{15} - определяющее выражение. Проверяется, что x_{15} - атомарное выражение типа s .

Вводится пустой накопитель новых переменных x_{18} , пустой накопитель x_{19} термов - одноместных характеристик от атомарных выражений типа s и накопитель x_{20} , в который первоначально заносятся утверждения списка x_{14} . Далее просматриваются атомарные подвыражения x_{21} консеквента, имеющие тип s . В нашем примере таких подвыражений два - "вектор(AB)" и "вектор(AC)". Переменной x_{22} присваивается заголовок терма x_{21} . В нашем примере - "вектор". Справочник поиска теорем "характ" определяет по x_{22} некоторые теоремы x_{23} , определяющие различные одноместные характеристики атомарных выражений с заголовком x_{22} . В нашем примере таким образом возникает теорема:

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(AB)) = l(AB))$$

Переменной x_{26} присваивается вхождение в консеквент теоремы x_{23} одноместной характеристики H выражения с заголовком x_{22} . Выбирается переменная x_{28} , не встречающаяся в исходной теореме и в списке x_{18} . Она регистрируется в списке x_{18} . В списке x_{19} регистрируется терм " $H(x_{21})$ ", в списке x_{20} - равенство переменной x_{28} этому терму.

По завершении просмотра атомарных подвыражений x_{21} все переменные начиная с x_{21} снова оказываются не определены. При этом, в нашем примере, список x_{18} состоит из переменных b, c ; список x_{19} - из термов "длина(вектор(AB))", "длина(вектор(AC))"; список x_{20} - из утверждений " a - число", " A - точка", " B - точка", " C - точка", " $\neg(A = B)$ ", " $C \in \text{прямая}(AB)$ ", " $0 \leq a$ ", " $l(AC) = al(AB)$ ", "точкалуча(A, B, C)", " $b = \text{длина}(\text{вектор}(AB))$ ", " $c = \text{длина}(\text{вектор}(AC))$ ".

Решается задача на исследование, имеющая посылки x_{20} и цели "неизвестные X ", "известно", "теорема", где X - список параметров посылок. По окончании решения в списке посылок этой задачи выбирается утверждение x_{23} , не имеющее параметров термов списка x_{19} , но имеющее параметры списка x_{18} . В нашем примере - $c = ab$. Переменной x_{24} присваивается результат подстановки в утверждение x_{23} выражений x_{19} вместо переменных x_{18} . В нашем примере этот результат имеет вид "длина(вектор(AC)) = адлина(вектор(AB))". Переменной x_{26} присваивается результат замены всех вхождений терма x_{15} в терм x_{24} на терм x_8 . В нашем примере - "длина($a \cdot \text{вектор}(AB)$) = адлина(вектор(AB))". Переменной x_{27} присваивается список параметров терма x_{15} , не входящих в x_8 . В нашем примере - единственный параметр C . Переменной x_{28} присваивается список всех утверждений набора x_{14} , не содержащих переменных x_{27} . Затем создается импликация с антецедентами x_{28} и консеквентом x_{26} . Она регистрируется в списке вывода.

13. Попытка изменения знака параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{AB}(\neg(A = B) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ b \leq 0 \rightarrow (-b)\text{вектор}(AB) = -(b\text{вектор}(AB)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCa}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \\ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ 0 \leq a \ \& \ l(AC) = al(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \rightarrow \\ a \cdot \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(AC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow -ab = (-a)b)$$

Исходная теорема определяет терм " $a \cdot \text{вектор}(AB)$ ".

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - равенство. Переменной x14 присваивается некоторый существенный антецедент теоремы. В нашем примере - " $l(AC) = al(AB)$ ". Внутри x14 рассматривается вхождение x15 подтерма, имеющего ровно два корневых операнда. В нашем примере - подтерма " $al(AB)$ ". Переменной x16 присваивается заголовок этого подтерма. Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по x16 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что он имеет характеристику с заголовком "заменазнака". Оператор "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождения x15 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{ABCb}((-b) - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \\ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ 0 \leq -b \ \& \ l(AC) = -bl(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \ \& \\ b - \text{число} \ \& \ l(AB) - \text{число} \rightarrow (-b) \cdot \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(AC))$$

Переменной x22 присваивается вхождение консеквента теоремы x21. Переменной x23 присваивается вхождение той части этого консеквента, которая расположена так же, как заменяющая часть исходной теоремы. В нашем примере - вхождение терма " $\text{вектор}(AC)$ ". Выбирается переменная x24, не входящая в теорему x21. В нашем примере - переменная a . Переменной x25 присваивается результат добавления к антецедентам теоремы x21 равенства переменной x24 подтерму x23. Переменной x27 присваивается отличная от x23 часть консеквента x22. В нашем примере - " $(-b) \cdot \text{вектор}(AB)$ ".

Переменной x28 присваивается список параметров подтерма x23, не являющихся параметрами терма x27. В нашем примере это единственная переменная C . Проверяется, что список x28 не пуст, и решается задача на исследование x29 с посылками x25. Ее цели - "исключ x28", "известно", "нормтеорема", "неизвестные X", где X - параметры ее посылок. Комментарий "смтеор" активирует использование при решении задачи x29 уже имеющихся в списке вывода теорем. Дополнительно задаче передается комментарий (неизв x24) к ее посылкам.

После решения задачи x29 в ее списке посылок находится равенство x31 переменной x24 терму x34, не содержащему переменных списка x28. В нашем примере x31 имеет вид " $-(b \cdot \text{вектор}(AB)) = a$ ". Переменной x35 присваивается равенство термов x27 и x34. Переменной x36 присваивается набор антецедентов теоремы x21, переменной x37 - подсписок списка x36, образованный всеми утверждениями, содержащими переменные списка x28, переменной x38 - остаток списка x36. Переменной x39 присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x28 на конъюнкцию утверждений x37. В нашем примере - " $\exists_C(C - \text{точка} \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ l(AC) =$

$-bl(AB) \& \text{точкалуча}(A, B, C)$ ". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что $x39$ - следствие утверждений $x38$. Затем создается импликация с антецедентами $x38$ и консеквентом $x35$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

14. Анализ равенства двух значений определяемой двуместной операции при варьировании единственного корневого параметра - случай идентичных теорем.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABab}(\neg(A = B) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& 0 \leq a \& 0 \leq b \rightarrow a \cdot \text{вектор}(AB) = b \cdot \text{вектор}(AB) \leftrightarrow a = b)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCa}(a - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \neg(A = B) \& C \in \text{прямая}(AB) \& 0 \leq a \& l(AC) = al(AB) \& \text{точкалуча}(A, B, C) \rightarrow a \cdot \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(AC))$$

Эта теорема определяет терм " $a \cdot \text{вектор}(AB)$ ".

Переменной $x8$ присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - равенство. Переменной $x12$ присваивается набор антецедентов. Проверяется, что терм $x8$ неповторный и имеет ровно два корневых операнда, а определяющий терм элементарен. Одним из операндов терма $x8$ служит переменная $x14$. Переменной $x15$ присваивается результат переобозначения переменных исходной теоремы на новые переменные. В нашем примере имеем:

$$\forall_{bcde}(b - \text{число} \& c - \text{точка} \& d - \text{точка} \& e - \text{точка} \& \neg(c = d) \& e \in \text{прямая}(cd) \& 0 \leq b \& l(ce) = bl(cd) \& \text{точкалуча}(c, d, e) \rightarrow b \cdot \text{вектор}(cd) = \text{вектор}(ce))$$

Переменной $x17$ присваивается вхождение корневого операнда терма $x8$, отличного от $x14$, переменной $x18$ - соответствующее вхождение в теореме $x15$. Переменной $x19$ присваивается подтерм по вхождению $x18$, переменной $x20$ - подтерм по вхождению $x17$. В нашем примере $x19$ имеет вид " $\text{вектор}(cd)$ ", $x20$ - вид " $\text{вектор}(AB)$ ". Переменной $x21$ присваивается список параметров терма $x19$. Определяется подстановка S вместо переменных $x21$, переводящая терм $x19$ в терм $x20$. Переменной $x23$ присваивается список антецедентов теоремы $x15$. Переменной $x24$ присваивается набор результатов применения S к утверждениям $x23$, переменной $x25$ - объединение наборов $x12$ и $x24$. Переменной $x26$ присваивается вхождение в теорему $x15$, соответствующее вхождению переменной $x14$ в определяемый терм исходной теоремы, переменной $x27$ - символ по этому вхождению. В нашем примере - символ b . Переменной $x28$ присваивается вхождение в теорему $x15$, соответствующее вхождению определяемого терма в исходную теорему. Переменной $x29$ присваивается результат применения подстановки S к подтерму $x28$. В нашем примере - " $\text{вектор}(Ae)$ ". Переменной $x30$ присваивается результат добавления к списку $x25$ равенства определяющего терма исходной теоремы и терма $x29$. В нашем примере - равенства " $\text{вектор}(AC) = \text{вектор}(Ae)$ ".

Решается задача на исследование х31 с посылками х30 и целями "известно", "неизвестные X", "нормтеорема", "теорема". Здесь X - список параметров посылок задачи. После решения в списке посылок находится равенство х33 переменных х14 и х27. В нашем примере - равенство $b = a$. Переменной х36 присваивается результат замены в определяемой части теоремы х15 вхождения х18 на терм х20. В нашем примере он имеет вид " $b \cdot \text{вектор}(AB)$ ". Переменной х37 присваивается эквивалентность равенства выражений х8 и х36 равенству х33. Переменной х38 присваивается список параметров терма х37. Переменной х39 присваивается список всех утверждений набора х25, параметры которых включаются в список х38.

Переменной х40 присваивается набор утверждений списка х25, не вошедших в список х39. Если он непуст, то рассматривается список х41 параметров термов х40, не входящих в список х38. Переменной х42 присваивается утверждение "существует(х41 и(х40))". Если не удастся доказать, что это утверждение - следствие посылок х39, то применение приема отменяется.

В случае успешной проверки создается импликация с антецедентами х39 и консеквентом х37. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

15. Анализ равенства двух значений определяемой двуместной операции при варьировании единственного корневого параметра - случай различных теорем.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABab}(\neg(A = B) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a \leq 0 \ \& \ 0 \leq b \rightarrow a \cdot \text{вектор}(AB) = b \cdot \text{вектор}(AB) \leftrightarrow a = b)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCa}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ a \leq 0 \ \& \ l(AC) = -al(AB) \ \& \ A \in \text{отрезок}(BC) \rightarrow a \cdot \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(AC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCa}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ 0 \leq a \ \& \ l(AC) = al(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \rightarrow a \cdot \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(AC))$$

Обе теоремы определяют терм " $a \cdot \text{вектор}(AB)$ ".

Программа приема аналогична программе предыдущего приема, но начинает отличаться от нее почти с самого начала. Приведем общую их часть. Переменной х8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - равенство. Переменной х12 присваивается набор антецедентов. Проверяется, что терм х8 неповторный и имеет ровно два корневых операнда, а определяющий терм элементарен. Одним из операндов терма х8 служит переменная х14.

Дальше начинаются отличия. В списке вывода находится теорема, отличная от исходной теоремы и являющаяся определением терма х17, длина которого равна длине терма х8. В нашем примере - указанная выше дополнительная

теорема. Во избежание дублирования проверяется, что исходная теорема лексикографически предшествует дополнительной. Переменной x19 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{bcde}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \neg(c = d) \ \& \\ e \in \text{прямая}(cd) \ \& \ 0 \leq b \ \& \ l(ce) = bl(cd) \ \& \ \text{точкалуча}(c, d, e) \rightarrow b \cdot \text{вектор}(cd) = \\ \text{вектор}(ce))$$

Переменной x21 присваивается вхождение операнда определяемой части исходной теоремы, отличного от x14. Переменной x25 присваивается вхождение в теорему x19 однобуквенного операнда определяемого термина. Переменной x26 присваивается подтерм x25, переменной x27 - подтерм x21. В нашем примере - термы "вектор(cd)", "вектор(AB)". Переменной x28 присваиваются параметры термина x26. Определяется подстановка S вместо переменных x28, переводящая терм x26 в x27.

Переменной x30 присваивается список антецедентов теоремы x19. Переменной x31 присваивается набор результатов применения S к утверждениям x30, переменной x32 - объединение наборов x12 и x31. Переменной x34 присваивается вхождение в теорему x19 операнда определяемой части, представляющего собой переменную x35. В нашем примере - переменную b . Переменной x36 присваивается результат применения подстановки S к определяющей части теоремы x19. В нашем примере - "вектор(Ae)". Переменной x37 присваивается результат добавления к списку x32 равенства определяющего термина исходной теоремы и термина x36. В нашем примере - равенства "вектор(AC) = вектор(Ae)".

Решается задача на исследование x38 с посылками x37 и целями "известно", "неизвестные X", "нормтеорема", "теорема". Здесь X - список параметров посылок задачи. После решения проверяется наличие в списке посылок равенства переменных x14 и x35 либо двух равенств для переменных x14 и x35 с одинаковыми правыми частями. Переменной x40 присваивается результат замены в определяемой части теоремы x19 вхождения x25 на терм x27. В нашем примере он имеет вид " $b \cdot \text{вектор}(AB)$ ". Переменной x41 присваивается эквивалентность равенства выражений x8 и x40 равенству переменных x14 и x35. Переменной x42 присваивается список параметров термина x41. Переменной x43 присваивается список всех утверждений набора x32, параметры которых включаются в список x42.

Переменной x44 присваивается набор утверждений списка x32, не вошедших в список x43. Если он непуст, то рассматривается список x45 параметров термов x44, не входящих в список x42. Переменной x46 присваивается утверждение "существует(x45 и(x44))". Если не удастся доказать, что это утверждение - следствие посылок x43, то применение приема отменяется.

В случае успешной проверки создается импликация с антецедентами x43 и консеквентом x41. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

16. Вывод соотношений для числовых атомов, связанных с объектами антецедентов теоремы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{биссектриса}(BACD) \rightarrow \angle(BAC) = 2\angle(BAD) \ \& \ \angle(CAD) = \angle(BAD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = C) \rightarrow \text{биссектриса}(BACD) \leftrightarrow \angle(CAD) = \angle(DAB) \ \& \ \text{разныестороны}(B, C, \text{прямая}(AD)) \ \& \ \angle(CAD) \leq \pi/2)$$

Эта теорема определяет терм "биссектриса($BACD$)".

Начало программы приема совпадает с программой одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_9 присваивается определяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x_{12} присваивается определяющая часть. Проверяется, что ее заголовок - не квантор существования. Переменной x_{13} присваивается список антецедентов, переменной x_{14} - результат добавления к x_{13} утверждения x_9 и списка конъюнктивных членов утверждения x_{12} .

Решается задача на исследование x_{15} со списком посылок x_{14} . Цели задачи - "известно", "неизвестные X ", "теорема". Здесь X - список параметров посылок.

Дальше начинаются отличия. Переменной x_{18} присваивается результат добавления к списку x_{13} утверждения x_9 , переменной x_{19} - список всех посылок задачи x_{15} , представляющих собой равенства с невырожденным числовым атомом, параметры которых включаются в параметры утверждений x_{18} . В нашем примере x_{19} состоит из утверждений " $\angle(BAC) = 2\angle(BAD)$ ", " $\angle(CAD) = \angle(BAD)$ ". Проверяется, что список x_{19} имеет не менее двух элементов. Переменной x_{20} присваивается импликация с антецедентами x_{18} , консеквентом которой служит конъюнкция утверждений x_{19} . Она регистрируется в списке вывода.

17. Вывод импликации для проверочного оператора усмотрения различия объектов заданного типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \text{биссектриса}(BACD) \ \& \ \neg(C \in \text{прямая}(AB)) \rightarrow \neg(\text{прямая}(AD) = \text{прямая}(AC)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \text{neg}(A = C) \rightarrow \text{биссектриса}(BACD) \leftrightarrow \angle(CAD) = \angle(DAB) \ \& \ \text{разныестороны}(B, C, \text{прямая}(AD)) \ \& \ \angle(CAD) \leq \pi/2)$$

Эта теорема определяет терм "биссектриса($BACD$)".

Начало программы приема совпадает с программой одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x9 присваивается определяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x12 присваивается определяющая часть. Проверяется, что ее заголовок - не квантор существования. Переменной x13 присваивается список антецедентов, переменной x14 - результат добавления к x13 утверждения x9 и списка конъюнктивных членов утверждения x12.

Решается задача на исследование x15 со списком посылок x14. Цели задачи - "известно", "неизвестные X", "теорема". Здесь X - список параметров посылок.

Дальше начинаются отличия. В списке посылок задачи x15 находится утверждение с заголовком "актив". Переменной x19 присваивается заголовок его корневого операнда. В нашем примере - "прямая". Справочник "разныеточки" усматривает существование проверочного оператора, устанавливающего различие объектов с заголовком x19. Переменной x21 присваивается список всех посылок задачи x15, имеющих заголовок "актив". В нашем примере - "актив(прямая(AB))", "актив(прямая(AD))", "актив(прямая(AC))". Проверяется, что этот список имеет не менее двух и не более 4 элементов. Рассматриваются равенства x24 корневых операндов различных элементов списка x21. В нашем примере - равенство "прямая(AD) = прямая(AC)". Переменной x25 присваивается результат добавления равенства x24 к списку посылок задачи x15. Решается задача на исследование x26 с посылками x25. Цели задачи - "известно", "неизвестные X", "теорема". Здесь X - параметры посылок. Добавленное равенство сопровождается комментарием "исходный".

Проверяется, что после решения задачи x26 она не имеет посылки "ложь". Рассматривается посылка x28 этой задачи, не являющаяся посылкой задачи x15, не имеющая заголовка "актив" и не сопровождаемая комментарием "исходный". Переменной x30 присваивается отрицание посылки x28. В нашем примере - " $\neg(C \in \text{прямая}(AB))$ ". При помощи вспомогательной задачи на исследование проверяется, что результат добавления x30 к посылкам задачи x15 непротиворечив. Переменной x31 присваивается результат добавления к списку x13 утверждений x9 и x30. Переменной x32 присваивается результат обработки его оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x24. Затем создается импликация с антецедентами x32, консеквентом которой служит отрицание утверждения x24.

18. Анализ подслучая, в котором заданный разряд определяющего набора - константный.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \text{ — точка} \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (a, 0) \rightarrow D \in \text{прямая}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A \in \text{отрезок}(BD) \rightarrow \text{коорд}(D, K) = (-l(AD)/l(AB), 0))$$

Эта теорема определяет терм "коорд(D, K)".

Проверяется, что теорема является тождеством. Переменной x_9 присваивается определяемый терм, переменной x_{12} - определяющий. Проверяется, что определяющий терм неоднобуквенный и имеет заголовок "набор". Переменной x_{13} присваивается список antecedентов. Переменной x_{14} присваивается список корневых операндов терма x_{12} . В нем выбирается вхождение x_{15} терма x_{16} , не имеющего переменных. В нашем примере - вхождение нуля. Переменной x_{17} присваивается набор всех теорем, выделенных в списке вывода характеристикой "определение(...)". Проверяется, что этих теорем не менее двух и что левая часть консеквента каждой из них равна x_9 . В нашем примере x_{17} состоит из восьми элементов, определяющих координату точки в зависимости от размещения ее в одном из четырех квадрантов и на одном из четырех лучей осей координат. Если в списке x_{17} существует несколько тождеств, у которых терм, расположенный так же, как x_{15} в текущей теореме, равен x_{16} , то проверяется, что исходная теорема лексикографически наименьшая из всех этих тождеств.

Переменной x_{18} присваивается набор наборов antecedентов теорем списка x_{17} . Переменной x_{19} присваивается набор правых частей тождеств списка x_{17} . Проверяется, что все эти части имеют заголовок "набор" с одним и тем же количеством корневых операндов. Переменной x_{20} присваивается пересечение списков набора x_{18} . В нашем примере оно состоит из утверждений "систкоорд(K)", " $K = (A, B, C)$ ".

Переменной x_{21} присваивается список параметров терма x_9 . В нашем примере - D, K . Переменной x_{22} присваивается список утверждений набора x_{20} , параметры которых включаются в x_{21} . В нашем примере - "систкоорд(K)". Далее предпринимается цикл просмотров списка x_{20} . Если элемент x_{23} этого списка представляет собой равенство, одна из частей которого содержится в списке x_{21} , то все параметры этого равенства добавляются к списку x_{21} , а к списку x_{22} присоединяются все элементы списка x_{20} , параметры которых включаются в расширенный таким образом список x_{21} . По окончании цикла переменной x_{20} переписывается список x_{22} . В нашем примере x_{20} по-прежнему состоит из указанных выше двух утверждений.

По окончании указанных действий все переменные, начиная с x_{21} , снова оказываются не определены. Проверяется, что список x_{20} непуст.

Переменной x_{21} присваивается список параметров утверждений x_{20} и утверждения x_9 . В нашем примере - A, B, C, D, K . Просматриваются переменные x_{22} списка x_{21} . Для каждой такой переменной просматриваются наборы - элементы списка x_{18} . В каждом таком наборе рассматриваются утверждения вида $P(22)$. После того, как такое утверждение обнаружено, проверяется, что оно является следствием каждого из остальных наборов списка x_{18} . Затем данное утверждение добавляется к списку x_{20} . В нашем примере к списку x_{20} добавляется утверждение " D - точка".

По окончании указанного цикла все переменные, начиная с x_{21} , снова оказываются не определены. Предпринимается синхронный просмотр списков x_{18} и x_{19} . Переменная x_{21} при этом просмотре указывает на вхождение в список

x18, переменная x22 - на соответствующее вхождение в список x19. Переменной x23 присваивается набор корневых операндов терма по вхождению x22 (в нашем примере - очередного выражения для координатного набора). Переменной x24 присваивается элемент этого набора, соответствующий элементу x15 набора x14 (в нашем примере - нулю). Решается задача на исследование x27, посылки которой получаются добавлением к набору x21 равенства термов x24 и x16 (в нашем примере - равенства нулю соответствующей координаты). Затем на позицию x21 вместо старого набора заносится список всех обработанных оператором "станд" посылок задачи x27, не имеющих заголовков "актив" и не входящих в список x20.

По окончании указанного цикла коррекции списков антецедентов, представленных в наборе x18, все переменные начиная с x21 снова оказываются не определены. Переменной x21 присваивается список всех элементов набора x18, не содержащих константы "ложь". В нашем примере этот список имеет всего четыре элемента. Первый из них содержит утверждения " $\neg(A \in \text{интервал}(BD))$ ", " $D \in \text{прямая}(AB)$ ", "точкалуча(A, B, D)". Второй - утверждения " A - точка", "точкалуча(A, C, A)", " $A = D$ ". Третий - утверждения " A - точка", " $D \in \text{прямая}(AB)$ ", " $A \in \text{отрезок}(BD)$ ". Четвертый - утверждения " A - точка" и " $A = D$ ".

Рассматривается элемент x23 списка x21. В нашем примере - первый элемент. В нем выбирается элементарное утверждение x24, параметры которого включаются в параметры термов списка x20. Для исключения повторов проверяется, что это утверждение не встречалось в предыдущих наборах списка x21. В нашем примере x24 - утверждение " $D \in \text{прямая}(AB)$ ". Проверяется, что утверждение x24 является следствием каждого из наборов списка x21. Проверяется, что его истинность не усматривается из утверждений x20. Переменной x26 присваивается список переменных, не входящих в утверждения x20 и в x9, длина которого равна длине набора x14. Переменной x27 присваивается позиция списка x26, соответствующая позиции x15 списка x14. На эту позицию заносится терм x16. Переменной x28 присваивается равенство выражения x9 терму "набор(x26)". В нашем примере x28 имеет вид "коорд(D, K) = ($a, 0$)". Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x20 и утверждение x28, а консеквентом служит x24. Она регистрируется в списке вывода.

19. Дополнительное построение для использования определения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD FK} (\neg(D \in \text{прямая}(AB)) \ \& \ \text{разныестороны}(B, D, \text{прямая}(AC)) \ \& \ D \text{ - точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ (A, B, C) = K \rightarrow F \text{ - точка} \ \& \ \neg(D = F) \ \& \ F \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AC) \ \& \ A \in \text{отрезок}(BF))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEFK} (D \text{ - точка} \ \& \ E \text{ - точка} \ \& \ F \text{ - точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \neg(D = F) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ E \in \text{прямая}(AC) \ \& \ F \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AC) \ \& \ A \in \text{отрезок}(BF) \ \& \ A \in \text{отрезок}(CE) \rightarrow \text{коорд}(D, K) = (-l(AF)/l(AB), -l(AE)/l(AC)))$$

Эта теорема определяет терм "коорд(D, K)".

Заметим, что выводимая теорема является в действительности теоремой приема, выполняющего дополнительное построение. Он вводит новую точку F и проводит через нее прямую, параллельную координатной оси, чтобы можно было воспользоваться определением координат точки D .

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема является тождеством. Переменной x_{12} присваивается список антецедентов, переменной x_{13} - список параметров терма x_8 , к которым добавляются параметры всех равенств списка x_{12} , одна из частей которых принадлежит x_{13} . В нашем примере x_{13} становится состоящим из переменных A, B, C, D, K . Переменной x_{14} присваивается список параметров утверждений x_{12} , переменной x_{15} - переменная списка x_{14} , не входящая в список x_{13} . В нашем примере - переменная F . Переменной x_{16} присваивается список не входящих в x_{13} параметров утверждений списка x_{12} , содержащих переменную x_{15} . В нашем примере x_{16} состоит из переменной F . Переменной x_{17} присваивается объединение списков x_{13} и x_{16} . Переменной x_{18} присваивается список утверждений набора x_{12} , параметры которых включаются в x_{17} . В нашем примере x_{18} состоит из утверждений " D - точка", " F - точка", "систкоорд(K)", " $\neg(D = F)$ ", " $(A, B, C) = K$ ", " $K \in \text{прямая}(AB)$ ", " $\text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AC)$ ", " $A \in \text{отрезок}(BF)$ ".

Решается задача на исследование x_{19} с посылками x_{18} . Ее цели - "исключ x_{16} ", "известно", "неизвестные X ", "антецеденты". Здесь X - список параметров посылок задачи. Цель "исключ x_{16} " определяет тенденцию к выводу следствий, не содержащих переменной x_{16} . Цель "антецеденты" указывает, что задача решается для редактирования списка антецедентов теоремы.

По окончании решения задачи в нашем примере возникает следующий список посылок:

" $\neg(D \in \text{прямая}(AB))$ ", " $\text{разныестороны}(B, D, \text{прямая}(AC))$ ", " A - точка", "актив($\text{прямая}(AC)$)", "актив($\text{прямая}(AB)$)", " D - точка", "систкоорд(K)", " $(A, B, C) = K$ ".

Переменной x_{21} присваивается список всех посылок задачи x_{19} , не имеющих заголовка "актив". Проверяется, что они не содержат переменных x_{16} . Список x_{21} обрабатывается оператором "нормантецеденты" относительно собственных параметров. Создается импликация с антецедентами x_{21} , консеквентом которой служит конъюнкция всех содержащих переменную x_{15} утверждений списка x_{12} . Она регистрируется в списке вывода и снабжается единственной характеристикой "вспомобъекты(x_8)".

20. Перенесение неравенства для одного числового атома на другой числовой атом с помощью связи между ними.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{трапеция}(ABCD) \rightarrow \pi/2 \leq \angle(ABC))$$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{трапеция}(ABCD) \leftrightarrow$
 $\text{четырёхугольник}(ABCD) \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) \parallel$
 $\text{прямая}(CD)) \ \& \ \angle(BAD) \leq \pi/2 \ \& \ \angle(ADC) \leq \pi/2)$

Эта теорема определяет терм "трапеция($ABCD$)".

Начало программы приема совпадает с программой одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_9 присваивается определяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x_{12} присваивается определяющая часть. Проверяется, что ее заголовок - не квантор существования. Переменной x_{13} присваивается список антецедентов, переменной x_{14} - результат добавления к x_{13} утверждения x_9 и списка конъюнктивных членов утверждения x_{12} .

Решается задача на исследование x_{15} со списком посылок x_{14} . Цели задачи - "известно", "неизвестные X ", "теорема". Здесь X - список параметров посылок.

Дальше начинаются отличия. В списке посылок задачи x_{15} находится строгое либо нестрогое неравенство x_{18} . В нашем примере - " $\angle(BAD) \leq \pi/2$ ". Проверяется, что в одной части данного неравенства расположен константный подтерм x_{21} , в другой - невырожденный числовой атом x_{22} . В нашем примере x_{21} - " $\pi/2$ ", x_{22} - " $\angle(BAD)$ ". В списке посылок задачи x_{15} находится равенство x_{24} , содержащее подтерм x_{22} . Проверяется, что в одной из частей этого равенства расположен невырожденный числовой атом x_{27} , отличный от x_{22} . В нашем примере x_{24} имеет вид " $\angle(ABC) = \pi - \angle(BAD)$ ", x_{27} - " $\angle(ABC)$ ". Переменной x_{29} присваивается другая часть равенства. В нашем примере - " $\pi - \angle(BAD)$ ". Переменной x_{30} присваивается список вхождений терм a x_{22} в терм x_{29} . Выбирается переменная x_{31} , не входящая в посылки задачи x_{15} . В нашем примере - переменная a . Переменной x_{32} присваивается результат замены всех этих вхождений на переменную x_{31} . В нашем примере он имеет вид " $\pi - a$ ". Проверяется, что терм x_{32} не имеет параметров, отличных от x_{31} . Переменной x_{33} присваивается выражение "отображение(x_{31} число(x_{31}) x_{32})". В нашем примере - " $\lambda_a(\pi - a, a - \text{число})$ ". Переменной x_{35} присваивается результат замены вхождений x_{30} в терм x_{29} на выражение x_{21} . В нашем примере - " $\pi - \pi/2$ ".

Переменной x_{36} присваивается 0. Последовательно предпринимаются попытки усмотреть, что функция x_{33} неубывает на числовой оси и что она невозрастает на ней. Используются соответствующие проверочные операторы. В первом случае рассматривается результат R замены в неравенстве x_{18} его неконстантной и константной частей, соответственно, на x_{27} и x_{35} , во втором - на x_{35} и x_{27} . Если хотя бы в одном из случаев получен положительный результат, переменной x_{36} переписывается неравенство R .

По окончании попыток проверяется, что x_{36} не равно 0. Затем создается импликация, антецеденты которой суть антецеденты исходной теоремы и терм x_9 , а консеквент - x_{36} . Эта импликация обрабатывается процедурой "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

21. Присоединение определяющих утверждений к контексту дополнительной теоремы, вывод следствий с исключением старого параметра и попытка свертки по определению текущего раздела.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = C) \& C \in \text{отрезок}(AB) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{вниз}(\text{вектор}(AC), K) \& \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вниз}(\text{вектор}(CB), K))$$

из теоремы

$$\forall_{Kbc}(b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вниз}(\text{вектор}(bc), K) \leftrightarrow \text{крд}(b, K, 1) = \text{крд}(c, K, 1) \& \text{крд}(b, K, 2) = \text{крд}(c, K, 2) \& 0 \leq \text{крд}(b, K, 3) - \text{крд}(c, K, 3))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC} \text{крд}(p - \text{число} \& q - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{Трехмерн}(K) \& i \in \{1, 2, 3\} \& 0 \leq p \& 0 \leq q \& 0 < p + q \& C \in \text{отрезок}(AB) \& pl(AC) = ql(BC) \rightarrow \text{крд}(C, K, i) = (p \cdot \text{крд}(A, K, i) + q \cdot \text{крд}(B, K, i)) / (p + q))$$

Исходная теорема определяет терм "вниз(вектор(bc), K)".

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Проверяется, что определяющая часть - конъюнкция, и переменной x13 присваивается набор ее конъюнктивных членов. Проверяется, что все они элементарны. Переменной x14 присваивается список невырожденных числовых атомов, входящих в определяющую часть. В нашем примере - "крд(b, K, 1)", "крд(c, K, 1)", "крд(b, K, 2)", "крд(c, K, 2)", "крд(c, K, 3)", "крд(b, K, 3)". Проверяется, что число элементов списка x14 не менее 3 и все они имеют один и тот же заголовок x15, являющийся обозначением отдельной координаты. В нашем случае - "крд". Проверяется, что в параметрах термов списка x14 встречаются все переменные теоремы.

Определяется раздел x16, к которому относится символ x15. В нашем примере - "системыкоординат". Просматриваются теоремы x20 данного раздела, имеющие характеристику "нормкрд" и содержащие символ x15. В нашем примере x20 - указанная выше дополнительная теорема. К этой теореме применяется процедура "развтеор". Она проверяет наличие антецедента вида "принадлежит(X перечень(набор(P₁...P_k)))", где X - переменная, не входящая в прочие антецеденты, и преобразует консеквент в конъюнкцию путем подстановки вместо X значений P₁, ..., P_k. В нашем примере получаем следующую теорему x21:

$$\forall_{ABC} \text{крд}(p - \text{число} \& q - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{Трехмерн}(K) \& 0 \leq p \& 0 \leq q \& 0 < p + q \& C \in \text{отрезок}(AB) \& pl(AC) = ql(BC) \rightarrow \text{крд}(C, K, 1) = (p \cdot \text{крд}(A, K, 1) + q \cdot \text{крд}(B, K, 1)) / (p + q) \& \text{крд}(C, K, 2) = (p \cdot \text{крд}(A, K, 2) + q \cdot \text{крд}(B, K, 2)) / (p + q) \& \text{крд}(C, K, 3) = (p \cdot \text{крд}(A, K, 3) + q \cdot \text{крд}(B, K, 3)) / (p + q))$$

Переменной x22 присваивается список антецедентов теоремы x21. Проверяется, что в нем нет равенства с переменной в одной из своих частей. Переменной x23 присваивается консеквент теоремы x21, переменной x24 - список невырожденных числовых атомов этого консеквента. В нашем примере - "крд(C, K, 1)", "крд(A, K, 1)", "крд(B, K, 1)", "крд(C, K, 2)", "крд(A, K, 2)", "крд(B, K, 2)", "крд(C, K, 3)", "крд(A, K, 3)", "крд(B, K, 3)".

Проверяется, что все числовые атомы списка x_{24} имеют заголовок x_{15} и что этот список не короче списка x_{14} . Переменной x_{25} присваивается список параметров термов x_{14} . В нашем примере - " b, c, K ". Определяется подстановка S вместо переменных x_{25} , переводящая термы x_{14} в подмножество термов x_{24} . При этом переменной x_{27} присваивается список оставшихся неиспользованными термов списка x_{24} . Проверяется, что список x_{27} непуст. В нашем примере он состоит из термов " $\text{крд}(B, K, 1)$ ", " $\text{крд}(B, K, 2)$ ", " $\text{крд}(B, K, 2)$ ". Подстановка S подставляет вместо b, c, k переменные A, C, K .

Переменной x_{28} присваивается список параметров термов x_{27} . В нашем примере - B, K . Проверяется, что ровно один элемент списка x_{28} не входит список переменных термов, подставляемых подстановкой S вместо переменных x_{25} . Переменной x_{29} присваивается набор результатов применения подстановки S к утверждениям x_{12} . Переменной x_{30} присваивается объединение списков x_{29} и x_{22} . В нашем примере оно имеет вид: " A — точка", " C — точка", " $\text{Трехмерн}(K)$ ", " p — число", " q — число", " B — точка", " $0 \leq p$ ", " $0 \leq q$ ", " $0 < p + q$ ", " $C \in \text{отрезок}(AB)$ ", " $pl(AC) = ql(BC)$ ".

Решается задача на исследование x_{31} с посылками x_{30} . Цели задачи - "известно", "неизвестные Y ", "теорема". Здесь Y - все параметры посылок задачи. Проверяется, что после решения список посылок не содержит константы "ложь". В нашем примере при решении задачи x_{31} добавились лишь посылки " $\text{актив}(l(BC))$ ", " $\text{актив}(l(AC))$ ", " $\text{актив}(\text{прямая}(AB))$ ". Переменной x_{33} присваивается набор результатов применения подстановки S к утверждениям x_{13} . В нашем примере он имеет вид " $\text{крд}(A, K, 1) = \text{крд}(C, K, 1)$ ", " $\text{крд}(A, K, 2) = \text{крд}(C, K, 2)$ ", " $0 \leq -\text{крд}(, K, 3) + \text{крд}(A, K, 3)$ ". Переменной x_{34} присваивается объединение списка посылок задачи x_{31} , набора конъюнктивных членов консеквента x_{23} теоремы x_{21} и набора x_{33} .

Выбирается параметр x_{35} утверждений x_{33} , не входящий в список параметров термов списка x_{27} . В нашем примере - параметр A . Решается задача на исследование x_{36} с посылками x_{34} и целями "известно", "неизвестные Z ", "исключ x_{35} ", "допосылки", "теорема".

Цель "допосылки" разрешает ввод дополнительных ограничений на известные объекты. Такие ограничения R регистрируются в процессе решения задачи в комментариях (допосылки R).

В нашем примере исходный список посылок задачи x_{36} имел вид: " $\text{актив}(l(BC))$ ", " $\text{актив}(l(AC))$ ", " $\text{актив}(\text{прямая}(AB))$ ", " A —точка", " C —точка", " $\text{Трехмерн}(K)$ ", " p — число", " q — число", " B — точка", " $0 \leq p$ ", " $0 \leq q$ ", " $0 < p + q$ ", " $C \in \text{отрезок}(AB)$ ", " $pl(AC) = ql(BC)$ ", " $\text{крд}(C, K, 1) = (p \cdot \text{крд}(A, K, 1) + q \cdot \text{крд}(B, K, 1))/(p + q)$ ", " $\text{крд}(C, K, 2) = (p \cdot \text{крд}(A, K, 2) + q \cdot \text{крд}(B, K, 2))/(p + q)$ ", " $\text{крд}(C, K, 3) = (p \cdot \text{крд}(A, K, 3) + q \cdot \text{крд}(B, K, 3))/(p + q)$ ", " $\text{крд}(A, K, 1) = \text{крд}(C, K, 1)$ ", " $\text{крд}(A, K, 2) = \text{крд}(C, K, 2)$ ", " $0 \leq -\text{крд}(C, K, 3) + \text{крд}(A, K, 3)$ ".

После решения возникает список посылок:

" $0 \leq -\text{крд}(C, K, 3) + \text{крд}(B, K, 3)$ ", " $l(BC) = | - | - l(AB) + l(BC) | + l(AB) |$ ", " $l(AB) = | - l(AB) + l(BC) | + l(BC)$ ", " $\text{актив}(l(AB))$ ", " $l(AC) = | - l(AB) + l(BC) |$ ", " $0 < q$ ", " $\text{актив}(l(BC))$ ", " $\text{актив}(l(AC))$ ", " $\text{актив}(\text{прямая}(AB))$ ",

" A – точка", " C – точка", "Трехмерн(K)", " p – число", " q – число"
 " B – точка", " $0 \leq p$ ", " $0 \leq q$ ", " $0 < p + q$ ", " $C \in \text{отрезок}(AB)$ ", " $|p| - l(AB) + l(BC)| = ql(BC)$ ", " $\text{крд}(C, K, 1) = \text{крд}(B, K, 1)$ ", " $\text{крд}(C, K, 2) = \text{крд}(B, K, 2)$ ",
 " $\text{крд}(C, K, 3) = (p \cdot \text{крд}(A, K, 3) + q \cdot \text{крд}(B, K, 3))/(p + q)$ ", " $\text{крд}(A, K, 1) = \text{крд}(B, K, 1)$ ", " $\text{крд}(A, K, 2) = \text{крд}(B, K, 2)$ ", " $0 \leq -\text{крд}(B, K, 3) + \text{крд}(A, K, 3)$ ".

В процессе решения был введен комментарий (допосылки $0 < q$). Его ввел прием, заменивший равенство " $q \cdot \text{крд}(A, K, 1) = q\text{крд}(B, K, 1)$ " на равенство " $\text{крд}(A, K, 1) = \text{крд}(B, K, 1)$ " и неравенство " $0 < q$ ". Основанием послужило наличие нестрогого неравенства " $0 \leq q$ ".

Далее просматриваются теоремы x39 списка вывода, имеющие характеристику "определение(...)" и представляющие собой эквивалентности. В нашем примере x39 совпадает с x2. Заметим, что среди стартовых теорем списка вывода здесь рассматриваются все шесть возможных направлений, а не только "вниз". Переменной x43 присваивается вхождение определяемой части, переменной x45 – набор конъюнктивных членов определяющей части. Переменной x46 присваивается список параметров утверждений x45. Определяется подстановка S' вместо переменных x46, переводящая утверждения x45 в некоторые посылки задачи x36. В нашем примере она подставляет C, B, K вместо b, c, K . Определяется результат x49 применения подстановки S' к подтерму x43. В нашем примере он имеет вид "вниз(вектор(CB), K)". Проверяется, что переменная x35 не входит в терм x49. Определяется результат x50 применения подстановки S к подтерму x10. В нашем примере он имеет вид "вниз(вектор(AC), K)". Проверяется что x50 отлично от x49. Переменной x51 присваивается объединение списков x29, x22 и утверждения x50. К x51 добавляются все утверждения комментариев (допосылки ...) к посылкам задачи x36. Затем создается импликация с антецедентами x51 и консеквентом x49. Она обрабатывается оператором "норм-теорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на описание для получения новой теоремы

1. Попытка рассмотреть операцию, значением которой является атомарный объект, встречающийся в определяемом терме.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABac}(\neg(c = B) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(\text{прямая}(cB) = \text{прямая}(AB)) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow a \cdot (\text{вектор}(cB) + \text{вектор}(Ac)) = a \cdot \text{вектор}(cB) + a \cdot \text{вектор}(Ac))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCa}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ 0 \leq a \ \& \ l(AC) = al(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \rightarrow a \cdot \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(AC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(AB) + \text{вектор}(BC) = \text{вектор}(AC))$$

Исходная теорема определяет терм " $a \cdot \text{вектор}(AB)$ ".

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x_{11} присваивается вхождение определяющей части. Переменной x_{12} присваивается список antecedентов. Внутри определяемой части теоремы рассматривается вхождение x_{13} неоднобуквенного термина, отличного от x_8 . В нашем примере - " $\text{вектор}(AB)$ ". Переменной x_{14} присваивается символ по вхождению x_{13} . В нашем примере - " вектор ". Проверяется, что заголовок определяющей части - символ x_{14} . Справочник поиска теорем "опратом" определяет по символу x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{17} присваивается результат переобозначения в дополнительной теореме ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере имеем:

$$\forall_{bcd}(b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(bc) + \text{вектор}(cd) = \text{вектор}(bd))$$

Переменной x_{21} присваивается та часть равенства - консеквента теоремы x_{17} , которая имеет заголовок x_{14} . В нашем примере - " $\text{вектор}(bd)$ ". Переменной x_{22} присваивается список параметров термина x_{21} . Усматривается, что подтерм x_{13} является результатом применения к x_{21} некоторой подстановки S вместо переменных x_{22} . Переменной x_{24} присваивается объединение списка x_{12} и списка результатов применения подстановки S к antecedентам теоремы x_{17} . Определяется тип x_{26} значений выражений с заголовком x_{14} . В нашем примере - " Вектор ". Проверяется, что подтерм x_{13} является атомарным выражением типа x_{26} . Он присваивается переменной x_{27} . В нашем примере - " $\text{вектор}(AB)$ ". Переменной x_{28} присваивается результат применения подстановки S к подтерму x_{19} . В нашем примере - " $\text{вектор}(Ac) + \text{вектор}(cB)$ ". Переменной x_{29} присваивается список атомарных подвыражений термина x_{28} , имеющих тип x_{26} . В нашем примере - выражения " $\text{вектор}(Ac)$ " и " $\text{вектор}(cB)$ ". Переменной x_{30} присваивается результат добавления к x_{29} подтерма x_{11} , т.е. " $\text{вектор}(AC)$ ". Выбирается список x_{31} переменных, отличных от переменных исходной и дополнительной теорем, длина которого равна длине списка x_{30} . В нашем примере x_{31} состоит из переменных e, f, g . Определяется результат x_{32} замены в терме x_{28} подтермов x_{30} на соответствующие переменные списка x_{31} . В нашем примере - " $f + e$ ". Переменной x_{33} присваивается результат замены вхождения x_{13} в определяемую часть на терм x_{32} . В нашем примере - " $a(f + e)$ ". Здесь и далее имеется в виду умножение вектора на число.

Переменной x_{34} присваивается объединение списка x_{24} с равенствами выражений x_{30} соответствующим переменным x_{31} . В нашем примере получаем: " a - число", " A - точка", " B - точка", " C - точка", " $\neg(A = B)$ ", " $C \in \text{прямая}(AB)$ ", " $0 \leq a$ ", " $l(AC) = al(AB)$ ", " $\text{точкалуча}(A, B, C)$ ", " c - точка", " $\text{вектор}(Ac) = e$ ", " $\text{вектор}(cB) = f$ ".

Решается задача на описание x_{35} с посылками x_{34} , единственным условием которой служит равенство подтерма x_{11} и последней переменной X списка x_{31} . В нашем примере - равенство " $\text{вектор}(AC) = g$ ". Цели задачи - " прямойответ ", " полный ", " допосылки ", " $\text{неизвестные } X$ ", " $\text{известно } P$ ". Здесь P - параметры термина x_{33} . В нашем примере - a, f, e . Цель " допосылки " аналогична уже рассмотренной такой же цели для задач на исследование. Она разрешает ввод

дополнительных посылок, сохраняемых в комментариях (допосылки . . .) к посылкам исходной задачи. Задача х35 сопровождается общим комментарием к своим посылкам "исходки Q", где Q - параметры утверждений списка х24. В нашем примере - a, c, A, B, C . Этот комментарий указывает список тех переменных, которым разрешается встречаться в дополнительных посылках.

Ответ задачи присваивается переменной х36. В нашем примере он имеет вид " $g = ae + af$ ". Дополнительная посылка при решении задачи была введена лишь одна - " $\neg(\text{прямая}(cB) = \text{прямая}(AB))$ ". Она позволила применить соотношение пропорциональности, связанное с параллельными прямыми. Проверяется, что х36 - равенство для переменной X, и переменной х37 присваивается равенство выражения х33 правой части равенства х36. В нашем примере - равенство " $a(f + e) = ae + af$ ". Переменной х38 присваивается результат подстановки выражений х30 вместо переменных х31 в терм х37. В нашем случае - " $a \cdot \text{вектор}(cB) + \text{вектор}(Ac) = a \cdot \text{вектор}(Ac) + a \cdot \text{вектор}(cB)$ ".

Переменной х39 присваивается список х24. Утверждения из комментариев "допосылки . . ." к посылкам блока анализа задачи х35, а также условия на о.д.з. этих утверждений добавляются к списку х39.

Переменной х40 присваивается список параметров термов х24, не являющихся параметрами терма х38. В нашем примере он содержит единственную переменную C. Если х40 непуст, то выполняются следующие действия. Переменной х41 присваивается список утверждений набора х39, параметры которых пересекаются со списком х40. Переменной х42 присваивается разность списков х39 и х41. Решается задача на описание с посылками х43 и условием х42. Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "упростить", "неизвестные х40", "параметры х40", "исключить". Ответ присваивается переменной х45. В нашем случае - константа "истина". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и не содержит переменных х40. Затем список х39 заменяется на объединение списка х42 с набором конъюнктивных членов утверждения х45. В нашем примере х39 приобретает следующий вид: " a - число", " A - точка", " B - точка", " C - точка", " $\neg(A = B)$ ", " $0 \leq a$ ", " c - точка", " $\neg(\text{прямая}(cB) = \text{прямая}(AB))$ ", " $\neg(c = B)$ ", "истина".

Если список х40 был непуст, а данная коррекция списка х39 не состоялась, то прием не применяется. В противном случае создается импликация с антецедентами х39 и консеквентом х38. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка усмотрения дистрибутивности относительно операции, подсказанной антецедентом.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABaj}(\neg(A = B) \ \& \ a \text{ - число} \ \& \ j \text{ - число} \ \& \ A \text{ - точка} \ \& \ B \text{ - точка} \ \& \ a \leq 0 \ \& \ j \leq 0 \rightarrow (a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCa}(a \text{ - число} \ \& \ A \text{ - точка} \ \& \ B \text{ - точка} \ \& \ C \text{ - точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ a \leq 0 \ \& \ l(AC) = -al(AB) \ \& \ A \in \text{отрезок}(BC) \rightarrow a \cdot \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(AC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

Исходная теорема определяет терм " $a \cdot \text{вектор}(AB)$ ".

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x11 присваивается вхождение определяющей части. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Проверяется, что x8 неповторно и имеет ровно два корневых операнда. Проверяется, что определяющее выражение элементарно. Переменной x13 присваивается то из вхождений корневых операндов определяемой части, которое представляет собой переменную. Эта переменная присваивается переменной x14. В нашем примере - " a ". Выбирается антецедент x15 и в нем рассматривается вхождение x16 переменной x14. Проверяется, что это вхождение - операнд ассоциативной и коммутативной операции x18. В нашем примере x15 имеет вид " $l(AC) = -al(AB)$ ", x18 - операция "умножение". Справочник поиска теорем "дистрибразвертка" находит по x18 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x21 присваивается вхождение ее консеквента. Находится операнд x22 данного консеквента, имеющий заголовок x18. Переменной x23 присваивается вхождение неоднобуквенного операнда вхождения x22, переменной x24 - символ по вхождению x23. В нашем примере x23 имеет вид " $a + b$ ", x24 - символ "плюс". Проверяется, что x24 - символ ассоциативной и коммутативной операции.

В списке вывода выбирается теорема x28 с характеристикой "определение(...)". Проверяется, что ее определяемая часть она имеет ту же длину, что и x8. Проверяется также, что теорема x28 лексикографически предшествует исходной теореме (нестрого). В нашем примере x28 совпадает с исходной теоремой. Переменной x31 присваивается результат переобозначения переменных теоремы x28 на переменные, не входящие в теорему x2. В нашем примере имеем:

$$\forall_{bcde}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \neg(c = d) \ \& \\ e \in \text{прямая}(cd) \ \& \ b \leq 0 \ \& \ l(ce) = -bl(cd) \ \& \ c \in \text{отрезок}(de) \rightarrow \\ b \cdot \text{вектор}(cd) = \text{вектор}(ce))$$

В списке вывода снова находится теорема x35 с характеристикой "определение(...)", определяемая часть которой имеет ту же длину, что и x8. В нашем примере x35 совпадает с исходной теоремой. Переменной x38 присваивается результат переобозначения переменных теоремы x35 на переменные, не входящие в исходную теорему и в теорему x31. В нашем примере x38 имеет вид:

$$\forall_{fghi}(f - \text{число} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ i - \text{точка} \ \& \ \neg(g = h) \ \& \\ i \in \text{прямая}(gh) \ \& \ f \leq 0 \ \& \ l(gi) = -fl(gh) \ \& \ g \in \text{отрезок}(hi) \rightarrow \\ f \cdot \text{вектор}(gh) = \text{вектор}(gi))$$

Переменной x39 присваивается набор из четырех переменных X_1, X_2, X_3, X_4 , не входящих в исходную теорему и в теоремы x31, x38. В нашем примере - переменные j, k, l, m .

Переменной x41 присваивается определяемая часть теоремы x31. В нашем примере - " $b \cdot \text{вектор}(cd)$ ". Переменной x42 присваивается список параметров термина

x41. Определяется подстановка S вместо переменных $x42$, переводящая терм $x41$ в $x8$. Если эта подстановка подставляла вместо некоторой переменной переменную $x14$, то данная переменная заменяется в ней на X_1 . В нашем примере - на j . В результате набор $x43$ термов, подставляемых вместо переменных $x42$, приобретает вид " j, A, B ".

Переменной $x44$ присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы $x31$. Переменной $x46$ присваивается результат применения подстановки S к определяющей части теоремы $x31$. В нашем примере - " $\text{вектор}(Ae)$ ". Переменной $x47$ присваивается объединение списков $x12$, $x44$, равенства подтерма $x11$ переменной X_2 и равенства терма $x46$ переменной X_3 . В нашем примере два последних равенства имеют вид " $\text{вектор}(AC) = k$ " и " $\text{вектор}(Ae) = l$ ".

Переменной $x49$ присваивается определяемая часть теоремы $x38$. В нашем примере - " $f \cdot \text{вектор}(gh)$ ". Переменной $x50$ присваивается список параметров терма $x49$. Определяется подстановка S' вместо переменных $x50$, переводящая терм $x49$ в $x8$. Если эта подстановка подставляла вместо некоторой переменной переменную $x14$, то данная переменная заменяется в ней на результат соединения операцией $x24$ переменных $x14$ и X_1 . В нашем примере - на $a + j$. В результате набор $x51$ термов, подставляемых вместо переменных $x50$, приобретает вид " $a + j, A, B$ ".

Переменной $x52$ присваивается набор результатов применения подстановки S' к антецедентам теоремы $x38$. Этот набор добавляется к списку $x47$. Переменной $x54$ присваивается результат применения подстановки S' к определяющей части теоремы $x38$. В нашем примере - " $\text{вектор}(Ai)$ ". Решается задача на описание $x56$, посылками которой служат утверждения $x47$, а единственным условием - равенство выражения $x54$ переменной X_4 . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "одз", "неизвестные X_4 ", "известно $X_2 X_3$ ". В нашем примере список $x47$ состоит из следующих утверждений:

" a - число", " A - точка", " B - точка", " C - точка", " $\neg(A = B)$ ", " $C \in \text{прямая}(AB)$ ", " $a \leq 0$ ", " $l(AC) = -al(AB)$ ", " $A \in \text{отрезок}(BC)$ ", " j - число", " A - точка", " B - точка", " e - точка", " $\neg(A = B)$ ", " $e \in \text{прямая}(AB)$ ", " $j \leq 0$ ", " $l(Ae) = -jl(AB)$ ", " $A \in \text{отрезок}(Be)$ ", " $\text{вектор}(AC) = k$ ", " $\text{вектор}(Ae) = l$ ", " $a + j$ - число", " A - точка", " B - точка", " i - точка", " $\neg(A = B)$ ", " $i \in \text{прямая}(AB)$ ", " $a + j \leq 0$ ", " $l(Ai) = -(a + j)l(AB)$ ", " $A \in \text{отрезок}(Bi)$ ".

Условие имеет вид " $\text{вектор}(Ai) = m$ ". Ответ задачи $x56$ присваивается переменной $x57$. В нашем примере он имеет вид " $m = k + l$ ". Проверяется, что $x57$ отлично от символа "отказ". Переменной $x58$ присваивается результат применения подстановки S' к определяемой части теоремы $x38$, переменной $x59$ - результат применения подстановки S к определяемой части теоремы $x31$. В нашем примере имеем выражения " $(a + j)\text{вектор}(AB)$ " и " $j \cdot \text{вектор}(AB)$ ". Переменной $x60$ присваивается результат подстановки в утверждение $x57$ термов $x8, x59$ и $x58$ вместо переменных X_2, X_3, X_4 . В нашем примере - " $(a + j)\text{вектор}(AB) = a \cdot \text{вектор}(AB) + j \cdot \text{вектор}(AB)$ ". Переменной $x61$ присваивается объединение списков $x12$, $x44$ и $x52$.

Переменной х62 присваивается список параметров утверждений х61, не являющихся параметрами терма х60. Если он непуст (в нашем примере - состоит из переменных e, i, C), то предпринимаются следующие действия. Переменной х63 присваивается список всех утверждений набора х61, имеющих переменную из х62. Переменной х64 присваивается остаток набора х61. Решается задача на описание х66 с посылками х64 и условиями х63. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные х62", "параметры х62", "исключ". Если ответ х67 на эту задачу отличен от "отказ" и не содержит переменных х62, то список х61 заменяется на результат добавления к х64 конъюнктивных членов утверждения х67. В нашем примере х67 - константа "истина". Если указанного ответа получить не удалось, то применение приема отменяется.

Далее список х61 обрабатывается оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма х60. Создается импликация с антецедентами х62 и консеквентом х60. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Попытка рассмотреть операцию, значением которой служит атомарный объект, координаты которого определяются.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABKefglm}(\text{коорд}(\text{вектор}(fB), K) = (l, m) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(Af), K) = (e, g) \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(fB) + \text{вектор}(Af), K) = (e + l, g + m))$$

из теоремы

$$\forall_{ABKabcd}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (c - a, d - b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(AB) + \text{вектор}(BC) = \text{вектор}(AC))$$

Исходная теорема определяет терм "коорд(вектор(AB), K)".

Начало приема совпадает с началом одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его. Переменной х8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - тождество. Переменной х11 присваивается вхождение определяющей части. Переменной х12 присваивается список антецедентов. Внутри определяемой части теоремы рассматривается вхождение х13 неоднобуквенного терма, отличного от х8. В нашем примере - "вектор(AB)". Переменной х14 присваивается символ по вхождению х13. В нашем примере - "вектор". Проверяется, что заголовок определяющей части - символ "набор" (в отличие от прешествующего приема). Справочник поиска теорем "опратом" определяет по символу х14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной х17 присваивается результат переобозначения в дополнительной теореме ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере имеем:

$$\forall_{efg}(e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \rightarrow \text{вектор}(ef) + \text{вектор}(fg) = \text{вектор}(eg))$$

Переменной x21 присваивается та часть равенства - консеквента теоремы x17, которая имеет заголовок x14. В нашем примере - "вектор(eg)". Переменной x22 присваивается список параметров терма x21. Усматривается, что подтерм x13 является результатом применения к x21 некоторой подстановки S вместо переменных x22. Переменной x24 присваивается объединение списка x12 и списка результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x17. Определяется тип x26 значений выражений с заголовком x14. В нашем примере - "Вектор". Проверяется, что подтерм x13 является атомарным выражением типа x26. Он присваивается переменной x27. В нашем примере - "вектор(AB)". Переменной x28 присваивается результат применения подстановки S к подтерму x19. В нашем примере - "вектор(Af)+вектор(fB)". Переменной x29 присваивается список атомарных подвыражений терма x28, имеющих тип x26. В нашем примере - выражения "вектор(Af)" и "вектор(fB)".

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что параметры определяющего и определяемого выражений не пересекаются и что список x29 непуст. Переменной x30 присваивается набор корневых операндов определяющей части (напомним, что ее заголовок - "набор"). Вводятся пустые накопители x31, x32 и x33. Переменной x34 присваивается список параметров терма x28, не являющихся параметрами термов x29. В нашем примере - пустой список.

Просматриваются атомарные выражения x35 списка x29. Для каждого из них создается своя копия исходной теоремы. В накопителе x31 будут сохраняться равенства для координатных наборов выражений x35, в накопителе x32 - равенства, связывающие между собой отдельные координаты, в накопителе x33 - указанные копии теоремы. Более подробно, выполняются следующие действия. Переменной x36 присваивается результат замены в определяемом терме подтерма x13 на x35. Для определенности, в нашем примере рассмотрим в качестве x35 первый из элементов списка x29 - "вектор(Af)". Тогда x36 имеет вид "коорд(вектор(Af), K)". Переменной x37 присваивается результат переобозначения в исходной теореме переменных на переменные, не встречающиеся в исходной теореме, теореме x17 и теоремах накопителя x33. В нашем случае имеем:

$$\forall_{lmnhijk}(\text{систкоорд}(n) \ \& \ l - \text{точка} \ \& \ m - \text{точка} \ \& \ \text{коорд}(l, n) = (h, i) \ \& \ \text{коорд}(m, n) = (j, k) \ \rightarrow \ \text{коорд}(\text{вектор}(lm), n) = (j - h, k - i))$$

Теорема x37 регистрируется в накопителе x33. Переменной x39 присваивается определяемый терм теоремы x37. В нашем примере - "коорд(вектор(lm), n)". Переменной x40 присваивается список параметров терма x39. Определяется подстановка S' вместо переменных x40, переводящая терм x39 в x36. К списку x24 добавляются результаты применения подстановки S' к антецедентам теоремы x37. Переменной x42 присваивается список переменных, не входящих в утверждения списков x24 и x32, длина которого равна длине набора x30. В нашем примере - переменные e, g . Переменные x42 добавляются к списку x34. К списку x31 добавляется равенство выражения x36 терму "набор(x42)". В нашем примере - "коорд(вектор(Af), K) = (e, g)". Переменной x44 присваивается набор корневых операндов определяющего набора теоремы x37. В нашем примере

- " $j - h$ ", " $k - i$ ". К списку $x32$ добавляются равенства элементу списка $x44$ соответствующим элементам списка $x42$. В нашем примере - равенства " $j - h = e$ ", " $k - i = g$ ".

По окончании цикла просмотра списка $x29$ все переменные начиная с $x35$ снова оказываются не определены. При этом в списке $x31$ оказываются равенства "коорд(вектор(Af), K) = (e, g)", "коорд(вектор(fB), K) = (l, m)", в списке $x32$ - равенства " $j - h = e$ ", " $k - i = g$ ", " $r - p = l$ ", " $s - q = m$ ", в списке $x34$ - переменные e, g, l, m . Переменной $x35$ присваивается список переменных, не входящих в термы списков $x24, x32$, длина которого равна длине списка $x30$. В нашем примере - переменные n, t . Переменной $x36$ присваивается список равенств выражений списка $x30$ соответствующим переменным списка $x35$. В нашем примере - " $c - a = n$ ", " $d - b = t$ ". Переменной $x37$ присваивается объединение списков $x24$ и $x32$.

Решается задача на описание $x38$, посылками которой служат утверждения $x37$, а условиями - утверждения $x36$. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные $x35$ ", "известно $x34$ ". В нашем примере $x37$ состоит из утверждений: "систкоорд(K)", " A - точка", " B - точка", "коорд(A, K) = (a, b)", "коорд(B, K) = (c, d)", " f - точка", "коорд(A, K) = (h, i)", "коорд(f, K) = (j, k)", "коорд(f, K) = (p, q)", "коорд(B, K) = (r, s)", " $j - h = e$ ", " $k - i = g$ ", " $r - p = l$ ", " $s - q = m$ ".

Ответ задачи присваивается переменной $x39$. В нашем примере он имеет вид " $t = g + m$ ", " $n = e + l$ ". Проверяется, что $x39$ отлично от символа "отказ", и переменной $x40$ присваивается набор конъюнктивных членов ответа. Переменной $x41$ присваивается список правых частей равенств набора $x40$, определяющих значения неизвестных $x35$. В нашем примере - " $e + l$ ", " $g + m$ ". Проверяется, что его длина равна длине списка $x35$. Переменной $x42$ присваивается равенство выражения, полученного заменой вхождения $x13$ в определяемую часть исходной теоремы на $x28$, выражению "набор($x41$)". В нашем примере $x42$ имеет вид "коорд(вектор(Af) + вектор(fB), K) = ($e + l, g + m$)". Переменной $x43$ присваивается объединение списков $x24$ и $x31$, переменной $x44$ - список параметров терма $x42$ и термов списка $x31$. Переменной $x45$ присваивается список параметров утверждений $x43$, не вошедших в список $x44$. В нашем примере $x44$ состоит из переменных e, f, g, l, m, A, B, K , $x45$ - из переменных $a, b, c, d, h, i, j, k, p, q, r, s$. Список $x43$ состоит из утверждений "систкоорд(K)", " A - точка", " B - точка", "коорд(A, K) = (a, b)", "коорд(B, K) = (c, d)", " f - точка", "коорд(A, K) = (h, i)", "коорд(f, K) = (j, k)", "коорд(f, K) = (p, q)", "коорд(B, K) = (r, s)", "коорд(вектор(Af), K) = (e, g)", "коорд(вектор(fB), K) = (l, m)".

Если список $x45$ непуст, то переменной $x46$ присваивается список утверждений набора $x43$, параметры которых пересекаются со списком $x45$. В нашем примере - утверждения "коорд(A, K) = (a, b)", "коорд(B, K) = (c, d)", "коорд(A, K) = (h, i)", "коорд(f, K) = (j, k)", "коорд(f, K) = (p, q)", "коорд(B, K) = (r, s)". Переменной $x47$ присваивается результат удаления из списка $x43$ утверждений $x46$. Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения $x47$, а условиями - утверждения $x46$. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные $x45$ ", "параметры $x45$ ", "исключ". Ответ присваивается переменной $x49$. В нашем примере получается константа "истина". Проверяется, что этот ответ отличен от "отказ" и не имеет переменных

списка x45. Если это не так, применение приема отменяется. Иначе переменной x43 переписывается список x47.

Наконец, создается импликация с антецедентами x43 и консеквентом x42. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Попытка рассмотреть операцию, значением которой служит атомарный объект, координаты которого определяются - с подстановкой определяющего операцию терма в результирующее тождество.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABKefglm}(\text{коорд}(\text{вектор}(fB), K) = (l, m) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(Af), K) = (e, g) \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (e + l, g + m))$$

из теоремы

$$\forall_{ABKabcd}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (c - a, d - b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(AB) + \text{вектор}(BC) = \text{вектор}(AC))$$

Исходная теорема определяет терм "коорд(вектор(AB), K)".

Программа приема отличается от программы предыдущего приема лишь завершающим шагом. В данном примере значения всех программных переменных такие же, как в предыдущем примере. Вместо создания завершающей импликации предыдущего приема выполняются следующие действия. Проверяется, что параметры определяемого терма исходной теоремы включаются в параметры утверждений списка x43. Переменной x46 присваивается равенство этого терма терму "набор(x41)". Затем создается импликация с антецедентами x43 и консеквентом x46. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Определяется одноместная операция над выражением из параметрического описания объектов заданного типа. Предпринимается попытка вычислить ее значение на других одноместных и двуместных операциях раздела (без исключения параметров).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abde}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \neg(d^2 + e^2 = 0) \rightarrow \text{Re}((a + bi)/(d + ei)) = (ad + be)/(d^2 + e^2))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{Re}(a + bi) = a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$$

Исходная теорема определяет терм "Re($a + bi$)".

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x11 присваивается вхождение определяющей части. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Проверяется, что число корневых операндов определяемого терма равно 1. Переменной x13 присваивается заголовок этого операнда. В нашем примере - комплексное сложение "Плюс". Переменной x15 присваивается тип значения выражений с заголовком x13. В нашем примере - "комплексное". Справочник "парамописание" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается результат переобозначения в дополнительной теореме ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x18 совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x19 присваивается вхождение консеквента теоремы x18. Проверяется, что этот консеквент - эквивалентность. Переменной x20 присваивается вхождение той ее части, которая имеет заголовок x15, переменной x21 - вхождение части, заголовком которой служит квантор существования. Проверяется, что теорема x18 не имеет антецедентов. Переменной x22 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. В нашем примере - " $x - \text{число}$ ", " $y - \text{число}$ ", " $z = x + iy$ ". Среди них находится равенство x23 переменной x24 некоторому выражению x25. Проверяется, что по вхождению x20 расположен терм " $x15(x24)$ ". В нашем примере x24 - переменная z , x25 - выражение " $x + iy$ ". Переменной x26 присваивается корневой операнд определяемого терма исходной теоремы. В нашем примере - " $a + bi$ ". Переменной x27 присваивается список параметров терма x26. Проверяется, что этот список включает все переменные исходной теоремы. В нашем примере x27 - a, b . Определяется подстановка S вместо переменных x27, переводящая терм x26 в x25. Переменной x29 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям x12. В нашем примере - " $x - \text{число}$ ", " $y - \text{число}$ ".

Вводится пустые накопители x30 и x31. Просматриваются утверждения x32 списка x29. Если вспомогательная задача на доказательство не усматривает, что x32 - следствие утверждений x22, то утверждение x32 заносится в накопитель x31.

По окончании просмотра утверждений x32 все переменные начиная с x32 снова оказываются не определены. Если при этом список x31 оказался непуст, то предпринимаются следующие действия. Переменной x32 присваивается список параметров термов x31. Переменной x33 присваивается список переменных, не входящих в термы списка x22, имеющий ту же длину, что и список x32. Переменной x34 присваивается список равенств переменных x33 соответствующим переменным x32. Решается задача на описание x35, посылки которой - утверждения x22, условия - равенства x34. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x33", "известно x24". Переменной x36 присваивается ответ. Проверяется, что он отличен от символа "отказ". Переменной x37 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x36, переменной x38 - список правых частей равенств для переменных x33, имеющих в списке x37.

Проверяется, что длины наборов x_{38} и x_{33} равны. Переменной x_{39} присваивается набор результатов подстановки термов x_{38} вместо переменных x_{32} в утверждения x_{31} . Конъюнкция утверждений x_{39} упрощается задачей на преобразование относительно единственной посылки - подтерма x_{20} . Затем список x_{30} заменяется на набор конъюнктивных членов результата упрощения. Если описанные действия при непустом списке x_{31} не выполнены, прием не реализуется.

После описанных действий все переменные начиная с x_{31} оказываются не определены. В нашем примере x_{30} - пустой список.

Переменной x_{31} присваивается 0. Для доопределения ее значения выполняются следующие действия. Переменной x_{32} присваивается заголовок определяющей части теоремы. Если он является логическим символом, то проверяется, что x_{15} принадлежит списку возможных типов значения выражений с заголовком x_{32} . Переменной x_{34} присваивается список результатов подстановки определяющего терма вместо переменной x_{24} в утверждения x_{22} . Решается задача на описание x_{36} , посылки которой суть утверждения x_{12} , а условия - x_{34} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные X ", где X - связывающая приставка квантора существования x_{21} . Если на задачу x_{36} получен ответ, отличный от символа "отказ", то x_{31} переопределяется на 1. В нашем примере x_{31} остается равно 0.

После доопределения значения x_{31} все переменные, начиная с x_{32} , снова оказываются не определены. Переменной x_{32} присваивается название раздела, к которому относится символ x_{15} . В нашем примере - "комплексные числа". Среди символов раздела x_{32} выбирается символ x_{34} одноместной либо двуместной операции. В нашем примере - "Дробь". Проверяется, что среди возможных типов значения выражений с заголовком x_{34} имеется символ x_{15} . В случае одноместного символа переменной x_{37} присваивается выражение " $x_{34}(X_1)$ ", в случае двуместного - " $x_{34}(X_1, X_2)$ ". Здесь X_1, X_2 - первая и вторая переменные ЛОСа. В нашем примере x_{37} имеет вид - "Дробь(a, b)". Используя обычную формульную запись - " a/b ". Проверяется, что для каждого параметра p терма x_{37} утверждение " $x_{15}(p)$ " является сопровождающим по о.д.з. для x_{37} .

Вводятся пустые накопители $x_{39}, x_{40}, x_{41}, x_{42}, x_{43}$. Для каждого номера x_{44} операнда операции x_{34} (в нашем примере - для $x_{44} = 1$ и $x_{44} = 2$) выполняются следующие действия. Переменной x_{45} присваивается список переменных, не входящих в накопитель x_{39} уже введенных новых переменных, причем длина этого списка равна длине списка x_{27} . Все эти переменные сразу регистрируются в накопителе x_{39} . Выбирается переменная x_{46} , отсутствующая в накопителе x_{39} . Она регистрируется в списках x_{39} и x_{42} . В накопитель x_{40} добавляются результаты замены переменных x_{27} на x_{45} в антецедентах x_{12} исходной теоремы. Переменной x_{47} присваивается результат замены переменных x_{27} на x_{45} в терме x_{26} , причем этот результат регистрируется в накопителе x_{41} . Переменной x_{48} присваивается результат замены переменных x_{27} на x_{45} в определяющей части x_{11} исходной теоремы. Наконец, в накопитель x_{43} заносится равенство термов x_{46} и x_{47} , а также равенство термов $H(46)$ и x_{48} . Здесь H - заголовок определяемой части исходной теоремы. В нашем примере - *Re*.

В нашем примере, по окончании указанного цикла, будем иметь: в накопителе x39 переменные a, b, c, d, e, f ; в накопителе x40 - утверждения " a - число", " b - число", " d - число", " e - число"; в накопителе x41 - " $a + bi$ " и " $d + ei$ "; в накопителе x42 - c, f ; в накопителе x43 - " $c = a + bi$ ", " $Re(c) = a$ ", " $f = d + ei$ ", " $Re(f) = d$ ".

Переменной x45 присваивается список переменных, не входящих в x39, причем длина его равна длине списка x27. Все эти переменные добавляются к списку x39. Выбирается переменная x46, не входящая в x39, и она тоже заносится в список x39. В нашем примере x45 - g, h ; x46 - i . Чтобы не путать переменную i с мнимой единицей i , будем далее пометить эту переменную штрихом. Переменной x47 присваивается текущее состояние списка x40, после чего к списку x40 добавляются результаты замены в утверждениях x12 переменных x27 на переменные x45. Переменной x48 присваивается результат такой же замены переменных в терме x26. В нашем примере - " $g + hi$ ". Переменной x49 присваивается результат соединения операцией x34 выражений x41. В нашем примере - " $(a + bi)/(d + ei)$ ". Переменной x50 присваивается текущее состояние списка x40. Затем к списку x40 добавляются равенство выражений x49 и x48, а также все утверждения, необходимые для сопровождения этого равенства по о.д.з. Переменной x51 присваивается результат замены переменных x27 на переменные x45 в определяющей части x11 исходной теоремы. Переменной x52 присваивается равенство выражений x46 и x51. В нашем примере - " $i' = g$ ".

Далее решается задача на описание x53, посылками которой служат утверждения x40, а единственным условием - равенство x52. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x46", "известно P ", где P - все параметры выражений x41. В нашем примере эти параметры суть a, b, d, e , а посылками служат следующие утверждения:

" a - число", " b - число", " d - число", " e - число", " g - число", " h - число", " $(a + bi)/(d + ei) = g + hi$ ", " h - комплексное", " g - комплексное", " e - комплексное", " d - комплексное", " b - комплексное", " a - комплексное", " $\neg(d + ei = 0)$ ".

Неизвестной является переменная i' . Ответ задачи x53 присваивается переменной x54. В нашем примере он имеет вид " $i' = (ad + be)/(d^2 + e^2)$ ". Проверяется, что ответ представляет собой равенство, не содержащее подтерма x49 и заголовка Z определяемой части исходной теоремы (в нашем примере - символа Re). Переменной x55 присваивается правая часть равенства x54. Предпринимается попытка упростить ее вспомогательной задачей на преобразование относительно посылок x50. Переменной x56 присваивается результат обработки терма x49 относительно посылок x47 нормализаторами общей стандартизации. В нашем примере x49 не изменяется. Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" термов x49 и x56 совпадают. Переменной x57 присваивается равенство выражения $Z(x49)$ правой части равенства x54. Переменной x58 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка x47, к которому добавлены утверждения, необходимые для сопровождения по о.д.з. выражения x49. Создается импликация с антецедентами x58 и консеквентом x57. Она регистрируется в списке вывода.

6. Определяется одноместная операция над выражением из параметрического описания объектов заданного типа. Предпринимается попытка вычислить ее значение на других одноместных и двуместных операциях раздела (с исключением параметров).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\operatorname{Re}(c/f) = (\operatorname{Re}(c)\operatorname{Re}(f) + \operatorname{Im}(c)\operatorname{Im}(f))/|f|^2$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \operatorname{Re}(a + bi) = a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$$

Исходная теорема определяет терм " $\operatorname{Re}(a + bi)$ ".

Начало программы приема и его действия в данном примере дословно совпадают с предыдущим пунктом. Повторять их не будем. Отличия начинаются с того момента, как в предыдущем приеме происходило определение терма х56. Теперь переменной х56 присваивается объединение списков х50 и х43. В нашем примере х56 состоит из следующих утверждений: " $a - \text{число}$ ", " $b - \text{число}$ ", " $d - \text{число}$ ", " $e - \text{число}$ ", " $g - \text{число}$ ", " $h - \text{число}$ ", " $c = a + bi$ ", " $\operatorname{Re}(c) = a$ ", " $f = d + ei$ ", " $\operatorname{Re}(f) = d$ ". Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения х56, а единственным условием - равенство выражений х46 и х55. В нашем примере - " $i' = (ad + be)/(d^2 + e^2)$ ". Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "неизвестные х46", "известно х42". В нашем примере неизвестной является i , известными параметрами - c, f . Ответ задачи присваивается переменной х58. В нашем примере он имеет вид " $i' = (\operatorname{Re}(c)\operatorname{Re}(f) + \operatorname{Im}(c)\operatorname{Im}(f))/(\operatorname{Re}(f)^2 + \operatorname{Im}(f)^2)$ ". Проверяется, что этот ответ представляет собой равенство с переменной х46 в левой части. Пусть Z , как и в предыдущем пункте, обозначает заголовок определяемой части исходной теоремы. В нашем примере - Re . Обозначим также через T результат соединения операцией х34 переменных х42. В нашем примере - " c/f ". Переменной х59 присваивается равенство выражения $Z(T)$ правой части равенства х58.

Переменной х60 присваивается набор результатов подстановки в утверждения списка х30 переменных списка х42 вместо переменной х24. В нашем примере список х60 пуст. Оператор "деблок" включает применение приемов, основанных на уже полученных теоремах списка вывода. В нашем примере таким образом оказывается разблокирован прием, усматривающий в сумме квадратов вещественной и мнимой частей квадрат модуля. Затем создается импликация, антецеденты которой суть утверждения х15(Y) для всевозможных переменных Y списка х42, утверждения х60, а также утверждения, необходимые для сопровождения по о.д.з. левой части равенства х59 и утверждений списка х43. Ее консеквентом служит равенство х59. Данная импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

7. Определяется одноместная операция f над выражением, задающим общий вид объектов некоторого типа. Предпринимается попытка выразить ее значение на других одноместных и двуместных операциях раздела через значения f от их операндов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cf}(\neg(f = 0) \ \& \ c - \text{комплексное} \ \& \ f - \text{комплексное} \rightarrow \text{сопряженное}(c/f) = \text{сопряженное}(c)/\text{сопряженное}(f))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{сопряженное}(a + bi) = a - bi)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$$

Заметим, что предыдущий прием, применяемый к тем же теоремам, будет выражать сопряженное к дроби через вещественную и мнимую части числителя и знаменателя весьма громоздким образом. Чтобы выразить его через величины, сопряженные с числителем и знаменателем, и понадобился данный прием.

Начало программы приема совпадает с началами программ двух предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим это начало. Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x11 присваивается входение определяющей части. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Проверяется, что число корневых операндов определяемого терма равно 1. Переменной x13 присваивается заголовок этого операнда. В нашем примере - комплексное сложение "Плюс". Переменной x15 присваивается тип значения выражений с заголовком x13. В нашем примере - "комплексное". Справочник "парамописание" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается результат переобозначения в дополнительной теореме ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x18 совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x19 присваивается входение консеквента теоремы x18. Проверяется, что этот консеквент - эквивалентность. Переменной x20 присваивается входение той ее части, которая имеет заголовок x15, переменной x21 - входение части, заголовком которой служит квантор существования. Проверяется, что теорема x18 не имеет антецедентов. Переменной x22 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. В нашем примере - " $x - \text{число}$ ", " $y - \text{число}$ ", " $z = x + iy$ ". Среди них находится равенство x23 переменной x24 некоторому выражению x25. Проверяется, что по входению x20 расположен терм " $x15(x24)$ ". В нашем примере x24 - переменная z , x25 - выражение " $x + iy$ ". Переменной x26 присваивается корневой операнд определяемого терма исходной теоремы. В нашем примере - " $a + bi$ ". Переменной x27 присваивается список параметров терма x26. Проверяется, что этот список включает все переменные исходной теоремы. В нашем примере x27 - a, b . Определяется подстановка S вместо переменных x27, переводящая терм x26 в x25. Переменной x29 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям x12. В нашем примере - " $x - \text{число}$ ", " $y - \text{число}$ ".

Вводится пустые накопители x_{30} и x_{31} . Просматриваются утверждения x_{32} списка x_{29} . Если вспомогательная задача на доказательство не усматривает, что x_{32} - следствие утверждений x_{22} , то утверждение x_{32} заносится в накопитель x_{31} .

По окончании просмотра утверждений x_{32} все переменные начиная с x_{32} снова оказываются не определены. Если при этом список x_{31} оказался непуст, то предпринимаются следующие действия. Переменной x_{32} присваивается список параметров термов x_{31} . Переменной x_{33} присваивается список переменных, не входящих в термы списка x_{22} , имеющий ту же длину, что и список x_{32} . Переменной x_{34} присваивается список равенств переменных x_{33} соответствующим переменным x_{32} . Решается задача на описание x_{35} , посылки которой - утверждения x_{22} , условия - равенства x_{34} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{33} ", "известно x_{24} ". Переменной x_{36} присваивается ответ. Проверяется, что он отличен от символа "отказ". Переменной x_{37} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{36} , переменной x_{38} - список правых частей равенств для переменных x_{33} , имеющих в списке x_{37} . Проверяется, что длины наборов x_{38} и x_{33} равны. Переменной x_{39} присваивается набор результатов подстановки термов x_{38} вместо переменных x_{32} в утверждения x_{31} . Конъюнкция утверждений x_{39} упрощается задачей на преобразование относительно единственной посылки - подтерма x_{20} . Затем список x_{30} заменяется на набор конъюнктивных членов результата упрощения. Если описанные действия при непустом списке x_{31} не выполнены, прием не реализуется.

После описанных действий все переменные начиная с x_{31} оказываются не определены. В нашем примере x_{30} - пустой список.

Переменной x_{31} присваивается 0. Для доопределения ее значения выполняются следующие действия. Переменной x_{32} присваивается заголовок определяющей части теоремы. Если он является логическим символом, то проверяется, что x_{15} принадлежит списку возможных типов значения выражений с заголовком x_{32} . Переменной x_{34} присваивается список результатов подстановки определяющего терма вместо переменной x_{24} в утверждения x_{22} . Решается задача на описание x_{36} , посылки которой суть утверждения x_{12} , а условия - x_{34} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные X ", где X - связывающая приставка квантора существования x_{21} . Если на задачу x_{36} получен ответ, отличный от символа "отказ", то x_{31} переопределяется на 1. В нашем примере x_{31} остается равно 0.

После доопределения значения x_{31} все переменные, начиная с x_{32} , снова оказываются не определены. Переменной x_{32} присваивается название раздела, к которому относится символ x_{15} . В нашем примере - "комплексные числа". Среди символов раздела x_{32} выбирается символ x_{34} одноместной либо двуместной операции. В нашем примере - "Дробь". Проверяется, что среди возможных типов значения выражений с заголовком x_{34} имеется символ x_{15} . В случае одноместного символа переменной x_{37} присваивается выражение " $x_{34}(X_1)$ ", в случае двуместного - " $x_{34}(X_1, X_2)$ ". Здесь X_1, X_2 - первая и вторая переменные ЛОСа. В нашем примере x_{37} имеет вид - "Дробь(a, b)". Используя обычную

формульную запись - " a/b ". Проверяется, что для каждого параметра p терма x_{37} утверждение " $x_{15}(p)$ " является сопровождающим по о.д.з. для x_{37} .

Вводятся пустые накопители x_{39} , x_{40} , x_{41} , x_{42} , x_{43} . Для каждого номера x_{44} операнда операции x_{34} (в нашем примере - для $x_{44} = 1$ и $x_{44} = 2$) выполняются следующие действия. Переменной x_{45} присваивается список переменных, не входящих в накопитель x_{39} уже введенных новых переменных, причем длина этого списка равна длине списка x_{27} . Все эти переменные сразу регистрируются в накопителе x_{39} . Выбирается переменная x_{46} , отсутствующая в накопителе x_{39} . Она регистрируется в списках x_{39} и x_{42} . В накопитель x_{40} добавляются результаты замены переменных x_{27} на x_{45} в антецедентах x_{12} исходной теоремы. Переменной x_{47} присваивается результат замены переменных x_{27} на x_{45} в терме x_{26} , причем этот результат регистрируется в накопителе x_{41} . Переменной x_{48} присваивается результат замены переменных x_{27} на x_{45} в определяющей части x_{11} исходной теоремы. Наконец, в накопитель x_{43} заносятся равенство термов x_{46} и x_{47} , а также равенство термов $H(46)$ и x_{48} . Здесь H - заголовок определяемой части исходной теоремы. В нашем примере - "сопряженное".

В нашем примере, по окончании указанного цикла, будем иметь: в накопителе x_{39} переменные a, b, c, d, e, f ; в накопителе x_{40} - утверждения " a - число", " b - число", " d - число", " e - число"; в накопителе x_{41} - " $a + bi$ " и " $d + ei$ "; в накопителе x_{42} - c, f ; в накопителе x_{43} - " $c = a + bi$ ", "сопряженное(c) = $a - bi$ ", " $f = d + ei$ ", "сопряженное(f) = $d - ei$ ".

Переменной x_{45} присваивается список переменных, не входящих в x_{39} , причем длина его равна длине списка x_{27} . Все эти переменные добавляются к списку x_{39} . Выбирается переменная x_{46} , не входящая в x_{39} , и она тоже заносится в список x_{39} . В нашем примере x_{45} - g, h ; x_{46} - i . Чтобы не путать переменную i с мнимой единицей, помечаем ее далее штрихом. Переменной x_{47} присваивается текущее состояние списка x_{40} , после чего к списку x_{40} добавляются результаты замены в утверждениях x_{12} переменных x_{27} на переменные x_{45} . Переменной x_{48} присваивается результат такой же замены переменных в терме x_{26} . В нашем примере - " $g + hi$ ". Переменной x_{49} присваивается результат соединения операций x_{34} выражений x_{41} . В нашем примере - " $(a+bi)/(d+ei)$ ". Переменной x_{50} присваивается текущее состояние списка x_{40} . Затем к списку x_{40} добавляются равенство выражений x_{49} и x_{48} , а также все утверждения, необходимые для сопровождения этого равенства по о.д.з. Переменной x_{51} присваивается результат замены переменных x_{27} на переменные x_{45} в определяющей части x_{11} исходной теоремы. Переменной x_{52} присваивается равенство выражений x_{46} и x_{51} . В нашем примере - " $i' = g - hi$ ".

Дальше начинаются отличия. Прежде всего, проверяется, что в списке вывода пока не получено тождество требуемого вида. В нашем примере - тождество, выражающее выражение вида "сопряженное(Дробь(X, Y))", где X, Y - переменные, через величины, сопряженные X, Y . После этого переменной x_{53} присваивается заголовок определяемой части x_8 . В нашем примере - символ "сопряженное". Переменной x_{54} присваивается список переменных, не входящих в набор x_{39} , причем длина этого списка равна длине списка x_{42} . В нашем примере x_{54} состоит из переменных j, k . Переменной x_{55} присваивается список правых частей равенств списка x_{43} , заголовком левой части которых служит

символ x_{53} . В нашем примере x_{55} состоит из выражений " $a - bi$ ", " $d - ei$ ". Переменной x_{56} присваивается результат добавления к списку x_{40} равенств переменных x_{54} соответствующим выражениям x_{55} . В нашем примере - равенств " $j = a - bi$ ", " $k = d - ei$ ". Список x_{56} пополняется указателями типа значения переменных x_{54} . В нашем примере - " j - комплексное", " k - комплексное".

Решается задача на описание x_{57} , посылками которой служат утверждения x_{56} , а единственным условием - равенство x_{52} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "неизвестные x_{46} ", "известно x_{54} ". В нашем примере посылками служат утверждения " a - число", " b - число", " d - число", " e - число", " g - число", " h - число", " $(a + bi)/(d + ei) = g + hi$ ", " h - комплексное", " g - комплексное", " e - комплексное", " d - комплексное", " b - комплексное", " a - комплексное", " $\neg(d + ei = 0)$ ", " $j = a - bi$ ", " $k = d - ei$ ", " j - комплексное", " k - комплексное". Условие имеет вид " $i' = g - hi$ ", неизвестная - i' , известные параметры - j, k .

Ответ задачи присваивается переменной x_{58} . В нашем примере он имеет вид " $i' = (-ji\text{Im}(k) + j\text{Re}(k))/(\text{Re}(k)^2 + \text{Im}(k)^2)$ ".

Проверяется, что x_{58} - равенство. Переменной x_{59} присваивается список левых частей равенств набора x_{43} . В нашем примере - "сопряженное(c)", "сопряженное(f)". Переменной x_{60} присваивается результат подстановки выражений x_{59} вместо переменных x_{54} в правую часть равенства x_{58} , переменной x_{61} - равенство терма " $x_{53}(x_{34}(x_{42}))$ " терму x_{60} . В нашем примере x_{61} имеет вид:

$$\text{"сопряженное}(c/f) = (-\text{сопряженное}(c)i\text{Im}(\text{сопряженное}(f)) + \text{сопряженное}(c)\text{Re}(\text{сопряженное}(f)))/(\text{Re}(\text{сопряженное}(f))^2 + \text{Im}(\text{сопряженное}(f))^2)$$

Переменной x_{62} присваивается набор результатов подстановки в утверждения списка x_{30} переменных списка x_{42} вместо переменной x_{24} . В нашем примере список x_{62} пуст. Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения $x_{15}(Y)$ для всевозможных переменных Y списка x_{42} , утверждения x_{62} , а также утверждения, необходимые для сопровождения по о.д.з. левой части равенства x_{61} и утверждений списка x_{43} . Ее консеквентом служит равенство x_{61} . Данная импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. При этом используются некоторые приемы, связанные с вещественной и мнимой частями, а также прием, усматривающий, что модуль сопряженного числа равен модулю этого числа. Он не заблокирован, так как основан на теореме, относящейся к другой ячейке вывода - связанной со свойствами модуля.

8. Усмотрение возможности выразить все параметры параметрического описания объектов заданного типа через одноместные операции от этого объекта.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_z (z - \text{комплексное} \rightarrow \text{Re}(z) + i\text{Im}(z) = z)$$

из теоремы

$$\forall_{ab} (a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{Im}(a + bi) = b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$$

Переменной x_8 присваивается определяемая часть. Проверяется, что консеквент - равенство, и переменной x_{11} присваивается вхождение определяющей части. Переменной x_{12} присваивается символ по вхождению x_{11} . В нашем примере - b . Проверяется, что x_{12} - переменная, терм x_8 неповторный, а число его корневых операндов равно 1. Переменной x_{13} присваивается заголовок корневого операнда терма x_8 , переменной x_{15} - тип значения выражений с заголовком x_{13} . В нашем примере - "комплексное". Справочник поиска теорем "определение" находит по x_{15} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{16} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{16} совпадает с дополнительной теоремой. Проверяется, что x_{16} - кванторная импликация без антецедентов, а ее консеквент - эквивалентность. Переменной x_{20} присваивается вхождение той части консеквента, которая имеет заголовок x_{15} , переменной x_{21} - вхождение другой части. Проверяется, что по вхождению x_{21} расположен квантор существования. Переменной x_{22} присваивается набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Переменной x_{23} присваивается элемент набора x_{22} , представляющий собой равенство некоторой переменной x_{24} выражению x_{25} . В нашем примере x_{24} - z , x_{25} - " $x + iy$ ". Проверяется, что x_{20} имеет вид " $x_{15}(x_{24})$ ". Переменной x_{26} присваивается корневой операнд терма x_8 . В нашем примере - " $a + bi$ ". Переменной x_{27} присваивается список параметров терма x_{26} . Проверяется, что он охватывает все переменные исходной теоремы.

Определяется подстановка S вместо переменных x_{27} , переводящая терм x_{26} в терм x_{25} . Переменной x_{30} присваивается набор результатов поименения подстановки S к антецедентам исходной теоремы. В нашем примере - " x - число", " y - число". Проверяется, что x_{30} - подсписок списка x_{22} . Переменной x_{31} присваивается терм $Z(x_{24})$, где Z - заголовок терма x_8 . В нашем примере x_{31} имеет вид " $\text{Im}(z)$ ". Переменной x_{32} присваивается выражение, подставляемое подстановкой S вместо переменной b . Проверяется, что это выражение - некоторая переменная x_{33} . В нашем примере - y . Переменной x_{34} присваивается список отличных от x_{33} параметров терма x_{25} . В нашем примере - единственная переменная x . Проверяется, что список x_{34} непуст. Переменной x_{35} присваивается подтерм по вхождению x_{20} , переменной x_{36} - список параметров этого подтерма. В нашем примере x_{35} имеет вид " z - комплексное", x_{36} - единственная переменная z . Проверяется, что список x_{36} одноэлементный.

Решается задача на описание, имеющая единственную посылку x_{35} и условия x_{22} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "неизвестные x_{34} ", "известно x_{36} ". В нашем примере условия суть " x - число", " y - число", " $z = x + iy$ ". Неизвестная - x , известный параметр - z . Ответ задачи присваивается переменной x_{39} . В нашем примере он имеет вид " $x = \text{Re}(z)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{40} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{39} , переменной x_{41} - список правых частей равенств в x_{40} , определяющих значения неизвестных. В нашем примере - одноэлементный список, состоящий из выражения $\text{Re}(z)$. Переменной x_{42} присваивается

результат добавления переменной x33 перед списком x34, переменной x43 - результат добавления терма x31 перед списком x41. Переменной x44 присваивается результат подстановки термов x43 вместо переменных x42 в терм x25. В нашем примере - " $\text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$ ". Переменной x45 присваивается импликация с единственным антецедентом x35, консеквентом которой служит равенство выражения x44 переменной списка x36. Она регистрируется в списке вывода.

9. Попытка выразить определяемую одноместную операцию над выражением из параметрического описания объектов заданного типа через ранее определенные операции над такими объектами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_z (z - \text{комплексное} \rightarrow \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2} = |z|)$$

из теоремы

$$\forall_{ab} (a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_z (z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy} (x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы одного из последних приемов. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x11 присваивается входение определяющей части. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Проверяется, что число корневых операндов определяемого терма равно 1. Переменной x13 присваивается заголовок этого операнда. В нашем примере - комплексное сложение "Плюс". Переменной x15 присваивается тип значения выражений с заголовком x13. В нашем примере - "комплексное". Справочник "парамописание" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается результат переобозначения в дополнительной теореме ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x18 совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x19 присваивается входение консеквента теоремы x18. Проверяется, что этот консеквент - эквивалентность. Переменной x20 присваивается входение той ее части, которая имеет заголовок x15, переменной x21 - входение части, заголовком которой служит квантор существования. Проверяется, что теорема x18 не имеет антецедентов. Переменной x22 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. В нашем примере - " $x - \text{число}$ ", " $y - \text{число}$ ", " $z = x + iy$ ". Среди них находится равенство x23 переменной x24 некоторому выражению x25. Проверяется, что по входению x20 расположен терм " $x15(x24)$ ". В нашем примере x24 - переменная z , x25 - выражение " $x + iy$ ". Переменной x26 присваивается корневой операнд определяемого терма исходной теоремы. В нашем примере - " $a + bi$ ". Переменной x27 присваивается список параметров терма x26. Проверяется, что этот список включает все переменные исходной теоремы. В нашем примере x27 - a, b . Определяется подстановка S вместо переменных x27, переводящая терм x26 в x25. Переменной x29 присваивается список результатов

применения подстановки S к утверждениям x_{12} . В нашем примере - " x – число", " y – число".

Вводится пустые накопители x_{30} и x_{31} . Просматриваются утверждения x_{32} списка x_{29} . Если вспомогательная задача на доказательство не усматривает, что x_{32} - следствие утверждений x_{22} , то утверждение x_{32} заносится в накопитель x_{31} .

По окончании просмотра утверждений x_{32} все переменные начиная с x_{32} снова оказываются не определены. Если при этом список x_{31} оказался непуст, то предпринимаются следующие действия. Переменной x_{32} присваивается список параметров термов x_{31} . Переменной x_{33} присваивается список переменных, не входящих в термы списка x_{22} , имеющий ту же длину, что и список x_{32} . Переменной x_{34} присваивается список равенств переменных x_{33} соответствующим переменным x_{32} . Решается задача на описание x_{35} , посылки которой - утверждения x_{22} , условия - равенства x_{34} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{33} ", "известно x_{24} ". Переменной x_{36} присваивается ответ. Проверяется, что он отличен от символа "отказ". Переменной x_{37} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{36} , переменной x_{38} - список правых частей равенств для переменных x_{33} , имеющих в списке x_{37} . Проверяется, что длины наборов x_{38} и x_{33} равны. Переменной x_{39} присваивается набор результатов подстановки термов x_{38} вместо переменных x_{32} в утверждения x_{31} . Конъюнкция утверждений x_{39} упрощается задачей на преобразование относительно единственной посылки - подтерма x_{20} . Затем список x_{30} заменяется на набор конъюнктивных членов результата упрощения. Если описанные действия при непустом списке x_{31} не выполнены, прием не реализуется.

После описанных действий все переменные начиная с x_{31} оказываются не определены. В нашем примере x_{30} - пустой список.

Дальше начинаются отличия. Выбирается переменная x_{31} , не входящая в теорему x_{18} . В нашем примере - a . Переменной x_{32} присваивается результат применения подстановки S к определяющей части исходной теоремы. В нашем примере - " $\sqrt{x^2 + y^2}$ ".

Решается задача на описание с посылками x_{22} и единственным условием "равно(x_{31} x_{32})". Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{31} ", "известно x_{24} ". В нашем примере посылки суть: " x – число", " y – число", " $z = x + iy$ ". Условие - равенство " $a = \sqrt{x^2 + y^2}$ ". Неизвестная - a , известный параметр - z . Ответ присваивается переменной x_{34} . В нашем примере он имеет вид " $a = \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Среди его конъюнктивных членов выбирается равенство x_{35} с переменной x_{31} в левой части. Переменной x_{36} присваивается правая часть равенства. Переменной x_{37} присваивается равенство выражения x_{36} выражению $Z(x_{24})$. Здесь Z - заголовок определяемой части. В нашем примере x_{37} имеет вид " $\sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2} = |z|$ ". Проверяется, что левая часть равенства x_{37} не совпадает с правой. Затем создается импликация, антецеденты которой суть подтерм по вхождению x_{20} и утверждения x_{30} , а консеквентом служит равенство x_{37} . Она регистрируется в списке вывода.

10. Переход к альтернативному параметрическому описанию объектов данного типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{xy}(0 < x \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \rightarrow \arg(x + yi) = \arctg(y/x))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 < b + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - b \ \& \ 0 < a \ \rightarrow \arg(a(\cos b + i \sin b)) = b)$$

и дополнительных теорем

$$\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ -\pi < b \ \& \ b \leq \pi \ \& \ 0 \leq a \ \& \ z = a(\cos b + i \sin b)))$$

$$\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x11 присваивается вхождение определяющей части. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Проверяется, что число корневых операндов определяемого терма равно 1. Переменной x13 присваивается заголовок этого операнда. В нашем примере - комплексное умножение "Умножение". Переменной x15 присваивается тип значения выражений с заголовком x13. В нашем примере - "комплексное". Справочник "парамописание" определяет по x15 указанную выше первую дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается результат переобозначения в дополнительной теореме ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x18 имеет вид:

$$\forall_e(e - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{cd}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ -\pi < d \ \& \ d \leq \pi \ \& \ 0 \leq c \ \& \ e = c(\cos d + i \sin d)))$$

Переменной x19 присваивается вхождение консеквента теоремы x18. Проверяется, что этот консеквент - эквивалентность. Переменной x20 присваивается вхождение той ее части, которая имеет заголовок x15, переменной x21 - вхождение части, заголовком которой служит квантор существования. Проверяется, что теорема x18 не имеет антецедентов. Переменной x22 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. В нашем примере - "c - число", "d - число", "-π < d", "d ≤ π", "0 ≤ c", "e = c(cos d + i sin d)". Среди них находится равенство x23 переменной x24 некоторому выражению x25. Проверяется, что по вхождению x20 расположен терм "x15(x24)". В нашем примере x24 - переменная e, x25 - выражение "c(cos d + i sin d)". Переменной x26 присваивается корневой операнд определяемого терма исходной теоремы. В нашем примере - "a(cos b + i sin b)". Переменной x27 присваивается список параметров терма x26. Проверяется, что этот список включает все переменные исходной теоремы. В нашем примере x27 - a, b. Определяется подстановка S вместо переменных x27, переводящая терм x26 в x25.

Переменной x_{29} присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям x_{12} . В нашем примере - " c – число", " d – число", " $0 < d + \pi$ ", " $0 \leq \pi - d$ ", " $0 < c$ ".

Дальше начинаются отличия. Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по символу x_{15} указанную выше вторую дополнительную теорему, отличную от первой. Проверяется, что она не имеет антецедентов, после чего переменной x_{32} присваивается результат переобозначения в этой теореме переменных на переменные, не входящие в исходную теорему и в первую дополнительную. В нашем примере x_{32} совпадает со второй дополнительной теоремой. Переменной x_{33} присваивается объединение списка x_{29} с отличными от x_{23} утверждениями списка x_{22} . Переменной x_{34} присваивается вхождение консеквента второй дополнительной теоремы. Переменной x_{35} присваивается вхождение той части эквивалентности x_{34} , которая имеет заголовок x_{15} , переменной x_{36} - вхождение другой части, представляющей собой квантор существования. Переменной x_{37} присваивается та переменная, которая служит корневым операндом вхождения x_{35} . В нашем примере - z . Переменной x_{38} присваивается результат подстановки в подтерм x_{36} выражения x_{25} вместо переменной x_{37} . В нашем примере он имеет вид:

$$\exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ c(\cos d + i \sin d) = x + iy)$$

Переменной x_{39} присваивается список параметров утверждений x_{33} . В нашем примере - c, d . Переменной x_{40} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования x_{38} . Переменной x_{41} присваивается список всех утверждений набора x_{40} , не имеющих своими параметрами переменных x_{39} . Проверяется, что этот список непуст. Переменной x_{42} присваивается результат добавления к списку x_{33} остальных утверждений набора x_{40} .

Решается задача на описание x_{43} , посылками которой служат утверждения x_{41} , а условиями - утверждения x_{42} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "неизвестные x_{39} ".

В нашем примере посылки задачи суть " x – число", " y – число". Условия суть: " c – число", " d – число", " $0 < d + \pi$ ", " $0 \leq \pi - d$ ", " $0 < c$ ", " $-\pi < d$ ", " $d \leq \pi$ ", " $0 \leq c$ ", " $c(\cos d + i \sin d) = x + iy$ ". Неизвестные суть переменные c, d .

Ответ задачи x_{43} присваивается переменной x_{44} . В нашем примере этот ответ имеет вид:

$$((d = -\text{arctg}(y/x) \ \& \ y < 0 \ \vee \ d = \pi + \text{arctg}(y/x) \ \& \ 0 \leq y) \ \& \ x < 0 \ \vee \ d = \text{arctg}(y/x) \ \& \ -1 < \text{arctg}(y/x)/\pi \ \& \ 0 < x) \ \& \ c = \sqrt{x^2 + y^2} \ \vee \ (c = y \ \& \ d = \pi/2 \ \& \ 0 < y \ \vee \ c = -y \ \& \ d = -\pi/2 \ \& \ y < 0) \ \& \ x = 0"$$

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{45} присваивается результат применения подстановки S к определяющей части x_{11} исходной теоремы. В нашем примере x_{45} - переменная d . Среди конъюнктивных членов утверждения под квантором x_{36} выбирается равенство x_{46} , в левой части которого находится переменная x_{37} . В нашем примере - равенство " $z = x + iy$ ". Переменной x_{47} присваивается выражение, заголовком которого

служит заголовок определяемой части исходной теоремы, а единственным корневым операндом - правая часть равенства x46. В нашем примере x47 имеет вид " $\arg(x + iy)$ ". Переменной x48 присваивается набор дизъюнктивных членов результата приведения к виду д.н.ф. ответа x44 задачи x43. Переменной x49 присваивается элемент набора x48. В нашем примере x49 - утверждение " $d = \arctg(y/x) \ \& \ -1 < \arctg(y/x)/\pi \ \& \ 0 < x \ \& \ c = \sqrt{x^2 + y^2}$ ". Переменной x50 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x49. Переменной x51 присваивается список равенств набора x50, в левых частях которых находятся переменные списка x39 (с сохранением порядка списка x39). Проверяется, что этих равенств столько же, сколько переменных x39. Переменной x52 присваивается список утверждений x50, не вошедших в список x51, переменной x53 - список правых частей равенств x51. В нашем примере x53 состоит из выражений " $\sqrt{x^2 + y^2}$ ", " $\arctg(y/x)$ ". Переменной x54 присваивается результат подстановки выражений x53 вместо переменных x39 в выражение x45. В нашем примере x54 имеет вид " $\arctg(y/x)$ ". Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x41 и x52, а консеквент - равенство выражений x47 и x54. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

11. Рассмотрение дополнительных упрощающих тождеств, позволяющих сократить операцию над определяемой операцией и ее операндом.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_z (z - \text{комплексное} \rightarrow z + \text{сопряженное}(z) = 2\text{Re}(z))$$

из теоремы

$$\forall_{ab} (a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{сопряженное}(a + bi) = a - bi)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_z (z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy} (x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x11 присваивается входение определяющей части. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Проверяется, что число корневых операндов определяемого терма равно 1. Переменной x13 присваивается заголовок этого операнда. В нашем примере - комплексное сложение "Плюс". Переменной x15 присваивается тип значения выражений с заголовком x13. В нашем примере - "комплексное". Справочник "парамописание" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается результат переобозначения в дополнительной теореме ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x18 совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x19 присваивается входение консеквента теоремы x18. Проверяется, что этот консеквент - эквивалентность. Переменной x20 присваивается входение той ее части, которая имеет заголовок x15, переменной x21 - входение части, заголовком которой служит квантор существования. Проверяется, что теорема x18 не имеет антецедентов. Переменной

x_{22} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. В нашем примере - " x - число", " y - число", " $z = x + iy$ ". Среди них находится равенство x_{23} переменной x_{24} некоторому выражению x_{25} . Проверяется, что по вхождению x_{20} расположен терм " $x_{15}(x_{24})$ ". В нашем примере x_{24} - переменная z , x_{25} - выражение " $x + iy$ ". Переменной x_{26} присваивается корневой операнд определяемого терма исходной теоремы. В нашем примере - " $a + bi$ ". Переменной x_{27} присваивается список параметров терма x_{26} . Проверяется, что этот список включает все переменные исходной теоремы. В нашем примере x_{27} - a, b . Определяется подстановка S вместо переменных x_{27} , переводящая терм x_{26} в x_{25} . Переменной x_{29} присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям x_{12} . В нашем примере - " x - число", " y - число".

Вводится пустые накопители x_{30} и x_{31} . Просматриваются утверждения x_{32} списка x_{29} . Если вспомогательная задача на доказательство не усматривает, что x_{32} - следствие утверждений x_{22} , то утверждение x_{32} заносится в накопитель x_{31} .

По окончании просмотра утверждений x_{32} все переменные начиная с x_{32} снова оказываются не определены. Если при этом список x_{31} оказался непуст, то предпринимаются следующие действия. Переменной x_{32} присваивается список параметров термов x_{31} . Переменной x_{33} присваивается список переменных, не входящих в термы списка x_{22} , имеющий ту же длину, что и список x_{32} . Переменной x_{34} присваивается список равенств переменных x_{33} соответствующим переменным x_{32} . Решается задача на описание x_{35} , посылки которой - утверждения x_{22} , условия - равенства x_{34} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "неизвестные x_{33} ", "известно x_{24} ". Переменной x_{36} присваивается ответ. Проверяется, что он отличен от символа "отказ". Переменной x_{37} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{36} , переменной x_{38} - список правых частей равенств для переменных x_{33} , имеющих в списке x_{37} . Проверяется, что длины наборов x_{38} и x_{33} равны. Переменной x_{39} присваивается набор результатов подстановки термов x_{38} вместо переменных x_{32} в утверждения x_{31} . Конъюнкция утверждений x_{39} упрощается задачей на преобразование относительно единственной посылки - подтерма x_{20} . Затем список x_{30} заменяется на набор конъюнктивных членов результата упрощения. Если описанные действия при непустом списке x_{31} не выполнены, прием не реализуется.

После описанных действий все переменные начиная с x_{31} оказываются не определены. В нашем примере x_{30} - пустой список.

Дальше начинаются отличия. Переменной x_{31} присваивается результат применения подстановки S к заменяющему выражению исходной теоремы. В нашем примере - " $x - yi$ ". Вводится пустой накопитель x_{32} . Для заполнения его предпринимаются следующие действия.

Переменной x_{33} присваивается заголовок выражения x_{25} . В нашем примере - "Плюс". Проверяется, что x_{33} - символ ассоциативной и коммутативной операции. Справочник поиска теорем "констнорм" перечисляет по символу x_{33} некоторые теоремы x_{34} , имеющие характеристику "нормализация(...)". В нашем

примере используется теорема " $\forall_a(a - \text{комплексное} \rightarrow a - a = 0)$ ". Переменной х38 присваивается набор х33-членов заменяемой части теоремы х34, переменной х39 - объединение х33-членов выражения х25 с х33-членами выражения х31. Переменной х40 присваивается список переменных термов х38. Процедура "реализация" проверяет существование подстановки вместо переменных х40, переводящей термы х38 в подмножество термов х39. Затем к списку х32 добавляется пара, первый элемент которой - выражение, полученное соединением операцией х33 переменной х24 и выражения, заголовок которого совпадает с заголовком определяемой части исходной теоремы, а единственный корневой операнд - переменная х24. Второй элемент пары - результат соединения операцией х33 выражений х25 и х31.

После просмотра всевозможных теорем х34 все переменные начиная с х34 оказываются снова не определены. В нашем примере на этот момент х32 состоит из единственной пары $(z + \text{сопряженное}(z), x + iy + x - yi)$.

Далее справочник поиска теорем "сокращлин" перечисляет по символу х33 некоторые теоремы х34, имеющие характеристику "сокращгрупп(...)". В нашем примере используется теорема " $\forall_{abc}(a - \text{комплексное} \& b - \text{комплексное} \& c - \text{комплексное} \rightarrow (a + b) - (a + c) = b - c)$ ". Переменной х39 присваивается набор операндов заменяемой части теоремы х34. В нашем примере - " $(a + b)$ " и " $-(a + c)$ ". Если какой-либо элемент набора х39 имеет своим заголовком одноместную операцию, то эта операция отбрасывается. Преобразование повторяется до тех пор, пока среди термов х39 не остается терма с корневой одноместной операцией. В нашем примере х39 приводится к виду " $a + b$ ", " $a + c$ ". Переменной х40 присваивается список переменных термов набора х39. В нашем примере - a, b, c . Перечисляются подстановки T вместо переменных х40, переводящие один из термов пары х39 в терм х25, а другой - в терм х31. Переменной х45 присваивается заменяемая часть теоремы х34. Переменной х48 присваивается результат замены в ней того из термов пары х39, который был переведен в х25, на переменную х24, а другого из термов х39 - на выражение, заголовок которого есть заголовок заменяемой части исходной теоремы, а корневой операнд равен х24. В нашем примере таким образом будут получаться: сначала разность " $z - \text{сопряженное}(z)$ ", а затем - " $\text{сопряженное}(z) - z$ ". В каждом из случаев к списку х32 будет добавляться пара, первый элемент которой равен х48, а второй получен применением подстановки T к терму х45.

В нашем примере список х32 после указанного пополнения оказывается состоящим из следующих пар:

$$(z + \text{сопряженное}(z), x + iy + x - yi), (z - \text{сопряженное}(z), (x + iy) - (x - yi)), \\ (\text{сопряженное}(z) - z, (x - yi) - (x + iy)).$$

По завершении заполнения накопителя х32 все переменные начиная с х33 оказываются не определены. Выбирается пара х33 набора х32. В нашем примере - первая из указанных выше пар. Переменной х34 присваивается второй ее элемент, переменной х35 - список всех отличных от х23 утверждений списка х22. При помощи вспомогательной задачи на преобразование выражение х34 упрощается относительно посылок х33. Результат присваивается переменной х37. В нашем примере получается $2x$. Переменной х38 присваивается переменная, не

входящая в теорему x18. В нашем примере - переменная a . Решается задача на описание x41, посылки которой получаются добавлением к списку x29 равенства выражений x24 и x25, а единственное условие - равенство выражений x38 и x37. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x38", "известно x24", "упростить".

В нашем примере посылки задачи суть " x - число", " y - число $z = x + yi$ ". Условие - " $a = 2x$ ". Неизвестной служит a , известным параметром - z .

Ответ задачи x41 присваивается переменной x42. В нашем примере - " $a = 2\text{Re}(z)$ ". Проверяется, что этот ответ равенство переменной x38 некоторому выражению x43. Создается импликация, antecedentes которой получены добавлением к списку x30 подтерма x20, а консеквент - равенство первого элемента пары x33 выражению x43. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

12. Попытка перейти от параметрического описания класса к явному описанию.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_A(A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{комплформа}(A) = \text{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ (\text{Re}(z), \text{Im}(z)) \in A))$$

из теоремы

$$\forall_A(A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{комплформа}(A) = \text{set}_z(\exists_{xy}((x, y) \in A \ \& \ z = x + iy)))$$

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x11 присваивается вхождение определяющей части. Переменной x12 присваивается список antecedентов. Проверяется, что он непуст. Проверяется, что определяющая часть представляет собой описатель "класс", причем утверждение под этим описателем - квантор существования. Переменной x13 присваивается связывающая приставка описателя. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x14 присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная z . Переменной x16 присваивается связывающая приставка квантора существования, переменной x17 - набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования.

Решается задача на описание x18, посылками которой служат утверждения x12, а условиями - утверждения x17. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x16", "известно x14".

В нашем примере посылки суть " $A - \text{set}$ ", " $A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ", условия - " $(x, y) \in A$ ", " $z = x + iy$ ". Неизвестные - x, y ; известный параметр - z .

Ответ задачи x18 присваивается переменной x19. В нашем примере он имеет вид " $y = \text{Im}(z) \ \& \ x = \text{Re}(z) \ \& \ z - \text{комплексное}$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x20 присваивается набор его конъюнктивных членов. Переменной x21 присваивается список равенств набора x20, в левой части которых расположена переменная списка x16 (с сохранением порядка списка x16). Проверяется, что длины списков x16 и x21 равны. Переменной x22

присваивается набор правых частей равенств x21. В нашем примере - "Re(z)", "Im(z)". Переменной x23 присваивается результат подстановки выражений x22 вместо переменных x16 в утверждение под квантором существования. В нашем примере - "(Re(z), Im(z)) ∈ A) & z = Re(z) + iIm(z)". Формируется конъюнкция K не вошедших в список x21 утверждений набора x20 и утверждения x23. Переменной x24 присваивается выражение "класс(x14 K)". Затем создается импликация с антецедентами x12, консеквентом которой служит равенство выражений x8 и x24. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

13. Попытка свернуть определяющий квантор существования в бескванторное утверждение.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{mn}(\neg(m = 0) \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow (n/m) - \text{целое})$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(k - \text{целое} \ \& \ n = mk))$$

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x9 присваивается элементарное определяемое утверждение, переменной x12 - определяющее. Проверяется, что последнее представляет собой квантор существования. Переменной x13 присваивается связывающая приставка квантора существования, переменной x14 - набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Переменной x15 присваивается список антецедентов исходной теоремы.

Решается задача на описание x16, посылки которой суть утверждения x15, а условия - x14. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x13", "параметры x13".

В нашем примере задача имеет посылки "m - целое", "n - целое" и условия "k - целое", "n = mk". Неизвестная - k, причем она несущественная.

Ответ присваивается переменной x17. В нашем примере он имеет вид " $\neg(m = 0) \ \& \ (n/m) - \text{целое} \ \vee \ m = 0 \ \& \ n = 0 \ \& \ k - \text{целое}$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x18 присваивается набор его дизъюнктивных членов, переменной x19 - один из них. В нашем примере x19 имеет вид " $\neg(m = 0) \ \& \ (n/m) - \text{целое}$ ". Проверяется, что x19 не содержит переменных x13. Переменной x20 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x19.

Переменной x21 присваивается список антецедентов исходной теоремы. Ранее он уже был присвоен переменной x15, но теперь вводится его копия, которая может изменяться. Именно, если в наборе x18 не менее двух элементов, а в списке x20 встречается отрицание равенства, имеющегося среди конъюнктивных членов каждого из отличных от x19 утверждений списка x18, то это отрицание добавляется к списку x21 и исключается из списка x20. В нашем примере таким образом обрабатывается отрицание равенства $\neg(m = 0)$.

Переменной x_{22} присваивается конъюнкция утверждений списка x_{20} . В нашем примере - " $(n/m) - \text{целое}$ ". Проверяется, что оценка сложности терма x_{22} меньше оценки сложности терма x_9 . Затем создается импликация с антецедентами x_{21} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_9 и x_{22} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

14. Попытка разрешить двуместные отношения раздела относительно операнда определяемой одноместной операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow b \leq [a] \leftrightarrow -[-b] \leq a)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow [a] = \sup(\text{set}_n(n - \text{целое} \ \& \ n \leq a)))$$

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x_{12} присваивается список антецедентов. Проверяется, что терм x_8 имеет единственный корневой операнд некоторую переменную, которая присваивается переменной x_{13} . В нашем примере это переменная " a ". Проверяется отсутствие у теоремы характеристики "определено". Переменной x_{14} присваивается определяющая часть. Проверяется, что ее единственной переменной служит x_{13} . Переменной x_{15} присваивается заголовок терма x_{14} . В нашем примере - "суп". Определяется тип T значения выражений с заголовком x_{14} . Просматриваются двуместные предикатные символы x_{19} , относящиеся к разделу символа T и его подразделам. В нашем примере x_{19} - символ "меньшеилиравно". Выбирается переменная x_{20} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Поочередно рассматриваются два случая для определения термов x_{21} и x_{22} . В первом из них x_{21} имеет вид " $x_{19}(x_{20} \ x_{14})$ ", x_{22} - вид " $x_{19}(x_{20} \ x_8)$ ". Во втором, который рассматривается только если отношение x_{19} несимметрично, x_{21} имеет вид " $x_{19}(x_{14} \ x_{20})$ ", а x_{22} - вид " $x_{19}(x_8 \ x_{20})$ ". В нашем примере x_{21} имеет вид " $b \leq \sup(\text{set}_n(n - \text{целое} \ \& \ n \leq a))$ ", x_{22} - вид " $b \leq [a]$ ". Проверяется допустимость типов значений корневых операндов терма x_{21} для отношения x_{19} .

Переменной x_{23} присваивается набор x_{12} , пополненный теми из необходимых для сопровождения по о.д.з. утверждениями, которые не содержат переменной x_{13} . Создается задача на описание x_{26} , посылками которой являются утверждения x_{23} , а единственным условием - утверждение x_{21} . Цели задачи - "полный", "явное", "смантецеденты", "прямойответ", "неизвестные x_{13} ".

В нашем примере посылки задачи суть " $a - \text{число}$ ", " $b - \text{число}$ ". Условие - " $b \leq \sup(\text{set}_n(n - \text{целое} \ \& \ n \leq a))$ ". Неизвестная - a .

Ответ задачи присваивается переменной x_{27} . В нашем примере он имеет вид " $\inf(\text{set}_n(n - \text{целое} \ \& \ b \leq n)) \leq a$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", Переменной x_{28} присваивается набор конъюнктивных членов ответа.

Начинается просмотр тех элементов x_{30} списка x_{28} , которые содержат переменную x_{13} . Переменной x_{31} присваивается объединение списка x_{23} и остальных

элементов списка x28. Просматриваются максимальные по включению подвыражения x33 утверждения x30, Если такое подвыражение не содержит переменной x13, то предпринимается попытка упростить его относительно x31 при помощи вспомогательной задачи на преобразование. Если ответ x35 отличен от x33, то предпринимается замена подвыражения x33 в утверждении x30 на x35. Соответственно изменяется список x28. В нашем примере происходит замена выражения " $\text{inf}(\text{set}_n(n - \text{целое} \ \& \ b \leq n))$ " на " $-[-b]$ ".

По окончании просмотра списка x28 все переменные начиная с x29 снова оказываются не определены. Переменной x29 присваивается конъюнкция утверждений списка x28. Создается импликация с антецедентами x23, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x22 и x29. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Теорема снабжается единственной характеристикой "глуб(x13 второйтерм)".

15. Попытка определить пересечение определяемого множества с другим определяемым множеством.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcef}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 \leq b - e \ \& \ 0 \leq c - f \rightarrow (b, c] \cap (e, f) = (b, f))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a \in (b, c] \leftrightarrow a - \text{число} \ \& \ 0 < a - b \ \& \ 0 \leq c - a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a \in (b, c) \leftrightarrow a - \text{число} \ \& \ 0 < a - b \ \& \ 0 < c - a)$$

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема является эквивалентностью. Переменной x12 присваивается набор антецедентов. Проверяется, что заголовок утверждения x8 - символ "принадлежит", причем первый корневой операнд этого утверждения - переменная x13, не имеющая в x8 других вхождений. В нашем примере - переменная "a". Переменной x14 присваивается набор конъюнктивных членов определяющей части теоремы. Проверяется, что все они элементарны. Проверяется также, что все переменные исходной теоремы содержатся среди параметров терма x8. Переменной x15 присваивается путь в оглавлении базы теорем к текущей ячейке логического вывода. В нашем примере - (2, 16, 11, 1, 1). В данном наборе перечислены номера переходов в оглавлении, если двигаться от его корня. Переменной x16 присваивается заголовок второго операнда утверждения принадлежности x8. В нашем примере - "промежуток".

Определяется раздел, к которому относится x16, и перечисляются теоремы x26 данного раздела, имеющие характеристику вида "определение(принадлежит(...))", причем такие, что путь к ним в оглавлении базы теорем лексикографически предшествует пути x15. Если оба пути совпадают, то проверяется, что x26 лексикографически предшествует исходной теореме. Эти проверки предотвращают дублирование. В нашем примере x26 - указанная выше дополнительная

теорема. Переменной x27 присваивается результат переобозначения в теореме x26 переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x27 имеет вид:

$$\forall_{def}(e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow d \in (e, f) \leftrightarrow d - \text{число} \ \& \ 0 < d - e \ \& \ 0 < f - d)$$

Проверяется, что левая часть консеквента теоремы x27 - отношение принадлежности с переменной x29 в качестве первого операнда. В нашем примере - переменной d . Переменной x30 присваивается результат замены в теореме x27 переменной x29 на x13. В нашем примере имеем:

$$\forall_{aef}(e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow a \in (e, f) \leftrightarrow a - \text{число} \ \& \ 0 < a - e \ \& \ 0 < f - a)$$

Переменной x31 присваивается список антецедентов теоремы x30, переменной x32 - объединение списков x12 и x31. Переменной x34 присваивается объединение списка x14 с набором конъюнктивных членов определяющей части теоремы x30.

Переменной x35 присваивается задача на описание с посылками x32 и условиями x34. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x13".

В нашем примере задача x35 имеет посылки " b -число", " c -число", " e -число", " f -число" и условия " a -число", " $0 < a - b$ ", " $0 \leq c - a$ ", " $0 < a - e$ ", " $0 < f - a$ ".
Неизвестная - a .

Ответ задачи присваивается переменной x36. В нашем примере он имеет вид:

$$((a < f \ \& \ b < a \ \& \ 0 \leq c - f \ \vee \ b < a \ \& \ 0 < f - c \ \& \ a \leq c) \ \& \ 0 < b - e \ \vee \\ (a < f \ \& \ e < a \ \& \ 0 \leq c - f \ \vee \ e < a \ \& \ 0 < f - c \ \& \ a \leq c) \ \& \ 0 \leq e - b) \ \& \ a - \text{число}$$

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x37 присваивается результат приведения утверждения x36 к виду д.н.ф. Переменной x38 присваивается набор дизъюнктивных членов утверждения x37. Выбирается элемент x39 набора x38. В нашем примере - " $a < f \ \& \ b < a \ \& \ 0 \leq c - f \ \& \ 0 < b - e \ \& \ a - \text{число}$ ". Переменной x40 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x39.

Если список x38 имеет не менее двух элементов, то предпринимается попытка ослабить часть утверждений списка x40. Просматриваются элементарные утверждения x41 списка x40, не содержащие переменной x13. Переменной x42 присваивается заголовок утверждения x41, и при помощи справочника поиска теорем "ослабление" по x42 находится ослабленная версия x45 отношения x42. Переменной x46 присваивается результат замены заголовка утверждения x41 на x45. При помощи задачи на доказательство проверяется, что дизъюнкция отличных от x39 элементов набора x38 является следствием списка посылок задачи x35, к которому добавлены отрицание утверждения x41, утверждение x46, а также все отличные от x41 элементы набора x40. Тогда x41 заменяется а наборе x40 на x46. В нашем примере таким образом неравенство " $0 < b - e$ " оказывается заменено на " $0 \leq b - e$ ".

По окончании просмотра утверждений x41 все переменные начиная с x41 снова оказываются не определены. Переменной x41 присваивается список всех содержащих x13 утверждений набор x40, переменной x42 - остаток этого набора. Переменной x43 присваивается результат добавления к посылкам задачи x35 утверждений x42. Переменной x44 присваивается выражение вида "класс(x13 и(x41))". В нашем примере - "set_a(a < f & b < a & a - число)". Переменной x45 присваивается результат обработки выражения x44 нормализатором "нормкласс" относительно посылок x43. В нашем примере получается "(b, f)". Проверяется, что выражение x45 не содержит символа "класс". Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x32 и x42, а консеквент - равенство пересечения вторых операндов заменяемых частей исходной теоремы и теоремы x30 выражению x45. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

16. Определение условия перестановочности элемента со всеми другими элементами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{an}(\text{матр}(a, \mathbb{R}, n, n) \leftrightarrow \forall_b(\text{матр}(b, \mathbb{R}, n, n) \rightarrow ab = ba) \leftrightarrow \exists_b(a = \text{скалярнматр}(b, n)))$$

из теоремы

$$\forall_{abmnk}(a - \text{функция} \ \& \ b - \text{функция} \ \& \ m - \text{натуральное} \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ k - \text{натуральное} \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Dom}(a) = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \ \& \ \text{Dom}(b) = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, k\} \rightarrow ab = \lambda_{ij}(\sum_{p=1}^n (a(i, p)b(p, j)), i \in \{1, \dots, m\} \ \& \ j \in \{1, \dots, k\}))$$

Проверяется, что теорема - тождество, и переменной x8 присваивается определяемое выражение. В нашем примере - "умножматр(a, b)". Проверяется, что число корневых операндов этого выражения равно 2, причем эти операнды суть некоторые переменные x12 и x13. В нашем примере - "a" и "b". Проверяется, что в списке вывода нет теоремы с заголовком "коммутативно". Переменной x14 присваивается список антецедентов исходной теоремы. Проверяется, что он непуст. Переменной x15 присваивается объединение этого списка со списком утверждений, получаемых из x14 перестановкой переменных x12 и x13. Решается задача на исследование x16, посылками которой служат утверждения x15. Цели задачи - "противоречие" и "сохр". Проверяется, что в результирующем списке посылок x18 отсутствует константа "ложь". Заметим, что цель "сохр" всего лишь блокирует исключение равенств, вводящих не используемые в задаче вспомогательные обозначения.

В нашем примере x18 состоит из следующих утверждений: "m = k", "n = k", "{1, ..., k} × {1, ..., k} = Dom(a)", "b - функция", "a - функция", "k - натуральное", "Val(b) ⊆ ℝ", "Val(a) ⊆ ℝ", "Dom(b) = Dom(a)".

Набор x18 разбивается на поднабор x19 утверждений, содержащих переменную a, и поднабор x20 остальных утверждений. Переменной x21 присваивается определяющий терм исходной теоремы, переменной x22 - результат перестановки в нем переменных x12 и x13. Решается задача на описание x25, посылками

которой служат утверждения x20, а условиями - утверждения x19, к которым добавлено отрицание равенства выражений x21 и x22. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x13", "параметры x13", "исключ".

В нашем примере посылки задачи суть: " $m = k$ ", " $n = k$ ", " $\{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, k\} = \text{Dom}(a)$ ", " a - функция", " k - натуральное", " $\text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R}$ ". Условия суть " b - функция", " $\text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{Dom}(b) = \text{Dom}(a)$ ", " $\neg(\lambda_{ij}(\sum_{p=1}^n (a(i, p)b(p, j)), i \in \{1, \dots, m\} \& j \in \{1, \dots, k\}) = \lambda_{ij}(\sum_{p=1}^n (b(i, p)a(p, j)), i \in \{1, \dots, m\} \& j \in \{1, \dots, k\}))$ ". Неизвестная - b .

Ответ задачи присваивается переменной x26. В нашем примере он имеет вид " $\exists_{ie}(\neg(i = e) \& \neg(a(i, e) = 0) \& e \in \{1, \dots, k\} \& i \in \{1, \dots, k\}) \vee \exists_{ij}(\neg(a(i, i) = a(j, j)) \& i \in \{1, \dots, k\} \& j \in \{1, \dots, k\})$ ".

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x27 присваивается отрицание утверждения x26, и решается задача на описание x28, посылки которой те же, что у задачи x25, а единственное условие - утверждение x27. Цели задачи - "редакция", "свертка".

Ответ задачи x28 присваивается переменной x29. В нашем примере он имеет вид " $\exists_b(a = \text{скалярматр}(b, k) \& \text{Диаматр}(a))$ ". Проверяется, что этот ответ отличен от символа "отказ". Переменной x30 присваивается результат перестановки в определяемом терме x8 переменных x12 и x13. Переменной x31 присваивается утверждение "длялюбого(x13 если x19 то равно(x8 x30))". В нашем примере - " $\forall_b(b \text{ - функция} \& \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Dom}(b) = \text{Dom}(a) \rightarrow ab = ba)$ ". Создается импликация с антецедентами x20, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x31 и x29. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на доказательство для получения новой теоремы

1. Попытка усмотреть сохранение определяемого свойства после применения элементарных операций раздела - случай определяющей элементарной конъюнкции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a \text{ - натуральное} \& b \text{ - натуральное} \rightarrow a + b \text{ - натуральное})$$

из теоремы

$$\forall_n(n \text{ - натуральное} \leftrightarrow n \text{ - целое} \& 1 \leq n)$$

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x8 присваивается определяемое утверждение, переменной x12 - список антецедентов. Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов определяющего утверждения. Проверяется, что все они элементарны. Проверяется, что утверждение x8 имеет длину 2, а его корневой операнд - переменная. Эта переменная присваивается переменной x14. В нашем примере - n . Проверяется, что других переменных исходная теорема не имеет. Среди утверждений x13 выбирается утверждение x15 длины 2. В нашем примере - " n - целое". Переменной x16 присваивается

заголовок данного утверждения. В нашем случае - "целое". Проверяется, что x_{16} - название типа объектов. Переменной x_{18} присваивается список, образованный символом x_{16} и названиями всех надтипов типа x_{16} . В нашем примере - "целое", "рациональное", "число", "комплексное". В разделе символа x_{16} и в его подразделах просматриваются функциональные символы x_{21} , тип значения которых принадлежит списку x_{18} . В нашем примере x_{21} - символ "плюс". Переменной x_{23} присваивается арность символа x_{21} . В нашем примере - 2. Проверяется, что x_{23} отлично от 0 и от символа "натуральное". Переменной x_{24} присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, число которых равно x_{23} . В нашем примере - " a, b ". Переменной x_{25} присваивается терм $x_{21}(x_{24})$. В нашем примере - " $a + b$ ".

Переменной x_{26} присваивается набор результатов замены в определяющей части исходной теоремы переменной x_{14} на переменные списка x_{24} . В нашем примере - утверждения " a - целое & $1 \leq a$ " и " b - целое & $1 \leq b$ ". Переменной x_{29} присваивается результат подстановки в определяющую часть выражения x_{25} вместо переменной x_{14} . В нашем примере - " $(a + b)$ - целое & $1 \leq a + b$ ". Переменной x_{30} присваивается список всевозможных результатов замены в антецедентах исходной теоремы переменной x_{14} на переменные x_{24} . В нашем примере список x_{30} пуст. Переменной x_{31} присваивается конъюнкция утверждения x_{29} и результатов подстановки в антецеденты терма x_{25} вместо x_{14} . Переменной x_{32} присваивается объединение списков x_{26} и x_{30} . При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x_{31} - следствие утверждений x_{32} . Переменной x_{34} присваивается заголовок определяемой части исходной теоремы, переменной x_{35} - объединение списка x_{30} и утверждений " $x_{34}(X)$ " для всех переменных X списка x_{24} . Переменной x_{36} присваивается результат обработки списка x_{35} процедурой "нормантецеденты" относительно переменных x_{24} . Затем создается импликация с антецедентами x_{36} и консеквентом $x_{34}(x_{25})$, которая регистрируется в списке вывода.

2. Попытка усмотреть сохранение определяемого свойства после применения элементарных операций раздела - случай определяющего параметрического описания.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{rational} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow (b + c) - \text{rational})$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{rational} \leftrightarrow \exists_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ a = m/n))$$

Программа приема аналогична программе предыдущего приема. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_8 присваивается определяемое утверждение, переменной x_{12} - список антецедентов. Проверяется, что определяющее утверждение - квантор существования K . Проверяется, что утверждение x_8 имеет длину 2, а его корневой операнд - переменная. Эта переменная присваивается переменной x_{14} . В нашем примере - a . Проверяется, что других переменных исходная теорема не имеет. Переменной x_{15} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором K . Среди утверждений

x15 выбирается равенство x16, имеющее в одной части переменную x14, а в другой - выражение с заголовком x19. В нашем примере - "дробь". Переменной x21 присваивается тип значения выражений с заголовком x19. В нашем примере - "число".

В разделе символа x21 и в его подразделах просматриваются функциональные символы x24, список типов значения которых содержит x21. В нашем примере x24 - символ "плюс". Переменной x26 присваивается арность символа x24. В нашем примере - 2. Проверяется, что x26 отлично от 0 и от символа "натуральное". Переменной x27 присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, число которых равно x26. В нашем примере - "b, c". Переменной x28 присваивается терм x24(x27). В нашем примере - "b + c". Проверяется, что допустимые типы данных операндов операции x24 равны x21.

Переменной x29 присваивается набор результатов замены в определяющей части исходной теоремы переменной x14 на переменные списка x27. В нашем примере - утверждения " $\exists_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ b = m/n)$ " и " $\exists_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ c = m/n)$ ". Переменной x32 присваивается результат подстановки в определяющую часть выражения x28 вместо переменной x14. В нашем примере - " $\exists_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ b + c = m/n)$ ". Переменной x33 присваивается список всевозможных результатов замены в антецедентах исходной теоремы переменной x14 на переменные x27. В нашем примере список x33 пуст. Переменной x34 присваивается конъюнкция утверждения x32 и результатов подстановки в антецеденты терма x28 вместо x14. Переменной x35 присваивается объединение списков x29 и x33. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x34 - следствие утверждений x35. Переменной x37 присваивается заголовок определяемой части исходной теоремы, переменной x39 - объединение списка x33, утверждений "x37(X)" для всех переменных X списка x27, а также всех утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. терма x28. Переменной x40 присваивается результат обработки списка x39 процедурой "нормантецеденты" относительно переменных x27. Затем создается импликация с антецедентами x37 и консеквентом x37(x28), которая регистрируется в списке вывода.

3. Попытка использовать обобщенную транзитивность для получения условия существования.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c(c - \text{число} \rightarrow \exists_n(n < c \ \& \ n - \text{натуральное}) \leftrightarrow 1 < c)$$

из теоремы

$$\forall_n(n - \text{натуральное} \leftrightarrow n - \text{целое} \ \& \ 1 \leq n)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cde}(e < c \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \leq e \rightarrow d < c)$$

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x8 присваивается определяемое утверждение, переменной x12 - список антецедентов. Переменной

x13 присваивается определяющее утверждение. Проверяется, что оно не имеет связанных переменных. Проверяется также, что исходная теорема не имеет антецедентов. Переменной x14 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x13, а переменной x15 - некоторый элемент списка x14. В нашем примере - утверждение " $1 \leq n$ ". Переменной x16 присваивается заголовок утверждения x15, и справочник поиска теорем "транзитоперанд" определяет по символу x16 указанную выше дополнительную теорему. В нашем примере x16 - символ "меньшеилиравно". Переменной x19 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x19 совпадает с дополнительной теоремой.

Переменной x20 присваивается список антецедентов теоремы x19, переменной x21 - ее консеквент. В нашем примере - " $d < c$ ". В списке x20 выбирается утверждение x22 с заголовком x16. В нашем примере - " $d \leq e$ ". Переменной x23 присваивается список параметров утверждения x22, переменной x24 - список параметров утверждения x21. Проверяется, что x24 не включается в x23. В нашем примере x23 - d, e ; x24 - c, d . Переменной x25 присваивается разность списков x24 и x23. В нашем примере она состоит из единственной переменной c .

Определяется подстановка S вместо переменных x23, унифицирующая термы x22 и x15. Переменной x27 присваивается результат применения подстановки S к утверждению x21. В нашем примере - " $1 < c$ ". Проверяется, что параметры утверждения x27 не встречаются в утверждениях x14. Переменной x28 присваивается набор результатов применения подстановки S к отличным от x22 утверждениям набора x20. В нашем примере - " $n < c$ ", " c - число", " 1 - число", " n - число". Переменной x29 присваивается список всех утверждений набора x28, параметры которых встречаются в утверждениях x14. В нашем примере - " $n < c$ ", " n - число". Переменной x31 присваивается результат навешивания квантора существования по параметрам утверждений x14 на конъюнкцию утверждений список x29 и x14. В нашем примере - " $\exists_n(n < c \ \& \ n - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ 1 \leq n)$ ". Переменной x32 присваивается результат добавления утверждения x27 к не вошедшим в список x29 утверждениям набора x28. В нашем примере - " c - число", " 1 - число", " $1 < c$ ".

При помощи задачи на доказательство проверяется, что x31 - следствие утверждений x32. Переменной x34 присваивается результат навешивания квантора существования по параметрам утверждений x14 на конъюнкцию утверждения x8 и утверждений x29. Создается импликация, антецеденты которой суть не вошедшие в список x29 утверждения набора x28, а консеквент - эквивалентность утверждений x34 и x27. Эта импликация обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому разрешается использовать уже полученные теоремы списка вывода. Затем она регистрируется в списке вывода.

4. Попытка усмотреть неявное определение наибольшего либо наименьшего целого.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow [a] = \sup(\text{set}_n(n - \text{целое} \ \& \ n \leq a)))$$

из теоремы

$\forall_{an}(a - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ n \leq a \ \& \ a < n + 1 \rightarrow [a] = n)$

Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x8 присваивается определяемое выражение. Проверяется, что определяющая часть - некоторая переменная x12.

Проверяется, что теорема имеет характеристику "определено". Данная характеристика означает, что теорема представляет собой тождество, определяющее некоторую операцию через вспомогательные переменные, входящие в антецеденты и не входящие в эту операцию. Для любых значений переменных определяемой части, удовлетворяющих всем содержащим такие переменные антецедентам, существуют подходящие значения вспомогательных переменных.

Переменной x13 присваивается список антецедентов. В нем усматривается утверждение x14 вида "целое(x12)". Проверяется, что переменная x12 не входит в терм x8. Переменной x15 присваивается список всех содержащих x12 утверждений списка x13, отличных от x14. В нашем примере - " $n \leq a$ " и " $a < n + 1$ ". Проверяется, что x15 имеет ровно два элемента. Переменной x16 присваивается список всех утверждений списка x13, не содержащих x12. В нашем примере - единственное утверждение " $a - \text{число}$ ". В списке x15 выбирается утверждение x17. В нашем примере - " $n \leq a$ ".

Рассматриваются два случая в первом случае переменной x18 присваивается выражение "плюс(x12 1)", а переменной x19 - символ "суп". Во втором случае переменной x18 присваивается выражение "плюс(x12 минус(1))", а переменной x19 - символ "инф". В нашем примере рассматривается первый случай, а x18 имеет вид " $n + 1$ ". Переменной x20 присваивается результат подстановки выражения x18 вместо переменной x12 в терм x17. В нашем примере - " $n + 1 \leq a$ ".

Переменной x21 присваивается элемент списка x15, отличный от x17. Переменной x22 присваивается эквивалентность отрицания утверждения x20 утверждению x21. В нашем примере - " $\neg(n + 1 \leq a) \leftrightarrow a < n + 1$ ". При помощи задачи на доказательство проверяется, что x22 - следствие утверждений x16 и утверждений, необходимых для сопровождения x22 по о.д.з.

Переменной x24 присваивается результат добавления к списку x16 утверждений x14 и x21. В нашем примере - " $a - \text{число}$ ", " $n - \text{целое}$ " и " $a < n + 1$ ". Переменной x25 присваивается результат подстановки выражения x18 вместо переменной x12 в утверждение x21. В нашем примере - " $a < (n + 1) + 1$ ". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x25 - следствие утверждений x24.

При помощи задачи на доказательство устанавливается, что утверждение "существует(x12 и(x14 x17))" (в нашем примере - " $\exists_n(n - \text{целое} \ \& \ n \leq a)$ ") является следствием утверждений x16. Переменной x28 присваивается набор, состоящий из утверждений x14 и x17.

Решается задача на описание с посылками x16 и условиями x28. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x12". Если на эту задачу получен ответ, отличный от символа "отказ", то x28 заменяется на набор конъюнктивных членов ответа. В нашем примере x28 не изменяется.

Создается импликация с антецедентами $x16$, консеквентом которой служит равенство выражения $x8$ выражению " $x19(\text{класс}(x12 \text{ и}(x28)))$ ". Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Усмотрение стандартного свойства определяемых операции либо отношения.

(a) Усмотрение определения коммутативной двуместной операции - случай переменных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

"коммутативно(плюсфунк)"

из теоремы

$$\forall fg(f - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{плюсфунк}(f, g) = \lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f)))$$

Проверяется, что теорема - тождество, причем ее определяемая часть расположена слева. Переменной $x11$ присваивается непустой список антецедентов. Проверяется, что определяемая часть имеет ровно два корневых операнда, причем эти операнды - некоторые переменные $x12$ и $x13$. Проверяется также, что связывающая приставка исходной теоремы не имеет переменных, отличных от $x12$ и $x13$ и что в списке вывода нет других теорем с характеристикой "определение". Переменной $x14$ присваивается конъюнкция утверждений $x11$, переменной $x15$ - результат перестановки в этой конъюнкции переменных $x12$ и $x13$. Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" утверждений $x14$ и $x15$ совпадают. Переменной $x16$ присваивается определяющая часть теоремы, переменной $x17$ - результат перестановки в ней переменных $x12$ и $x13$. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство выражений $x16$ и $x17$ является следствием утверждений $x11$. Тогда в списке вывода регистрируется теорема "коммутативно(f)", где f - заголовок определяемой части.

(b) Усмотрение определения коммутативной двуместной операции - случай сложных операндов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

"коммутативно(скалумнож)"

из теоремы

$$\forall ABCD(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{скалумнож}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD)) = l(AB)l(CD) \cos(\text{уголмежду}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD))))$$

Проверяется, что теорема - тождество, причем ее определяемая часть расположена слева. Переменной $x11$ присваивается непустой список антецедентов. Проверяется, что определяемая часть имеет ровно два корневых операнда. Переменной $x12$ присваивается эта часть. Проверяется, что она содержит все переменные исходной теоремы и что длина ее не менее 4. Переменной $x13$ присваивается заголовок терма $x12$. В нашем случае - "скалумнож". Переменной $x14$ присваивается список всех теорем списка

вывода, имеющих характеристику "определение". Проверяется, что исходная теорема - самая длинная в списке x14 и что у каждой теоремы списка x14 левая часть консеквента включает все ее переменные, а заголовок ее равен x13.

Для проверки коммутативности определяемой операции предпринимается просмотр элементов x15 списка x14. Эти элементы суть определения операции x13 для альтернативных подслучаев. В нашем примере список x14 насчитывает, кроме исходной теоремы, еще два элемента:

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \rightarrow \text{скалумнож}(\text{вектор}0, a) = 0)$$

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \rightarrow \text{скалумнож}(a, \text{вектор}0) = 0)$$

Переменной x16 присваивается список antecedентов теоремы x15, переменной x17 - ее консеквент. Переменной x18 присваивается левая часть равенства в консеквенте, переменной x21 - правая. Таким образом, x18 - определяемое выражение, x21 - определяющее. Переменной x20 присваивается результат перестановки у x18 первого и второго операндов.

Если x15 не имеет заголовка "длялюбого", то проверяется, что утверждение x20 входит в список x14.

Иначе - просматриваются кванторы импликации x22 списка x14. Переменной x23 присваивается консеквент такой импликации, переменной x24 - параметры его левой части. Проверяется, что x20 - результат некоторой подстановки S в эту левую часть, причем переменной x26 присваивается набор результатов применения подстановки S к antecedентам импликации x22. Проверяется, что каждое утверждение списка x26, не вошедшее в список x16, является следствием утверждений x16. Переменной x27 присваивается результат применения подстановки S к правой части равенства x23. Проверяется, что из утверждений x16 вытекает равенство выражений x27 и x21. Если для теоремы x15 удалось найти такую теорему x22, то переход к очередному элементу x15 списка x14.

Если хотя бы для одной теоремы x15 указанные проверки дали отрицательный результат, то прием не применяется. Иначе - в списке вывода регистрируется теорема "коммутативно(x13)".

- (с) Усмотрение определения ассоциативной двуместной операции - случай переменных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

"ассоциативно(плюсфунк)"

из теоремы

$$\forall_{fg}(f - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{плюсфунк}(f, g) = \lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f)))$$

Начало программы дословно повторяет начало программы одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его. Проверяется, что теорема - тождество, причем ее определяемая часть расположена слева. Переменной x11 присваивается непустой список antecedентов. Проверяется,

что определяемая часть имеет ровно два корневых операнда, причем эти операнды - некоторые переменные x_{12} и x_{13} . В нашем примере - f и g . Проверяется также, что связывающая приставка исходной теоремы не имеет переменных, отличных от x_{12} и x_{13} и что в списке вывода нет других теорем с характеристикой "определение".

Дальше начинаются отличия. Переменной x_{14} присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - a . Переменной x_{15} присваивается результат замены в исходной теореме переменных x_{12} и x_{13} на x_{13} и x_{14} . В нашем примере x_{15} имеет вид:

$$\forall_{ga}(g - \text{функция} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(g) = \text{Dom}(a) \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{плюсфунк}(g, a) = \lambda_x(g(x) + a(x), x \in \text{Dom}(g)))$$

Переменной x_{17} присваивается результат подстановки определяющей части теоремы x_{15} вместо переменной x_{13} в определяющую часть исходной теоремы. В нашем примере x_{17} имеет вид:

$$"\lambda_x(f(x) + \lambda_x(g(x) + a(x), x \in \text{Dom}(g)))(x), x \in \text{Dom}(f))".$$

Переменной x_{18} присваивается список результатов подстановки в утверждения x_{11} определяющей части теоремы x_{15} вместо переменной x_{13} . Переменной x_{19} присваивается объединение списков антецедентов исходной теоремы и теоремы x_{15} . В нашем примере x_{19} состоит из утверждений " f - функция", " g - функция", " $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$ ", " $\text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}$ ", " g - функция", " a - функция", " $\text{Dom}(g) = \text{Dom}(a)$ ", " $\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R}$ ".

Переменной x_{20} присваивается результат подстановки определяющей части исходной теоремы вместо переменной x_{13} в определяющую часть теоремы x_{15} . В нашем примере x_{20} имеет вид:

$$"\lambda_x(\lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f))(x) + a(x), x \in \text{Dom}(\lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f))))".$$

Переменной x_{21} присваивается список результатов подстановки определяющей части исходной теоремы вместо переменной x_{13} в антецеденты теоремы x_{15} .

Проверяется, что каждое утверждение списка x_{18} , входящей в список x_{21} и не входящее в список x_{19} , является следствием утверждений x_{19} . При помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство выражений x_{17} и x_{20} является следствием утверждений x_{19} . Затем в списке вывода регистрируется теорема "ассоциативно(s)", где s - заголовок определяемой части теоремы.

- (d) Усмотрение определения ассоциативной двуместной операции - случай атомарных выражений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$"\text{ассоциативно(плюсвект)}"$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(AB) + \text{вектор}(BC) = \text{вектор}(AC))$$

Здесь имеется в виду векторное сложение "плюсвект". Проверяется, что теорема - тождество, причем ее определяемая часть расположена слева. Переменной x11 присваивается непустой список антецедентов. Проверяется, что определяемая часть имеет ровно два корневых операнда. Переменной x12 присваивается эта часть. Проверяется, что она содержит все переменные исходной теоремы.

Среди характеристик теоремы находится элемент "Атомарное(p)". В нашем примере p - символ "Вектор". Переменной x15 присваивается первый корневой операнд терма x12, переменной x16 - второй. Проверяется, что они имеют одинаковую длину, большую 1, и одинаковые заголовки. В нашем примере x15 - "вектор(AB)", x16 - "вектор(AC)". Проверяется, что оба выражения x15, x16 - атомарные выражения типа p . Переменной x19 присваивается определяющая часть исходной теоремы. В нашем примере - вектор AC .

Переменной x20 присваивается результат переобозначения в исходной теореме всех ее переменных на новые переменные. В нашем примере имеем:

$$\forall_{abc}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(ab) + \text{вектор}(bc) = \text{вектор}(ac))$$

Переменной x22 присваивается первый корневой операнд определяемой части теоремы x20. В нашем примере - "вектор(ab)". Переменной x23 присваивается список параметров терма x22. Определяется подстановка S вместо переменных x23, унифицирующая термы x22 и x19. Переменной x25 присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы. Переменной x26 присваивается результат применения подстановки S ко второму корневому операнду определяемой части теоремы x20, переменной x27 - результат применения этой подстановки к определяющей части исходной теоремы. В нашем примере x26 имеет вид "вектор(Cc)", x27 - вид "вектор(Ac)". Переменной x28 присваивается объединение списков x11 и x25. В нашем примере - " A - точка", " B - точка", " C - точка", " c - точка".

Переменной x29 присваивается выражение " $f(x16, x26)$ ", где f - заголовок определяемой части исходной теоремы. В нашем примере - "плюсвект". При этом x29 имеет вид "вектор(BC) + вектор(Cc)". Переменной x30 присваивается список параметров терма x12. В нашем примере x12 имеет вид "вектор(AB) + вектор(BC)". Усматривается, что x29 - результат применения некоторой подстановки T вместо переменных x30 к терму x12. Переменной x32 присваивается список результатов применения подстановки T к утверждениям x11. В нашем примере - " B -точка", " C -точка", " c -точка". Проверяется, что каждое утверждение списка x32 является следствием утверждений x28. Переменной x33 присваивается результат применения подстановки T к выражению x19. В нашем примере - "вектор(Bc)".

Переменной x34 присваивается выражение " $f(x15, x33)$ ". В нашем примере - вектор(AB) + вектор(Bc). Усматривается, что x34 - результат применения некоторой подстановки R вместо переменных x30 к выражению x12.

Переменной x36 присваивается список результатов применения подстановки R к утверждениям x11. В нашем примере - "A – точка", "B – точка", "c – точка". Проверяется, что каждое утверждение списка x36 является следствием утверждений x28. Переменной x37 присваивается результат применения подстановки R к выражению x19. В нашем примере - "вектор(Ac)".

Проверяется, что выражения x37 и x27 равны, после чего в списке вывода регистрируется теорема "ассоциативно(f)".

- (e) Усмотрение определения ассоциативной двуместной операции - случай дополнительных параметров.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

"ассоциативно(умножматр)"

из теоремы

$\forall_{abmnk}(a - \text{функция} \ \& \ b - \text{функция} \ \& \ m - \text{натуральное} \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ k - \text{натуральное} \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Dom}(a) = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \ \& \ \text{Dom}(b) = \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, k\} \rightarrow ab = \lambda_{ij}(\sum_{p=1}^n (a(i, p)b(p, j))),$
 $i \in \{1, \dots, m\} \ \& \ j \in \{1, \dots, k\}$)

Проверяется, что теорема - тождество, причем ее определяемая часть расположена слева. Переменной x11 присваивается непустой список антецедентов. Проверяется, что определяемая часть имеет ровно два корневых операнда, причем эти операнды - некоторые переменные x12 и x13. В нашем примере - a и b . Проверяется, что связывающая приставка исходной теоремы имеет переменные, отличные от x12 и x13. Переменной x14 присваивается определяющая часть. Определяется тип s значения выражения x14, и проверяется что среди антецедентов встречаются утверждения $s(x12)$, $s(x13)$. В нашем примере s - символ "функция".

Переменной x16 присваивается список антецедентов, содержащих переменную x12, а переменной x17 - список антецедентов, содержащих переменную x13. Проверяется, что эти списки не пересекаются. Переменной x18 присваивается список антецедентов, не содержащих переменных x12, x13.

Переменной x19 присваивается результат переобозначения переменных исходной теоремы на новые переменные. В нашем примере x19 имеет вид:

$\forall_{cdhlg}(c - \text{функция} \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ h - \text{натуральное} \ \& \ l - \text{натуральное} \ \& \ g - \text{натуральное} \ \& \ \text{Val}(c) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Dom}(c) = \{1, \dots, h\} \times \{1, \dots, l\} \ \& \ \text{Dom}(d) = \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, g\} \rightarrow cd = \lambda_{ef}(\sum_{q=1}^l (c(e, q)d(q, f))),$
 $e \in \{1, \dots, h\} \ \& \ f \in \{1, \dots, g\}$)

Переменной x20 присваивается определяющая часть теоремы x19, переменной x21 - вхождение ее определяемой части. Переменным x22 и x23 присваиваются переменные - операнды вхождения x21. В нашем примере - c и d . Переменной x24 присваивается набор антецедентов теоремы x19.

Переменной x25 присваивается объединение списков x24, x17, x18 и результатов подстановки в утверждения списка x16 выражения x20 вместо

переменной x12. Решается задача на исследование, посылки которой суть утверждения x25, а цели - "сохр", "противоречие". Проверяется, что результирующий список посылок не содержит константы "ложь".

Переменной x28 присваивается результат подстановки в выражение x14 выражения x20 вместо переменной x12. При помощи вспомогательной задачи на преобразование выражение x28 упрощается, и результат присваивается переменной x29. В нашем примере получаем:

$$\lambda_{ij}(\sum_{p=1}^g(\sum_{q=1}^l(c(i,q)d(q,p))b(p,j)), i \in \{1, \dots, h\} \ \& \ j \in \{1, \dots, k\})$$

Переменной x31 присваивается список antecedентов теоремы x19, содержащих переменную x22, переменной x32 - содержащих переменную x23. Переменной x33 присваивается список antecedентов теоремы x19, не содержащих переменных x22 и x23. Переменной x34 присваивается результат замены в выражении x14 переменной x12 на переменную x23. В нашем примере имеем:

$$\lambda_{ij}(\sum_{p=1}^n(d(i,p)b(p,j)), i \in \{1, \dots, m\} \ \& \ j \in \{1, \dots, k\})$$

Переменной x35 присваивается набор результатов подстановки в утверждения списка x32 выражения x34 вместо переменной x23, переменной x36 - объединение списков x17, x18, x31, x35, x33 и результатов замены переменной x12 на x23 в утверждения набора x16. Решается задача на исследование, посылки которой суть утверждения x36, а цели - "противоречие", "сохр". Проверяется, что в результирующий список посылок не входит константа "ложь".

Переменной x39 присваивается эквивалентность квантора существования по всем отличным от x22, x23, x13 переменным задачи x26, навешенного на конъюнкцию посылок задачи x26, квантору существования по всем отличным от x22, x23, x13 переменным задачи x37, навешенного на конъюнкцию посылок задачи x37. В нашем примере x22, x23, x13 суть переменные c, d, b . При помощи задачи на доказательство устанавливается истинность утверждения x39. Единственной посылкой служит константа "истина".

В нашем примере левая часть эквивалентности имеет вид:

$$\exists_{ghklmn}(n = g \ \& \ c - \text{функция} \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ h - \text{натуральное} \ \& \ l - \text{натуральное} \ \& \ g - \text{натуральное} \ \& \ \text{Val}(c) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \{1, \dots, h\} \times \{1, \dots, l\} = \text{Dom}(c) \ \& \ \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, g\} = \text{Dom}(d) \ \& \ b - \text{функция} \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \{1, \dots, g\} \times \{1, \dots, k\} = \text{Dom}(b) \ \& \ k - \text{натуральное} \ \& \ m = h).$$

Правая часть имеет вид:

$$\exists_{ghklmn}(m = l \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \{1, \dots, l\} \times \{1, \dots, n\} = \text{Dom}(d) \ \& \ b - \text{функция} \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, g\} = \text{Dom}(b) \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ c - \text{функция} \ \& \ \text{Val}(c) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \{1, \dots, h\} \times \{1, \dots, l\} = \text{Dom}(c) \ \& \ k = g \ \& \ h - \text{натуральное} \ \& \ g - \text{натуральное})$$

Предпринимается попытка использовать исходную теорему для преобразования выражения $s(x23 \ x13)$ относительно посылок задачи x26. Здесь s - заголовок определяемой части исходной теоремы. В нашем примере -

"умножматр". Результат присваивается переменной x41. В нашем примере он имеет вид:

$$\lambda_{fi}(\sum_{r=1}^g(d(f, r)b(r, i)), f \in \{1, \dots, l\} \& i \in \{1, \dots, k\})$$

Затем предпринимается попытка использовать исходную теорему для преобразования выражения $s(x22 \ x41)$. Результат присваивается переменной x42. В нашем примере он имеет вид:

$$\lambda_{jp}(\sum_{u=1}^l(c(j, u)\lambda_{fi}(\sum_{r=1}^g(d(f, r)b(r, i)), f \in \{1, \dots, l\} \& i \in \{1, \dots, k\})(u, p)), j \in \{1, \dots, h\} \& p \in \{1, \dots, k\})$$

Наконец, при помощи задачи на доказательство устанавливается равенство выражений x29 и x42. Затем утверждение "ассоциативно(s)" регистрируется в списке вывода.

- (f) Проверка рефлексивности двуместного отношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{set} \rightarrow b \subseteq b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \& b - \text{set} \rightarrow a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow c \in b))$$

Проверяется, что теорема - эквивалентность и является одной из стартовых теорем ячейки вывода. Переменной x9 присваивается определяемая часть. Проверяется, что она элементарна, имеет ровно два корневых операнда и включает все переменные связывающей приставки теоремы. Переменной x12 присваивается определяющая часть. Переменной x13 присваивается первый корневой операнд терма x9, переменной x14 - второй. Проверяется, что они имеют равные длины. Переменной x15 присваивается список параметров терма x13, переменной x16 - список параметров терма x14. Проверяется, что списки x15 и x16 не пересекаются и имеют равные длины. Определяется подстановка S вместо переменных x15, переводящая терм x13 в x14. Проверяется, что она осуществляет переобозначение переменных без их отождествления. Переменной x18 присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы. Переменной x19 присваивается результат применения этой подстановки к терму x12. В нашем примере x19 имеет вид " $\forall_c(c \in b \rightarrow c \in b)$ ". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x19 - следствие утверждений x18. Переменной x21 присваивается результат применения подстановки S к утверждению x9. Затем создается импликация с антецедентами x18 и консеквентом x21. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (g) Проверка транзитивности двуместного отношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cmn}(m|n \& n|c \& c - \text{целое} \& m - \text{целое} \& n - \text{целое} \rightarrow m|c)$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \& n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(k - \text{целое} \& n = mk))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Проверяется, что теорема - эквивалентность и является одной из стартовых теорем ячейки вывода. Переменной x_9 присваивается определяемая часть. Проверяется, что она элементарна, имеет ровно два корневых операнда и включает все переменные связывающей приставки теоремы. Переменной x_{12} присваивается определяющая часть. Переменной x_{13} присваивается первый корневой операнд терма x_9 , переменной x_{14} - второй. Проверяется, что они имеют равные длины. В нашем примере $x_{13} - m$, $x_{14} - n$. Переменной x_{15} присваивается список параметров терма x_{13} , переменной x_{16} - список параметров терма x_{14} . Проверяется, что списки x_{15} и x_{16} не пересекаются и имеют равные длины. Определяется подстановка S вместо переменных x_{15} , переводящая терм x_{13} в x_{14} . Проверяется, что она осуществляет переобозначение переменных без их отождествления.

Дальше начинаются отличия. Переменной x_{18} присваивается результат переобозначения переменных теоремы на новые переменные. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{bc}(b - \text{целое} \ \& \ c - \text{целое} \rightarrow b|c \leftrightarrow \exists_a(a - \text{целое} \ \& \ c = ba))$$

Переменной x_{19} присваивается вхождение определяемой части теоремы x_{18} , переменной x_{20} - ее первый корневой операнд. В нашем примере - b . Переменной x_{21} присваиваются параметры терма x_{20} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{21} , переводящая терм x_{20} в терм x_{14} . Переменной x_{23} присваивается набор результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_{18} . Переменной x_{25} присваивается результат применения подстановки S к определяющей части теоремы x_{18} . В нашем примере - " $\exists_a(a - \text{целое} \ \& \ c = na)$ ". Переменной x_{26} присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы и списка x_{23} , к которому добавляются определяющая часть исходной теоремы и утверждение x_{25} .

Определяется подстановка T вместо переменных x_{16} , переводящая терм x_{14} во второй корневой операнд определяемой части теоремы x_{18} . Переменной x_{28} присваивается список результатов применения подстановки T к антецедентам исходной теоремы, переменной x_{29} - результат применения этой подстановки к определяющей части исходной теоремы. Переменной x_{30} присваивается конъюнкция утверждений списка x_{28} , к которому добавлено утверждение x_{29} . В нашем примере x_{30} имеет вид " $m - \text{целое} \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ \exists_k(k - \text{целое} \ \& \ c = mk)$ ".

При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x_{30} - следствие утверждений x_{26} . При этом проверяется, что список посылок решенной задачи не содержит константы "ложь". Дополнительно, для контроля непротиворечивости, решается задача на исследование с посылками x_{26} и целями "известно", "неизвестные X ", где X - все параметры утверждений x_{26} . Если в ее посылках обнаруживается константа "ложь", то прием не применяется.

Переменной x_{32} присваивается результат применения подстановки T к определяемой части исходной теоремы. В нашем примере получится " $m|c$ ". Переменной x_{33} присваивается результат применения подстановки S к

определяемой части теоремы x18. В нашем примере получается " $n|c$ ". Переменной x34 присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы и списка x23, к которому добавляются утверждения x9 и x33. Наконец, создается импликация с антецедентами x34 и консеквентом x32. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

(h) Проверка симметричности двуместного отношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

"коммутативно(пропорцнаборы)"

из теоремы

$$\forall_{abcdef}(a\text{—число} \& b\text{—число} \& c\text{—число} \& d\text{—число} \& e\text{—число} \& f\text{—число} \rightarrow \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d, e, f)) \leftrightarrow \exists_{uv}(u\text{—число} \& v\text{—число} \& \neg(u^2 + v^2 = 0) \& au + dv = 0 \& bu + ev = 0 \& cu + fv = 0))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Проверяется, что теорема - эквивалентность и является одной из стартовых теорем ячейки вывода. Переменной x9 присваивается определяемая часть. Проверяется, что она элементарна, имеет ровно два корневых операнда и включает все переменные связывающей приставки теоремы. Переменной x12 присваивается определяющая часть. Переменной x13 присваивается первый корневой операнд терма x9, переменной x14 - второй. Проверяется, что они имеют равные длины. В нашем примере x13 - (a, b, c) , x14 - (d, e, f) . Переменной x15 присваивается список параметров терма x13, переменной x16 - список параметров терма x14. Проверяется, что списки x15 и x16 не пересекаются и имеют равные длины.

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что исходная теорема не имеет существенных антецедентов. Переменной x17 присваивается объединение списков x15 и x16. Проверяется, что все переменные связывающей приставки исходной теоремы входят в список x17. Определяется подстановка S вместо переменных x17, переводящая каждый из термов x13, x14 в другой. В нашем примере S переводит переменные a, b, c, d, e, f , соответственно, в переменные d, e, f, a, b, c . Переменной x19 присваивается список антецедентов исходной теоремы, переменной x20 - набор результатов применения подстановки S к утверждениям x19. Проверяется, что список x20 включается в x19. Переменной x21 присваивается результат применения подстановки S к определяющей части теоремы. В нашем примере имеем " $\exists_{uv}(u\text{—число} \& v\text{—число} \& \neg(u^2 + v^2 = 0) \& du + av = 0 \& eu + bv = 0 \& fu + cv = 0)$ ".

При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x21 - следствие утверждений x19, к которым добавлено утверждение x12. Затем в списке вывода регистрируется теорема "коммутативно(s)", где s - заголовок определяемой части исходной теоремы.

Реализация либо упрощение антецедента

1. Попытка реализации антецедента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{целое} \rightarrow [b] = b)$$

из теоремы

$$\forall_{an}(a - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ n \leq a \ \& \ a < n + 1 \rightarrow [a] = n)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a \leq a)$$

Переменной x10 присваивается некоторый существенный антецедент теоремы. В нашем примере - " $n \leq a$ ". Если он имеет своим заголовком отрицание, то переменной x12 присваивается символ под этим отрицанием, иначе - заголовок антецедента x10. В нашем примере x12 - символ "меньшеилиравно". Справочник поиска теорем "пример" находит по x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что число параметров ее консеквента меньше, чем у антецедента x10. Переменной x15 присваивается результат вывода следствия из исходной теоремы путем унификации ее антецедента x10 с консеквентом дополнительной теоремы. В нашем примере - " $\forall_b(b - \text{число} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ b < b + 1 \ \& \ b - \text{число} \rightarrow [b] = b)$ ". Переменной x16 присваивается результат обработки теоремы x15 оператором "нормтеорема". При помощи вспомогательной задачи на исследование контролируется непротиворечивость антецедентов теоремы x16. Затем эта теорема регистрируется в списке вывода.

2. Попытка упростить подвыражение антецедента путем подстановки константы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(0 < a \ \& \ a - \text{число} \rightarrow \arg(a) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 < b + \pi \ \& \ 0 \leq \pi - b \ \& \ 0 < a \rightarrow \arg(a(\cos b + \sin bi)) = b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a + 0 = a)$$

Переменной x9 присваивается вхождение антецедента теоремы. В нашем примере - антецедента " $0 < b + \pi$ ". Внутри этого антецедента рассматривается вхождение x10, имеющее ровно два операнда. Переменной x11 присваивается символ по этому вхождению. В нашем примере x11 - символ "плюс". Справочник поиска теорем "констнабор" определяет по x11 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x16 присваивается теорема, полученная из исходной преобразованием подтерма x10 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере - " $\forall_a(a - \text{число} \ \& \ 0 - \text{число} \ \& \ 0 < \pi \ \& \ 0 \leq \pi - 0 \ \& \ 0 < a \ \& \ \pi - \text{число} \rightarrow \arg(a(\cos 0 + \sin 0i)) = 0)$ ". Теорема x16 обрабатывается оператором "нормтеорема", и результат регистрируется в списке вывода.

3. Реализация равенства для набора координат.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_d(\text{Трехмерн}(d) \rightarrow \text{крд}(\text{вектор}0, d, 1) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{AKabc}(\text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Вектор}(A) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \rightarrow \text{крд}(A, K, 1) = a \ \& \ \text{крд}(A, K, 2) = b \ \& \ \text{крд}(A, K, 3) = c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_K(\text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{вектор}0, K) = (0, 0, 0))$$

Переменной x8 присваивается вхождение antecedента теоремы, представляющего собой равенство, в одной из частей которого расположено выражение, заголовок x11 которого - название координат. В нашем примере x8 - вхождение равенства "коорд(A, K) = (a, b, c)", x11 - символ "коорд". Переменной x12 присваивается название раздела, к которому относится x11. В нашем примере - "системыкоординат". Просматриваются теоремы x16 данного раздела, имеющие характеристику "систкоорд". В нашем примере x16 - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x17 присваивается вхождение консеквента дополнительной теоремы. Проверяется, что по этому вхождению расположено равенство, заголовок одной из частей которого - символ x11, а другая часть представляет собой терм без переменных. Проверяется, что среди antecedентов дополнительной теоремы нет равенств. Переменной x20 присваивается результат применения дополнительной теоремы для реализации antecedента x8 исходной теоремы. В нашем примере x20 имеет вид:

$$\forall_d(\text{Трехмерн}(d) \ \& \ \text{Вектор}(\text{вектор}0) \ \& \ \text{Трехмерн}(d) \rightarrow \text{крд}(\text{вектор}0, d, 1) = 0 \ \& \ \text{крд}(\text{вектор}0, d, 2) = 0 \ \& \ \text{крд}(\text{вектор}0, d, 3) = 0)$$

Переменной x21 присваивается результат последовательной обработки теоремы x20 операторами "нормтеорема" и "нормдлялюбого". Конъюнктивные члены утверждения x22 регистрируются в списке вывода.

Применение дополнительного тождества для варьирования определяемого термина

1. Попытка сильного упрощения определяемого выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aC}(a - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(aC) + \text{вектор}0 = \text{вектор}(aC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(AB) + \text{вектор}(BC) = \text{вектор}(AC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_A(A - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(AA) = \text{вектор}0)$$

Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x10 присваивается вхождение в теорему определяемой части, переменной x12 - расположенное внутри x10 вхождение неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - вхождение термина "вектор(AB)". Переменной x13 присваивается символ по вхождению x12. Справочник поиска теорем "констнорм" находит по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x12 при помощи дополнительной теоремы. Переменной x19 присваивается результат преобразования утверждения x18 оператором "нормтеорема". Он регистрируется в списке вывода.

2. Варьирование атомарного подвыражения заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abA}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(Ab) - \text{вектор}(ab) = \text{вектор}(Aa))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(AB) + \text{вектор}(BC) = \text{вектор}(AC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow -\text{вектор}(AB) = \text{вектор}(BA))$$

Проверяется, что теорема - тождество без существенных антецедентов, и переменной x8 присваивается определяемое выражение. Находится характеристика "Атомарное(s)". В нашем примере - "Атомарное(Вектор)". Переменной x14 присваивается список антецедентов. Проверяется, что параметры выражения x8 пересекаются со списком параметров определяющего выражения. Находится атомарное подвыражение x16 выражения x8, отличное от x8. В нашем примере - "вектор(BC)". Переменной x17 присваивается его заголовок. Справочник поиска теорем "опратом" определяет по x17 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x20 присваивается вхождение ее консеквента, переменной x21 - тот операнд вхождения x20, который имеет заголовок x17. В нашем примере - операнд "вектор(BA)". Переменной x23 присваивается вхождение выражения x16 в определяемую часть теоремы. Оператор "тождвывод" присваивает переменной x24 результат преобразования вхождения x23 при помощи дополнительной теоремы, применяемой в таком направлении, что x21 является заменяемой частью. Теорема x24 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Проверка простейших теоретико-множественных соотношений для определения класса

1. Усмотрение монотонности по включению - рассмотрение единственной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ b \subseteq d \rightarrow b \cap c \subseteq d \cap c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$$

Теорема может быть как тождеством, так и эквивалентностью. Переменной x9 присваивается определяемый терм. Либо он имеет вид принадлежности, в левой части которой расположена переменная, не имеющая других вхождений в x9 (в этом случае теорема является эквивалентностью), либо он имеет заголовок "класс" (в этом случае теорема - тождество).

Переменной x13 присваивается определяющий терм, переменной x14 - некоторый параметр терма x9. В нашем примере - b . Проверяется, что x14 имеет единственное вхождение в x13. Переменной x15 присваивается это вхождение, переменной x16 - вхождение, непосредственным операндом которого является x15. Проверяется, что на вхождении x16 расположен символ "принадлежит" либо "содержится", причем x15 - второй операнд вхождения x16. Проверяется, что x16 расположено лишь внутри таких вхождений v , что выполнено одно из требований:

- (a) По вхождению v расположен один из символов "и", "или", "существует".
- (b) v - вхождение символа "класс", причем оно является корневым для x13.
- (c) v - вхождение квантора "длялюбого", причем x16 подчинено консеквенту этого квантора.

Переменной x17 присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - d . Переменной x18 присваивается: если теорема - тождество, то выражение x9, иначе - второй корневой операнд утверждения x9. В нашем примере - " $b \cap c$ ". Переменной x19 присваивается результат замены в x18 переменной x14 на x17. В нашем примере - " $d \cap c$ ". Переменной x20 присваивается список результатов замены x14 на x17 в содержащих x14 антецедентах теоремы. Затем создается импликация, антецеденты которой суть антецеденты исходной теоремы, утверждения x20 и утверждение "содержится(x14 x17)". Консеквентом служит утверждение "содержится(x18 x19)". Эта импликация регистрируется в списке вывода.

2. Усмотрение монотонности по включению - рассмотрение списка переменных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ a \subseteq c \ \& \ b \subseteq d \rightarrow a \times b \subseteq c \times d)$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово})$$

Начало программы приема совпадает с программой предыдущего приема. Более того, предыдущий прием формирует некоторый вспомогательный набор, необходимый для срабатывания данного приема. Для удобства чтения повторим общую часть приемов.

Теорема может быть как тождеством, так и эквивалентностью. Переменной x_9 присваивается определяемый терм. Либо он имеет вид принадлежности, в левой части которой расположена переменная, не имеющая других вхождений в x_9 (в этом случае теорема является эквивалентностью), либо он имеет заголовок "класс" (в этом случае теорема - тождество).

Переменной x_{12} присваивается пустой накопитель, в который будут заноситься те переменные x_{14} предыдущего приема, для которых он создавал теоремы. Переменной x_{13} присваивается определяющий терм.

Дальнейшие действия происходят после того, как предыдущий прием просмотрел все варианты переменных x_{14} определяемого терма и заполнил накопитель x_{12} теми из них, для которых была выявлена монотонность. Проверяется, что список x_{12} имеет не менее двух переменных. Переменной x_{14} присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему, имеющий ту же длину, что список x_{12} . В нашем примере $x_{12} - a, b$; $x_{14} - c, d$. Переменной x_{15} присваивается: если теорема - тождество, то выражение x_9 , иначе - второй корневой операнд утверждения x_9 . В нашем примере - " $a \times b$ ". Переменной x_{16} присваивается результат замены в терме x_{15} переменных x_{12} на переменные x_{14} . В нашем примере - " $c \times d$ ". Переменной x_{17} присваивается список результатов замены переменных x_{12} на x_{14} в содержащих x_{12} антецедентах теоремы. Затем создается импликация, антецеденты которой суть антецеденты исходной теоремы, утверждения x_{17} и всевозможные утверждения "содержится(x, y)", где x - переменная списка x_{12} , y - расположенная на соответствующей позиции переменная списка x_{14} . Консеквентом служит утверждение "содержится($x_{15} x_{16}$)". Эта импликация регистрируется в списке вывода.

3. Усмотрение сохранения непустоты множества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ a \subseteq b \ \& \ \neg(\text{образ}(f, a) = \emptyset) \rightarrow \neg(\text{образ}(f, b) = \emptyset))$$

из теоремы

$$\forall_{fa}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{set}_x(\exists_y(y \in a \ \& \ x = f(y))) = \text{образ}(f, a))$$

Начало программы данного приема совпадает с началом первого из двух предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его.

Теорема может быть как тождеством, так и эквивалентностью. Переменной x_9 присваивается определяемый терм. Либо он имеет вид принадлежности, в левой части которой расположена переменная, не имеющая других вхождений в x_9 (в этом случае теорема является эквивалентностью), либо он имеет заголовок "класс" (в этом случае теорема - тождество).

Переменной x_{13} присваивается определяющий терм, переменной x_{14} - некоторый параметр терма x_9 . В нашем примере - a . Проверяется, что x_{14} имеет единственное вхождение в x_{13} . Переменной x_{15} присваивается это вхождение,

переменной x_{16} - вхождение, непосредственным операндом которого является x_{15} . Проверяется, что на вхождении x_{16} расположен символ "принадлежит" либо "содержится", причем x_{15} - второй операнд вхождения x_{16} . Проверяется, что x_{16} расположено лишь внутри таких вхождений v , что выполнено одно из требований:

- (a) По вхождению v расположен один из символов "и", "или", "существует".
- (b) v - вхождение символа "класс", причем оно является корневым для x_{13} .
- (c) v - вхождение квантора "длялюбого", причем x_{16} подчинено консеквенту этого квантора.

Переменной x_{17} присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b . Переменной x_{18} присваивается: если теорема - тождество, то выражение x_9 , иначе - второй корневой операнд утверждения x_9 . В нашем примере - "образ(f, a)". Переменной x_{19} присваивается результат замены в x_{18} переменной x_{14} на x_{17} . В нашем примере - "образ(f, b)". Переменной x_{20} присваивается список результатов замены x_{14} на x_{17} в содержащих x_{14} антецедентах теоремы. Затем создается импликация, антецеденты которой суть антецеденты исходной теоремы, утверждения x_{20} и утверждения "содержится($x_{14} x_{17}$)", "не(равно($x_{18} \emptyset$))". Консеквентом служит утверждение "не(равно($x_{19} \emptyset$))". Эта импликация регистрируется в списке вывода.

4. Усмотрение сохранения непересечения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abf}(f\text{—функция} \ \& \ a\text{—set} \ \& \ b\text{—set} \ \& \ \text{непересек}(a, b) \rightarrow \text{непересек}(\text{прообраз}(f, a), \text{прообраз}(f, b)))$$

из теоремы

$$\forall_{afx}(f\text{—функция} \ \& \ a\text{—set} \rightarrow x \in \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f(x) \in a)$$

Программа приема почти полностью совпадает с предыдущей. Для удобства чтения повторим ее.

Теорема может быть как тождеством, так и эквивалентностью. Переменной x_9 присваивается определяемый терм. Либо он имеет вид принадлежности, в левой части которой расположена переменная, не имеющая других вхождений в x_9 (в этом случае теорема является эквивалентностью), либо он имеет заголовок "класс" (в этом случае теорема - тождество).

Переменной x_{13} присваивается определяющий терм, переменной x_{14} - некоторый параметр терма x_9 . В нашем примере - a . Проверяется, что x_{14} имеет единственное вхождение в x_{13} . Переменной x_{15} присваивается это вхождение, переменной x_{16} - вхождение, непосредственным операндом которого является x_{15} . Проверяется, что на вхождении x_{16} расположен символ "принадлежит", причем x_{15} - второй операнд вхождения x_{16} . Проверяется, что для вхождения x_{16} выполнено одно из следующих требований:

- (a) x_{16} расположено лишь внутри таких вхождений v , что выполнено одно из условий:

- i. По вхождению v расположен символ "и".
 - ii. v - вхождение символа "класс", причем оно является корневым для x_{13} .
- (b) x_{13} имеет вид $\text{"set}_x(\exists y_1 \dots y_k (A_1 \ \& \ \dots \ \& \ A_n))$ ", причем x_{16} - вхождение некоторого A_i . Некоторое A_j имеет вид $x = t$. Выбираются переменные z_1, \dots, z_k , не входящие в исходную теорему. Определяются результаты t' замены в t переменных y_1, \dots, y_k на z_1, \dots, z_k , а также результаты B_1, \dots, B_{n-1} такой же замены в отличных от A_j утверждениях A_1, \dots, A_n . При помощи задачи на доказательство удается установить, что равенства $y_1 = z_1, \dots, y_k = z_k$ суть следствия списка, составленного из антецедентов исходной теоремы, отличных от A_j утверждений A_1, \dots, A_n , утверждений B_1, \dots, B_{n-1} , и равенства $t = t'$.

Переменной x_{17} присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b . Переменной x_{18} присваивается: если теорема - тождество, то выражение x_9 , иначе - второй корневой операнд утверждения x_9 . В нашем примере - $\text{"образ}(f, a)$ ". Переменной x_{19} присваивается результат замены в x_{18} переменной x_{14} на x_{17} . В нашем примере - $\text{"образ}(f, b)$ ". Переменной x_{20} присваивается список результатов замены x_{14} на x_{17} в содержащих x_{14} антецедентах теоремы.

Затем создается импликация, антецеденты которой суть антецеденты исходной теоремы, утверждения x_{20} и утверждение $\text{"непересек}(x_{14} \ x_{17})$ ". Консеквентом служит утверждение $\text{"непересек}(x_{18} \ x_{19})$ ". Эта импликация регистрируется в списке вывода.

5. Усмотрение сохранения объединения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \rightarrow \ a \times (b \cup c) = (a \times b) \cup (a \times c))$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \rightarrow \ f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово})$$

Программа приема почти полностью совпадает с программой предыдущего приема. Для удобства чтения повторим ее.

Теорема может быть как тождеством, так и эквивалентностью. Переменной x_9 присваивается определяемый терм. Либо он имеет вид принадлежности, в левой части которой расположена переменная, не имеющая других вхождений в x_9 (в этом случае теорема является эквивалентностью), либо он имеет заголовок "класс" (в этом случае теорема - тождество).

Переменной x_{13} присваивается определяющий терм, переменной x_{14} - некоторый параметр терма x_9 . В нашем примере - b . Проверяется, что x_{14} имеет единственное вхождение в x_{13} . Переменной x_{15} присваивается это вхождение, переменной x_{16} - вхождение, непосредственным операндом которого является x_{15} . Проверяется, что на вхождении x_{16} расположен символ "принадлежит", причем x_{15} - второй операнд вхождения x_{16} . Проверяется, что x_{16} расположено лишь внутри таких вхождений v , что выполнено одно из требований:

- (а) По вхождению v расположен один из символов "и", "или", "существует".
- (б) v - вхождение символа "класс", причем оно является корневым для x_{13} .

Переменной x_{17} присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - c . Переменной x_{18} присваивается: если теорема - тождество, то выражение x_9 , иначе - второй корневой операнд утверждения x_9 . В нашем примере - " $a \times b$ ". Переменной x_{19} присваивается результат замены в x_{18} переменной x_{14} на x_{17} . В нашем примере - " $a \times c$ ". Переменной x_{20} присваивается список результатов замены x_{14} на x_{17} в содержащих x_{14} антецедентах теоремы.

Проверяется, что переменная x_{14} в определяемом терме не является операндом объединения. Переменной x_{21} присваивается результат подстановки в терм x_{18} выражения "объединение(x_{14} x_{17})" вместо переменной x_{14} . Создается импликация, антецеденты которой суть антецеденты исходной теоремы и утверждения x_{20} . Консеквентом служит равенство выражения x_{21} объединению выражений x_{18} и x_{19} . Эта импликация регистрируется в списке вывода.

6. Усмотрение сохранения пересечения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abf}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \text{прообраз}(f, a \cap b) = \text{прообраз}(f, a) \cap \text{прообраз}(f, b))$$

из теоремы

$$\forall_{afx}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow x \in \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f(x) \in a)$$

Программа приема почти полностью совпадает с предыдущей. Для удобства чтения повторим ее.

Теорема может быть как тождеством, так и эквивалентностью. Переменной x_9 присваивается определяемый терм. Либо он имеет вид принадлежности, в левой части которой расположена переменная, не имеющая других вхождений в x_9 (в этом случае теорема является эквивалентностью), либо он имеет заголовок "класс" (в этом случае теорема - тождество).

Переменной x_{13} присваивается определяющий терм, переменной x_{14} - некоторый параметр терма x_9 . В нашем примере - a . Проверяется, что x_{14} имеет единственное вхождение в x_{13} . Переменной x_{15} присваивается это вхождение, переменной x_{16} - вхождение, непосредственным операндом которого является x_{15} . Проверяется, что на вхождении x_{16} расположен символ "принадлежит" либо "содержится", причем x_{15} - второй операнд вхождения x_{16} .

Проверяется, что для вхождения x_{16} выполнено одно из следующих требований:

- (а) x_{16} расположено лишь внутри таких вхождений v , что выполнено одно из условий:
 - i. По вхождению v расположен символ "и".

- ii. v - вхождение символа "класс", причем оно является корневым для x_{13} .
 - iii. v - вхождение квантора "длялюбого", причем x_{16} подчинено консеквенту этого квантора.
- (b) x_{13} имеет вид " $\text{set}_x(\exists_{y_1 \dots y_k}(A_1 \ \& \ \dots \ \& \ A_n))$ ", причем x_{16} - вхождение некоторого A_j . Некоторое A_j имеет вид $x = t$. Выбираются переменные z_1, \dots, z_k , не входящие в исходную теорему. Определяются результат t' замены в t переменных y_1, \dots, y_k на z_1, \dots, z_k , а также результаты B_1, \dots, B_{n-1} такой же замены в отличных от A_j утверждениях A_1, \dots, A_n . При помощи задачи на доказательство удается установить, что равенства $y_1 = z_1, \dots, y_k = z_k$ суть следствия списка, составленного из антецедентов исходной теоремы, отличных от A_j утверждений A_1, \dots, A_n , утверждений B_1, \dots, B_{n-1} , и равенства $t = t'$.

Переменной x_{17} присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b . Переменной x_{18} присваивается: если теорема - тождество, то выражение x_9 , иначе - второй корневой операнд утверждения x_9 . В нашем примере - " $\text{прообраз}(f, a)$ ". Переменной x_{19} присваивается результат замены в x_{18} переменной x_{14} на x_{17} . В нашем примере - " $\text{прообраз}(f, b)$ ". Переменной x_{20} присваивается список результатов замены x_{14} на x_{17} в содержащих x_{14} антецедентах теоремы. Проверяется, что в определяемом терме переменная x_{14} не является операндом пересечения. Переменной x_{21} присваивается результат подстановки к терм x_{18} выражения " $\text{пересечение}(x_{14} \ x_{17})$ " вместо переменной x_{14} . Создается импликация, антецеденты которой суть антецеденты исходной теоремы и утверждения x_{20} . Консеквентом служит равенство выражения x_{21} пересечению выражений x_{18} и x_{19} . Эта импликация регистрируется в списке вывода.

7. Усмотрение сохранения разности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abf}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \text{прообраз}(f, a \setminus b) = \text{прообраз}(f, a) \setminus \text{прообраз}(f, b))$$

из теоремы

$$\forall_{afx}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow x \in \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f(x) \in a)$$

Программа приема почти полностью совпадает с предыдущей. Для удобства чтения повторим ее.

Теорема может быть как тождеством, так и эквивалентностью. Переменной x_9 присваивается определяемый терм. Либо он имеет вид принадлежности, в левой части которой расположена переменная, не имеющая других вхождений в x_9 (в этом случае теорема является эквивалентностью), либо он имеет заголовок "класс" (в этом случае теорема - тождество).

Переменной x_{13} присваивается определяющий терм, переменной x_{14} - некоторый параметр терма x_9 . В нашем примере - a . Проверяется, что x_{14} имеет

единственное вхождение в x_{13} . Переменной x_{15} присваивается это вхождение, переменной x_{16} - вхождение, непосредственным операндом которого является x_{15} . Проверяется, что на вхождении x_{16} расположен символ "принадлежит", причем x_{15} - второй операнд вхождения x_{16} .

Проверяется, что для вхождения x_{16} выполнено одно из следующих требований:

- (a) x_{16} расположено лишь внутри таких вхождений v , что выполнено одно из условий:
 - i. По вхождению v расположен символ "и".
 - ii. v - вхождение символа "класс", причем оно является корневым для x_{13} .
- (b) x_{13} имеет вид $\text{set}_x(\exists_{y_1 \dots y_k}(A_1 \ \& \ \dots \ \& \ A_n))$, причем x_{16} - вхождение некоторого A_i . Некоторое A_j имеет вид $x = t$. Выбираются переменные z_1, \dots, z_k , не входящие в исходную теорему. Определяются результат t' замены в t переменных y_1, \dots, y_k на z_1, \dots, z_k , а также результаты B_1, \dots, B_{n-1} такой же замены в отличных от A_j утверждениях A_1, \dots, A_n . При помощи задачи на доказательство удается установить, что равенства $y_1 = z_1, \dots, y_k = z_k$ суть следствия списка, составленного из антецедентов исходной теоремы, отличных от A_j утверждений A_1, \dots, A_n , утверждений B_1, \dots, B_{n-1} , и равенства $t = t'$.

Переменной x_{17} присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b . Переменной x_{18} присваивается: если теорема - тождество, то выражение x_9 , иначе - второй корневой операнд утверждения x_9 . В нашем примере - "образ(f, a)". Переменной x_{19} присваивается результат замены в x_{18} переменной x_{14} на x_{17} . В нашем примере - "образ(f, b)". Переменной x_{20} присваивается список результатов замены x_{14} на x_{17} в содержащих x_{14} антецедентах теоремы.

Переменной x_{21} присваивается результат подстановки к терм x_{18} выражения "разность($x_{14} \ x_{17}$)" вместо переменной x_{14} . Создается импликация, антецеденты которой суть антецеденты исходной теоремы и утверждения x_{20} . Консеквентом служит равенство выражения x_{21} разности выражений x_{18} и x_{19} . Эта импликация регистрируется в списке вывода.

Перенесение в антецеденты части определяющего условия

1. Перенесение в антецеденты конъюнктивных членов определения класса.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{zA}(A - \text{set} \ \& \ z - \text{комплексное} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ \& \ \text{вещформа}(z) \in A \rightarrow z \in \text{комплформа}(A))$$

из теоремы

$$\forall_A(A - \text{set} \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{комплформа}(A) = \text{set}_z(z - \text{комплексное} \ \& \ (\text{Re}(z), \text{Im}(z)) \in A))$$

Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x9 присваивается определяемое выражение, переменной x11 - определяющее. Проверяется, что определяющее выражение имеет заголовок "класс". Переменной x12 присваивается список antecedентов исходной теоремы. Проверяется, что он непуст. Переменной x13 присваивается связывающая приставка описателя "класс", переменной x14 - набор конъюнктивных членов утверждения под описателем. Создается импликация, antecedентами которой служат утверждения x12 и x14, а консеквентом - условие принадлежности набора x13 выражению x9. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Перенесение в antecedенты равенства, определяющего связанную переменную квантора существования из определяющего утверждения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{af}(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \ \& \ a = \lim(f) \rightarrow \text{сходится}(f) \leftrightarrow a - \text{число})$$

из теоремы

$$\forall_f(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \rightarrow \text{сходится}(f) \leftrightarrow \exists_a(a - \text{число} \ \& \ a = \lim(f)))$$

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x9 присваивается элементарное определяемое утверждение, переменной x12 - определяющее. Проверяется, что заголовок x12 - квантор существования. Переменной x13 присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она одноэлементная. Переменной x14 присваивается ее элемент В нашем примере - a . Переменной x15 присваивается набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения. В этом наборе находится равенство x16, в левой части которого расположена переменная x14. Переменной x17 присваивается правая часть равенства. В нашем примере - " $\lim(f)$ ". Проверяется, что она не содержит переменной x14. Переменной x18 присваивается конъюнкция отличных от x16 утверждений списка x15. Проверяется, что все утверждения списка x15 элементарны, причем оценка сложности утверждения x18 меньше оценки сложности определяемого утверждения x9. Создается импликация, antecedенты которой суть antecedенты теоремы и равенство x16, а консеквент - эквивалентность утверждения x9 утверждению x18. Она регистрируется в списке вывода.

Усмотрение простейших свойств функции из ее определения

1. Область определения функции, заданной через описатель "отображение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aAB}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ B \subseteq A \rightarrow \text{Dom}(\text{индикатор}(A, B, a)) = A)$$

из теоремы

$$\forall_{ABa}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ B \subseteq A \rightarrow \text{индикатор}(A, B, a) = \lambda_x((a \text{ при } x \in B, \text{ иначе } 0), x \in A))$$

Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x10 присваивается вхождение определяющей части. Проверяется, что заголовком этой части служит описатель "отображение". Переменной x11 присваивается связывающая приставка описателя, переменной x12 - его предпоследний операнд (он задает условие на варьируемые переменные). Переменной x13 присваивается выражение "класс(x11 x12)", переменной x14 - список antecedентов теоремы. Выражение x13 упрощается задачей на преобразование относительно посылок x14, и результат присваивается выражению x16. В нашем примере x16 - переменная A . Проверяется, что x16 отлично от символа "противоречие". Создается импликация с antecedентами x14, консеквентом которой служит равенство "равно(область(F)x16)". Здесь F - определяемое выражение. Данная импликация регистрируется в списке вывода.

2. Множество значений функции, заданной через описатель "отображение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aB}(B - \text{set} \rightarrow \text{Val}(\text{конст}(B, a)) = (\emptyset \text{ при } B = \emptyset, \text{ иначе } \{a\}))$$

из теоремы

$$\forall_{aB}(B - \text{set} \rightarrow \text{конст}(B, a) = \lambda_x(a, x \in B))$$

Проверяется, что теорема - тождество, и переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что определяющий терм - описатель "отображение". Переменной x12 присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b . Переменной x13 присваивается связывающая приставка описателя. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x14 присваивается ее элемент. В нашем примере - x . Переменной x15 присваивается пара, состоящая из предпоследнего корневого операнда Q описателя (он определяет условия на варьируемую переменную) и равенства "равно(x12 Q)". Если удастся определить тип s значения последнего операнда описателя, то к паре x15 добавляется утверждение " $s(x12)$ ". В нашем примере x15 состоит из утверждений " $x \in B$ " и " $b = a$ ".

Переменной x16 присваивается список antecedентов теоремы. Решается задача на описание x17, посылки которой суть утверждения x16, а условия - x15. Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "неизвестные x14". Ответ присваивается переменной x18. В нашем примере он имеет вид " $x \in B \ \& \ b = a$ ". Проверяется, что x18 отлично от символа "отказ". Переменной x19 присваивается выражение "класс(x12 существует(x14 x18))". В нашем примере - " $\text{set}_b(\exists_x(x \in B \ \& \ b = a))$ ". Выражение x19 упрощается задачей на преобразование относительно посылок x16, и результат присваивается переменной x21. В нашем примере имеем " $(\emptyset \text{ при } B = \emptyset, \text{ иначе } \{a\})$ ". Проверяется, что x21 отлично от символов "отказ", "противоречие". Проверяется также, что количество вхождений символа "вариант" в x21 меньше 3 и что выражение x21 не содержит символа "класс". Затем создается импликация с antecedентами x16 и консеквентом "равно(значение(x8)x21)". Она регистрируется в списке вывода.

3. Попытка найти множество значений функции, определяемой без описателя "отображение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \text{Val}(\text{обрфункция}(f)) = \text{Dom}(f))$$

из теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \text{обрфункция}(f) - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(\text{обрфункция}(f)) = \text{Val}(f) \ \& \ \forall_x(x \in \text{Dom}(f) \rightarrow \text{обрфункция}(f)(f(x)) = x))$$

Переменной x_8 присваивается определяемый терм F . Среди конъюнктивных членов консеквента находится утверждение вида "функция(F)". Переменной x_{10} присваивается пара переменных X, Y , не входящих в исходную теорему. В нашем примере - a, b . Переменной x_{11} присваивается утверждение " $\exists_X(X \in \text{Dom}(F) \ \& \ Y = F(X))$ ". В нашем примере - " $\exists_a(a \in \text{Dom}(\text{обрфункция}(f)) \ \& \ b = \text{обрфункция}(f)(a))$ ". Переменной x_{12} присваивается список антецедентов исходной теоремы. Проверяется, что он непуст. Решается задача на описание x_{13} , посылками которой служат утверждения x_{12} , а единственным условием - x_{11} . Цели задачи - "редакция", "развертка". Ответ присваивается переменной x_{14} . В нашем примере он имеет вид " $b \in \text{Dom}(f)$ ". Проверяется, что x_{14} - элементарное утверждение, заголовком которого служит символ "принадлежит", а первым операндом служит x_{14} . Переменной x_{15} присваивается второй операнд. В нашем примере - " $\text{Dom}(f)$ ". Проверяется, что он не содержит переменных x_{10} . Создается импликация с антецедентами x_{12} , консеквентом которой служит равенство выражения "значения(x_8)" выражению x_{15} . Она регистрируется в списке вывода.

4. Значение функции, заданной через описатель "отображение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{axB}(B - \text{set} \ \& \ x \in B \rightarrow \text{конст}(B, a)(x) = a)$$

из теоремы

$$\forall_{aB}(B - \text{set} \rightarrow \text{конст}(B, a) = \lambda_x(a, x \in B))$$

Проверяется, что теорема - тождество, причем определяющая часть имеет своим заголовком описатель "отображение". Переменной x_{11} присваивается связывающая приставка описателя, переменной x_{12} - его предпоследний операнд (он определяет условия на варьируемые переменные). Переменной x_{14} присваивается список антецедентов теоремы. Проверяется, что x_{11} состоит из единственной переменной. Переменной x_{15} присваивается объединение списка x_{14} и списка конъюнктивных членов утверждения x_{12} . Результат применения оператора "нормантецеденты" к x_{15} относительно переменных консеквента присваивается переменной x_{16} . Затем создается импликация с антецедентами x_{16} , консеквентом которой является равенство " $F(x_{11}) = T$ ". Здесь F - определяемая часть исходной теоремы, T - последний операнд описателя "отображение". Данная импликация регистрируется в списке вывода.

5. Образ множества для функции, заданной посредством описателя "отображение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bfA}(b - \text{set} \ \& \ A - \text{set} \ \& \ b \subseteq A \ \& \ b \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \\ \text{образ}(\text{сужение}(f, A), b) = \text{образ}(f, b))$$

из теоремы

$$\forall_{fA}(f - \text{функция} \ \& \ A - \text{set} \rightarrow \text{сужение}(f, A) = \lambda_x(f(x), x \in A \cap \text{Dom}(f)))$$

Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x_9 присваивается определяемый терм. Проверяется, что определяющая часть - описатель "отображение". Переменной x_{12} присваивается его связывающая приставка. Пусть P - предпоследний операнд описателя (он определяет условия на варьируемые переменные), T - последний операнд (он определяет значение функции). Выбираются переменные X, Y , не входящие в теорему, и переменной x_{14} присваивается выражение "класс(X существует(x_{12} и(принадлежит(x_{12} Y) P равно(Y T))))". В нашем примере X, Y - переменные a, b ; x_{14} имеет вид "set_a($\exists_x(x \in b \ \& \ x \in A \cap \text{Dom}(f) \ \& \ a = f(x))$)". Переменной x_{15} присваивается результат добавления к списку антецедентов теоремы утверждений "множество(Y)", "содержится(Y класс(x_{12} P))". Переменной x_{16} присваивается результат упрощения выражения x_{14} относительно посылок x_{15} . В нашем примере - "образ(f, b)". Проверяется, что выражение x_{16} имеет не более одного вхождения символа "вариант" и не имеет связанных переменных. Затем создается импликация с антецедентами x_{15} , консеквентом которой служит равенство "равно(образ(x_9 Y) x_{16})". Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

6. Прообраз элемента для функции, заданной посредством описателя "отображение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abAB}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ B \subseteq A \rightarrow \text{слои}(\text{индикатор}(A, B, a), b) = \\ (A \text{ при } a = 0, \text{ иначе } B) \text{ при } a = b, \text{ иначе } (A \setminus B \text{ при } b = 0), \text{ иначе } \emptyset)$$

из теоремы

$$\forall_{ABa}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ B \subseteq A \rightarrow \text{индикатор}(A, B, a) = \\ \lambda_x((a \text{ при } x \in B, \text{ иначе } 0), x \in A))$$

Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x_9 присваивается определяемый терм. Проверяется, что определяющая часть - описатель "отображение". Переменной x_{12} присваивается его связывающая приставка. Пусть P - предпоследний операнд описателя (он определяет условия на варьируемые переменные), T - последний операнд (он определяет значение функции). Выбирается переменная X , не входящая в теорему, и переменной x_{14} присваивается выражение "класс(x_{12} и(равно(T X) P))". В нашем примере X - переменная b ; x_{14} - "set_x((a при $x \in B$, иначе 0) & $x \in A$)". Переменной x_{16} присваивается результат упрощения выражения x_{14} относительно антецедентов теоремы при помощи задачи на преобразование. В нашем примере он имеет вид

"((A при $a = 0$, иначе B) при $a = b$, иначе ($A \setminus B$ при $b = 0$), иначе \emptyset)". Проверяется, что либо $x16$ не имеет связанных переменных, либо содержит символ "слой". Переменной $x19$ присваивается импликация, антецеденты которой суть антецеденты теоремы, а консеквент - равенство выражения "слой($x9$ X)" выражению $x16$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема", и конъюнктивные члены результата регистрируются в списке вывода.

7. Сужение функции, заданной через описатель "отображение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abAB}(b\text{-set} \ \& \ A\text{-set} \ \& \ B\text{-set} \ \& \ B \subseteq b \ \& \ B \subseteq A \rightarrow \text{сужение}(\text{индикатор}(A, B, a), b) = \text{индикатор}(b \cap A, B, a))$$

из теоремы

$$\forall_{ABa}(A\text{-set} \ \& \ B\text{-set} \ \& \ B \subseteq A \rightarrow \text{индикатор}(A, B, a) = \lambda_x((a \text{ при } x \in B, \text{ иначе } 0), x \in A))$$

Проверяется, что теорема - тождество, имеющее своей определяющей частью описатель "отображение". Переменной $x11$ присваивается связывающая приставка описателя, переменной $x12$ - его предпоследний операнд (он определяет условия на варьируемые переменные), переменной $x13$ - последний операнд, определяющий значения функции.

Проверяется, что список $x11$ одноэлементный, и переменной $x14$ присваивается его элемент. Проверяется, что $x12$ - условие принадлежности, первым операндом которого является переменная $x14$, а вторым - некоторая переменная $x15$, не входящая в $x13$. В нашем примере $x12$ имеет вид " $x \in A$ ", $x15$ - переменная A . Переменной $x16$ присваивается переменная, не входящая в теорему. В нашем примере - b . Переменной $x17$ присваивается список антецедентов теоремы, переменной $x18$ - подсписок списка $x17$, образованная всеми содержащими $x15$ утверждениями. Переменной $x19$ присваивается выражение "пересечение($x15$ $x16$)".

Переменной $x20$ присваивается список результатов подстановки $x19$ вместо $x15$ в утверждения $x18$, переменной $x21$ - результат такой же подстановки в определяемую часть теоремы. В нашем примере $x21$ имеет вид "индикатор($A \cap b, B, a$)". Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения $x17$, $x20$ и утверждение "множество($x16$)". Ее консеквентом служит равенство выражения "сужение($T, x16$)" выражению $x21$. Здесь T - определяемая часть теоремы. Данная импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

8. Вывод эквивалентности расшифровки равенства для функции, определенной через описатель "отображение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abB}(B\text{-set} \rightarrow b = \text{конст}(B, a) \leftrightarrow \text{Dom}(b) = B \ \& \ B \subseteq \text{слой}(b, a) \ \& \ b\text{-функция})$$

из теоремы

$$\forall_{aB}(B - \text{set} \rightarrow \text{конст}(B, a) = \lambda_x(a, x \in B))$$

Проверяется, что теорема - тождество, имеющее своей определяющей частью описатель "отображение". Переменной x11 присваивается связывающая приставка описателя, переменной x12 - его предпоследний операнд (он определяет условия на варьируемые переменные), переменной x13 - последний операнд, определяющий значения функции.

Выбирается переменная x14, не входящая в исходную теорему. Переменной x15 присваивается конъюнкция утверждений "функция(x14)", "равно(область(x14) класс(x11 x12))", "длялюбого(x11 если x12 то равно(значение(x14 x11)x13))". Если список x11 более чем одноэлементный, то в выражении "значение(x14 x11)" его элементы помещаются под операцию "набор". Переменной x16 присваивается эквивалентность равенства "равно(T x14)" утверждению x15. Здесь T - определяемое выражение. Создается импликация, антецеденты которой те же, что у исходной теоремы, а консеквентом служит x16. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

9. Попытка извлечения параметрического описания для функций, обладающих специальным свойством.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bci}(i - \text{натуральное} \ \& \ i \leq l(c) \rightarrow c - \text{слово} \ \& \ b = c(i) \leftrightarrow \exists_a(a - \text{слово} \ \& \ i \in \{1, \dots, l(a) + 1\} \ \& \ c = \text{Вставка}(a, i, b))$$

из теоремы

$$\forall_{abi}(a - \text{слово} \ \& \ i \in \{1, \dots, l(a) + 1\} \rightarrow \text{Вставка}(a, i, b) = \lambda_j((a(j) \text{ при } j < i, \text{ иначе } (b \text{ при } j = i, \text{ иначе } a(j-1))), j \in \{1, \dots, l(a) + 1\}))$$

Переменной x8 присваивается определяемая часть. Проверяется, что теорема - тождество, причем определяющая часть представляет собой описатель "отображение". Выбирается переменная x12, не входящая в теорему. В нашем примере - c. Переменной x13 присваивается одноэлементный набор, состоящий из утверждения "функция(x12)". Переменной x14 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x15 - определяющий терм. Переменной x16 присваивается список параметров утверждений x14 и термина x15.

Решается задача на описание с одноэлементным списком посылок x13 и условиями x14, к которым добавлено равенство "равно(x12 x15)". Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x16", "упростить". В нашем примере посылка - "функция(c)"; условия - "a - слово", "i ∈ {1, ..., l(a) + 1}", "c = λ_j((a(j) при j < i, иначе (b при j = i, иначе a(j-1))), j ∈ {1, ..., l(a)+1})". Неизвестными служат переменные a, b, i.

Ответ задачи присваивается переменной x19. В нашем примере он имеет вид "i - натуральное & i ≤ l(c) & b = c(i) & a = λ_d((c(d) при d ≤ i - 1, иначе c(d + 1)), d ∈ {1, ..., -1+l(c)}) & c - слово". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x20 присваивается набор его конъюнктивных членов. Переменной x21 присваивается список утверждений набора x20, имеющих параметры списка x16. В нашем примере - все конъюнктивные члены утверждения

x19, кроме последнего. Переменной x22 присваивается список всех содержащихся в x21 равенств с переменной списка x16 в левой части. В нашем примере - третий и четвертый конъюнктивные члены утверждения x19.

Переменной x23 присваивается список всех не вошедших в x21 утверждений списка x20, переменной x24 - список всех утверждений набора x20, не вошедших в x22. Проверяется, что все утверждения списков x23, x24 элементарны. Переменной x26 присваивается список всех элементарных утверждений списка x22. Проверяется, что список x26 непуст. Переменной x27 присваивается список всех не элементарных утверждений списка x22. Проверяется, что x27 непуст. В нашем примере x23 состоит из единственного утверждения " c -слово", x24 - из утверждений " i - натуральное" и " $i \leq l(c)$ ", x26 - из утверждения " $b = c(i)$ ", x27 - из утверждения " $a = \lambda_d((c(d) \text{ при } d \leq i - 1, \text{ иначе } c(d + 1)), d \in \{1, \dots, -1 + l(c)\})$ ".

Переменной x28 присваивается список заголовков первых операндов утверждений набора x27. В нашем примере - одноэлементный список a . Переменной x29 присваивается список антецедентов теоремы, параметры которых пересекаются со списком x28. В нашем примере - оба антецедента. Переменной x30 присваивается утверждение "существует(x28 и(x29 равно(x12 x8)))". В нашем примере - " $\exists_a(a \text{ - слово} \ \& \ i \in \{1, \dots, l(a) + 1\} \ \& \ c = \text{Вставка}(a, i, b))$ ". Наконец, создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x24 и не вошедшие в список x29 антецеденты исходной теоремы, а консеквентом - эквивалентность конъюнкции утверждений списков x23, x26 утверждению x30. Эта импликация регистрируется в списке вывода.

10. Вывод условия существования параметра, при котором произвольная функция представима в заданном через описатель "отображение" виде.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abA}(A \text{ - set} \ \& \ b \text{ - функция} \rightarrow \exists_B(b = \text{индикатор}(A, B, a)) \leftrightarrow \text{Dom}(b) = A \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq \{a, 0\})$$

из теоремы

$$\forall_{ABa}(A \text{ - set} \ \& \ B \text{ - set} \ \& \ B \subseteq A \rightarrow \text{индикатор}(A, B, a) = \lambda_x((a \text{ при } x \in B, \text{ иначе } 0), x \in A))$$

Переменной x8 присваивается определяемая часть. Проверяется, что теорема - тождество, причем определяющая часть представлет собой описатель "отображение". Выбирается переменная x12, не входящая в теорему. В нашем примере - b . Переменной x13 присваивается связывающая приставка описателя. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x14 присваивается ее элемент. Переменной x15 присваивается предпоследний операнд описателя (он задает условия на варьируемую переменную). Переменной x16 присваивается список антецедентов теоремы. Проверяется, что он непуст. Переменной x17 присваивается выражение "класс(x14 x15)". В нашем примере - " $\text{set}_x(x \in A)$ ". Выражение x17 упрощается относительно посылок x16 задачей на преобразование. Если результат не содержит связанных переменных, то он переписывается переменной x17. В нашем примере значением переменной x17 становится A .

Проверяется, что заголовок выражения x17 отличен от символов "класс", "противоречие". Выбирается параметр x18 терма x8, не входящий в x17. В нашем примере - B . Переменной x19 присваивается список всех содержащих x18 антецедентов теоремы, переменной x20 - результат добавления к не вошедшим в x19 антецедентам теоремы утверждений "функция(x12)", "равно(область(x12)x17)". Переменной x21 присваивается утверждение "длялюбого(x14 если x15 то равно(x12(x14) T))", где T - последний операнд описателя "отображение" (он определяет значение функции). В нашем примере x21 имеет вид " $\forall_x(x \in A \rightarrow b(x) = (a \text{ при } x \in B, \text{ иначе } 0))$ ". Решается задача на описание x23, посылки которой суть утверждения списка x20, а условия - утверждения списка x19 и утверждение x21. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x18", "параметры x18", "упростить".

В нашем примере посылки суть " A -set", " b -функция", " $\text{Dom}(b) = A$ ". Условия суть " B - set", " $B \subseteq \text{Dom}(b)$ ", " $\forall_x(\neg(x \in B) \& x \in \text{Dom}(b) \rightarrow 0 = b(x))$ ". Неизвестная - B .

Ответ задачи присваивается переменной x24. В нашем примере он имеет вид " $\text{Val}(b) \subseteq \{a, 0\}$ ". Проверяется, что x24 отлично от символа "отказ" и не имеет связанных переменных. Переменной x25 присваивается эквивалентность утверждения "существует(x18 равно(x12 x8))" конъюнкции утверждения "равно(область(x12)x17)" и x24.

Затем создается импликация, антецедентами которой служат не вошедшие в список x19 утверждения x16 и утверждение "функция(x12)", а консеквентом - x25. Данная импликация регистрируется в списке вывода.

11. Явное разрешение относительно параметра условия представимости функции в заданном через описатель "отображение" виде.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abAB}(A - \text{set} \& B - \text{set} \& B \subseteq \& b - \text{функция} \rightarrow b = \text{индикатор}(A, B, a) \leftrightarrow \text{Dom}(b) = A \& B \subseteq \text{слои}(b, a) \& (\emptyset \text{ при } a = 0, \text{ иначе } \text{слои}(b, a)) \subseteq B \& \text{Val}(b) \subseteq \{a, 0\})$$

из теоремы

$$\forall_{ABa}(A - \text{set} \& B - \text{set} \& B \subseteq A \rightarrow \text{индикатор}(A, B, a) = \lambda_x((a \text{ при } x \in B, \text{ иначе } 0), x \in A))$$

Начало программы приема полностью совпадает с началом программы предыдущего приема - вплоть до присвоения значения переменной x25. Повторять его мы не будем.

Далее выполняются следующие действия. Переменной x26 присваивается объединение списка x20 и набора конъюнктивных членов утверждения x24. Решается задача на описание x27, посылками которой являются утверждения x26, а условиями - утверждения списка x19 и утверждение x21. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "неизвестные x18", "упростить". Отличие от задачи x23 состоит в том, что здесь неизвестные существенные и из ответа не исключаются.

В нашем примере посылками служат утверждения " $A - \text{set}$ ", " $b - \text{функция}$ ", " $\text{Dom}(b) = A$ ", " $\text{Val}(b) \subseteq \{a, 0\}$ ". Условия суть " $B - \text{set}$ ", " $B \subseteq \text{Dom}(b)$ ", " $\forall x(\neg(x \in B) \ \& \ x \in \text{Dom}(b) \rightarrow 0 = b(x))$ ". Неизвестные - B .

Переменной x28 присваивается ответ задачи x27. В нашем примере он имеет вид " $B \subseteq A \cap \text{слои}(b, a) \ \& \ b - \text{set} \ \& \ (\emptyset \text{ при } a = 0, \text{ иначе } \text{слои}(b, a)) \subseteq B$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и не имеет связанных переменных. Затем создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x16 и "функция(x12)", а консеквентом - эквивалентность равенства выражений x12 и x8 конъюнкции утверждений "равно(область(x12)x17)", x24 и x28. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

12. Извлечение явного параметрического описания функций из косвенного их задания.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\text{последовательность}(a, b) \rightarrow \text{подпоследовательность}(c, a) \leftrightarrow \exists_d(\text{последовательность}(d, \mathbb{N}) \ \& \ \text{возрастает}(d, \mathbb{N}) \ \& \ c = \lambda_i(a(d(i)), i - \text{натуральное}))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\text{последовательность}(a, b) \rightarrow \text{подпоследовательность}(c, a) \leftrightarrow c - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(c) = \mathbb{N} \ \& \ \exists_d(\text{последовательность}(d, \mathbb{N}) \ \& \ \text{возрастает}(d, \mathbb{N}) \ \& \ \forall_i(i - \text{натуральное} \rightarrow c(i) = a(d(i))))$$

Проверяется, что теорема - эквивалентность, и переменной x9 присваивается определяемое утверждение, а переменной x12 - определяющее. Проверяется, что x12 - конъюнкция, и переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов. Среди них находится утверждение x14 вида "функция(F)", где F - переменная, а также равенство x16 выражения "область(F)" некоторому не содержащему переменной F выражению x19. В нашем примере F - переменная c , x19 - выражение \mathbb{N} . Кроме того, в x13 расположен квантор существования x20. Переменной x21 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под данным квантором существования. Среди утверждений x21 находится квантор общности x22. В нашем примере - " $\forall_i(i - \text{натуральное} \rightarrow c(i) = a(d(i)))$ ". Переменной x23 присваивается связывающая приставка квантора x22. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x24 присваивается ее элемент. В нашем примере - i . Переменной x25 присваивается консеквент квантора x22. Проверяется, что он является равенством выражения " $F(x24)$ " некоторому выражению x28, не содержащему F . В нашем примере - выражению " $a(d(i))$ ". Переменной x29 присваивается список отличных от x14, x16 и x20 элементов списка x21. Проверяется, что все они не содержат переменной F . В нашем примере список x29 пуст. Переменной x30 присваивается список утверждений набора x21, не вошедших в набор x22. Проверяется, что все они не содержат переменной F . В нашем примере список x30 состоит из утверждений "последовательность(d, \mathbb{N})", "возрастает(d, \mathbb{N})".

Переменной x31 присваивается выражение "класс(x24 Q)", где Q - конъюнкция антецедентов кванторной импликации x22. В нашем примере x31 имеет вид " $\text{set}_i(i - \text{натуральное})$ ". Переменной x32 присваивается список антецедентов исходной теоремы, переменной x33 - объединение списков x32 и x29. При

помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство выражений x_{31} и x_{19} - следствие утверждений x_{33} .

Переменной x_{35} присваивается равенство переменной F выражению "отображение($x_{24} Q x_{28}$)". Переменной x_{36} присваивается конъюнкция утверждений списка x_{29} и утверждения "существует(X и($x_{30} x_{35}$))". Создается импликация с антецедентами x_{32} , консеквентом которой является эквивалентность утверждений x_9 и x_{36} . Она регистрируется в списке вывода.

13. Явное разрешение относительно нескольких параметров условия представимости функции в заданном через описатель "отображение" виде.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall - abc(l(a) = l(b) \ \& \ a - \text{слово} \ \& \ b - \text{слово} \rightarrow c = \text{кортежпар}(a, b) \leftrightarrow \\ \forall_i(i \in \{1, \dots, l(c)\} \rightarrow l(c(i)) = 2 \ \& \ c(i) - \text{слово}) \ \& \ a = \lambda_i(c(i)(1), i \in \{1, \dots, l(c)\}) \ \& \\ b = \lambda_i(c(i)(2), i \in \{1, \dots, l(c)\}) \ \& \ c - \text{слово})$$

из теоремы

$$\forall_{abn}(a - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(a) = \{1, \dots, n\} \ \& \ b - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(b) = \{1, \dots, n\} \rightarrow \\ \text{кортежпар}(a, b) = \lambda_i((a(i), b(i)), i \in \{1, \dots, n\}))$$

Начало программы приема совпадает с началом одного из ранее рассмотренных приемов. Для удобства чтения повтрим его. Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема является тождеством и что определяющей частью служит описатель "отображение". Выбирается переменная x_{12} , не входящая в теорему. В нашем примере - переменная c . Переменной x_{13} присваивается связывающая приставка описателя. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x_{14} присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная i . Переменной x_{15} присваивается предпоследний операнд описателя (он определяет условия на варьируемую переменную). Переменной x_{16} присваивается список антецедентов теоремы. Переменной x_{17} присваивается выражение "класс($x_{14} x_{15}$)". Предпринимается попытка упростить его относительно посылок x_{16} задачей на преобразование. Если получается выражение без связанных переменных, то оно переприсваивается переменной x_{17} . В нашем примере x_{17} приобретает вид " $\{1, \dots, n\}$ ". Проверяется, что заголовок выражения x_{17} отличен от символов "класс", "противоречие".

Дальше начинаются отличия. Переменной x_{18} присваивается список параметров определяемой части теоремы. В нашем примере - " a, b ". Проверяется, что эти параметры не встречаются в выражении x_{17} и что их число не менее двух. Переменной x_{19} присваивается список утверждений набора x_{16} , содержащих параметр списка x_{18} . Переменной x_{20} присваивается результат добавления к остальным утверждениям списка x_{16} утверждений "функция(x_{12})" и "равно(область(x_{12}) x_{17})". Переменной x_{21} присваивается утверждение "длялюбого(x_{14} если x_{15} то равно(значение($x_{12} x_{14}$) T))". Здесь T - последний операнд описателя "отображение" (он задает значение функции).

Создается задача на описание x_{23} с посылками x_{20} , условиями которой служат утверждения списка x_{19} и утверждение x_{21} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{18} ", "упростить".

В нашем примере посылки задачи суть: " c – функция", " $\text{Dom}(c) = \{1, \dots, n\}$ ", условия - " a – функция", " $\text{Dom}(a) = \{1, \dots, n\}$ ", " b – функция", " $\text{Dom}(b) = \{1, \dots, n\}$ ", " $\forall_i (i \in \{1, \dots, n\} \rightarrow c(i) = (a(i), b(i)))$ ". Неизвестные - a, b .

Ответ задачи x23 присваивается переменной x24. В нашем примере он имеет вид: " $b = \lambda_i (c(i)(2), i \in \{1, \dots, l(c)\}) \& \text{семействофункций}(c) \& \forall_i (i \in \{1, \dots, n\} \rightarrow \text{Dom}(c(i)) = \{1, 2\}) \& a = \lambda_i (c(i)(1), i \in \{1, \dots, l(c)\})$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ".

Создается импликация с антецедентами x16, консеквентом которой служит эквивалентность равенства выражений x8 и x12 конъюнкции утверждений "функция(x12)", "равно(область(x12)x17)" и утверждения x24. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

14. Вывод условия равенства функций, заданных через описатель "отображение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcB} (c - \text{set} \& B - \text{set} \rightarrow \text{конст}(c, b) = \text{конст}(B, a) \leftrightarrow a = b \& c = B \vee c = \emptyset \& B = \emptyset)$$

из теоремы

$$\forall_{aB} (B - \text{set} \rightarrow \text{конст}(B, a) = \lambda_x (a, x \in B))$$

Проверяется, что теорема - тождество, и переменной x9 присваивается определяемое выражение. Проверяется, что заменяющее выражение - описатель "отображение". Переменной x12 присваивается связывающая приставка теоремы, переменной x13 - список переменных, не входящих в x12 и имеющий такую же длину, как x12. В нашем примере x12 - a, B ; x13 - b, c . Переменной x14 присваивается список антецедентов исходной теоремы, переменной x15 - список результатов замены в этих антецедентах переменных x12 на x13. Переменной x16 присваивается объединение списков x14 и x15.

Переменной x17 присваивается предпоследний операнд описателя "отображение" (он указывает условия на варьируемые переменные), переменной x18 - связывающая приставка описателя. Переменной x19 присваивается результат замены в x17 переменных x12 на x13. Переменной x20 присваивается равенство выражения "класс(x18 x17)" выражению "класс(x18 x19)". Переменной x21 присваивается последний операнд описателя "отображение" (он задает значение функции), переменной x22 - результат замены в x21 переменных x12 на x13. Переменной x23 присваивается утверждение "длялюбого(x18 если x17 то равно(x21 x22))".

Решается задача на описание x25, посылками которой служат утверждения x16, а условиями - x20 и x23. Цели задачи - "полный", "прямойответ", "редакция", "свертка".

В нашем примере посылки задачи суть " $B - \text{set}$ ", " $c - \text{set}$ ". Условия - утверждения " $\text{set}_x(x \in B) = \text{set}_x(x \in c)$ " и " $\forall_x(x \in B \rightarrow a = b)$ ".

Ответ задачи присваивается переменной x26. В нашем примере он имеет вид " $b = a \ \& \ B = c \ \vee \ c = \emptyset \ \& \ B = \emptyset$ ". Проверяется, что x26 отлично от символа "отказ" и не имеет связанных переменных. Переменной x27 присваивается результат замены в x9 переменных x12 на x13. Создается импликация с антецедентами x16, консеквентом которой служит эквивалентность равенства выражений x9 и x27 утверждению x26. Она обрабатывается оператором "норм-теорема" и регистрируется в списке вывода.

15. Усмотрение явного выражения функции через параметры.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_g(\forall_x(x \in \text{Dom}(g) \rightarrow \text{дифференцируема}(g, x)) \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g - \text{функция} \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(\text{производная}(g, x), x \in \text{Dom}(g)), g))$$

из теоремы

$$\forall_{fg}(f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{первообразная}(f, g) \leftrightarrow g - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \forall_x(x \in \text{Dom}(g) \rightarrow \text{дифференцируема}(g, x) \ \& \ \text{производная}(g, x) = f(x))$$

Проверяется, что теорема - эквивалентность, и переменной x9 присваивается определяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x12 присваивается определяющее утверждение, переменной x13 - список его конъюнктивных членов. Переменной x14 присваивается список антецедентов теоремы. Среди них находится утверждение x15 вида "функция(F)", где F - переменная. В нашем примере - переменная f . В списке x13 находится равенство x17 с выражением "область(F)" в левой части. Его правая часть присваивается переменной x20. Проверяется, что x20 не содержит F . В нашем примере x20 имеет вид " $\text{Dom}(g)$ ". В списке x13 находится кванторная импликация x21. Переменной x22 присваивается ее связывающая приставка. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x23 присваивается этот элемент. В нашем примере - x . Переменной x24 присваивается набор антецедентов импликации x21. Проверяется, что он одноэлементный, и переменной x25 присваивается его элемент. В нашем примере - " $x \in \text{Dom}(g)$ ". Проверяется, что x25 - условие принадлежности переменной x23 выражению x20. Переменной x26 присваивается набор конъюнктивных членов консеквента импликации x21. В нем выбирается равенство x27 выражения "значение(x16 x23)" некоторому выражению x30, не содержащему переменной x16. В нашем примере x30 имеет вид "производная(g, x)". Проверяется, что переменная x16 имеет единственное вхождение в консеквент импликации x21. Переменной x31 присваивается выражение "отображение(x23 принадлежит(x23 x20)x30)". В нашем примере - " $\lambda_x(\text{производная}(g, x), x \in \text{Dom}(g))$ ". Переменной x32 присваивается список результатов подстановки выражения x31 вместо переменной x16 в утверждения x14. Если в списке x26 имеются утверждения, отличные от x27, то рассматривается конъюнкция K таких утверждений, и к списку x32 добавляется утверждение "длялюбого(x23 если принадлежит(x23 x20)то K)". В нашем примере добавляется " $\forall_x(x \in \text{Dom}(g) \rightarrow \text{дифференцируема}(g, x))$ ".

Далее к списку x32 добавляются результаты подстановки выражения x31 вместо переменной x16 в отличные от x17 и x21 утверждения списка x13. В нашем примере добавляются утверждения " g – функция", " $\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}$ ".

Переменной x33 присваивается результат подстановки x31 вместо x16 в утверждение x9. Затем создается импликация с антецедентами x32 и консеквентом x33. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

16. Переформулировка определения операции над функциями через операнды, заданные с помощью описателя "отображение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bf}g(\lambda_x(f(x), b(x)) + \lambda_x(g(x), b(x)) = \lambda_x(f(x) + g(x), b(x)))$$

из теоремы

$$\forall_{fg}(f \text{ – функция} \ \& \ g \text{ – функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f + g = \lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f)))$$

Там, где знак сложения относится к функциям, он обозначает символ "плюс-функ".

Проверяется, что теорема - тождество, причем определяющей частью служит описатель "отображение". Переменной x11 присваивается связывающая приставка описателя, переменной x12 - его предпоследний операнд (он указывает условия на варьируемые переменные), переменной x13 - последний операнд (он определяет значение функции). В нашем примере x13 - " $f(x) + g(x)$ ". Проверяется, что список x11 одноэлементный, и переменной x14 присваивается его элемент. В нашем примере - x . Проверяется, что x12 имеет вид условия принадлежности переменной x11 некоторому неоднобуквенному выражению T . В нашем примере T имеет вид " $\text{Dom}(f)$ ". Переменной x17 присваивается первый операнд выражения T . Проверяется, что он является переменной. В нашем примере - f . Переменной x18 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x19 - список всех входящих в x18 утверждений с заголовком "функция". Переменной x20 присваивается список переменных - операндов утверждений x19. В нашем примере - f, g . Проверяется, что x17 входит в список x20.

Переменной x21 присваивается определяемое выражение теоремы. Проверяется, что оно содержит все переменные x20. Проверяется, что каждое вхождение переменной списка x20 в выражение x13 является вхождением первого операнда символа "значение".

Переменной x22 присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x20. В нашем примере - a, b . Переменной x23 присваивается список утверждений, определяющих сопровождение выражения x13 по о.д.з. В нашем примере - " g – функция", " f – функция", " $g(x)$ – число", " $f(x)$ – число".

Просматриваются утверждения x24 списка x18, имеющие параметр списка x20 и не входящие в x19. Для каждого такого утверждения рассматриваются следующие случаи:

- (а) x_{24} имеет вид "равно(область(x_{25})область(x_{26}))", где переменные x_{25} , x_{26} входят в x_{20} . Тогда рассматриваются переменные x_{27} , x_{28} списка x_{22} , соответствующие переменным x_{25} и x_{26} . Переменная x_{27} заменяется в списке x_{22} на x_{28} , а утверждение x_{24} добавляется к списку x_{19} .
- (б) x_{24} имеет вид "содержится(значения(x_{25}) Q)", где x_{25} входит в список x_{20} . Для каждого вхождения v переменной x_{13} в выражение x_{13} рассматривается непосредственный надтерм R этого вхождения (т.е. такой, что v - его корневой операнд), и при помощи задача на доказательство проверяется, что утверждение " $R \in Q$ " - следствие утверждений x_{23} . Тогда утверждение x_{24} добавляется к списку x_{19} .

Если хотя бы для одного x_{24} ни один из указанных случаев не имеет места, то прием не применяется. Иначе, по окончании просмотра, все переменные начиная с x_{24} снова оказываются не определенными.

В нашем примере набор x_{22} приобретает вид " b, b ". Список x_{19} состоит из утверждений " f - функция", " g - функция", " $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$ ", " $\text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}$ ".

Переменной x_{24} присваивается список утверждений набора x_{18} , не вошедших в x_{19} . В нашем примере он пуст. Переменной x_{25} присваивается список выражений "отображение(x_{14} значение(Y x_{14}) значение(X x_{14}))", где X пробегает список x_{20} , а Y - соответствующая переменная списка x_{22} . В нашем примере x_{25} состоит из утверждений " $\lambda_x(f(x), b(x))$ ", " $\lambda_x(g(x), b(x))$ ".

Переменной x_{26} присваивается результат подстановки в определяемое выражение теоремы выражений x_{25} вместо переменных x_{20} . Переменной x_{27} присваивается элемент списка x_{22} , соответствующий элементу x_{17} списка x_{20} . В нашем примере - b . Переменной x_{28} присваивается выражение "отображение(x_{14} значение(x_{27} x_{14}) x_{13})". Затем создается импликация с антецедентами x_{24} и консеквентом "равно(x_{26} x_{28})", которая регистрируется в списке вывода.

17. Попытка вывести условие на значение функции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{af}(f \text{ - функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \ \& \ a \in \text{Val}(f) \rightarrow \text{обрфункция}(f)(a) \in \text{Dom}(f))$$

из теоремы

$$\forall_f(f \text{ - функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \text{обрфункция}(f) \text{ - функция} \ \& \ \text{Dom}(\text{обрфункция}(f)) = \text{Val}(f) \ \& \ \forall_x(x \in \text{Dom}(f) \rightarrow \text{обрфункция}(f)(f(x)) = x))$$

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Среди конъюнктивных членов консеквента теоремы имеется утверждение "функция(x_8)". Выбираются переменные X, Y , не входящие в теорему. В нашем примере - переменные a, b . Переменной x_{11} присваивается утверждение "существует(X и(принадлежит(X область(x_8))равно(Y значение(x_8 X))))". В нашем примере это утверждение имеет вид " $\exists_a(a \in \text{Dom}(\text{обрфункция}(f)) \ \& \ b = \text{обрфункция}(f)(a))$ ". Переменной x_{12} присваивается список антецедентов теоремы.

Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения $x12$, а единственным условием - утверждение $x11$. Цели задачи - "редакция", "развертка". Ответ присваивается переменной $x14$. В нашем примере он имеет вид " $b \in \text{Dom}(f)$ ". Проверяется, что $x14$ отлично от символа "отказ" и элементарно. Переменной $x15$ присваивается результат подстановки выражения "значение($x8$ X)" вместо переменной Y в выражение $x14$. В нашем примере $x15$ имеет вид "обрфункция(f)(a) $\in \text{Dom}(f)$ ". Переменной $x16$ присваивается результат добавления к списку $x12$ утверждения "принадлежит(X область($x8$))", переменной $x17$ - результат обработки списка $x16$ процедурой "нормантецеденты" относительно параметров термина $x15$. Затем создается импликация с антецедентами $x17$ и консеквентом $x15$, которая регистрируется в списке вывода.

18. Вывод условия принадлежности значения функции ее области значений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{afAB}(a \in A \ \& \ \text{Отображение}(f, A, B) \rightarrow f(a) \in B)$$

из теоремы

$$\forall_{fAB}(\text{Отображение}(f, A, B) \leftrightarrow f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = A \ \& \ B - \text{set} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq B)$$

Проверяется, что теорема - эквивалентность с конъюнктивной определяющей частью. Переменной $x11$ присваивается элементарная определяемая часть, переменной $x12$ - набор конъюнктивных членов определяющей части. В этом наборе находится утверждение "функция(F)", где F - переменная. В нашем примере это переменная f . Проверяется, что F входит в терм $x11$. В списке $x12$ находится равенство выражения "область(F)" некоторому не содержащему F выражению $x17$, а также включение выражения "значения(F)" в некоторое выражение $x20$. В нашем примере $x17$ - A , $x20$ - B . Выбирается переменная $x21$, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной $x22$ присваивается утверждение "принадлежит(значение(F $x21$) $x20$)", переменной $x23$ - результат добавления к списку антецедентов теоремы утверждений $x11$ и "принадлежит($x21$ $x17$)". Затем создается импликация с антецедентами $x23$ и консеквентом $x22$. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "кванторнаясвертка" и регистрируется в списке вывода.

19. Сужение операции над функциями на специальные типы функций.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{efgh}(\text{матр}(f, \mathbb{R}, e, h) \ \& \ \text{матр}(g, \mathbb{R}, e, h) \rightarrow \text{матр}(f + g, \mathbb{R}, e, h))$$

из теоремы

$$\forall_{fg}(f - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow f + g = \lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f)))$$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abmn}(m - \text{натуральное} \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \text{матр}(a, b, m, n) \leftrightarrow$
 $a - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(a) = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\} \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq b)$

В зависимости от контекста, знак сложения обозначает либо логический символ "плюсфунк", либо символ "плюс". Как видно из дополнительной теоремы, утверждение "матр(a, b, m, n)" означает, что a - матрица размера $m \times n$ с элементами из множества b .

Проверяется, что теорема - тождество, причем определяющей частью служит описатель "отображение". Переменной x_{12} присваивается этот описатель, переменной x_{13} - его последний операнд (он определяет значение функции). Переменной x_9 присваивается определяемый терм. Переменной x_{14} присваивается список всех таких переменных F , что в терме x_{13} встречается потерм вида $F(X)$. В нашем примере - f, g . Проверяется, что список x_{14} непуст.

Переменной x_{15} присваивается список антецедентов теоремы. Проверяется, что для каждой переменной F из x_{14} в списке x_{15} встречается утверждение "функция(F)".

Прием пока ориентирован лишь на три специальных типа функций - конечные наборы, матрицы (предикат "матр(a, b, m, n)") и последовательности (предикат "последовательность(a, b)"). В случае конечных наборов рассматриваются два предиката - "слово(a)" и "кортеж(a, b, c)". Выбирается произвольный из указанных предикатов, и рассматривается его определение. В нашем случае - предикат "матр", определяемый указанной выше дополнительной теоремой.

Вводится пустой накопитель x_{21} , который будет заполняться парами (список антецедентов - консеквент) для преобразованных копий дополнительной теоремы, а также накопитель x_{22} , в который изначально заносится исходная теорема, а затем - все рассматриваемые ниже копии дополнительной теоремы. Для заполнения указанных накопителей последовательно переменной x_{23} присваивается терм x_{12} , а также все элементы списка x_{14} . В нашем примере x_{12} имеет вид " $\lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f))$ ", x_{14} состоит из переменных f, g . Таким образом, в данном цикле x_{23} - выражение, определяющее либо результирующую функцию, либо одну из исходных.

При рассмотрении очередного значения x_{23} прежде всего происходит присвоение переменной x_{24} результата переобозначения в дополнительной теореме всех ее переменных на переменные, не встречающиеся в теоремах списка x_{22} . Сразу вслед за этим теорема x_{24} заносится в список x_{22} . Переменной x_{28} присваивается набор конъюнктивных членов определяющей части теоремы x_{24} . Среди них находится терм "функция(F)". Вводится накопитель x_{31} переменных, вместо которых будет происходить подстановка при преобразовании теоремы x_{24} , а также накопитель x_{32} термов, которые будут подставляться вместо переменных x_{31} . Изначально x_{31} состоит из переменной F , x_{32} - из терма x_{23} .

Если x_{23} - переменная (т.е. одна из исходных функций), то в списке x_{28} находится включение для ее множества значений. Переменной x_{34} присваивается правая часть такого включения, причем проверяется, что x_{34} - переменная. Тогда среди антецедентов x_{15} исходной теоремы находится включение для множества значений функции x_{23} , и переменной x_{36} присваивается правая часть данного включения. Затем к списку x_{31} добавляется x_{34} , а к списку x_{32} - x_{36} .

После коррекции списков x_{31} , x_{32} переменной x_{33} присваивается набор результатов подстановки x_{32} вместо x_{31} в antecedentes теоремы x_{24} , а переменной x_{34} - результат такой же подстановки в ее консеквент. Затем пара (x_{33}, x_{34}) добавляется к накопителю x_{21} , и переход к очередному x_{23} .

Если хотя бы в одном случае пополнение накопителя x_{21} не имело места, прием не применяется. Иначе, после рассмотрения всех значений x_{23} , все переменные начиная с x_{23} становятся не определенными.

Переменной x_{23} присваивается объединение списка antecedентов x_{15} с первыми элементами пар набора x_{21} (списками antecedентов преобразованных копий дополнительной теоремы). В нашем примере x_{23} будет состоять из следующих утверждений: " f - функция", " g - функция", " $\text{Dom}(f) = \text{Dom}(g)$ ", " $\text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}$ ", " e - натуральное", " h - натуральное", " $\mathbb{R} - \text{set}$ ", " k - натуральное", " l - натуральное". Рассматриваются вторые элементы пар набора x_{21} , соответствующих исходным функциям. Эти элементы суть эквивалентности, правые части которых - конъюнкции, соответствующие определяющей части дополнительной теоремы. Переменной x_{24} присваивается результат добавления к x_{23} наборов конъюнктивных членов таких конъюнкций. В нашем примере добавляются всего два утверждения: " $\text{Dom}(f) = \{1, \dots, e\} \times \{1, \dots, h\}$ " и " $\text{Dom}(g) = \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, l\}$ ".

Вводится пустой накопитель x_{25} . Просматриваются вторые элементы пар набора x_{21} , соответствующие исходным функциям F . Эти элементы суть эквивалентности, левые части которых соответствуют определяемой части дополнительной теоремы. Эти части заносятся в список x_{23} . При этом в правой части эквивалентности находятся равенства вида "равно(область(F)) T ", и в накопитель x_{25} заносятся пары (область(F), T). В нашем примере к списку x_{23} добавляются утверждения "матр(f, \mathbb{R}, e, h)" и "матр(g, \mathbb{R}, k, l)". Список x_{25} состоит из пар (" $\text{Dom}(f)$ ", " $\{1, \dots, e\} \times \{1, \dots, h\}$ ") и (" $\text{Dom}(g)$ ", " $\{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, l\}$ "). Если список x_{25} оказался непустым, то в утверждениях списка x_{23} все вхождения первых элементов пар набора x_{25} заменяются на вторые элементы этих пар. Далее - откат, после которого значение x_{25} снова оказывается не определенным.

В нашем примере x_{23} приобретает следующий вид: " f -функция", " g -функция", " $\{1, \dots, e\} \times \{1, \dots, h\} = \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, l\}$ ", " $\text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R}$ ", " e -натуральное", " h -натуральное", " \mathbb{R} -set", " k -натуральное", " l -натуральное", "матр(f, \mathbb{R}, e, h)" и "матр(g, \mathbb{R}, k, l)".

Рассматривается первая пара набора x_{21} . Она соответствует версии V дополнительной теоремы, получаемой при подстановке в нее результирующей функции. Вторым элементом пары - консеквент. В его определяемой части находится подтерм "отображение(...)", явно определяющий результирующую функцию, и переменной x_{29} присваивается результат замены данного подтерма на определяемую часть исходной теоремы. В нашем примере "матр($\lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f)), b, m, n$)" преобразуется таким образом в "матр($f + g, b, m, n$)".

Переменной x_{30} присваивается список параметров определяемой части импликации V , не являющихся параметрами терма x_{12} . В нашем примере - b, m, n . Переменной x_{31} присваивается объединение списка antecedентов импликации

V с конъюнктивными членами определяющей части этой импликации. В нашем примере имеем " m – натуральное", " n – натуральное", " b – set", " $\lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f))$ – функция", " $\text{Dom}(\lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f))) = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ ", " $\text{Val}(\lambda_x(f(x) + g(x), x \in \text{Dom}(f))) \subseteq b$ ".

Далее рассматриваются два случая:

- (a) Список х30 пуст. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что конъюнкция утверждений х31 является следствием утверждений х24. Затем создается импликация с антецедентами х23 и консеквентом х29. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.
- (b) Список х31 непуст. Решается задача на описание х32 с посылками х24 и условиями х31. Цели задачи - "полный", "пример", "прямой ответ", "независит х14", "неизвестные х30". В нашем примере неизвестные b, m, n , известные параметры - f, g . Ответ задачи присваивается переменной х33. В нашем примере он имеет вид " $m = e \ \& \ n = h \ \& \ b = \mathbb{R}$ ". Проверяется, что х33 отлично от символов "отказ", "истина". Переменной х34 присваивается список конъюнктивных членов утверждения х33. Переменной х35 присваивается список правых частей равенств списка х34, определяющих значения переменных х30. Переменной х36 присваивается результат подстановки в х29 термов х35 вместо переменных х30. В нашем примере - "матр($f + g, \mathbb{R}, e, h$)". Создается импликация с антецедентами х23 и консеквентом х36. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.
- (c) Замена переменной для функции на операцию над функциями и попытка обратной свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(\text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b \text{ – функция} \ \& \ a \text{ – число} \rightarrow a \cdot (-b) = -(ab))$$

из теоремы

$$\forall_{af}(a \text{ – число} \ \& \ f \text{ – функция} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow af = \lambda_x(af(x), x \in \text{Dom}(f)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_f(f \text{ – функция} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow -f = \lambda_x(-f(x), x \in \text{Dom}(f)))$$

Здесь посредством af обозначена операция "числокоэфф(a, f)" умножения вещественнозначной функции f на число a , посредством $-f$ - операция "минусфунк(f)" изменения знака для вещественнозначной функции f .

Проверяется, что теорема - тождество. Переменной х9 присваивается определяемый терм, переменной х11 - вхождение определяющей части. Проверяется, что эта часть - описатель "отображение". Рассматривается некоторый корневой операнд определяемой части, представляющий собой переменную х13. Переменной х14 присваивается список антецедентов теоремы, причем проверяется, что среди них имеется утверждение "функция(х13)". В нашем примере х13 - f . В списке х14 находится утверждение х15 вида

"содержится(значения($x13$) T)", где T отлично от переменной. Справочник "элементы" по заголовку выражения T определяет тип $x17$ элементов множества T . В нашем примере T имеет вид " \mathbb{R} ", и $x17$ - символ "число".

Справочник поиска теорем "функвх" определяет по $x17$ указанную выше дополнительную теорему $x18$. Переменной $x20$ присваивается результат переобозначения в теореме $x18$ ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере $x20$ имеет вид:

$$\forall_b(b - \text{функция} \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow -b = \lambda_x(-b(x), x \in \text{Dom}(b)))$$

Переменной $x24$ присваивается описатель "отображение" в определяющей части теоремы $x20$, переменной $x25$ - список результатов подстановки выражения $x24$ вместо переменной $x13$ в утверждения списка $x14$.

Решается задача на исследование $x27$, посылками которой служат утверждения $x25$ и антецеденты теоремы $x20$. Цели задачи - "сохр", "противоречие". В нашем примере посылки задачи суть: " a - число", " $\lambda_c(-b(c), c \in \text{Dom}(b)) - \text{функция}$ ", " $\text{Val}(\lambda_c(-b(c), c \in \text{Dom}(b))) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $b - \text{функция}$ ", " $\text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R}$ ".

Проверяется, что после решения задачи $x27$ ее список посылок $x29$ не содержит константы "ложь". Переменной $x30$ присваивается результат подстановки в описатель $x11$ выражения $x24$ вместо переменной $x13$. В нашем примере он имеет вид " $\lambda_x(a\lambda_c(-b(c), c \in \text{Dom}(b))(x), x \in \text{Dom}(\lambda_c(-b(c), c \in \text{Dom}(b))))$ ". Терм $x30$ упрощается вспомогательной задачей на преобразование, и результат присваивается переменной $x31$. В нашем примере получаем " $\lambda_x(-ab(x), x \in \text{Dom}(b))$ ".

Решается задача на преобразование $x33$, посылки которой суть утверждения набора $x29$, а условием служит $x31$. Цели задачи - "упростить", "функ", "свертка". Цель "функ" ориентирует на использование операций над функциями. Ответ присваивается переменной $x34$. В нашем примере он имеет вид " $-ab$ ", т.е. "минусфунк(числкоэфф(a, b))". Проверяется, что выражение $x34$ не содержит символа "отображение". Переменной $x35$ присваивается результат подстановки в определяемую часть исходной теоремы вместо переменной $x13$ определяемой части теоремы $x20$. В нашем примере - "числкоэфф(a минусфунк(b))". Затем создается импликация, антецедентами которой служат утверждения $x25$ и антецеденты теоремы $x20$, а консеквентом - равенство выражений $x35$ и $x34$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

20. Применение дополнительных эквивалентности либо тождества к определяющей части.

- (a) Попытка получения параметрического описания заменяющей части с помощью ранее найденного параметрического описания ее фрагмента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{be}(b - \text{set} \rightarrow \text{кортеж}(e, 2, b) \leftrightarrow \exists_{cd}(e = (c, d) \ \& \ c \in b \ \& \ d \in b))$$

из теоремы

$\forall_{anb}(b - \text{set} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \rightarrow \text{кортеж}(a, n, b) \leftrightarrow a - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(a) = \{1, \dots, n\} \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq b)$

и дополнительной теоремы

$\forall_f(f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = \{1, 2\} \leftrightarrow \exists_{ab}(f = (a, b)))$

Проверяется, что теорема - эквивалентность, и переменной x8 присваивается определяемое утверждение. Переменной x12 присваивается набор конъюнктивных членов определяющего утверждения. Проверяется, что это утверждение не имеет связанных переменных. Переменной x13 присваивается список логических символов, входящих в определяющую часть. Выбирается элемент x14 списка x13. В нашем примере - "область". Справочник поиска теорем "смпарам" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x17 имеет вид:

$\forall_e(e - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(e) = \{1, 2\} \leftrightarrow \exists_{ab}(e = (a, b)))$

Переменной x19 присваивается вхождение той части консеквента теоремы x17, которая представляет собой квантор существования. Переменной x20 присваивается набор конъюнктивных членов противоположной части. Проверяется, что список x12 не короче списка x20. Рассматривается подписок x21 списка x12, имеющий ту же длину, что список x20, причем такой, что в списках x21 и x20 на одинаковых позициях расположены термы с одинаковыми заголовками. В нашем примере x20 состоит из утверждений " $e - \text{функция}$ ", " $\text{Dom}(e) = \{1, 2\}$ "; x21 - из утверждений " $a - \text{функция}$ ", " $\text{Dom}(a) = \{1, \dots, n\}$ ".

Переменной x22 присваивается список параметров утверждений списков x20 и x21. В нашем примере - a, n, e . Из этого списка исключаются переменные X , для которых среди конъюнктивных членов утверждения под квантором x19 имеется равенство вида $X = T$, где X не входит в T и в связывающую приставку квантора. В нашем примере исключается e .

Переменной x23 присваивается список антецедентов исходной теоремы и теоремы x17, параметры которых включаются в список x22. Находится подстановка S вместо переменных x22, унифицирующая термы "набор(x20)" и "набор(x21)". При унификации разрешается использовать задачи на описание для обработки равенств выражений с различными заголовками, причем в качестве списка посылок, относительно которых решаются такие задачи, берется набор x23. В нашем примере подстановка S заменяет переменную a на e , а переменную n на 2.

Переменной x26 присваивается набор результатов применения подстановки S к утверждениям списка x12, не вошедшим в список x21. В нашем примере он состоит из единственного утверждения " $\text{Val}(e) \subseteq b$ ". Переменной x27 присваивается результат применения S к квантору x19. В нашем примере этот квантор не изменяется: $\exists_{cd}(e = (c, d))$.

Переменной x28 присваивается объединение набора конъюнктивных членов утверждения под квантором x27 и набора x26. Переменной x29 присваивается результат замены подкванторного утверждения квантора x27 на

конъюнкцию утверждений x28. В нашем примере имеем: " $\exists_{cd}(e = (c, d) \& \text{Val}(e) \subseteq b)$ ". Переменной x30 присваивается результат применения подстановки S к определяемой части исходной теоремы. В нашем примере получается "кортеж($e, 2, b$)".

Переменной x31 присваивается эквивалентность утверждений x30 и x29, переменной x32 - список результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и теоремы x17. Затем создается импликация с антецедентами x32 и консеквентом x31. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (b) Попытка подстановки константного терма для упрощения равенства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aB}(a - \text{функция} \rightarrow \text{Отображение}(a, \emptyset, B) \leftrightarrow a = \text{пустоеслово} \& B - \text{set})$$

из теоремы

$$\forall_{fAB}(\text{Отображение}(f, A, B) \leftrightarrow f - \text{функция} \& \text{Dom}(f) = A \& B - \text{set} \& \text{Val}(f) \subseteq B)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \rightarrow \text{Dom}(f) = \emptyset \leftrightarrow f = \text{пустоеслово})$$

Проверяется, что теорема - эквивалентность и ее определяемое утверждение x9 элементарно. В определяющей части теоремы находится вхождение x12 равенства с некоторой переменной x15 в одной части и выражением T в другой. Переменной x16 присваивается заголовок выражения T . В нашем примере x12 - равенство " $\text{Dom}(f) = A$ ", x16 - символ "область". Справочник поиска теорем "фиксконст" определяет по x16 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет заголовок "длялюбого". Оператор "тождвывод" находит результат x21 преобразования вхождения x12 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид: " $\forall_{aB}(a - \text{функция} \rightarrow \text{Отображение}(a, \emptyset, B) \leftrightarrow a - \text{функция} \& a = \text{пустоеслово} \& B - \text{set} \& \text{Val}(a) \subseteq B)$ ".

Импликация x21 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (c) Попытка исключить квантор общности в определяющей части путем сильного упрощения антецедента этого квантора.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ae}(e - \text{число} \rightarrow \text{наименьший}(a, \{e\}) \leftrightarrow a = e)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \& b \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{наименьший}(a, b) \leftrightarrow a \in b \& \forall_c(c \in b \rightarrow a \leq c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a = b \leftrightarrow a \in \{b\})$$

Проверяется, что теорема - эквивалентность и ее определяемое утверждение x9 элементарно. В определяющей части находится вхождение x12 квантора общности. Рассматривается вхождение x17 существенного antecedента квантора x12. В нашем примере - вхождение утверждения $c \in b$. Переменной x18 присваивается заголовок утверждения x17. В нашем примере - "принадлежит". Проверяется, что этот заголовок отличен от символа "не". Справочник поиска теорем "упрощэkv" определяет по x18 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x23 преобразования вхождения x17 исходной теоремы при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема". После проверки того, что полученный терм - кванторная импликация, не содержащая символа "длялюбого" в своем консеквенте, этот терм регистрируется в списке вывода.

- (d) Попытка использовать дополнительное тождество, декомпозирующее один из числовых атомов определяющей части для последующей свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{dfAC} (\neg(\text{вероятность}(A, C) = 0) \ \& \ d - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \ \& \ A - \text{set} \ \& \\ d \in \text{события}(C) \ \& \ f \in \text{события}(C) \ \& \ A \in \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \\ \text{услвероятн}(d \cup f, A, C) = -\text{услвероятн}(d \cap f, A, C) + \text{услвероятн}(d, A, C) + \\ \text{услвероятн}(f, A, C))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC} (A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ \neg(\text{вероятность}(A, C) = 0) \ \& \ B \in \text{события}(C) \ \& \ A \in \\ \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{услвероятн}(B, A, C) = \\ \text{вероятность}(A \cap B, C) / \text{вероятность}(A, C))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{bde} (\neg(d = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow b/d + e/d = (b + e)/d)$$

$$\forall_{ABC} (A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ A \in \text{события}(C) \ \& \ B \in \text{события}(C) \ \& \\ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{вероятность}(A \cup B, C) = \text{вероятность}(A, C) + \\ \text{вероятность}(B, C) - \text{вероятность}(A \cap B, C))$$

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - тождество, и переменной x12 присваивается список antecedентов. Переменной x11 присваивается вхождение определяющей части. Проверяется, что число корневых операндов определяющей части равно 2, и переменной x13 присваивается заголовок этой части. В нашем примере - "дробь". Справочник поиска теорем определяет по x13 первую дополнительную теорему x14. Переменной x16 присваивается вхождение ее консеквента. Переменной x17 присваивается вхождение той части равенства x16, которая имеет заголовок x13. Переменной x22 присваивается заголовок того операнда x20 операции x17, который не является переменной. В нашем примере - символ "плюс". Проверяется, что операция x22 ассоциативна и коммутативна. Если операция x13 коммутативна, то в качестве x23 выбирается вхождение произвольного операнда определяющей части x11, иначе - вхождение операнда операции x11, расположенного так же, как операнд x20 операции x17. В нашем примере x23 - вхождение подтерма

"вероятность($A \cap B, C$)". Переменной x24 присваивается вхождение оставшегося операнда операции x11. В нашем примере - "вероятность(A, C)". Переменной x25 присваивается подтерм по вхождению x23, переменной x26 - подтерм по вхождению x24.

Переменной x27 присваивается список параметров определяемого термина x8. В нашем примере - $A, B, .$ Переменной x28 присваивается определяющий терм исходной теоремы. Проверяется, что его параметры включаются в список x27. Среди переменных x27 выбирается переменная x29, имеющая единственное вхождение в терм x28 и встречающаяся в терме x25. В нашем примере - переменная B . Проверяется, что остальные переменные списка x27 имеют более одного вхождения в терм x28. Проверяется, что x25 - числовой атом относительно посылок x12. Переменной x31 присваивается его заголовок. В нашем примере - "вероятность".

Предпринимается просмотр раздела базы теорем, соответствующего символу x31. Рассматривается тождество x33 этого раздела, имеющее характеристику "числзнач", причем такое, что заголовком одной из его частей служит x31, а другой - x22. В нашем примере x33 - вторая дополнительная теорема. Переменной x35 присваивается результат переобозначения в x33 переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере имеем:

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \in \text{события}(c) \ \& \ b \in \text{события}(c) \ \& \ \text{верпространство}(c) \rightarrow \text{вероятность}(a \cup b, c) = \text{вероятность}(a, c) + \text{вероятность}(b, c) - \text{вероятность}(a \cap b, c))$$

Переменной x39 присваивается та часть равенства в консеквенте теоремы x35, которая имеет заголовок x31, переменной x40 - противоположная часть. Проверяется, что параметры термина x40 включаются в параметры термина x39. Переменной x41 присваивается результат добавления к параметрам термина x39 переменной x29. В нашем примере имеем список a, b, c, B . При помощи оператора "Унификация" определяется подстановка S вместо переменных x41, унифицирующая термы x39 и x25. В нашем примере - термы "вероятность($a \cup b, c$)" и "вероятность($A \cap B, C$)". Оператору "Унификация" разрешается использовать тождества из базы теорем для отождествления заголовков унифицируемых термов. Переменной x42 присваивается набор подставляемых термов, переменной x43 - список утверждений, которые должны быть истинными, чтобы можно было воспользоваться указанными тождествами.

В нашем примере x42 - набор выражений " $d \cap A$ ", " $A \cap f$ ", " C ", " $d \cup f$ ". Список x43 состоит из утверждений " $d - \text{set}$ ", " $A - \text{set}$ ", " $f - \text{set}$ ".

Переменной x44 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям списка x12 и к антецедентам теоремы x35. Переменной x45 присваивается набор x22 - членов выражения x40. В нашем примере - "вероятность(a, c)", "вероятность(b, c)" и "вероятность($a \cap b, c$)".

Вводится пустой накопитель x46. Для его заполнения просматриваются элементы x47 списка x45. Отдельно рассмотрим случай первого элемента "вероятность(a, c)". Переменной x48 присваивается результат замены в

определяющем подтерме x_{11} исходной теоремы вхождения x_{23} на выражение x_{47} . В нашем случае - "вероятность(a, c)/вероятность(A, C)". Переменной x_{49} присваивается результат применения подстановки S к выражению x_{48} . В нашем случае - "вероятность($d \cap A, C$)/вероятность(A, C)". Решается задача на преобразование x_{50} с посылками x_{44} и условием x_{49} . Цели задачи - "длина", "упростить". Ответ присваивается переменной x_{51} . В нашем случае - "услвероятн(d, A, C)". Проверяется, что выражение x_{51} имеет единственный числовой атом, после чего оно заносится в накопитель x_{46} . При нарушении последнего условия - откат к продолжению попыток унификации.

В случае успешного заполнения накопителя x_{46} , по окончании цикла просмотра списка x_{45} , все переменные начиная с x_{47} снова оказываются не определены. В нашем примере x_{46} состоит из выражений "услвероятн(d, A, C)", "услвероятн(f, A, C)", "-услвероятн($d \cap f, A, C$)". Переменной x_{47} присваивается результат применения подстановки S к выражению x_8 . В нашем примере имеем "услвероятн($d \cup f, A, C$)". Создается импликация с антецедентами x_{44} , консеквентом которой является равенство выражения x_{47} результату соединения операций x_{22} выражений x_{46} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (e) Попытка развертки условий включения либо непересечения классов и применения к подутверждению резуультата эквивалентности общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abi}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(i) \ \& \ b \subseteq \text{Dom}(i) \ \& \ i - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(i) \rightarrow \text{образ}(i, a) \subseteq \text{образ}(i, b) \leftrightarrow a \subseteq b)$$

из теоремы

$$\forall_{af}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{set}_x(\exists_y(y \in a \ \& \ x = f(y))) = \text{образ}(f, a))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abf}(f - \text{функция} \ \& \ a \in \text{Dom}(f) \ \& \ b \in \text{Dom}(f) \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow f(a) = f(b) \leftrightarrow a = b)$$

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - тождество, и переменной x_{12} присваивается список ее антецедентов. Переменной x_{13} присваивается определяющий терм. Проверяется, что он имеет заголовок "класс". Переменной x_{14} присваивается результат переобозначения переменных исходной теоремы на новые переменные. В нашем примере имеем:

$$\forall_{cb}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{функция} \ \& \ b \subseteq \text{Dom}(c) \rightarrow \text{set}_d(\exists_e(e \in b \ \& \ d = c(e))) = \text{образ}(c, b))$$

Переменной x_{15} присваивается объединение списков антецедентов исходной теоремы и теоремы x_{14} . Переменной x_{17} присваивается определяющая часть теоремы x_{14} . В нашем примере - "set_d($\exists_e(e \in b \ \& \ d = c(e))$)". По

очереди рассматриваются два случая: переменной x_{18} присваивается либо утверждение "содержится($x_{13} x_{17}$)", либо "непересек($x_{13} x_{17}$)". В нашем примере x_{18} имеет вид " $\text{set}_x(\exists_y(y \in a \ \& \ x = f(y))) \subseteq \text{set}_d(\exists_e(e \in b \ \& \ d = c(e)))$ ". Решается задача на описание x_{19} с посылками x_{15} и единственным условием x_{18} . Ее цели - "редакция", "развертка". Ответ присваивается переменной x_{20} . В нашем примере он имеет вид " $\forall_y(y \in a \rightarrow \exists_e(c(e) = f(y) \ \& \ e \in b))$ ".

В утверждении x_{20} находится вхождение x_{21} равенства, обе части которого имеют своим заголовком один и тот же логический символ x_{22} . В нашем примере x_{21} - равенство " $c(e) = f(y)$ ", x_{22} - символ "значение". Справочник поиска теорем "Равно" определяет по x_{22} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{25} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему и в теорему x_{14} . В нашем примере имеем:

$$\forall_{igh}(i - \text{функция} \ \& \ g \in \text{Dom}(i) \ \& \ h \in \text{Dom}(i) \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(i) \rightarrow i(g) = i(h) \leftrightarrow g = h)$$

Переменной x_{29} присваивается заменяемая часть теоремы x_{25} . В нашем примере - " $i(g) = i(h)$ ". Переменной x_{30} присваивается объединенный список параметров утверждений x_{29} и x_{20} . В нашем примере - g, h, i, a, b, c, f . Определяется подстановка S вместо переменных x_{30} , унифицирующая термы x_{21} и x_{29} . Переменной x_{32} присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_{25} . В нашем примере - " $i - \text{функция}$ ", " $e \in \text{Dom}(i)$ ", " $y \in \text{Dom}(i)$ ", " $\text{взаимнооднозначно}(i)$ ". Переменной x_{33} присваивается список связанных переменных терма x_{20} . В нашем примере - e, y . Переменной x_{34} присваивается список утверждений набора x_{32} , параметры которых не пересекаются со списком x_{33} . В нашем примере - " $i - \text{функция}$ ", " $\text{взаимнооднозначно}(i)$ ". Переменной x_{35} присваивается объединение списка результатов применения подстановки S к утверждениям x_{15} со списком x_{34} . Переменной x_{36} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_{20} . В нашем примере - " $\forall_y(y \in a \rightarrow \exists_e(i(e) = i(y) \ \& \ e \in b))$ ". Переменной x_{37} присваивается вхождение терм x_{36} , соответствующее вхождению равенства x_{21} в терм x_{20} . В нашем примере - вхождение равенства $i(e) = i(y)$.

Переменной x_{38} присваивается объединение списка x_{35} с утверждениями из области вхождения x_{37} . Проверяется, что каждое утверждение списка x_{32} , не входящее в список x_{34} , является следствием утверждений x_{38} . Переменной x_{39} присваивается результат применения подстановки S к заменяющей части теоремы x_{25} . В нашем примере - " $e = y$ ". Переменной x_{40} присваивается результат замены в терме x_{36} вхождения x_{37} на утверждение x_{39} . В нашем примере - " $\forall_y(y \in a \rightarrow \exists_e(e = y \ \& \ e \in b))$ ". Переменной x_{42} присваивается результат упрощения терма x_{40} относительно посылок x_{35} . В нашем примере - " $a \subseteq b$ ". Проверяется, что утверждение x_{42} элементарное. Переменной x_{43} присваивается утверждение " $P(x_8, Q)$ ", где P - заголовок терма x_{18} (в нашем примере - "содержится"), Q - определяющая часть теоремы x_{14} (в нашем примере - "образ(f, a)"). Находится результат x_{44} применения подстановки S к утверждению x_{43} . Затем создается импликация с антецедентами x_{35} , консеквентом которой служит

эквивалентность утверждений x44 и x42. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

(f) Проверка дистрибутивности двуместной операции над функциями.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abf}(\text{Dom}(b) = \text{Dom}(f) \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{функция} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow a(b + f) = ab + af)$$

из теоремы

$$\forall_{af}(a - \text{число} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow af = \lambda_x(af(x), x \in \text{Dom}(f)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

В первых двух теоремах имеются в виду операции "числкоэфф" и "плюс-функ", в третьей - обычные умножение и сложение.

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - тождество, и переменной x11 присваивается вхождение определяющего терма. Проверяется, что он представляет собой описатель "отображение". Переменной x12 присваивается список антецедентов. Среди параметров терма x8 выбирается переменная x13. В нашем примере - f . Проверяется наличие антецедента "функция(x13)". Переменной x14 присваивается подтерм x11. Проверяется, что x13 встречается в последнем корневом операнде описателя x14 (он задает значение функции) лишь однократно. Переменной x16 присваивается вхождение в x14 подтерма вида "значение(x13 Q)". В нашем примере - подтерма $f(x)$. Рассматривается вхождение x17, непосредственным операндом которого служит x16. Переменной x18 присваивается символ по этому вхождению. В нашем примере - "умножение". Справочник поиска теорем "дистрибразвертка" определяет по x18 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x21 присваивается вхождение ее консеквента, переменной x22 - вхождение той части равенства x21, которая имеет заголовок x18. В нашем примере - части " $a(b + c)$ ". Если символ x18 некоммутативен, то проверяется, что номер операнда x16 вхождения x17 и номер операнда x22 вхождения x21 равны. Переменной x23 присваивается вхождение того операнда вхождения x22, на котором расположен некоторый логический символ x24. В нашем примере - символ "плюс".

Выбирается переменная x25, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Список x12 разбивается на подсписок x26 утверждений, содержащих переменную x13, и подсписок x27 остальных утверждений. В нашем примере x26 состоит из утверждений " $f - \text{функция}$ ", " $\text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R}$ ", x27 - из утверждения " $a - \text{число}$ ". Переменной x28 присваивается список результатов подстановки в утверждения x26 переменной x25 вместо x13. Выбирается переменная x29, отличная от x25 и не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная c . Переменной x30 присваивается выражение "отображение(x29 принадлежит(x29 область(x13))) x24(значение(x13 x29) значение(x25 x29))". В нашем примере - " $\lambda_c(f(c) + b(c), c \in \text{Dom}(f))$ ".

Переменной x_{31} присваивается объединение списков x_{12} , x_{28} , к которому добавлено утверждение "равно(область(x_{13}) область(x_{25}))". Решается задача на преобразование x_{32} с посылками x_{31} и условием x_{30} . Цели задачи - "упростить", "функ". Последняя цель ориентирует на свертку условия с использованием операций над функциями. Ответ присваивается переменной x_{33} . В нашем примере - " $b+f$ ", где имеется в виду символ "плюсфунк". Проверяется, что терм x_{33} не содержит символа "отображение".

Переменной x_{34} присваивается выражение " $x_{24}(T_1 T_2)$ ", где T_1 - подтерм x_{17} , T_2 - результат замены операнда x_{16} подтерма x_{17} на терм "значение($x_{25} Q$)". В нашем примере x_{34} имеет вид " $af(x) + ab(x)$ ". Переменной x_{35} присваивается результат замены вхождения x_{17} в терм x_{14} на терм x_{34} . В нашем примере - " $\lambda_x(af(x) + ab(x), x \in \text{Dom}(f))$ ". Решается задача на преобразование x_{36} с посылками x_{31} и условием x_{35} . Ее цели - "упростить", "функ". Ответ присваивается переменной x_{37} . В нашем примере - " $ab + af$ ", где используются символы "числкоэфф", "плюсфунк". Проверяется, что терм x_{37} не содержит символа "отображение".

Переменной x_{38} присваивается результат подстановки в терм x_8 выражения x_{33} вместо переменной x_{13} . Затем создается импликация с антецедентами x_{31} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{38} и x_{37} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

21. Попытка частичной реализации заменяемой части дополнительной эквивалентности с помощью определяемого утверждения.
- (а) Попытка получения параметрического описания условия различия двух объектов заданного типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{afAB}(\neg(a = f) \ \& \ \text{Отображение}(a, A, B) \ \& \ \text{Отображение}(f, A, B) \rightarrow \exists_x(\neg(a(x) = f(x)) \ \& \ x \in A))$$

из теоремы

$$\forall_{fAB}(\text{Отображение}(f, A, B) \leftrightarrow f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = A \ \& \ B - \text{set} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq B)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{fg}(f - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \rightarrow f = g \leftrightarrow \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \ \& \ \forall_x(x \in \text{Dom}(f) \rightarrow f(x) = g(x)))$$

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_{12} присваивается набор конъюнктивных членов определяющей части, переменной x_{13} - набор антецедентов. Проверяется, что все параметры антецедентов являются параметрами определяемого термина. Среди параметров утверждений x_{12} выбирается переменная x_{14} . В нашем примере - f . Список x_{12} разбивается на подсписок x_{15} утверждений, содержащих x_{14} , и подсписок x_{16} остальных утверждений. Проверяется, что каждое утверждение набор x_{16} является сопровождающим по о.д.з. для конъюнкции утверждений x_{15} . Среди утверждений

x15 выбирается утверждение x17 длины 2, заголовком которого служит название типа объекта. В нашем примере x17 имеет вид " f – функция". Справочник поиска теорем "определение" находит по символу "равно" указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она является эквивалентностью, причем переменной x21 присваивается входение той части эквивалентности, которая является равенством двух различных переменных - некоторых переменных x23 и x24. В нашем примере x23 - f , x24 - g . Переменной x22 присваивается входение другой части эквивалентности.

Переменной x25 присваивается список antecedентов дополнительной теоремы. Проверяется, что его утверждения не имеют параметров, отличных от x23 и x24 и что среди заголовков его утверждений встречается заголовок утверждения x17. Выбирается переменная x26, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x27 присваивается результат замены в исходной теореме переменной x14 на x26, переменной x28 - результат такой же замены в терме x8, переменной x29 - список результатов этой замены в утверждениях списка x16. В нашем примере x27 имеет вид " $\forall_{aAB}(\text{Отображение}(a, A, B) \leftrightarrow a - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(a) = A \ \& \ B - \text{set} \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq B)$ ", x28 - вид " $\text{Отображение}(a, A, B)$ ", x29 состоит из единственного утверждения " $B - \text{set}$ ".

Переменной x31 присваивается объединение списков x13, x16, списка antecedентов утверждения x27, списка x29, к которому добавляются утверждения x8 и x28. Переменной x32 присваивается объединение списков x31, x15 и списка результатов замены в утверждениях x15 переменной x14 на x26. Переменной x33 присваивается список результатов замены в утверждениях x25 переменных x23 и x24 на x14 и x26. Решается задача на доказательство x34, посылками которой являются утверждения x32, а условием - конъюнкция утверждений x33. После получения ответа "истина" находится результат x35 замены переменных x23 и x24 на x14 и x26 в отрицании подтерма x22. В нашем примере x35 имеет вид " $\neg(\text{Dom}(f) = \text{Dom}(a) \ \& \ \forall_x(x \in \text{Dom}(f) \rightarrow f(x) = a(x)))$ ". Терм x35 упрощается задачей на преобразование относительно посылок x32, и результат присваивается переменной x36. В нашем примере - " $\exists_x(\neg(a(x) = f(x)) \ \& \ x \in \text{Dom}(a))$ ". Проверяется, что терм x36 имеет заголовок "существует". Затем создается импликация, antecedентами которой служат утверждения x31 и " $\text{не}(\text{равно}(x14 \ x26))$ ", а консеквентом - x36. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

22. Развертка по определению, использование дополнительных теорем и обратная свертка.

(а) Усмотрение транзитивного отношения в определении свойства функции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_b f(\forall_c(c - \text{натуральное} \rightarrow b(c) \leq f(c)) \ \& \ \lim(f) = -\infty \ \& \ \text{последовательность}(b, \mathbb{R}) \ \& \ \text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \rightarrow \lim(b) = -\infty)$

из теоремы

$$\forall_f(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \rightarrow \lim(f) = -\infty \leftrightarrow \forall_a(a - \text{число} \rightarrow \exists_n(n - \text{натуральное} \& \forall_m(m - \text{натуральное} \& n < m \rightarrow f(m) < a)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cde}(e < c \& c - \text{число} \& d - \text{число} \& e - \text{число} \& d \leq e \rightarrow d < c)$$

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x11 присваивается вхождение определяющей части. Внутри этой части рассматривается вхождение x12 символа "значение". Первым операндом вхождения x12 служит переменная x13, встречающаяся в определяемом терме, второй операнд присваивается переменной x14. В нашем примере x12 - вхождение терма " $f(m)$ ", x13 - переменная f , x14 - терм m . Переменной x15 присваивается определяющий терм теоремы. Проверяется, что переменная x13 имеет в нем единственное вхождение и что параметры терма x14 не включаются в список параметров терма x15. Переменной x16 присваивается вхождение, непосредственным операндом которого является x12. Проверяется, что число операндов вхождения x16 равно 2, и переменной x17 присваивается символ по вхождению x16. В нашем примере x16 - вхождение неравенства " $f(m) < a$ ", x17 - символ "меньше". Проверяется, что x16 расположено внутри определяющей части только внутри подтермов с заголовками "и", "или", "существует", либо внутри консеквента кванторной импликации.

Справочник поиска теорем "транзитоперанд" определяет по x17 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет ровно два существенных антецедента. Переменной x22 присваивается эта пара. В нашем примере - " $e < c$ " и " $d \leq e$ ". Переменной x23 присваивается список параметров термов x22. Проверяется, что он имеет ровно три переменные. В нашем примере - c, d, e . Выбирается переменная x24 списка x23, входящая в каждый из термов списка x22. В нашем примере - переменная e . Переменной x25 присваивается консеквент дополнительной теоремы. Проверяется, что его заголовком служит символ x17. Выбирается утверждение x26 списка x22, имеющее заголовок x17. В нашем примере - " $e < c$ ". Переменной x27 присваивается список параметров терма x26. Усматривается, что подтерм x16 - результат применения некоторой подстановки S вместо переменных x27 к терму x26. Проверяется, что эта подстановка вместо переменной x24 подставляет подтерм x12. Переменной x29 присваивается элемент списка x27, отличный от x24. В нашем примере - переменная c . Проверяется, что номера операндов вхождений x30 и x25, на которых расположена переменная x29, совпадают. Переменной x32 присваивается пара переменных X, Y , не входящих в исходную теорему. В нашем примере - переменные b, c . Переменной x33 присваивается элемент списка x22, отличный от x26. В нашем примере - " $d \leq e$ ". Выбирается элемент x34 списка параметров терма x33, отличный от x24. В нашем примере - " d ". Переменной x35 присваивается результат подстановки в терм x33 вместо переменных x24 и x34 выражений "значение(x13, Y)" и "значение(X, Y)". В нашем примере - " $b(c) \leq f(c)$ ".

Переменной x36 присваивается утверждение "длялюбого(Y если принадлежит(Y область(x13))то x35)". В нашем примере - " $\forall_c(c \in \text{Dom}(f) \rightarrow b(c) \leq$

$f(c)$ ". Переменной x37 присваивается список антецедентов исходной теоремы, переменной x38 - список результатов замены переменной x13 на X в содержащих x13 утверждениях списка x37. Переменной x39 присваивается объединение списков x37 и x38, к которому добавлены утверждения "равно(область(x13) область(X))", x36 и x8. Переменной x40 присваивается результат замены переменной x13 на X в терме x8. Затем создается импликация с антецедентами x39 и консеквентом x40, которая обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (b) Попытка применить определение существования для свертки ранее выведенных теорем типа декомпозиции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bd}(b - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{огрсверху}(b) \ \& \ \text{огрсверху}(d) \rightarrow \text{огрсверху}(\text{set}_x(\exists_{yz}(x = y + z \ \& \ y \in b \ \& \ z \in d))))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{огрсверху}(a) \leftrightarrow \exists_b(\text{верхняягрань}(b, a)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcd}(b - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{верхняягрань}(a, b) \ \& \ \text{верхняягрань}(c, d) \rightarrow \text{верхняягрань}(a + c, \text{set}_x(\exists_{yz}(y \in b \ \& \ z \in d \ \& \ x = y + z))))$$

Проверяется, что теорема - эквивалентность, и переменной x9 присваивается элементарное определяемое утверждение. Переменной x12 присваивается определяющее утверждение. Проверяется, что оно представляет собой квантор существования, и переменной x13 присваивается его связывающая приставка. Переменной x14 присваивается утверждение под квантором существования. Проверяется, что оно содержит единственный подтерм x16 максимальной сложности. В нашем примере - "верхняягрань(b, a)". Переменной x17 присваивается список конъюнктивных членов утверждения x14. В нем выбирается утверждение x18, имеющее подтерм x16. В нашем примере x18 - "верхняягрань(b, a)".

Проверяется, что все переменные исходной теоремы являются параметрами терма x18. Просматриваются теоремы x22 того раздела, к которому относится заголовок терма x16. В нашем примере x22 - указанная выше дополнительная теорема. Проверяется, что x22 - кванторная импликация. Переменной x23 присваивается ее консеквент. Проверяется, что его заголовок совпадает с заголовком утверждения x18 и что x23 содержит заголовок терма x16. Переменной x24 присваивается список параметров терма x18. Усматривается, что некоторая подстановка S вместо переменных x24 переводит x18 в x23, с точностью до порядка операндов коммутативных символов.

Переменной x26 присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Проверяется, что для каждого отличного от x18 элемента списка x17 результат применения к нему подстановки S является следствием утверждений x26. Переменной x27 присваивается результат применения

подстановки S к определяемому утверждению x_9 . В нашем примере он имеет вид "огрсверху($\text{set}_x(\exists_{yz}(y \in b \ \& \ z \in d \ \& \ x = y + z))$)".

Переменной x_{28} присваивается объединение списка x_{26} с набором результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы. Переменной x_{29} присваивается результат переобозначения переменных исходной теоремы на переменные, не входящие в дополнительную теорему. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_e(e - \text{set} \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{огрсверху}(e) \leftrightarrow \exists_f(\text{верхняягрань}(f, e)))$$

Переменной x_{32} присваивается вхождение той части консеквента теоремы x_{29} , которая имеет заголовок "существует", переменной x_{33} - набор конъюнктивных членов утверждения под квантором x_{32} , переменной x_{34} - параметры утверждений списка x_{33} , переменной x_{35} - связывающая приставка квантора x_{32} .

В нашем примере x_{28} состоит из утверждений " $b - \text{set}$ ", " $d - \text{set}$ ", " $b \subset \mathbb{R}$ ", " $d \subset \mathbb{R}$ ", " $\text{верхняягрань}(c, d)$ ", " $\text{set}_x(\exists_{yz}(y \in b \ \& \ z \in d \ \& \ x = y + z)) - \text{set}$ ", " $\text{set}_x(\exists_{yz}(y \in b \ \& \ z \in d \ \& \ x = y + z)) \subseteq \mathbb{R}$ ". Список x_{33} - из единственного утверждения " $\text{верхняягрань}(f, e)$ ".

Рассматриваются всевозможные подстановки R некоторых термов вместо переменных x_{34} в утверждения x_{33} , переводящие их в поднабор x_{38} утверждений x_{28} . Проверяется, что подстановка R переводит каждую переменную списка x_{35} в такую переменную, которая не встречается в терме x_{27} и в термах списка x_{28} , не входящих в список x_{38} . Переменной x_{39} присваивается разность списков x_{28} и x_{38} , переменной x_{40} - список результатов применения подстановки R к антецедентам теоремы x_{29} . Проверяется, что каждое утверждение списка x_{40} является следствием утверждений x_{39} . В этом случае к списку x_{28} добавляется результат применения подстановки R к подтерму x_{31} . Затем - переход к рассмотрению очередной подстановки R . В нашем примере таким образом к списку x_{28} добавлены элементы " $\text{огрсверху}(b)$ ", " $\text{огрсверху}(d)$ ".

По окончании цикла перечисления подстановок R все переменные начиная с x_{37} снова оказываются не определены. Проверяется, что список x_{28} был расширен. Создается импликация с антецедентами x_{28} и консеквентом x_{27} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (с) Дизъюнктивная декомпозиция антецедента определяющей импликации с последующей сверткой в бескванторные утверждения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bef}(b - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow e \cup f \subseteq b \leftrightarrow e \subseteq b \ \& \ f \subseteq b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow c \in b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cup c \leftrightarrow a \in b \ \vee \ a \in c)$$

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_{11} присваивается вхождение определяющей части. Проверяется, что эта часть - квантор общности. Переменной x_{12} присваивается его связывающая приставка, переменной x_{13} - список антецедентов, переменной x_{14} - консеквент. Среди антецедентов выбирается элементарное утверждение x_{15} , заголовок x_{16} которого отличен от символа "не". В нашем примере x_{15} - " $c \in a$ ", x_{16} - символ "принадлежит". Проверяется, что параметры утверждения x_{15} не включаются в список x_{12} .

Справочник поиска теорем "упрощен" определяет по x_{16} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{19} присваивается вхождение антецедента x_{15} внутри импликации x_{11} . Процедура "тождвывод" определяет результат x_{22} преобразования вхождения x_{19} при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{bef}(e \cup f - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow e \cup f \subseteq b \leftrightarrow \forall_c((c \in e \vee c \in f) \rightarrow c \in b))$$

Теорема x_{22} обрабатывается оператором "нормтеорема" при разблокировке приемов, источником которых служит стартовая теорема ячейки вывода. Результат регистрируется в списке вывода.

- (d) Попытка применить перегруппировочное либо поглощающее тождество к определяющему элементарному утверждению, чтобы затем свернуть его по тому же самому определению.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdf}(\neg(f = 0) \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ f - \text{целое} \rightarrow cf|df \leftrightarrow c|d)$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(\neg(m = 0) \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow (n/m) - \text{целое})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cdf}(\neg(c = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow (df)/(cf) = d/c)$$

Переменной x_8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_{12} присваивается список антецедентов, переменной x_{13} - элементарное определяющее утверждение. Внутри определяющей части рассматривается вхождение x_{14} неоднобуквенного подтерма с заголовком x_{15} . В нашем примере - вхождение подтерма " n/m "; x_{15} - символ "дробь". Справочники поиска теорем "поглощается", "Сокращение", "перестановки" находят по символу x_{15} указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" определяет результат x_{20} преобразования с ее помощью вхождения x_{14} . В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{cdf}(\neg(cf = 0) \ \& \ cf - \text{целое} \ \& \ df - \text{целое} \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow (cf)|(df) \leftrightarrow (d/c) - \text{целое})$$

Теорема x20 обрабатывается оператором "нормтеорема", и результат регистрируется в списке вывода. Предварительно снимается блокировка приемов, основанных на уже имеющихся в списке вывода теоремах.

- (e) Попытка использовать дистрибутивную развертку, условную упрощающую эквивалентность и последующую свертку по определению.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bde}(d|b \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \rightarrow d|(b+e) \leftrightarrow d|e)$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(\neg(m=0) \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow (n/m) - \text{целое})$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{bde}(\neg(d=0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow (b/d) + (e/d) = (b+e)/d)$$

$$\forall_{mn}(n - \text{число} \ \& \ m - \text{целое} \rightarrow (m+n) - \text{целое} \leftrightarrow n - \text{целое})$$

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x12 присваивается список antecedентов, переменной x13 - элементарное определяющее утверждение. Внутри определяющей части рассматривается вхождение x14 неоднобуквенного подтерма с заголовком x15. В нашем примере - вхождение подтерма "n/m"; x15 - символ "дробь". Справочник поиска теорем "дистрибразвертка" находит по x15 указанную выше первую дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" определяет результат x20 преобразования с ее помощью вхождения x14. В нашем примере получаем:

$$\forall_{bde}(\neg(d=0) \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ (b+e) - \text{целое} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d|(b+e) \leftrightarrow (b/d) + (e/d) - \text{целое})$$

Переменной x22 присваивается вхождение заменяющей части теоремы x20. В нашем примере - "(b/d) + (e/d) - целое". Переменной x23 присваивается символ по вхождению x22. В нашем примере - "целое".

Справочник поиска теорем "упрощэв" находит по x23 указанную выше вторую дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" определяет результат x28 преобразования с ее помощью вхождения x22. В нашем примере x28 имеет вид:

$$\forall_{bde}(\neg(d=0) \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ (b+e) - \text{целое} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ (e/d) - \text{число} \ \& \ (b/d) - \text{целое} \rightarrow d|(b+e) \leftrightarrow (e/d) - \text{целое})$$

Если терм x13 имеет заголовок x29, то предпринимаются попытки использовать вторую дополнительную теорему для преобразования вхождений в теорему x28 символа x29. В итоге теорема x28 в нашем примере приобретает следующий вид:

$$\forall_{bde}(\neg(d=0) \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ (b+e) - \text{целое} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ (e/d) - \text{число} \ \& \ d|b \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \rightarrow d|(b+e) \leftrightarrow d|e)$$

Снимаются блокировки приемов, основанных на уже имеющихся в списке вывода теоремах. Теорема x28 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

23. Попытка варьирования дополнительной теоремы с помощью определения.

- (а) Попытка применить определение элементарной конъюнкции для свертки ранее выведенных теорем типа декомпозиции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(\text{бескмалая}(a) \ \& \ \text{бескмалая}(c) \rightarrow \text{бескмалая}(\lambda_n(a(n) + c(n), n - \text{натуральное})))$$

из теоремы

$$\forall_a(\text{бескмалая}(a) \leftrightarrow \text{последовательность}(a, \mathbb{R}) \ \& \ \lim(a) = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abfg}(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \ \& \ \text{последовательность}(g, \mathbb{R}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \lim(f) = a \ \& \ \lim(g) = b \rightarrow \lim(\lambda_n(f(n) + g(n), n - \text{натуральное})) = a + b)$$

Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x9 присваивается элементарное определяемое утверждение, переменной x12 - определяющее. Проверяется, что заголовок утверждения x12 - символ "и". Переменной x13 присваивается набор конъюнктивных членов этого утверждения. Проверяется, что список имеющих максимальную сложность подтермов терма x12 одноэлементный, и переменной x15 присваивается этот элемент. В нашем примере - " $\lim(a)$ ". Переменной x16 присваивается заголовок терма x15. В нашем примере - "пределпослед". Переменной x17 присваивается содержащий подтерм x15 элемент списка x13. В нашем примере - " $\lim(a) = 0$ ". Проверяется, что параметры терма x17 содержат все переменные исходной теоремы.

Просматриваются теоремы x21 раздела базы теорем, к которому относится символ x16. Проверяется, что x21 - кванторная импликация, заголовок консеквента x22 которой такой же, как у терма x17, причем этот консеквент содержит символ x16. Проверяется также, что связывающая приставка теоремы x21 имеет не более 5 переменных. В нашем примере x21 - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x23 присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Проверяется, что каждый параметр утверждений списка x23, содержащих символ x16, имеет единственное вхождение в утверждение x22. Проверяется, что каждый антецедент дополнительной теоремы, заголовок которого отличен от символа "не", имеет только такие корневые операнды, число параметров которых не более одного. Наконец, проверяется, что среди утверждений списка x23 имеет такое утверждение, содержащее символ x16, что его заголовок совпадает с заголовком утверждения x17.

Вводится индикатор изменений x24, первоначально равный нулю, переменной x25 присваивается список переменных исходной теоремы, и иницируется пустым словом накопитель x26.

Затем начинается цикл просмотров содержащих x16 утверждений x27 списка x23, заголовок которых такой же, как у утверждения x17. Выбирается список x28 не встречающихся в утверждениях списка x23 и в утверждении

x22 переменных, длина которого равна длине списка x25. Переменной x29 присваивается результат замены в исходной теореме переменных x25 на переменные x28, переменной x30 - результат такой же замены в утверждении x17. Переменной x31 присваивается список параметров утверждений x27 и x30, после чего находится подстановка S вместо переменных x31, унифицирующая термы x27 и x30. Переменной x33 присваивается результат переобозначения в определяемом терме x9 переменных x25 на x28, после чего переменной x34 присваивается результат применения подстановки S к терму x33. К списку x26 добавляется набор результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x29. Список x23 заменяется на список результатов применения подстановки S к отличным от x27 элементам списка x23, к которому добавляется утверждение x34.

Просматриваются всевозможные отличные от x17 элементы x35 списка x13. Определяется результат x36 переобозначения в x35 переменных x25 на x28, а затем - результат x37 применения подстановки S к утверждению x36. Если он входит в список x23, то исключается из данного списка. По окончании просмотра элементов x35 находится результат применения к утверждению x22 подстановки S , который переприсваивается переменной x22. индикатору изменения x24 присваивается 1, и откат к повторному просмотру утверждений x27 списка x23.

После того, как новый цикл просмотра утверждений x27 не принес никаких изменений, все переменные начиная с x27 оказываются не определены. В нашем примере в этот момент x22 имеет вид " $\lim(\lambda_n(c(n) + a(n), n - \text{натуральное})) = 0 + 0$ ", x23 состоит из утверждений "0-число", "0-число", "бескмалая(c)", "бескмалая(a)", список x26 пуст.

Переменной x27 присваивается объединение списков x23 и x26, переменной x28 - результат упрощения утверждения x22 относительно посылок x27 при помощи задачи на преобразование. В нашем примере - " $\lim(\lambda_n(c(n) + a(n), n - \text{натуральное})) = 0$ ".

Переменной x30 присваивается список не встречающихся в утверждениях списка x27 и в утверждении x22 переменных, длина которого равна длине списка x25. В нашем примере он состоит из единственной переменной b . Переменной x31 присваивается результат переобозначения в исходной теореме переменных x25 на x30, переменной x32 - результат такого же переобозначения в утверждении x17. В нашем примере x31 имеет вид " $\forall_b(\text{бескмалая}(b) \leftrightarrow \text{последовательность}(b, \mathbb{R}) \ \& \ \lim(b) = 0)$ ", x32 - вид " $\lim(b) = 0$ ". Переменной x33 присваивается список параметров термов x28 и x32. В нашем примере - a, b, c . Определяется подстановка R вместо переменных x33, унифицирующая термы x28 и x32. Переменной x35 присваивается список результатов применения подстановки R к утверждениям списка x27 и к антецедентам теоремы x31. Проверяется, что каждое отличное от x17 утверждение списка x13, после переобозначения в нем переменных x25 на x30 и применения к нему подстановки R , оказывается следствием утверждений x35. Переменной x37 присваивается результат переобозначения утверждения x9 переменных x25 на x30 и последующего применения подстановки R .

Далее создается импликация с антецедентами x35 и консеквентом x37. Переменной x38 присваивается результат обработки ее оператором "нормтеорема". Проверяется, что этот результат содержит заголовок самого сложного подтерма утверждения x9, после чего он регистрируется в списке вывода.

- (b) Попытка использовать тождество для операции над функцией, участвующей в определении свойства функции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bgh}(\text{непрерывно}(g, b) \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g \text{ — функция} \ \& \ b \text{ — число} \ \& \ \text{типпредела}(h) \ \& \ \text{локопред}(g, b, h) \rightarrow \text{непрерывно}(\lambda_d(-g(d), d \in \text{Dom}(g)), b))$$

из теоремы

$$\forall_{fai}(f \text{ — функция} \ \& \ a \text{ — число} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{локопред}(f, a, i) \rightarrow \text{непрерывно}(f, a) \leftrightarrow \text{предел}(f, i, a) = f(a))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{abfi}(f \text{ — функция} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ b \text{ — число} \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(f, a, i) \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \lim(f, i, a) = b \leftrightarrow \forall_c(c \text{ — число} \ \& \ 0 < c \rightarrow \exists_d(0 < d \ \& \ d \text{ — число} \ \& \ \forall_x(x \text{ — число} \ \& \ x \in \text{Окрестность}(a, d, i) \rightarrow |f(x) - b| < c)))$$

$$\forall_{abghi}(\text{Dom}(h) = g \ \& \ g \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ h \text{ — функция} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(h, a, i) \ \& \ b \text{ — число} \ \& \ \text{предел}(h, i, a) = b \rightarrow \lim_{e \rightarrow a \setminus i}(-h(e)) = -b)$$

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема является эквивалентностью. Переменной x12 присваивается список антецедентов, переменной x13 - определяющее утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x14 присваивается список подтермов терма x13, имеющих наибольшую сложность. Проверяется, что этот список одноэлементный, и переменной x15 присваивается его элемент. В нашем примере - "предел(f, i, a)". Переменной x16 присваивается заголовок терма x15. В нашем примере - "предел". Проверяется, что x16 не является предикатным символом. Справочник поиска теорем "опрзнач" определяет по x16 указанную выше первую дополнительную теорему. Просматриваются теоремы x21 подраздела того конечного пункта оглавления базы теорем, в котором зарегистрирована дополнительная теорема. В нашем примере x21 - указанная выше вторая дополнительная теорема. Проверяется, что x21 - кванторная импликация, консеквентом которой служит равенство. Переменной x23 присваивается вхождение той части равенства, которая имеет заголовок x16, переменной x24 - вхождение другой части. В нашем примере x23 - вхождение терма " $\lim_{e \rightarrow a \setminus i}(-h(e))$ ". Внутри x23 расположено вхождение x25 символа "отображение".

Переменной x26 присваивается список антецедентов второй дополнительной теоремы. Проверяется, что все они элементарны. Переменной x27 присваивается терм по вхождению x24. В нашем примере - " $-b$ ". Проверяется,

что он элементарен. Переменной x_{29} присваивается импликация, антецедентами которой служат утверждения x_{12} и конъюнктивные члены утверждения x_{13} , а консеквентом - утверждение x_8 . В нашем примере x_{29} имеет вид:

$$\forall_{afi}(f \text{— функция} \ \& \ a \text{— число} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{локопред}(f, a, i) \ \& \ \text{предел}(f, i, a) = f(a) \rightarrow \text{непрерывно}(f, a))$$

Переменной x_{30} присваивается вхождение антецедента теоремы x_{29} , внутри которого располагается вхождение x_{31} терма x_{15} . В нашем примере x_{30} - вхождение последнего антецедента. Оператор "тождвывод" находит результат x_{32} преобразования вхождения x_{31} при помощи теоремы x_{21} . Переменной x_{33} присваивается результат обработки теоремы x_{32} оператором "нормтеорема". В нашем примере x_{33} имеет вид:

$$\forall_{bgh}(g(b) = \text{предел}(g, h, b) \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g \text{— функция} \ \& \ b \text{— число} \ \& \ \text{типпредела}(h) \ \& \ \text{локопред}(g, b, h) \rightarrow \text{непрерывно}(\lambda_d(-g(d), d \in \text{Dom}(g)), b))$$

Проверяется, что x_{33} - кванторная импликация, и переменной x_{34} присваивается список ее антецедентов, а переменной x_{35} - консеквент. В терме x_{35} находится вхождение x_{36} символа "отображение". Переменной x_{37} присваивается список расположенных в последнем операнде вхождения x_{36} переменных, обозначающих функции. В нашем примере - единственная переменная g .

Переменной x_{38} присваивается результат обработки утверждений x_{34} оператором "Нормантецеденты" с опцией (разделение x_{37}). Эта опция фигурирует как дополнительная цель задачи на описание, обрабатывающей утверждения x_{34} . Такая цель, если бы список x_{37} был более чем одноэлементным, активировала приемы, разделяющие условия на переменные x_{37} , быть может, с усилением антецедентов. В нашем примере в этом нет надобности. Срабатывает лишь прием, заменяющий утверждение " $g(b) = \text{предел}(g, h, b)$ " на " $\text{непрерывно}(g, b)$ ".

Далее создается импликация с антецедентами x_{38} и консеквентом x_{35} , которая регистрируется в списке вывода.

- (с) Попытка обратного вывода для определяющей кванторной импликации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{hkA}(\text{Dom}(h) = \text{Dom}(k) \ \& \ A \text{— set} \ \& \ A \subseteq \text{Dom}(k) \ \& \ \text{Dom}(k) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(k) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ h \text{— функция} \ \& \ k \text{— функция} \ \& \ \text{непрерывно}(h, A) \ \& \ \text{непрерывно}(k, A) \rightarrow \text{непрерывно}(\lambda_e(h(e) + k(e), e \in \text{Dom}(k)), A))$$

из теоремы

$$\forall_{fA}(f \text{— функция} \ \& \ A \text{— set} \ \& \ A \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{непрерывно}(f, A) \leftrightarrow \forall_x(x \in A \rightarrow \text{непрерывно}(f, x)))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{fai}(f \text{— функция} \ \& \ a \text{— число} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{локопред}(f, a, i) \rightarrow \text{непрерывно}(f, a) \leftrightarrow \text{предел}(f, i, a) = f(a))$$

$\forall_{b,h,k}$ (непрерывно(k, b) & непрерывно(h, b) & $\text{Dom}(k) = \text{Dom}(h)$ & $\text{Dom}(h) \subseteq \mathbb{R}$ & $\text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R}$ & h – функция & k – функция & b – число & типпредела(j) & локопред(h, b, j) \rightarrow непрерывно($\lambda_e(h(e) + k(e), e \in \text{Dom}(k)), b$))

Проверяется, что теорема - эквивалентность, и переменной x9 присваивается элементарная определяемая часть. Переменной x11 присваивается вхождение определяющей части. Проверяется, что эта часть - кванторная импликация с непустым списком антецедентов. Переменной x12 присваивается вхождение ее консеквента, переменной x13 - заголовок консеквента. В нашем примере - символ "непрерывно". Справочник поиска теорем "определение" находит по x13 указанную выше первую дополнительную теорему. Определяется раздел оглавления базы теорем, в котором расположен концевой пункт, ссылающийся на данную дополнительную теорему. Просматриваются теоремы x25 данного раздела, представляющие собой канторные импликации с заголовком консеквента x13. В нашем примере x25 - указанная выше вторая дополнительная теорема.

Заметим, что фактически первая дополнительная теорема в логическом выводе не будет участвовать - она нужна лишь для определения раздела, содержащего вторую дополнительную теорему.

Переменной x26 присваивается результат переобозначения переменных теоремы x25 на переменные, не встречающиеся в исходной теореме. В нашем примере исходная теорема и вторая дополнительная теорема не имели общих переменных, так что x26 совпадает с x25. Переменной x27 присваивается консеквент теоремы x26, переменной x28 - консеквент импликации x11. В нашем примере x27 имеет вид "непрерывно($\lambda_e(h(e) + k(e), e \in \text{Dom}(k)), b$)", x28 - вид "непрерывно(f, x)". Переменной x29 присваивается связывающая приставка импликации x11, переменной x30 - объединение не входящих в x29 параметров тема x28 с параметрами терма x27. В нашем примере x29 состоит из единственной переменной x , x30 - из переменных f, b, h, k . Определяется подстановка S вместо переменных x30, унифицирующая термы x27 и x28.

Переменной x32 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы, переменной x33 - список результатов применения этой подстановки к антецедентам импликации x11. В нашем примере x33 состоит из единственного утверждения $x \in A$. Переменной x34 присваивается список антецедентов теоремы x26.

Предпринимается коррекция списка x34. Переменной x35 присваивается список параметров утверждений x34, не являющихся параметрами терма x27. В нашем примере - единственная переменная j . Проверяется, что список x35 непуст. Переменной x36 присваивается список утверждений набора x34, содержащих параметр списка x35. В нашем примере - "типпредела(j)", "локопред(h, b, j)". Переменной x38 присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x35 на конъюнкцию утверждений x36. В нашем примере - " \exists_j (типпредела(j) & локопред(h, b, j))". Определяется результат x39 упрощения утверждения x38 относительно утверждений списка x34, не вошедших в список x36, при помощи задачи на преобразование. В нашем примере он совпадает с x39. Затем из x34 исключаются

утверждения списка х36 и добавляются конъюнктивные члены утверждения х39.

После указанной коррекции все переменные начиная с х35 оказываются не определены. В нашем примере х34 состоит из следующих утверждений: "непрерывно(k, b)", "непрерывно(h, b)", " $\text{Dom}(k) = \text{Dom}(h)$ ", " $\text{Dom}(h) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R}$ ", " h -функция", " k -функция", " b -число", " $\exists_j(\text{типпредела}(j) \ \& \ \text{локопред}(h, b, j))$ ".

Переменной х35 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям х34. В нашем примере имеем: "непрерывно(k, x)", "непрерывно(h, x)", " $\text{Dom}(k) = \text{Dom}(h)$ ", " $\text{Dom}(h) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R}$ ", " h -функция", " k -функция", " x -число", " $\exists_j(\text{типпредела}(j) \ \& \ \text{локопред}(h, x, j))$ ".

Переменной х36 присваивается список утверждений набора х35, содержащих переменные набора х29. В нашем примере - "непрерывно(k, x)", "непрерывно(h, x)", " x - число", " $\exists_j(\text{типпредела}(j) \ \& \ \text{локопред}(h, x, j))$ ".

Переменной х37 присваивается кванторная импликация по переменным х29, antecedentes которой служат утверждения х33, а консеквентом - конъюнкция утверждений х36. Переменной х38 присваивается объединение списка х32 с утверждениями списка х35, не входящими в список х36. Переменной х39 присваивается результат применения подстановки S к определяемому терму исходной теоремы. В нашем примере - "непрерывно($\lambda_e(h(e) + k(e), e \in \text{Dom}(k)), A$)". Переменной х40 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" утверждений х38 относительно параметров утверждения х39. Переменной х42 присваивается результат обработки термина х37 задачей на преобразование, имеющей посылки х40 и цели "упростить", "свертка". В нашем примере - "непрерывно(h, A) & непрерывно(k, A)". Проверяется, что утверждение х42 не содержит кванторов. Затем создается импликация, antecedентами которой являются утверждения х40 и конъюнктивные члены утверждения х42, а консеквентом - утверждение х39. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (d) Перенесение общего свойства надтипа определяемого типа на этот тип.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{параллелограмм}(ABCD) \rightarrow \forall_E(E - \text{точка} \ \& \ E \in \text{отрезок}(BD) \ \& \ E \in \text{отрезок}(AC)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{параллелограмм}(ABCD) \leftrightarrow \text{четырёхугольник}(ABCD) \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{четырёхугольник}(ABCD) \rightarrow \forall_E(E - \text{точка} \ \& \ E \in \text{отрезок}(BD) \ \& \ E \in \text{отрезок}(AC)))$$

Переменной x_8 присваивается определяемая часть. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_{12} присваивается набор конъюнктивных членов определяющей части, переменной x_{13} - набор antecedентов. В списке x_{12} выбирается утверждение x_{14} , набор корневых операндов которого совпадает с набором корневых операндов утверждения x_8 . В нашем примере x_{14} - утверждение "четырёхугольник($ABCD$)". Переменной x_{15} присваивается заголовок утверждения x_{14} . Просматриваются теоремы x_{19} того раздела базы теорем, к которому относится символ x_{15} . В нашем примере x_{19} - указанная выше дополнительная теорема. Проверяется отсутствие у дополнительной теоремы характеристики "теоремаприема", указывающей, что она была создана именно как теорема некоторого приема. Переменной x_{21} присваивается список antecedентов теоремы x_{19} . Проверяется, что среди них имеется единственный существенный antecedент, и он присваивается переменной x_{22} . В нашем примере x_{22} - утверждение "четырёхугольник($ABCD$)". Проверяется, что x_{22} имеет заголовок x_{15} .

Переменной x_{23} присваивается список параметров утверждения x_{14} . Проверяется, что x_{14} содержит все переменные исходной теоремы. Определяется подстановка S вместо переменных x_{23} , переводящая утверждение x_{14} в x_{22} . Переменной x_{25} присваивается список результатов применения подстановки S к antecedентам исходной теоремы. Проверяется, что x_{25} - подсписок списка x_{21} . В нашем примере x_{25} состоит из утверждений "A – точка", "B – точка", "C – точка", "D – точка". Переменной x_{26} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_8 . В нашем примере он совпадает с x_8 . Переменной x_{27} присваивается результат замены утверждения x_{22} в списке x_{21} на утверждение x_{26} . Создается импликация с antecedентами x_{27} , консеквентом которой служит консеквент теоремы x_{19} . Она регистрируется в списке вывода, причем в качестве ее характеристик берутся все характеристики дополнительной теоремы.

- (e) Попытка использовать определяющее тождество для варьирования эквивалентности общей стандартизации равенства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c(\neg(\cos c = 0) \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \sin c = 0 \leftrightarrow \operatorname{tg} c = 0)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \ \& \ \neg(\cos a = 0) \rightarrow \operatorname{tg} a = \sin a / \cos a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a = 0 \leftrightarrow a/b = 0)$$

Проверяется, что теорема - равенство, и переменной x_9 присваивается определяемое выражение. Переменной x_{11} присваивается вхождение определяющей части, переменной x_{12} - символ по этому вхождению. В нашем примере - символ "дробь". Справочник поиска теорем "сокращмод" определяет по x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{18} присваивается вхождение ее заменяемой части. внутри этого вхождения находится вхождение x_{19} символа x_{12} . В нашем примере x_{19} - вхождение

корня подтерма a/b . Оператор "тождвывод" определяет результат х21 преобразования вхождения х19 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Результат преобразования теоремы х21 оператором "нормтеорема" регистрируется в списке вывода.

- (f) Попытка использовать перегруппировочное тождество и альтернативную свертку.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c(\neg(\sin c = 0) \ \& \ \neg(\cos c = 0) \ \& \ c - \text{число} \rightarrow 1 = \text{tg } c \text{ ctg } c)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \ \& \ \neg(\sin a = 0) \rightarrow \text{ctg } a = \cos a / \sin a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ \neg(a = 0) \rightarrow 1/(a/b) = b/a)$$

Проверяется, что теорема - тождество. Переменной х9 присваивается определяемое выражение, переменной х12 - определяющее. В нашем примере - " $\cos a / \sin a$ ". Проверяется, что оно небесповторно, и переменной х13 присваивается его заголовок. В нашем примере - "дробь". Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по х13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной х16 присваивается вхождение равенства, являющегося консеквентом дополнительной теоремы. Переменной х17 присваивается вхождение операнда вхождения х16, имеющего заголовок х13. В нашем примере - вхождение выражения b/a . Переменной х19 присваивается список параметров подтерма х17. В нашем примере - a, b . Переменной х18 присваивается вхождение операнда вхождения х16, отличного от х16. Проверяется, что строго внутри х18 расположен подтерм, список параметров которого равен х19.

Оператор "тождвывод" определяет результат х21 преобразования вхождения х17 при помощи исходной теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_c(\sin c - \text{число} \ \& \ \cos c - \text{число} \ \& \ \neg(\cos c = 0) \ \& \ \neg(\sin c = 0) \ \& \ c - \text{число} \rightarrow 1/(\sin c / \cos c) = \text{ctg } c)$$

Переменной х22 присваивается вхождение консеквента теоремы х21, переменной х23 - вхождение того операнда консеквента, который расположен аналогично операнду х18 вхождения х16. В нашем примере х23 - вхождение подтерма " $1/(\sin c / \cos c)$ ". Переменной х24 присваивается список параметров подтерма х22. В нашем примере - единственная переменная c . Внутри вхождения х23 находится отличное от него вхождение х25 подтерма, список параметров которого равен х24, причем такое, что вне х25 внутри х23 нет переменных. В нашем примере х25 - подтерм " $\sin c / \cos c$ ".

Переменной х26 присваивается список антецедентов теоремы х21. Проверяется, что он непуст. Переменной х27 присваивается результат обработки подтерма х25 относительно посылок х26 оператором "свертка". В нашем примере - " $\text{tg } c$ ". Проверяется, что терм х27 бесповторный. Находится результат замены вхождения х25 в теорему х21 на терм х27. Этот результат

обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (g) Попытка использовать конъюнктивное определение для свертки группы антецедентов другой теоремы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\text{окружность}(AB) \text{ описана около фигура}(CDE) \ \& \ A - \text{ точка} \ \& \ B - \text{ точка} \ \& \ C - \text{ точка} \ \& \ D - \text{ точка} \ \& \ E - \text{ точка} \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(CE) \perp \text{прямая}(DE) \ \& \ \neg(C = E) \rightarrow A \in \text{отрезок}(CD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{ точка} \ \& \ B - \text{ точка} \ \& \ C - \text{ точка} \ \& \ D - \text{ точка} \ \& \ E - \text{ точка} \ \& \ \neg(D = E) \rightarrow \text{окружность}(DE) \text{ описана около фигура}(ABC) \leftrightarrow \Delta(ABC) \ \& \ A \in \text{окружность}(DE) \ \& \ B \in \text{окружность}(DE) \ \& \ C \in \text{окружность}(DE))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{ точка} \ \& \ B - \text{ точка} \ \& \ C - \text{ точка} \ \& \ D - \text{ точка} \ \& \ E - \text{ точка} \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \ D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ \text{прямая}(CE) \perp \text{прямая}(DE) \ \& \ \neg(C = E) \rightarrow A \in \text{прямая}(CD))$$

Переменной x8 присваивается определяемая часть. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Переменной x11 присваивается вхождение определяющей части. Проверяется, что эта часть - конъюнкция элементарных утверждений. Переменной x13 присваивается набор ее конъюнктивных членов. Переменной x14 присваивается оценка сложности определяющей части, переменной x15 - список утверждений набора x13, оценка сложности которых равна x14. В нашем примере x15 состоит из утверждений " $A \in \text{окружность}(DE)$ ", " $B \in \text{окружность}(DE)$ ", " $C \in \text{окружность}(DE)$ ". Проверяется, что список x15 не менее чем двухэлементный и его параметры содержат все переменные теоремы. Переменной x16 присваивается список подтермов конъюнкции утверждений x15, имеющих максимальную сложность. Проверяется, что он одноэлементный. В нашем примере x16 состоит из выражения " $\text{окружность}(DE)$ ". Переменной x17 присваивается заголовок элемента списка x16. В нашем примере - " окружность ".

Просматриваются теоремы x21 того раздела базы теорем, к которому относится символ x17. Проверяется, что x21 - кванторная импликация, имеющая характеристику "отношение". В нашем примере x21 - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x22 присваивается список ее антецедентов, переменной x23 - подсписок списка x22, образованный утверждениями, содержащими символ x17. Проверяется, что длины списков x23 и x15 равны.

Переменной x24 присваивается список переменных исходной теоремы. Оператор "подбор" находит подстановку S вместо переменных x24, переводящую термы x15 в термы списка x23. Для каждого утверждения списка x12 либо утверждения списка x13, не входящего в x15, проверяется, что результат применения к нему подстановки S является следствием утверждений

x22. Затем переменной x27 присваивается результат применения подстановки S к утверждению x8. Создается импликация, антецеденты которой суть x27 и элементы списка x22, не вошедшие в список x23. Консеквент ее такой же, как у дополнительной теоремы. Эта импликация регистрируется в списке вывода.

- (h) Попытка использовать эквивалентность для равенства константе числового атома в заменяющей части тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(ab)) = 0 \leftrightarrow a = b)$$

из теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(AB)) = l(AB))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow l(AB) = 0 \leftrightarrow A = B)$$

Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x9 присваивается определяемое выражение, переменной x12 - определяющее. Проверяется, что терм x12 неоднобуквенный. Переменной x13 присваивается список антецедентов теоремы x2. Проверяется, что x12 - числовой атом. В нашем примере - " $l(AB)$ ". Переменной x15 присваивается его заголовок. В нашем примере - "расстояние". Справочник поиска теорем "числ" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается вхождение ее консеквента. Проверяется, что этот консеквент - эквивалентность. В нем рассматривается вхождение x19 символа x15. В нашем примере - вхождение выражения " $l(AB)$ ". Проверяется, что других вхождений символа x15 внутри x18 нет. Оператор "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождения x19 при помощи исходной теоремы, применяемой в обратном направлении. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (i) Усмотрение свойства сокращенной записи серийной операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_n(n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \rightarrow 0 < n!)$$

из теоремы

$$\forall_n(n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \rightarrow n! = \prod_{i=1}^n i)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 < ab)$$

Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x9 присваивается определяемая часть, переменной x12 - определяющая. Переменной x13 присваивается список антецедентов. Проверяется, что терм x12 имеет единственный корневой операнд x14, представляющий собой описатель "отображение". Переменной x15 присваивается заголовок терма x12. В нашем примере - "произведениевсех". При помощи справочника "развертка" усматривается, что x15 - обобщение на произвольные конечные семейства двуместной

ассоциативно-коммутативной операции x_{16} . В нашем примере - "умножение". Переменной x_{17} присваивается связывающая приставка описателя x_{14} . Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x_{18} присваивается ее элемент. В нашем примере - i . Переменной x_{19} присваивается набор конъюнктивных членов предпоследнего операнда описателя x_{14} (он определяет условия на варьируемую переменную). Проверяется, что этот набор состоит из трех утверждений вида: "целое(x_{18})", "меньшеилиравно(A x_{18})", "меньшеилиравно(x_{18} X)", где X - переменная, имеющая единственное вхождение в терм x_{12} . В нашем примере это переменная n . Переменной x_{24} присваивается последний операнд описателя x_{14} (он определяет значение функции).

Справочник поиска теорем "сборка" определяет по x_{16} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{25} присваивается результат переобозначения в ней переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере дополнительная теорема не изменяется. В консеквенте теоремы x_{25} находится вхождение x_{28} символа x_{16} . В нашем примере - " ab ". Проверяется, что число операндов вхождения x_{28} равно 2. Согласно определению справочника "сборка", этими операндами должны быть переменные. Первая из них присваивается переменной x_{29} , вторая - переменной x_{30} . В нашем примере - соответственно, a и b . Переменной x_{31} присваивается список antecedентов теоремы x_{25} . Переменной x_{32} присваивается список результатов замены переменной x_{29} на x_{30} , с последующей обработкой оператором "станд", во всех содержащих x_{29} antecedентах списка x_{31} . В нашем примере - " $0 < b$ " и " b - число". Проверяется, что список x_{32} совпадает со списком обработанных оператором "станд" элементов списка x_{31} .

Переменной x_{34} присваивается список результатов подстановки в содержащие переменную x_{29} элементы списка x_{31} подтерма x_{28} вместо переменной x_{29} . В нашем примере - " $0 < ab$ " и " ab - число". Проверяется, что утверждения списка x_{34} суть следствия утверждений списка x_{31} . Переменной x_{35} присваивается объединение списка x_{13} со списком не содержащих переменных x_{29} и x_{30} утверждений набора x_{31} , переменной x_{36} - объединение списка x_{35} со списком x_{19} . Переменной x_{37} присваивается список результатов подстановки вместо переменной x_{29} терма x_{24} в содержащие x_{29} утверждения набора x_{31} . В нашем примере x_{37} состоит из утверждений " $0 < i$ " и " i - число". Проверяется, что утверждения списка x_{37} суть следствия утверждений x_{36} . Затем создается импликация, antecedенты которой суть утверждения x_{35} , а консеквент получается из консеквента теоремы x_{25} заменой вхождения x_{28} на определяемый терм x_9 . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (j) Попытка получить явное равенство для выражения, определяемого неявно.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a (\neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ a - \text{число} \rightarrow \log_a a = 1)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \rightarrow a^{\log_a b} = b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cd}(\neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow d^c = d \leftrightarrow c = 1)$$

Проверяется, что теорема - тождество. Внутри ее консеквента находится вхождение x11 определяемого выражения. В нашем примере - вхождение выражения $\log_a b$. Переменной x12 присваивается заголовок той части равенства, в которой расположено x11. В нашем примере - символ "степень". Переменной x13 присваивается название раздела, к которому относится символ x12. В нашем примере - "степени". В разделе x13 находится теорема, имеющая характеристику "общнорм(N)". В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x21 присваивается заменяющая часть дополнительной теоремы. Проверяется, что она не содержит символа x12. Проверяется, что заменяемая часть x22 дополнительной теоремы - равенство, содержащее символ x12. Переменной x23 присваивается импликация, антецеденты которой те же, что у исходной теоремы, а консеквентом служит эквивалентность консеквента исходной теоремы константе "истина". Процедура "тождвывод" определяет результат x24 преобразования вхождения x22 в дополнительную теорему при помощи импликации x23. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (к) Попытка свертки по определению подвыражения заменяемой части дополнительной упрощающей эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdf}(f - \text{натуральное} \ \& \ \text{числнабор}(c, f) \ \& \ \text{числнабор}(d, f) \rightarrow \text{евкласст}(c, d) = 0 \leftrightarrow c = d)$$

из теоремы

$$\forall_{abn}(n - \text{натуральное} \ \& \ \text{числнабор}(a, n) \ \& \ \text{числнабор}(b, n) \rightarrow \text{евкласст}(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (a(i) - b(i))^2})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 < b \rightarrow a^b = 0 \leftrightarrow a = 0)$$

Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x9 присваивается определяемое выражение, переменной x12 - неоднобуквенное определяющее. Переменной x13 присваивается список антецедентов. Переменной x14 присваивается заголовок выражения x12. В нашем примере - "степень". Справочник поиска теорем "сокращмод" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему, имеющую комментарий "общнорм(N)". В заменяемой части ее консеквента находится вхождение x20 символа x14. В нашем примере - вхождение подтерма a^b . Оператор "тождвывод" определяет результат x22 преобразования вхождения x20 при помощи исходной теоремы, применяемой в обратном порядке. Переменной x23 присваивается результат обработки теоремы x22 оператором "нормтеорема". Проверяется, что x23 - кванторная эквивалентность, оценка сложности заменяющей части которой меньше оценки сложности терма x12. Затем x23 регистрируется в списке вывода.

(l) Попытка преобразовать пример.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ad}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow a \setminus d \subseteq a \Delta d)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow a \Delta b = a \setminus b \cup b \setminus a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow b \subseteq b \cup c)$$

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x12 присваивается список антецедентов, переменной x13 - определяющее выражение. Проверяется, что оно элементарно, а терм x8 неповторен. Переменной x14 присваивается заголовок выражения x13. В нашем примере - символ "объединение". Справочник поиска теорем "связь" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается вхождение символа x14 в консеквент дополнительной теоремы. В нашем примере - вхождение подтерма "b ∪ c". Оператор "тождвывод" определяет результат x20 преобразования вхождения x18 при помощи исходной теоремы, применяемой в обратном направлении. Переменной x22 присваивается результат обра отки оператором "нормантецеденты" антецедентов теоремы x20 относительно параметров ее консеквента. Затем создается импликация с антецедентами x22 и тем же консеквентом, что у теоремы x20. Она обрабатывается оператором "полныепосылки", восстанавливающим необходимые для сопровождения по о.д.з. антецеденты, и регистрируется в списке вывода.

(m) Попытка использовать определение, фиксирующее значения числовых атомов, для упрощения другого тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(d) \ \& \ \text{вправо}(\text{вектор}(bc), d) \ \& \ \text{Трехмерн}(d) \rightarrow -\text{крд}(b, d, 1) + \text{крд}(c, d, 1) = l(bc))$$

из теоремы

$$\forall_{aK}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вправо}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 2) = 0 \ \& \ \text{крд}(a, K, 3) = 0 \ \& \ 0 \leq \text{крд}(a, K, 1))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABK}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow l(AB) = (\text{крд}(\text{вектор}(AB), K, 1))^2 + \text{крд}(\text{вектор}(AB), K, 2)^2 + \text{крд}(\text{вектор}(AB), K, 3)^2)^{1/2})$$

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x12 присваивается набор антецедентов, переменной x13 - определяющее утверждение. Переменной x14 присваивается список невырожденных числовых атомов утверждения x13. В нашем примере - "крд(a, K, 2)", "крд(a, K, 3)", "крд(a, K, 1)". Проверяется, что

список x14 непуст. Переменной x15 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x13. В списке x15 находятся всевозможные равенства невырожденного числового атома константному терму, и переменной x16 присваивается список троек (неконстантная часть равенства - равенство - константная часть). В нашем примере таких троек две: $(\text{крд}(a, K, 2), \text{крд}(a, K, 2) = 0, 0)$ и $(\text{крд}(a, K, 3), \text{крд}(a, K, 3) = 0, 0)$. Проверяется, что список x16 непуст. Переменной x17 присваивается список первых элементов троек x16, переменной x18 - список параметров термов x17. В нашем примере - переменные a, K . Проверяется, что все переменные исходной теоремы входят в список x18. Переменной x19 присваивается список всех логических символов термов x17. В нашем примере - "крд,2,3". Переменной x21 присваивается список разделов, к которым относится наиболее приоритетный из заголовков термов x17. В нашем примере - "аналгеометрия", "системыкоординат", "крд". В этом списке выбирается второй раздел справа, и просматриваются теоремы этого раздела, содержащие все символы списка x19 и представляющие собой тождество без связанных переменных. В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Проверяется, что дополнительная теорема имеет своей характеристикой один из символов "нормкрд", "числкоэфф", "числатом", "числовойатом".

Переменной x28 присваивается результат переобозначения в дополнительной теореме переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x28 имеет вид:

$$\forall_{bcd}(b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(d) \ \& \ \text{Трехмерн}(d) \rightarrow \\ l(bc) = (\text{крд}(\text{вектор}(bc), d, 1)^2 + \text{крд}(\text{вектор}(bc), d, 2)^2 + \\ \text{крд}(\text{вектор}(bc), d, 3)^2)^{1/2}$$

Переменной x29 присваивается список антецедентов теоремы x28, переменной x30 - ее консеквент. Переменной x31 присваивается список невырожденных числовых атомов терма x30. В нашем примере - $l(bc)$, $\text{крд}(\text{вектор}(bc), d, 1)$, $\text{крд}(\text{вектор}(bc), d, 2)$, $\text{крд}(\text{вектор}(bc), d, 3)$. Проверяется, что список x31 не короче списка x16.

Оператор "подборзначений" определяет подстановку S вместо переменных x18, переводящую термы x17 в некоторые термы списка x31. Переменной x34 присваивается список тех элементов набора x31, в которые термы x17 переводятся подстановкой S . В нашем примере список x34 состоит из термов "крд(вектор(bc), d , 2)", "крд(вектор(bc), d , 3)". Проверяется, что термы списка x34 не входят в утверждения x29.

Переменной x35 присваивается объединение списка x29 с результатами применения подстановки S к утверждения x12. Переменной x36 присваивается результат применения подстановки S к определяемому утверждению x8. Переменной x37 присваивается набор пар (элемент списка x34 - последний элемент соответствующей тройки списка x16). В нашем примере он состоит из пар $(\text{крд}(\text{вектор}(bc), d, 2), 0)$ и $(\text{крд}(\text{вектор}(bc), d, 3), 0)$. Переменной x38 присваивается результат одновременной замены в терме x30 всех первых элементов пар x37 на вторые элементы. В нашем примере - " $l(bc) = \sqrt{\text{крд}(\text{вектор}(bc), d, 1)^2 + 0^2 + 0^2}$ ".

Переменной x39 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка, полученного добавлением утверждения x36 к набору x35. Обработка ведется относительно параметров терма x38. Проверяется, что список x39 не содержит константы "ложь". Переменной x40 присваивается результат удаления из списка x15 вторых элементов пар x16. Переменной x41 присваивается объединение списка x19 с результатами применения подстановки S к утверждениям x40. Переменной x43 присваивается результат упрощения утверждения x38 относительно посылок x41. Затем создается импликация с антецедентами x39 и консеквентом x43. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (п) Попытка использовать определение, определяющая часть которого - конъюнкция равенств для отдельных координат, для преобразования другой эквивалентности, одна из частей которой содержит соотношения для таких координат.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ghiv}(g - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(h) \ \& \ \text{Вектор}(v) \ \& \ \text{вертикалнпр}(h, i) \ \& \\ \text{Трехмерн}(i) \rightarrow v = gh \leftrightarrow g \cdot \text{крд}(h, i, 3) = \text{крд}(v, i, 3) \ \& \ \text{вертикалнпр}(v, i))$$

из теоремы

$$\forall_{aK}(\text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Вектор}(a) \rightarrow \text{вертикалнпр}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 1) = 0 \ \& \\ \text{крд}(a, K, 2) = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ghiv}(g - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(h) \ \& \ \text{Трехмерн}(i) \rightarrow v = gh \leftrightarrow \text{Вектор}(v) \ \& \\ g \cdot \text{крд}(h, i, 1) = \text{крд}(v, i, 1) \ \& \ g \cdot \text{крд}(h, i, 2) = \text{крд}(v, i, 2) \ \& \ g \cdot \text{крд}(h, i, 3) = \\ \text{крд}(v, i, 3))$$

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x12 присваивается список антецедентов, переменной x13 - определяющее выражение. Проверяется, что исходная теорема имеет характеристику вида "числитель(N)". Переменной x14 присваивается список конъюнктивных членов утверждения x13. Проверяется, что каждый элемент списка x14 - равенство, в левой части которого расположено обозначение отдельной координаты объекта. Переменной x15 присваивается первый элемент списка x14. В нашем примере - " $\text{крд}(a, K, 1) = 0$ ". Переменной x16 присваивается заголовок левой части равенства x15. В нашем примере - "крд". Переменной x17 присваивается список параметров левой части. В нашем примере - a, K . Проверяется, что параметры левых частей всех равенств списка x14 включаются в список x17.

Справочник поиска теорем "числитель" определяет по x16 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она является кванторной импликацией, и переменной x20 присваивается результат переобозначения переменных в дополнительной теореме на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x20 совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x21 присваивается входение консеквента дополнительной теоремы. Переменной x24 присваивается заменяющая часть теоремы x20 согласно направлению, определяемому ее характеристикой "числитель(...)".

В нашем примере - правая часть равенства x_{21} . В утверждении x_{24} рассматривается вхождение x_{25} символа x_{16} . В нашем примере - вхождение подтерма "крд($h, i, 1$)". Переменной x_{26} присваивается подтерм по вхождению x_{25} .

Усматривается, что x_{26} - результат применения некоторой подстановки S вместо переменных x_{17} в левую часть равенства x_{15} . Переменной x_{28} присваивается список результатов применения подстановки S к левым частям равенств x_{14} . В нашем примере - "крд($h, i, 1$)" и "крд($h, i, 2$)". Переменной x_{29} присваивается список результатов применения подстановки S к правым частям равенств x_{14} . В нашем примере они равны 0.

Переменной x_{30} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{24} . В нашем примере - "Вектор(v)", " $g \cdot \text{крд}(h, i, 1) = \text{крд}(v, i, 1)$ ", " $g \cdot \text{крд}(h, i, 2) = \text{крд}(v, i, 2)$ ", " $g \cdot \text{крд}(h, i, 3) = \text{крд}(v, i, 3)$ ".

Переменной x_{31} присваивается список утверждений набора x_{30} , имеющих вхождение какого-либо терма набора x_{28} . В нашем примере - утверждения " $g \cdot \text{крд}(h, i, 1) = \text{крд}(v, i, 1)$ ", " $g \cdot \text{крд}(h, i, 2) = \text{крд}(v, i, 2)$ ". Переменной x_{33} присваивается список результатов замены в утверждениях набора x_{31} термов списка x_{28} на соответствующие термы списка x_{29} . В нашем примере - " $g \cdot 0 = \text{крд}(v, i, 1)$ ", " $g \cdot 0 = \text{крд}(v, i, 2)$ ".

Переменной x_{34} присваивается объединение списка антецедентов теоремы x_{20} с результатами применения подстановки S к утверждениям x_{12} . Переменной x_{36} присваивается результат упрощения конъюнкции утверждений x_{33} относительно посылок x_{34} при помощи задачи на преобразование. В нашем примере - " $\text{крд}(v, i, 1) = 0 \ \& \ \text{крд}(v, i, 2) = 0$ ". Переменной x_{37} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения x_{36} .

Если x_{36} содержит символ x_{16} , а длины списков x_{14} и x_{37} равны (что имеет место в нашем случае), то предпринимается попытка определить подстановку Q вместо переменных x_{17} , переводящую утверждения x_{14} в утверждения x_{37} . Находится результат R применения подстановки Q к определяемой части x_8 . В нашем примере - "вертикалпр(v, i)". Если он не содержит символа x_{16} , то к x_{34} присоединяются результаты применения подстановки Q к утверждениям x_{12} , x_{36} заменяется на R , а x_{37} - на набор конъюнктивных членов новой версии утверждения x_{36} . В нашем примере после этого x_{36} приобретает вид "вертикалпр(v, i)".

Безотносительно к тому, было ли изменено указанным образом значение x_{36} , далее проверяется, что x_{36} не содержит символа x_{16} . Переменной x_{38} присваивается объединение не входящих в список x_{31} утверждений x_{30} с утверждениями x_{37} . Переменной x_{39} присваивается результат применения подстановки S к определяемому терму x_8 . Затем создается импликация, антецеденты которой получены добавлением утверждения x_{39} к утверждениям x_{34} , а консеквентом служит эквивалентность заменяемой части теоремы x_{20} конъюнкции утверждений x_{38} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (о) Использование определения равенства характеристик данного типа для обобщения константного равенства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{set} \rightarrow \text{card}(b) = \text{счетное} \leftrightarrow \exists_f(\text{Dom}(f) = \mathbb{N} \ \& \ \text{Val}(f) = b \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f)))$$

из теоремы

$$\text{card}(\mathbb{N}) = \text{счетное}$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \text{card}(a) = \text{card}(b) \leftrightarrow \exists_f(f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = a \ \& \ \text{Val}(f) = b \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f)))$$

Проверяется, что заголовок теоремы - символ "равно". Переменной x8 присваивается определяемый терм. В нашем случае - однобуквенный терм "счетное". Переменной x11 присваивается та часть равенства, которая неоднобуквенная, переменной x12 - ее заголовок. В нашем примере - символ "мощность". Справочник поиска теорем "определение" находит по символу "равно" указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что эта теорема - эквивалентность, одна из частей которой - равенство R , причем заголовки обеих частей этого равенства равны x12. Предпринимается блокировка приемов, основанных на теоремах той ячейки вывода, к которой относится дополнительная теорема. Переменной x19 присваивается вхождение одной из частей равенства R в дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождения x19 при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (p) Использование определения множества для вывода равенства из условия принадлежности этому множеству.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abckA}(b \in \{1, \dots, c\} \ \& \ c - \text{натуральное} \ \& \ \text{кортеж}(a, c, \text{сочетания}(A, k)) \rightarrow \text{card}(a(b)) = k)$$

из теоремы

$$\forall_{Ak}(A - \text{set} \rightarrow \text{сочетания}(A, k) = \text{set}_x(x \subseteq A \ \& \ \text{card}(x) = k \ \& \ x - \text{set}))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{aniA}(A - \text{set} \ \& \ n - \text{натуральное} \ \& \ \text{кортеж}(a, n, A) \ \& \ i \in \{1, \dots, n\} \rightarrow a(i) \in A)$$

Переменной x8 присваивается определяемая часть. Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x11 присваивается вхождение определяющей части. Проверяется, что эта часть - описатель "класс". Переменной x12 присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x13 присваивается этот элемент. В нашем примере - переменная x . Переменной x14 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под описателем "класс". Среди этих членов выбирается равенство x15. В нашем примере - " $\text{card}(x) = k$ ". Проверяется, что

оценка сложности x16 терма x15 больше 4, причем оценка сложности хотя бы одной из частей равенства меньше x16.

Справочник поиска теорем "принадлежит" определяет по символу "принадлежит" указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x19 имеет вид:

$$\forall_{acdb}(d - \text{set} \ \& \ c - \text{натуральное} \ \& \ \text{кортеж}(a, c, d) \ \& \ b \in \{1, \dots, c\} \rightarrow a(b) \in d)$$

Переменной x20 присваивается вхождение консеквента теоремы x19. Проверяется, что второй операнд консеквента (согласно справочнику "принадлежит", это отношение принадлежности) - переменная. Она присваивается переменной x21. Переменной x22 присваивается первый операнд отношения принадлежности. Проверяется, что переменная x21 не входит в терм x22. Переменной x23 присваивается результат подстановки терма x22 вместо переменной x21 в равенство x15. Переменной x24 присваивается набор результатов подстановки терма x8 вместо переменной x21 в antecedentes теоремы x19. Затем создается импликация с antecedентами x24 и консеквентом x23. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (q) Попытка преобразовать теорему, выражающую операцию над функцией через более простые понятия.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abce}(e = [a, b] \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(c) \ \& \ \text{Числотр}(e) \rightarrow \text{началопути}(\text{Путь}(c, e)) = \text{Место}(c, a))$$

из теоремы

$$\forall_{aT}(\text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \rightarrow \text{Путь}(a, T) = \text{ориенткрив}(\lambda_t(\text{Место}(a, t), t \in T)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{fab}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \text{Точки} \ \& \ \text{Dom}(f) = [a, b] \rightarrow \text{началопути}(\text{ориенткрив}(f)) = f(a))$$

Переменной x8 присваивается определяемая часть. Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x12 присваивается список antecedентов, переменной x13 - определяющий терм. Проверяется, что он неоднобуквенный, причем его первым операндом служит описатель "отображение". Переменной x14 присваивается заголовок терма x13. В нашем примере - "ориенткрив". Определяется раздел, к которому относится символ x14, и просматриваются теоремы x19 данного раздела, имеющие характеристику x20 с заголовком "упрощение" либо "функподст" либо "описатель". В нашем примере x19 - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x23 присваивается вхождение заменяемой части дополнительной теоремы в соответствии с характеристикой x20. В нашем примере - вхождение подтерма "началопути(ориенткрив(f))". Внутри вхождения x23 находится

вхождение x24 символа x14. Оператор "тождвывод" определяет результат x25 преобразования вхождения x24 при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (г) Попытка исключить в дополнительной теореме заголовок определяющего выражения текущей теоремы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acP}(\text{мточка}(a) \ \& \ \text{промежутки}(c, P) \ \& \ \text{Числотр}(c) \rightarrow \text{Путь}(a, c) = \text{путь}(\lambda_i(\text{Путь}(a, P(i)), i \in \{1, \dots, l(P)\})))$$

из теоремы

$$\forall_{aT}(\text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \rightarrow \text{Путь}(a, T) = \text{ориенткрив}(\lambda_t(\text{Место}(a, t), t \in T)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{TPfn}(f - \text{функция} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \text{Точки} \ \& \ \text{Dom}(f) = T \ \& \ \text{промежутки}(T, P) \ \& \ l(P) = n \rightarrow \text{ориенткрив}(f) = \text{путь}(\lambda_i(\text{ориенткрив}(\lambda_x(f(x), x \in P(i))), i \in \{1, \dots, n\})))$$

Переменной x8 присваивается определяемая часть. Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x12 присваивается список антецедентов, переменной x13 - определяющий терм. Проверяется, что он неоднобуквенный, причем его первым операндом служит описатель "отображение". Переменной x14 присваивается заголовок терма x13. В нашем примере - "ориенткрив". Определяется раздел, к которому относится символ x14, и просматриваются теоремы x19 данного раздела, имеющие характеристику x20 с заголовком "нормализация", а также характеристику с заголовком "Атомарное". В нашем примере x19 - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x23 присваивается вхождение заменяющей части дополнительной теоремы в соответствии с характеристикой x20. В нашем примере - вхождение терма "ориенткрив(f)". Проверяется, что по вхождению x23 находится символ x14. Оператор "тождвывод" определяет результат x24 преобразования вхождения x23 при помощи исходной теоремы. Переменной x25 присваивается результат обработки теоремы x24 оператором "Нормтеорема", которому разрешается использовать для упрощения уже имеющиеся в списке вывода теоремы. Затем теорема x25 регистрируется в списке вывода.

24. Замена переменных в теореме.

- (а) Попытка навесить одноместную операцию на определяющее атомарное выражение и использовать параметрическое описание для исключения невырожденных атомарных выражений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c(\text{Вектор}(c) \rightarrow \text{длина}(-c) = \text{длина}(c))$$

из теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow -\text{вектор}(AB) = \text{вектор}(BA))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$$

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(AB)) = l(AB))$$

Проверяется, что теорема - тождество, и переменной x9 присваивается определяемый терм, а переменной x12 - определяющий. Проверяется, что терм x12 неоднобуквенный. Переменной x13 присваивается список антецедентов теоремы. Проверяется, что x12 - атомарное выражение. В нашем примере - "вектор(BA)". Переменной x14 присваивается заголовок выражения x12, переменной x16 - тип значения этого выражения. В нашем примере x16 - символ "Вектор". Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по x16 указанную выше первую дополнительную теорему. Проверяется, что консеквент этой теоремы - эквивалентность, левая часть которой имеет своим заголовком символ x16, а правая часть представляет собой квантор существования x20. Переменной x21 присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. Переменной x22 присваивается переменная - единственный корневой операнд левой части эквивалентности. В нашем примере x21 - утверждения "A - точка", "B - точка", "a = вектор(AB)". x22 - переменная a. Среди утверждений x21 находится равенство x23 с переменной x22 в левой части. Переменной x24 присваивается правая часть равенства. Проверяется, что заголовок правой части этого равенства - символ x14.

Определяется раздел x25, к которому относится символ x14. В нашем примере - "векторы". Просматриваются теоремы x29 этого раздела, имеющие характеристику вида "определение(T)". В нашем примере x29 - вторая дополнительная теорема. Переменной x32 присваивается вхождение той части консеквента второй дополнительной теоремы, которая равна T. Проверяется, что эта часть неоднобуквенная и число ее корневых операндов равно 1. В нашем примере x32 - вхождение терма "длина(вектор(AB))". Проверяется, что заголовок корневого операнда вхождения x32 равен x14.

Оператор "тождвывод" определяет результат x33 преобразования корневого операнда второй дополнительной теоремы при помощи исходной теоремы. В нашем примере x33 имеет вид:

$$\forall_{ab}(b - \text{точка} \ \& \ a - \text{точка} \rightarrow \text{длина}(-\text{вектор}(ab)) = l(ba))$$

Переменной x36 присваивается заменяемая часть консеквента теоремы x33 (имеющая заголовок x14). В нашем примере - "длина(-вектор(ab))". Проверяется, что символ x14 имеет единственное вхождение в x36, и переменной x38 присваивается это вхождение, а переменной x39 - подтерм по данному вхождению. В нашем примере - "вектор(ab)". Выбирается переменная x40, не встречающаяся в теореме x33. В нашем примере - переменная c. Переменной x41 присваивается список параметров терма x39, переменной x42 - набор антецедентов теоремы x33. Переменной x43 присваивается список утверждений набора x42Ю имеющих параметр из списка x41. В нашем примере - "b - точка" и "a - точка". Переменной x44 присваивается связывающая приставка квантора x20. В нашем примере - A, B.

Усматривается, что терм x_{39} является результатом применения некоторой подстановки S вместо переменных x_{44} в терм x_{24} . Переменной x_{46} присваивается список результатов применения подстановки S к отличным от x_{23} утверждениям списка x_{21} . Переменной x_{47} присваивается объединение списка x_{46} с утверждениями списка x_{42} , не вошедшими в список x_{43} . Проверяется, что все утверждения списка x_{43} суть следствия утверждений x_{47} .

Переменной x_{48} присваивается объединение списка антецедентов первой дополнительной теоремы с утверждениями списка x_{42} , не вошедшими в список x_{43} , пополненное утверждение " $x_{16}(x_{40})$ ". В нашем примере - утверждением "Вектор(c)". Переменной x_{49} присваивается список x_{42} , пополненный равенством выражений x_{39} и x_{40} . Выбирается переменная x_{50} , не входящая в утверждения списка x_{49} . В нашем примере - переменная d . Переменной x_{15} присваивается равенство переменной x_{50} заменяющей части консеквента теоремы x_{33} . Решается задача на описание с посылками x_{49} и единственным условием x_{51} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "упростить", "равно", "неизвестные x_{50} ", "известно x_{40} ".

В нашем примере посылки суть " b - точка", " a - точка", "вектор(ab) = c ". Условие - " $d = l(ba)$ ". Неизвестная - d , известные параметры - c .

Ответ задачи присваивается переменной x_{53} . В нашем примере он имеет вид " $d = \text{длина}(c)$ ". Проверяется, что этот ответ - равенство переменной x_{50} некоторому терму R . Создается импликация с антецедентами x_{48} , консеквентом которой служит равенство выражению R результата замены вхождения x_{38} в терм x_{36} на переменную x_{40} . Эта импликация регистрируется в списке вывода.

- (b) Переход к параметрическому описанию объекта, для которого определяется отношение.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcK}(b \text{ - точка} \ \& \ c \text{ - точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вверх}(\text{вектор}(bc), K) \leftrightarrow \text{крд}(b, K, 1) = \text{крд}(c, K, 1) \ \& \ \text{крд}(b, K, 2) = \text{крд}(c, K, 2) \ \& \ 0 \leq -\text{крд}(b, K, 3) + \text{крд}(c, K, 3))$$

из теоремы

$$\forall_{aK}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{вверх}(a, K) \leftrightarrow \text{крд}(a, K, 1) = 0 \ \& \ \text{крд}(a, K, 2) = 0 \ \& \ 0 \leq \text{крд}(a, K, 3))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A \text{ - точка} \ \& \ B \text{ - точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$$

Переменной x_8 присваивается определяемая часть. Проверяется, что теорема - эквивалентность. Переменной x_{12} присваивается список ее антецедентов. В списке x_{12} выбирается утверждение x_{13} длины 2. В нашем примере - "Вектор(a)". Переменной x_{14} присваивается заголовок данного утверждения, переменной x_{15} - переменная терма x_{13} . В нашем примере x_{14} - "Вектор", x_{15} - a . Справочник поиска теорем "парамописание"

находит по символу x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она не имеет антецедентов. Переменной x_{18} присваивается результат переобозначения в дополнительной теореме переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{18} имеет вид:

$$\forall_b(\text{Вектор}(b) \leftrightarrow \exists_{cd}(c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ b = \text{вектор}(cd)))$$

Переменной x_{19} присваивается входжение консеквента теоремы x_{18} . Этот консеквент - эквивалентность. Переменной x_{21} присваивается входжение той части эквивалентности, которая представляет собой квантор существования, переменной x_{22} - противоположная часть эквивалентности, имеющая длину 2. Переменной x_{23} присваивается переменная терма x_{22} . В нашем примере - b . Переменной x_{24} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором x_{21} . В этом списке находится равенство x_{25} с переменной x_{23} в левой части. Переменной x_{26} присваивается правая часть равенства. В нашем примере - "вектор(cd)". Переменной x_{27} присваивается набор отличных от x_{25} элементов списка x_{24} .

Переменной x_{28} присваивается консеквент исходной теоремы., переменной x_{29} - набор x_{12} , переменной x_{30} - список переменных исходной теоремы, переменной x_{31} - список переменных утверждений x_{27} и выражения x_{26} , переменной x_{32} - характеристика "определение(...)" исходной теоремы. Далее реализуется цикл коррекций перечисленных значений.

В начале очередной итерации находится имеющее заголовок x_{14} утверждение x_{33} списка x_{29} . В нашем примере x_{33} - "Вектор(a)". Переменной x_{34} присваивается переменная - корневой операнд терма x_{33} . Переменной x_{35} присваивается список не входящих в x_{30} переменных, имеющий такую же длину, как список x_{31} . В нашем примере - переменные b, c . Переменной x_{30} переприсваивается объединение списков x_{30} и x_{31} . Переменной x_{29} переприсваивается объединение отличных от x_{33} элементов списка x_{29} с набором результатов замены в утверждениях x_{27} переменных x_{31} на x_{35} . В нашем примере x_{29} приобретает вид "Трехмерн(K)", " b -точка", " c -точка". Переменной x_{36} присваивается результат замены в выражении x_{26} переменных x_{31} на x_{35} . В нашем примере - "вектор(bc)". В списке x_{29} принимается подстановка выражения x_{36} вместо переменной x_{34} . В нашем примере x_{29} не изменяется. Переменной x_{28} переприсваивается результат подстановки x_{36} вместо x_{34} в утверждение x_{28} . В нашем примере получается: "вверх(вектор(bc), K) \leftrightarrow крд($b, K, 1$) = крд($c, K, 1$) & крд($b, K, 2$) = крд($c, K, 2$) & $0 \leq -$ крд(вектор(bc), $K, 3$)". Переменной x_{32} переприсваивается результат такой же подстановки в x_{32} . В нашем примере получается: "определение(вверх(вектор(bc), K))".

Далее итерации повторяются, пока это возможно. По завершении цикла итераций создается импликация с антецедентами x_{29} и консеквентом x_{28} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

25. Обобщение контекста, в котором усматривается определение.

- (a) Попытка развязать параметры в определении операции для атомарного выражения (случай наличия характеристики "Атомарное").

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdA}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \\ \neg(\text{прямая}(ad) = \text{прямая}(cd)) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \\ d - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(cd) \ \& \\ \text{прямая}(ad) \parallel \text{прямая}(bc) \rightarrow \text{вектор}(dc) + \text{вектор}(Aa) = \text{вектор}(Ab))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \text{вектор}(AB) + \text{вектор}(BC) = \\ \text{вектор}(AC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = D) \ \& \\ \neg(B = C) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \ \& \\ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AD)) \rightarrow \\ \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(DC))$$

Переменной x8 присваивается определяемый терм, переменной x11 - вхождение определяющего терма. В нашем примере определяемая часть расположена слева, определяющая - справка. Проверяется, что теорема - тождество, имеющее характеристику "Атомарное(...)". Переменной x13 присваивается тип атомарного выражения согласно данной характеристике. В нашем примере - "Вектор". Переменной x14 присваивается список антецедентов. Проверяется, что определяемый и определяющий термы имеют общие параметры. Переменной x16 присваивается отличное от x8 атомарное подвыражение выражения x8, имеющее тип x13. В нашем примере - "вектор(BC)". Переменной x17 присваивается заголовок выражения x16. В нашем примере - "вектор". Справочник поиска теорем "равны" определяет по x17 указанную выше дополнительную теорему. Внутри вхождения в теорему определяемой части находится вхождение x20 подтерма x16.

Оператор "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождения x20 при помощи дополнительной теоремы, применяемой слева направо. В нашем примере x21 имеет вид:

$$\forall_{abcdA}(A - \text{точка} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \\ \neg(a = d) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(cd) \ \& \\ \text{прямая}(bc) \parallel \text{прямая}(ad) \ \& \ \neg(\text{прямая}(ab) = \text{прямая}(ad)) \rightarrow \\ \text{вектор}(Aa) + \text{вектор}(dc) = \text{вектор}(Ab))$$

Переменной x22 присваивается результат обработки теоремы x21 оператором "нормтеорема". В нашем примере это указанная выше выводимая теорема. Проверяется, что x22 - кванторная импликация. Переменной x23 присваивается вхождение ее консеквента. Проверяется, что x23 - равенство, и переменной x24 присваивается пара его левой и правой частей. Далее рассматриваются два случая:

- i. Выражения пары x24 имеют общий параметр. В нашем примере это так. Переменной x25 присваивается список атомарных подвыражений

терма x_8 , имеющих тип x_{13} . Проверяется, что его длина равна 2. В нашем примере - "вектор(AB)" и "вектор(BC)". Проверяется, что эти два подвыражения имеют общий параметр. Переменной x_{26} присваивается тот элемент пары x_{24} , который расположен так же, как определяемая часть исходной теоремы. В нашем примере x_{26} имеет вид "вектор(dc) + вектор(Aa)". Переменной x_{27} присваивается список атомарных подвыражений терма x_{26} , имеющих тип x_{13} . Проверяется, что его длина равна 2, а параметры этих двух подвыражений не пересекаются. Лишь после этого теорема x_{22} регистрируется в списке вывода.

ii. Выражения пары x_{24} не имеют общего параметра. Тогда рассматривается список антецедентов x_{25} теоремы x_{22} и составляется список x_{26} параметров утверждений x_{25} , не входящих в термы x_{24} . Если список x_{26} непуст, то список x_{25} разбивается на подсписок x_{27} утверждений, не содержащих переменных x_{26} , и список x_{28} остальных утверждений. Решается задача на описание с условиями x_{28} и посылками x_{27} , неизвестными которой служат переменные x_{26} . Эти неизвестные несущественные, и задача решается с целью их исключения. Проверяется, что ответ x_{30} не содержит переменных x_{26} , после чего антецеденты x_{28} теоремы x_{22} заменяются на конъюнктивные члены утверждения x_{30} . Затем теорема x_{22} регистрируется в списке вывода.

(b) Попытка развязать параметры в определении операции для атомарного выражения (случай отсутствия характеристики "Атомарное").

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdC} (\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ \neg(d = C) \ \& \ \neg(\text{прямая}(ab) = \text{прямая}(ad)) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(cd) \ \& \ \text{прямая}(ad) \parallel \text{прямая}(bc) \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(dC)) \rightarrow \angle(cdC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(AC)) = \angle(BAC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(AD) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AD)) \rightarrow \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(DC))$$

Переменной x_8 присваивается определяемый терм, переменной x_{11} - вхождение определяющего терма. В нашем примере определяемая часть расположена слева, определяющая - справка. Проверяется, что теорема - тождество. Переменной x_{12} присваивается список антецедентов, переменной x_{13} - определяющее выражение.

Переменной x_{14} присваивается список параметров терма x_8 . В нем выбирается переменная x_{15} , имеющая в терме x_8 более одного вхождения. В нашем примере - переменная A . Переменной x_{16} присваивается некоторое вхождение переменной x_{15} в терм x_8 . Рассматривается некорневое

вхождение x_{17} в терм x_8 отличного от переменной символа x_{18} , внутри которого расположено x_{16} . В нашем примере x_{17} - вхождение подтерма "вектор(AB)", x_{18} - символ "вектор". Переменной x_{20} присваивается тип значения подтерма x_{17} . В нашем примере - "Вектор". Внутри терма x_8 находится содержащее x_{15} атомарное выражение x_{22} типа x_{20} . В нашем примере - "вектор(AB)". Справочник поиска теорем "равны" находит по x_{23} указанную выше дополнительную теорему. Внутри определяемой части исходной теоремы рассматривается вхождение x_{26} выражения x_{22} . Оператор "тождвывод" определяет результат преобразования вхождения x_{26} при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

26. Создание квазипротоколов

- (а) Ввод в актив стандартных нечисловых объектов посылок определения текущего объекта.

В качестве примера рассмотрим создание квазипротокола

$$\forall_{ABCK}(K = (A, B, C) \rightarrow \text{актив}(\text{прямая}(AB)))$$

по теореме

$$\forall_{ABCDEFK}(D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \neg(D = F) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ E \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, E) \ \& \ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AC) \ \& \ F \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{точкалуча}(A, C, F) \ \& \ \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AB) \rightarrow \text{коорд}(D, K) = (l(AE)/l(AB), l(AF)/l(AC)))$$

Квазипротокол снабжается характеристикой "актив(контрольвывода(коорд(D, K)))".

Проверяется, что теорема - тождество либо эквивалентность. Переменной x_9 присваивается определяемая часть, переменной x_{10} - список ее параметров, переменной x_{11} - список антецедентов. Переменной x_{12} присваивается список всех равенств набора x_{11} , у которых в одной из частей расположена переменная списка x_{10} . Список x_{10} пополняется параметрами таких равенств. В нашем примере x_{12} состоит из единственного равенства " $K = (A, B, C)$ ", x_{10} - список D, K, A, B, C .

Переменной x_{13} присваивается список всех подтермов антецедентов, имеющих своим заголовком один из символов "прямая", "окружность", "Окружность", "плоскость", "вектор", причем таких, что все их параметры включаются в список x_{10} . В нашем примере x_{13} состоит из двух выражений "прямая(AB)", "прямая(AC)". В списке x_{13} выбирается терм x_{14} . В нашем примере - "прямая(AB)". Создается импликация с антецедентами x_{12} и консеквентом "актив(x_{14})". Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "актив(контрольвывода(x_9)))".

- (б) Ввод в актив невырожденных числовых атомов определяющей части определения текущего объекта.

В качестве примера рассмотрим создание квазипротокола

$$\forall_{ABCDK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{точкалуча}(A, C, D) \rightarrow \text{актив}(l(AD)))$$

по теореме

$$\forall_{ABCDK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{точкалуча}(A, C, D) \rightarrow \text{коорд}(D, K) = (0, l(AD)/l(AC)))$$

Проверяется, что теорема - тождество либо эквивалентность. Переменной x9 присваивается определяемая часть, переменной x10 - список ее параметров, переменной x11 - список антецедентов. Переменной x12 присваивается список всех равенств набора x11, у которых в одной из частей расположена переменная списка x10. Список x10 пополняется параметрами таких равенств. В нашем примере x12 состоит из единственного равенства " $K = (A, B, C)$ ", x10 - список D, K, A, B, C .

Переменной x15 присваивается определяющая часть консеквента. В ней усматривается числовой атом x16, параметры которого включаются в список x10 и пересекаются с параметрами терма x9. В нашем примере x16 имеет вид " $l(AD)$ ". Проверяется, что заголовком терма x16 служит один из символов "расстояние", "угол", "площадь", "длина", "расстмежду", "объем". Переменной x17 присваивается список всех утверждений набора x11, параметры которых включаются в список x10. Создается импликация с антецедентами x17 и консеквентом "актив(x16)". Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "актив(контрольвывода(x9))".

Заметим, что приведенный выше квазипротокол в итоге склеивается с другим квазипротоколом, так что антецедент "точкалуча(A, C, D)" оказывается отброшен.

27. Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа.

- (а) Получение тождества для выражения параметра объекта через объект.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(c = a + bi \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{Re}(c) = a)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{Re}(a + bi) = a)$$

Выводимая теорема ориентирована на прием, усматривающий в посылках явное равенство для c и после этого преобразующий $\text{Re}(c)$.

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема представляет собой тождество с переменной в определяющей части. Проверяется, что число корневых операндов терма x8 равно 1. Переменной x13 присваивается этот корневой операнд. В нашем примере - $a + bi$. Переменной x14 присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная c . Переменной x15 присваивается равенство переменной x14 выражению x13. Переменной x17 присваивается выражение $P(x14)$, где P - заголовок терма x8. В нашем примере x17 имеет вид " $\text{Re}()$ ". Переменной x18 присваивается равенство выражения x17

определяющей части теоремы. Затем создается импликация, антецедентами которой служат утверждение x15 и антецеденты исходной теоремы, а консеквентом - равенство x18. Она регистрируется в списке вывода с характеристикой "значениепеременной". Пометка "результат" в блоке вывода указывает, что теорема включается в итоговый список, но следствия из нее не выводятся.

- (b) Вывод эквивалентности для декомпозиции импликации из определения функции через условное выражение.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acdAB}(A\text{-set} \& B\text{-set} \& B \subseteq A \rightarrow \forall_{bx}(c(b, x) \rightarrow d(b, \text{индикатор}(A, B, a)(x))) \\ \leftrightarrow \forall_{bx}(\neg(x \in B) \& c(b, x) \rightarrow d(b, 0)) \& \forall_{bx}(x \in B \& c(b, x) \rightarrow d(b, a))$$

из теоремы

$$\forall_{ABa}(A\text{-set} \& B\text{-set} \& B \subseteq A \rightarrow \text{индикатор}(A, B, a) = \\ \lambda_x((a \text{ при } x \in B, \text{ иначе } 0), x \in A))$$

Переменной x8 присваивается определяемый терм. Проверяется, что теорема является тождеством. Переменной x11 присваивается вхождение определяющего выражения. Проверяется, что это выражение - описатель "отображение". Переменной x12 присваивается список антецедентов. Проверяется, что связывающая приставка описателя x11 одноэлементна, и переменной x14 присваивается этот элемент. В нашем примере - переменная x . Внутри последнего операнда описателя x11 находится вхождение x15 символа "вариант". Переменной x16 присваивается первый операнд вхождения x15. В нашем примере - " $x \in B$ ". Проверяется, что терм x16 содержит переменную x14. Выбираются переменные x18, x21 и x22, не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные b, c, d . Определяются результат замены вхождения x15 в определяющую часть условного выражения на его второй операнд, а также результат замены этого вхождения на последний операнд условного выражения. После переобозначения переменных связывающей приставки этих двух результатов на переменные, отличные от x14 и x18, первый из них присваивается переменной x19, а второй - переменной x20. В нашем примере x19 имеет вид " $\lambda_c(a, c \in A)$ ", а x20 - вид " $\lambda_a(0, a \in A)$ ".

Переменной x23 присваивается утверждение "длялюбого(x18 x14 если x21(x18 x14) то x22(x18 x8(x14)))", переменной x24 - утверждение "длялюбого(x18 x14 если x21(x18 x14)x16 то x22(x18 x19(x14)))", переменной x25 - утверждение "длялюбого(x18 x14 если x21(x18 x14)не(x16)то x22(x18 x20(x14)))". В нашем примере x23 имеет вид " $\forall_{bx}(c(b, x) \rightarrow d(b, \text{индикатор}(A, B, a)(x)))$ ", x24 - вид " $\forall_{bx}(c(b, x) \& x \in B \rightarrow d(b, \lambda_c(a, c \in A)(x)))$ ", x25 - вид " $\forall_{bx}(c(b, x) \& \neg(x \in B) \rightarrow d(b, \lambda_a(0, a \in A)(x)))$ ".

Затем создается импликация с антецедентами x12, консеквентом которой служит эквивалентность утверждения x23 конъюнкции утверждений x24 и x25. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Теорема снабжается ровно двумя характеристиками - "подразбиение(второйтерм)" и "указатель(вхождение(x22))".

3.64 Характеристика "опредзначение"

Характеристикой "опредзначение(i)" снабжаются кванторные импликации с таким консеквентом $P(t_1 \dots t_n)$, что значение t_i , если вообще существует, однозначно определено значениями $t_1 \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n$.

1. Использование дополнительной теоремы для декомпозиции определяющей части и последующая попытка вывести явное выражение для определяемого термина.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{de}(\neg(d = \emptyset) \ \& \ \neg(e = \emptyset) \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ d \subseteq \mathbb{R} \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{огрснизу}(d) \ \& \ \text{огрснизу}(e) \rightarrow \inf(d \cup e) = \min(\inf(d), \inf(e)))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ \neg(a = \emptyset) \rightarrow \text{наибольший}(\inf(a), \text{set}_b(\text{нижнягрань}(b, a))))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bef}(e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{нижнягрань}(b, e \cup f) \leftrightarrow \text{нижнягрань}(b, e) \ \& \ \text{нижнягрань}(b, f))$$

Характеристика исходной теоремы - "опредзначение(1)".

Переменной x8 присваивается номер операнда из характеристики. В нашем примере - 1. Переменной x9 присваивается консеквент теоремы, переменной x10 - вхождение корневого операнда термина x9, имеющего номер x8. В нашем примере - вхождение термина "inf(a)". Рассматривается вхождение x11 в терм x9 неоднобуквенного подтерма, не расположенное внутри вхождения x10. В нашем примере - вхождение термина "нижнягрань(b, a)". Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. Справочник поиска теорем "упрощкн" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x15 присваивается результат переобозначения в ней переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x15 имеет вид:

$$\forall_{cde}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ d \subseteq \mathbb{R} \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{нижнягрань}(c, d \cup e) \leftrightarrow \text{нижнягрань}(c, d) \ \& \ \text{нижнягрань}(c, e))$$

Переменной x16 присваивается подтерм x11, переменной x17 - список общих параметров термов x16 и x9. В нашем примере он состоит из единственной переменной a . Переменной x21 присваивается заменяемая часть теоремы x15 согласно характеристике "и(...)" дополнительной теоремы. В нашем примере x21 имеет вид "нижнягрань(c, d ∪ e)". Переменной x22 присваивается объединение списка x17 с параметрами термина x21. В нашем примере x22 состоит из переменных a, c, d, e .

Определяется подстановка S вместо переменных x22, унифицирующая термы x16 и x21. Переменной x24 присваивается результат применения этой подстановки к заменяющему терму теоремы x15. В нашем примере x24 имеет вид

"нижняягрань(b, d) & нижняягрань(b, e)". Переменной x_{25} присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_{15} . В нашем примере он состоит из утверждений " $d - \text{set}$ ", " $e - \text{set}$ ", " $d \subseteq \mathbb{R}$ ", " $e \subseteq \mathbb{R}$ ". Переменной x_{26} присваивается список параметров терма x_{16} , не входящих в терм x_9 . В нашем примере - единственная переменная b . Переменной x_{27} присваивается список утверждений набора x_{25} , содержащих переменную списка x_{26} . В нашем примере список x_{27} пустой. Переменной x_{28} присваивается список результатов применени подстановки S к антецедентам исходной теоремы.

Если список x_{27} непуст, то проверяется, что каждое утверждение этого списка является следствием списка x_{28} , пополненного результатами применения подстановки S к утверждениям из области вхождения x_{11} в терм x_9 . Иначе прием не применяется.

Переменной x_{29} присваивается утверждение, получаемое из x_9 одновременной заменой вхождения x_{11} на терм x_{24} и применением подстановки S к вхождениям, расположенным вне x_{11} . В нашем примере x_{29} имеет вид:

наибольший($\text{inf}(d \cup e), \text{set}_b(\text{нижняягрань}(b, d) \ \& \ \text{нижняягрань}(b, e))$).

Выбирается переменная x_{30} , не входящая в исходную теорему и теорему x_{15} . В нашем примере - переменная f . Переменной x_{31} присваивается вхождение в x_{29} корневого операнда, имеющего номер x_8 . В нашем примере - " $\text{inf}(d \cup e)$ ". Переменной x_{32} присваивается результат замены в утверждении x_{29} вхождения x_{31} на переменную x_{30} . В нашем примере - " $\text{наибольший}(f, \text{set}_b(\text{нижняягрань}(b, d) \ \& \ \text{нижняягрань}(b, e)))$ ". Переменной x_{33} присваивается результат объединения списка x_{28} с утверждениями списка x_{25} , не входящими в список x_{27} , к которому добавлено утверждение x_{32} .

Решается задача на исследование x_{34} с посылками x_{33} . Цели задачи - (неизвестные x_{30}), "известно", "допосылки", "сравно", "теоремы". По окончании решения в списке посылок выбирается равенство x_{36} с переменной x_{30} в левой части. В нашем примере - " $f = \min(\text{inf}(d), \text{inf}(e))$ ". Переменной x_{37} присваивается правая часть равенства. Переменной x_{38} присваивается объединение списка x_{28} с утверждениями списка x_{25} , не входящими в список x_{27} , к которому добавлены утверждения Q , сохраненные при решении задачи x_{34} в ее комментариях (допосылки Q). В нашем примере таких утверждений два - " $\neg(e = \emptyset)$ " и " $\neg(d = \emptyset)$ ". Создается импликация с антецедентами x_{38} , консеквентом которой служит равенство подтерма x_{31} выражению x_{37} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Вывод равенства путем варьирования определяющей части и обратной свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_e(\neg(\text{Dom}(e) = \emptyset) \ \& \ \neg(\emptyset \in \text{Val}(e)) \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(e) \ \& \ \text{огрснизу}(\bigcup(e)) \ \& \ \text{подмнож}(e, \mathbb{R}) \rightarrow \text{inf}(\bigcup(e)) = \text{inf}(\text{set}_d(d = \text{inf}(e(f)) \ \& \ f \in \text{Dom}(e))))))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ \neg(a = \emptyset) \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{наибольший}(\text{inf}(a), \text{set}_b(\text{нижнягрань}(b, a))))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ac}(\neg(\emptyset \in \text{Val}(c)) \ \& \ \forall_f(f \in \text{Dom}(c) \rightarrow \text{огрснизу}(c(f))) \ \& \ c - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(c) \ \& \ \text{подмнож}(c, \mathbb{R}) \rightarrow \text{нижнягрань}(a, \bigcup(c)) \leftrightarrow \text{нижнягрань}(a, \text{set}_b(\exists_f(b = \text{inf}(c(f)) \ \& \ f \in \text{Dom}(c))))$$

Характеристика исходной теоремы - "опредзначение(1)".

Переменной x8 присваивается вхождение консеквента, переменной x9 - номер его операнда согласно характеристике. В нашем примере x9 равно 1. Проверяется, что консеквент имеет ровно два операнда, и переменной x10 присваивается вхождение его операнда, имеющего номер x9. В нашем примере - операнда "inf(a)". Переменной x11 присваивается вхождение другого операнда, переменной x12 - подтерм по вхождению x11. Внутри x12 рассматривается вхождение x13 неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - вхождение подтерма "нижнягрань(b, a)". Переменной x14 присваивается символ по вхождению x13. Проверяется, что этот символ предикатный. Справочник поиска теорем "равнотексты" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что одним из операндов вхождения x13 служит переменная x19, входящая в список параметров подтерма x12, а другим - переменная x20, не входящая в этот список. В нашем примере x19 - переменная a, x20 - переменная b. Переменной x21 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x21 имеет вид:

$$\forall_{ce}(\neg(\emptyset \in \text{Val}(e)) \ \& \ \forall_f(f \in \text{Dom}(e) \rightarrow \text{огрснизу}(e(f))) \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(e) \ \& \ \text{подмнож}(e, \mathbb{R}) \rightarrow \text{нижнягрань}(c, \bigcup(e)) \leftrightarrow \text{нижнягрань}(c, \text{set}_d(\exists_f(d = \text{inf}(e(f)) \ \& \ f \in \text{Dom}(e))))$$

Переменной x22 присваивается список антецедентов теоремы x21, переменной x23 - вхождение ее консеквента. Проверяется, что x23 - эквивалентность. Вводится накопитель x24 антецедентов результирующей теоремы, иницируемый значением x22. Вводится пустой накопитель x25 частей равенства - консеквента результирующей теоремы.

Переменной x26 поочередно присваиваются вхождения левой и правой частей эквивалентности x23. Переменной x27 присваивается вхождение того операнда вхождения x26, который представляет собой переменную x29, не входящую в список параметров утверждений x22. В нашем примере x29 - переменная c. Проверяется, что номер x27 вхождения x26 равен номеру операнда x20 вхождения x13. Переменной x30 присваивается операнд вхождения x26, отличный от x27. Переменной x31 присваивается список результатов подстановки x30 вместо переменной x19 в антецеденты исходной теоремы, переменной x32 - результат такой же подстановки в подтерм x10. Затем утверждения x31 добавляются к накопителю x24, а выражение x32 - к накопителю x25.

По окончании цикла варьирования переменной x26 создается импликация с антецедентами x24, консеквентом которой служит равенство выражений пары

x25. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.65 Характеристика "опрзнач"

Характеристикой "опрзнач(x1)" снабжаются кванторные импликации, однозначно определяющие своим консеквентом значение переменной x1, которая независимо от этого определяется некоторой группой антецедентов.

Логические следствия теоремы

1. Перестановка антецедента и консеквента, однозначно определяющих один и тот же объект.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ l(AC) = l(BC) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \rightarrow \angle(ACD) = \angle(BCD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \angle(ACD) = \angle(DCB) \ \& \ l(AC) = l(BC) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \rightarrow \text{прямая}(CD) \perp \text{прямая}(AB) \ \& \ l(AD) = l(DB))$$

Характеристика исходной теоремы - "опрзнач(D)".

Переменной x8 присваивается список антецедентов, обработанных оператором "станд". Переменной x9 присваивается список конъюнктивных членов консеквента, обработанных оператором "станд". Переменной x10 присваивается объединение списков x8 и x9. Решается задача на исследование x11 со списком посылок x10. Единственная ее цель - "опрзнач". Такая цель означает, что требуется создать комментарий к посылкам (опрзнач $A_1 A_2 A_3$), указывающий, что в случае истинности утверждения A_2 существует единственное значение переменной A_3 , при котором истинно утверждение A_1 .

После решения задачи x11 переменной x13 присваивается список комментариев (опрзнач ...) к ее посылкам. В нашем примере имеются три комментария: (опрзнач, $D - \text{точка} \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \angle(BCD) = \angle(ACD), B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ \neg(B = A) \ \& \ \neg(C \in \text{прямая}(AB)), D$); (опрзнач $D - \text{точка} \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD)$), $A - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ \neg(B = A) \ \& \ \neg(C \in \text{прямая}(AB)), D$); (опрзнач $D - \text{точка} \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ l(BD) = l(AD), B - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ \neg(B = A), D$).

Эти комментарии вводились специальными приемами ГЕНОЛОГа с заголовком "замечание". Их можно найти в разделе "Логические приемы и структуры данных - Вспомогательные приемы вывода теорем - "Усмотрение однозначной

определимости точки при характеристизации теоремы" оглавления приемов ГЕ-НОЛОГа.

Выбирается элемент x_{14} списка x_{13} . В нашем примере - первый из трех. Переменной x_{15} присваивается последний элемент набора x_{14} . В нашем примере - D . Переменной x_{16} присваивается список всех элементов набора x_{13} , у которых последний элемент равен x_{15} . В нашем примере x_{16} совпадает с x_{13} . Проверяется, что длина списка x_{16} не менее 2. Выбирается элемент x_{17} списка x_{16} . В нашем примере он совпадает с x_{14} . Переменной x_{18} присваивается набор конъюнктивных членов обработанного оператором "станд" второго элемента набора x_{17} . В нашем примере x_{18} состоит из утверждений " $\angle(ACD) = \angle(BCD)$ ", " $D \in \text{прямая}(AB)$ ", " D - точка". Проверяется, что x_{18} - подсписок списка x_8 . В списке x_{16} выбирается элемент x_{19} , отличный от x_{17} . В нашем примере - второй элемент списка x_{13} . Переменной x_{20} присваивается набор обработанных оператором "станд" конъюнктивных членов второго элемента набора x_{19} . В нашем примере x_{20} состоит из утверждений " $D \in \text{прямая}(AB)$ ", " D - точка", " $\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD)$ ". Проверяется, что списки x_9 и x_{20} пересекаются. Переменной x_{21} присваивается результат удаления из списка x_8 утверждений x_{18} , переменной x_{22} - объединение списка x_{20} с конъюнктивными членами обработанного оператором "станд" третьего элемента набора x_{19} . Переменной x_{23} присваивается объединение списков x_{21} и x_{22} , переменной x_{24} - объединение списка x_{23} с конъюнктивными членами обработанного оператором "станд" третьего элемента набора x_{17} .

Переменной x_{25} присваивается результат удаления из списка x_{18} утверждений x_{24} . Проверяется, что он одноэлементный. Переменной x_{26} присваивается результат добавления к списку x_{24} утверждений, необходимых для сопровождения его по о.д.з. Создается импликация с антецедентами x_{26} , консеквентом которой служит элемент списка x_{25} . Она обрабатывается оператором "норм-теорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Перестановка антецедента и двух консеквентов, однозначно определяющих один и тот же объект.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ l(AC) = l(BC) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ D\text{-точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \rightarrow l(AD) = l(BD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ D\text{-точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \angle(ACD) = \angle(DCB) \ \& \ l(AC) = l(BC) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \rightarrow \text{прямая}(CD) \perp \text{прямая}(AB) \ \& \ l(AD) = l(DB))$$

Характеристика - "опрзнач(D)".

Начало программы приема дословно совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, обработанных оператором "станд". Переменной x_9 присваивается список конъюнктивных членов консеквента, обработанных оператором "станд". Переменной x_{10} присваивается объединение списков x_8 и x_9 . Решается задача на исследование x_{11} со списком посылок x_{10} . Единственная ее цель - "опрзнач". Такая цель означает, что требуется создать комментарий к посылкам (опрзнач $A_1 A_2 A_3$), указывающий, что в случае истинности утверждения A_2 существует единственное значение переменной A_3 , при котором истинно утверждение A_1 .

После решения задачи x_{11} переменной x_{13} присваивается список комментариев (опрзнач ...) к ее посылкам. В нашем примере имеются три комментария: (опрзнач, D – точка & $D \in$ прямая(AB) & $\angle(BCD) = \angle(ACD)$, B – точка & C – точка & A – точка & $\neg(B = A)$ & $\neg(C \in$ прямая(AB)), D); (опрзнач D – точка & $D \in$ прямая(AB) & прямая(AB) \perp прямая(CD)), A – точка & C – точка & A – точка & $\neg(B = A)$ & $\neg(C \in$ прямая(AB)), D); (опрзнач D – точка & $D \in$ прямая(AB) & $l(BD) = l(AD)$, B – точка & A – точка & $\neg(B = A)$, D).

Выбирается элемент x_{14} списка x_{13} . В нашем примере - первый из трех. Переменной x_{15} присваивается последний элемент набора x_{14} . В нашем примере - D . Переменной x_{16} присваивается список всех элементов набора x_{13} , у которых последний элемент равен x_{15} . В нашем примере x_{16} совпадает с x_{13} . Проверяется, что длина списка x_{16} не менее 2. Выбирается элемент x_{17} списка x_{16} . В нашем примере он совпадает с x_{14} . Переменной x_{18} присваивается набор конъюнктивных членов обработанного оператором "станд" второго элемента набора x_{17} . В нашем примере x_{18} состоит из утверждений " $\angle(ACD) = \angle(BCD)$ ", " $D \in$ прямая(AB)", " D – точка". Проверяется, что x_{18} - подсписок списка x_8 . В списке x_{16} выбирается элемент x_{19} , отличный от x_{17} . В нашем примере - второй элемент списка x_{13} . Переменной x_{20} присваивается набор обработанных оператором "станд" конъюнктивных членов второго элемента набора x_{19} . В нашем примере x_{20} состоит из утверждений " $D \in$ прямая(AB)", " D – точка", "прямая(AB) \perp прямая(CD)". Проверяется, что списки x_9 и x_{20} пересекаются. Переменной x_{21} присваивается результат удаления из списка x_8 утверждений x_{18} , переменной x_{22} - объединение списка x_{20} с конъюнктивными членами обработанного оператором "станд" третьего элемента набора x_{19} . Переменной x_{23} присваивается объединение списков x_{21} и x_{22} , переменной x_{24} - объединение списка x_{23} с конъюнктивными членами обработанного оператором "станд" третьего элемента набора x_{17} .

Дальше начинаются отличия. В списке x_{16} выбирается элемент x_{25} , отличный от x_{17} и x_{19} . В нашем примере - последний элемент списка x_{13} . Переменной x_{26} присваивается список конъюнктивных членов результата обработки оператором "станд" второго элемента набора x_{25} . В нашем примере x_{26} состоит из утверждений " $l(AD) = l(BD)$ ", " $D \in$ прямая(AB)", " D – точка". Проверяется, что списки x_{26} и x_9 пересекаются. Переменной x_{27} присваивается список не вошедших в набор x_{24} элементов списка x_{26} . Проверяется, что x_{27} одноэлементно. Переменной x_{28} присваивается список утверждений x_{24} , дополненный необходимыми для сопровождения его по о.д.з. утверждениями. Затем создается импликация с антецедентами x_{28} , консеквентом которой служит утверждение

списка x27. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Попытка вывода следствий антецедентов и консеквента, не содержащих однозначно определяемой переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \& \neg(B = C) \& \neg(C = D) \& l(AC) = l(BC) \& l(AD) = l(BD) \& D \in \text{прямая}(AB) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow l(AB) = 2 \cos(\angle(ABC))l(BC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \& \neg(C = D) \& l(AC) = l(BC) \& l(AD) = l(BD) \& D \in \text{прямая}(AB) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD))$$

Характеристика - "опрзнач(D)".

Переменной x8 присваивается переменная из характеристики "опрзнач". В нашем примере - D. Переменной x9 присваивается список антецедентов, переменной x10 - консеквент. Проверяется, что теорема имеет характеристику "отношение". Переменной x11 присваивается результат добавления утверждения x10 к списку x9. Решается задача на исследование x12 с посылками x11 и целями "исключ x8", "неизвестные X", "известно", "теорвывод". Здесь X - список всех параметров утверждений x11. Переменной x14 присваивается результат добавления к списку x9 всех посылок задачи x12, полученных после ее решения, имеющих заголовок "актив" и не имеющих параметров, не встречающихся в утверждениях x9. В нашем примере к x9 добавились посылки "актив(T)" для следующих термов T: $\angle(BAC)$, плоскость(ABC), $l(CD)$, $\angle(ACB)$, $\angle(ACD)$, $\angle(ABC)$, $\angle(CBD)$, $\angle(BCD)$, $l(AB)$, прямая(CD), прямая(AB), $l(BD)$, $l(AD)$, прямая(BC), $l(BC)$, прямая(AC), $l(AC)$.

Решается задача на исследование x15 с посылками x14 и целями "исключ x8", "неизвестные Y", "известно", "теорвывод", где Y - все параметры утверждений x9.

После этого в списке посылок задачи x12 рассматривается не содержащее переменной x8 равенство x17, параметры которого включаются в параметры утверждений x9. Проверяется, что равенство x17 не входит в список посылок задачи x15 и что комментарий "выводимо" к этому равенству указывает на использование утверждения x10 при его получении. В нашем примере x17 имеет вид " $l(AB) = 2 \cos(\angle(ABC))l(AC)$ ".

Вводится накопитель x19, в который заносится единственное утверждение x17. Составляется список x20 невырожденных числовых атомов утверждения x17. В нашем примере - $l(AB)$, $\angle(ABC)$, $l(AC)$.

Реализуется цикл просмотра элементов x_{21} списка x_{20} . Для заданного x_{21} просматриваются равенства x_{22} из посылок задачи x_{12} , отличные от x_{17} , не содержащие x_8 , но содержащие подтерм x_{21} . Проверяется, что параметры равенства x_{22} включаются в параметры утверждений x_9 . В нашем примере x_{22} имеет вид " $\angle(ACB) = -2\angle(ABC) + \pi$ ". Составляется список x_{23} числовых атомов терма x_{22} . Проверяется, что он двухэлементный. Выбирается тот элемент x_{24} списка x_{23} , который отличен от x_{21} . В нашем примере это $\angle(ACB)$. Проверяется, что x_{24} отлично от переменной и не входит в утверждение x_{17} . Выбираются переменные P, Q , не входящие в утверждения x_9 . В нашем примере - переменные a, b . Переменной x_{26} присваивается результат замены в терме x_{22} подтерма x_{21} на переменную P , а подтерма x_{24} - на переменную Q . В нашем примере получаем: " $b = -2a + \pi$ ".

Решается задача на описание с посылками x_9 и единственным условием x_{26} . Цели ее - "полный", "явное", "прямойответ", "одз", "неизвестные P ". Ответ присваивается переменной x_{28} . В нашем примере он имеет вид " b - число & $a = (-b + \pi)/2$ ". Проверяется, что данный ответ отличен от символа "отказ". Среди его конъюнктивных членов находится равенство x_{29} с переменной P в левой части. Переменной x_{30} присваивается результат подстановки в правую часть данного равенства терма x_{24} вместо переменной Q . В нашем примере x_{30} имеет вид " $(-\angle(ACB) + \pi)/2$ ". Переменной x_{31} присваивается результат замены в терме x_{17} вхождений подтерма x_{21} на x_{30} . В нашем примере - " $l(AB) = 2 \cos((-\angle(ACB) + \pi)/2)l(AC)$ ". Терм x_{31} добавляется к списку x_{19} , и продолжение цикла - к очередному x_{22} .

По завершении цикла все переменные начиная с x_{20} оказываются не определенными. В нашем примере x_{19} состоит из утверждений " $l(AB) = 2 \cos(\angle(ABC)) \cdot l(AC)$ ", " $l(AB) = 2 \cos((-\angle(ACB) + \pi)/2)l(AC)$ ", " $l(AB) = 2 \cos(\angle(BAC)) \cdot l(AC)$ ", " $l(AB) = 2 \cos(\angle(ABC))l(BC)$ ".

Для каждого элемента x_{20} списка x_{19} создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x_9 и утверждения, необходимые для сопровождения x_{20} по о.д.з. В нашем примере x_{20} - первый элемент списка x_{19} . Данная импликация обрабатывается оператором "ноормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Ей передается исходная характеристика "опрзнач(x_8)". Прочие характеристики создаются характеристикатором.

Обобщение теоремы

1. Попытка отбросить антецеденты с однозначно определяемой переменной, не входящей в консеквент.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& A - \text{точка} \& \neg(B = C) \& l(AC) = l(BC) \rightarrow l(AB) = 2 \cos(\angle(ABC))l(BC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \& D - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& A - \text{точка} \& \neg(B = C) \& l(AC) = l(BC) \& l(AD) = l(BD) \& D \in \text{прямая}(AB) \rightarrow l(AB) = 2 \cos(\angle(ABC))l(BC))$$

Характеристика - "опрзнач(D)".

Переменной x_8 присваивается переменная из характеристики "опрзнач". В нашем примере - D . Переменной x_9 присваивается консеквент теоремы. Проверяется, что он не содержит переменной D . Переменной x_{10} присваивается список антецедентов теоремы. Он разбивается на подсписок x_{11} утверждений, содержащих x_8 , и подсписок x_{12} остальных утверждений. Проверяется, что оба эти подсписка непусты. Переменной x_{13} присваивается результат навешивания квантора существования по переменной x_8 на конъюнкцию утверждений x_{11} . В нашем примере - " $\exists_D(D - \text{точка} \ \& \ l(AD) = l(BD) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB))$ ". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x_{13} - следствие утверждений x_{12} . Затем создается импликация с антецедентами x_{12} и консеквентом x_9 , которая регистрируется в списке вывода.

3.66 Характеристика "опрнапр"

Характеристикой "опрнапр(x_1)" снабжаются кванторные импликации, выведенные специально для переформулировки антецедентов других теорем с привлечением понятия x_1 . Эта характеристика создается только приемами вывода.

Использование определения для свертки антецедентов

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdD}(\neg(b = c) \ \& \ \neg(b = D) \ \& \ a \in \text{окружность}(bc) \ \& \ d \in \text{окружность}(bc) \ \& \ \text{биссектриса}(dbaD) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow l(dD) = l(aD))$$

из теоремы

$$\forall_{aABC}(\neg(A = B) \ \& \ a \in \text{окружность}(AB) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow l(AC) = l(aA))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{биссектриса}(BACD) \ \& \ l(AB) = l(AC) \rightarrow l(BD) = l(CD))$$

Характеристика исходной теоремы - "опрнапр(окружность)".

Переменной x_8 присваивается логический символ, на который указывает характеристика "опрнапр". В нашем примере - "окружность". Переменной x_{10} присваивается список заголовков неоднобуквенных подтермов консеквента. В нашем примере - "равно", "расстояние". Просматриваются заголовки неоднобуквенных подтермов антецедентов теоремы. Если появление такого заголовка в посылках задачи означает выполнение некоторых дополнительных ограничений общего характера (например, указание на планиметрическую ситуацию), то логический символ, используемых в задачах в качестве фиктивной посылки и указывающий на эти ограничения, заносится в накопитель x_{11} . В нашем примере двуместный символ "окружность" может появляться только в планиметрических задачах, так как в трехмерном пространстве для задания окружности нужно доопределить еще один элемент, фиксирующий плоскость. Поэтому x_{11} состоит из пары символов "планиметрия".

В списке x10 находится наиболее "приоритетный" в смысле иерархии разделов символ, и составляется список x12 всех его подразделов, упорядоченных по убыванию и завершаемый данным символом. В нашем примере x12 - пара (геометрия, расстояние). Переменной x13 присваивается предпоследний элемент списка x12. Переменной x14 присваивается заголовок консеквента исходной теоремы. В нашем примере - символ "равно". Просматриваются теоремы x18 раздела x13, имеющие не более 5 переменных, элементарный консеквент и характеристику с заголовком из списка "спуск", "вывод", "числзнач", "числоценка", "равны", "отношение". В нашем примере x18 - указанная выше дополнительная теорема. В ее списке антецедентов x19 находится антецедент x20 с заголовком x14. В нашем примере - " $l(AB) = l(AC)$ ". Проверяется, что этот антецедент содержит все символы списка x10 и не имеет связанных переменных. Переменной x21 присваивается результат переобозначения переменных исходной теоремы на переменные, не входящие в список x18. В нашем примере получаем:

$$\forall_{abcd}(\neg(b = c) \ \& \ a \in \text{окружность}(bc) \ \& \ d \in \text{окружность}(bc) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \rightarrow l(bd) = l(ab))$$

Переменной x22 присваивается консеквент теоремы x21, переменной x23 - список ее антецедентов. Переменной x24 присваивается список переменных термов x20 и x22. Определяется подстановка S вместо переменных x24, унифицирующая термы x20 и x22.

Дополнительно контролируется, что при наличии символа "планиметрия" в списке x11 теорема x18 не является стереометрической: в ней нет понятий, относящихся к разделу "тела", и не рассматриваются различные плоскости.

Переменной x26 присваивается список результатов применения подстановки S к отличным от x20 элементам списка x19, а также к элементам списка x23. Переменной x27 присваивается результат применения подстановки S к консеквенту теоремы x18. Список x26 пополняется утверждениями, необходимыми для сопровождения по о.д.з. его утверждений и утверждения x27. Затем создается импликация с антецедентами x26 и консеквентом x27. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому разрешается использовать для упрощений уже имеющиеся в списке вывода теоремы. Результат регистрируется в списке вывода.

3.67 Характеристика "отношение"

Характеристикой "отношение" снабжаются теоремы, выводящие отличный от равенства двуместный предикат без новых объектов.

Логические следствия теоремы

1. Вывод утверждения существования путем усмотрения реализуемости группы антецедентов, содержащих заданный параметр.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCEFG}(\neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AC) = \text{прямая}(BC)) \ \& \\ l(AF) = l(CF) \ \& \ l(BE) = l(CE) \ \& \ E \in \text{прямая}(BC) \ \& \ F \in \text{прямая}(AC) \ \& \\ G \in \text{отрезок}(AE) \ \& \ G \in \text{отрезок}(BF) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \&$$

E – точка & F – точка & G – точка $\rightarrow \exists_D(l(AD) = l(BD) \& D \in \text{отрезок}(AB) \& G \in \text{отрезок}(CD) \& D \text{ – точка})$

из теоремы

$\forall_{ABCDEFG}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC)) \& l(AD) = l(BD) \& l(AF) = l(CF) \& l(BE) = l(CE) \& D \in \text{прямая}(AB) \& E \in \text{прямая}(BC) \& F \in \text{прямая}(AC) \& G \in \text{отрезок}(AE) \& G \in \text{отрезок}(BF) \& A \text{ – точка} \& B \text{ – точка} \& C \text{ – точка} \& D \text{ – точка} \& E \text{ – точка} \& F \text{ – точка} \& G \text{ – точка} \rightarrow G \in \text{отрезок}(CD))$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 – консеквент, переменной x_{10} – список параметров консеквента. Выбирается переменная x_{11} списка x_{10} . В нашем примере – D . Переменной x_{12} присваивается список утверждений набора x_8 , содержащих эту переменную. Проверяется, что он имеет не более трех элементов. В нашем примере x_{12} состоит из утверждений " $l(AD) = l(BD)$ ", " $D \in \text{прямая}(AB)$ ", " D – точка". Переменной x_{13} присваивается остаток набора x_8 . Проверяется, что он не короче списка x_{12} .

При помощи задачи на доказательство проверяется, что результат навешивания квантора существования по переменной x_{11} на конъюнкцию утверждений x_{12} является следствием утверждений x_{13} .

Проверяется отсутствие подстановки вместо переменной x_{11} , переводящей утверждения x_{12} , к которым добавлено утверждение x_9 , в подмножество утверждений x_{13} . Затем переменной x_{15} присваивается результат навешивания квантора существования по x_{11} на конъюнкцию утверждений списка x_{12} и утверждения x_9 . Создается импликация с антецедентами x_{13} и консеквентом x_{15} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка исключить переменную после усмотрения реализуемости группы содержащих ее антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC)) \& D \in \text{прямая}(AB) \& F \in \text{прямая}(AC) \& G \in \text{прямая}(BF) \& G \in \text{прямая}(CD) \& \text{биссектриса}(ABCF) \& \text{биссектриса}(ACBD) \& A \text{ – точка} \& B \text{ – точка} \& C \text{ – точка} \& D \text{ – точка} \& F \text{ – точка} \& G \text{ – точка} \rightarrow \text{биссектриса}(BACG))$

из теоремы

$\forall_{ABCDEFG}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC)) \& D \in \text{прямая}(AB) \& E \in \text{прямая}(BC) \& F \in \text{прямая}(AC) \& G \in \text{прямая}(BF) \& G \in \text{прямая}(CD) \& \text{биссектриса}(ABCF) \& \text{биссектриса}(ACBD) \& \text{биссектриса}(BACE) \& A \text{ – точка} \& B \text{ – точка} \& C \text{ – точка} \& D \text{ – точка} \& E \text{ – точка} \& F \text{ – точка} \& G \text{ – точка} \rightarrow G \in \text{отрезок}(AE))$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Переменной x_{10} присваивается список параметров консеквента. Выбирается переменная x_{11} списка x_{10} . В нашем примере - E . Переменной x_{12} присваивается список утверждений набора x_8 , содержащих эту переменную. Проверяется, что он имеет не более трех элементов. В нашем примере x_{12} состоит из утверждений " $E \in \text{прямая}(BC)$ ", " $\text{биссектриса}(BACE)$ ", " $E - \text{точка}$ ". Переменной x_{13} присваивается остаток набора x_8 . Проверяется, что он не короче списка x_{12} .

При помощи задачи на доказательство проверяется, что результат навешивания квантора существования по переменной x_{11} на конъюнкцию утверждений x_{12} является следствием утверждений x_{13} .

Дальше начинаются отличия. Переменной x_{15} присваивается результат добавления утверждения x_9 к списку x_8 . Решается задача на исследование x_{16} с посылками x_{15} и целями "исключ x_{11} ", "известно", "антецеденты", "новпосылка", "неизвестные X ", где X - все параметры утверждений x_{15} .

Переменной x_{17} присваивается список x_{13} . Для каждого комментарий (новпосылка H) к посылкам задачи x_{16} предпринимается добавление утверждения H к списку x_{17} . В нашем примере не добавляется ничего. В списке посылок задачи x_{16} находится утверждение x_{18} , не входящее в список x_8 , не имеющее комментария "следствие", не содержащее переменной x_{11} , но выведенное при использовании утверждения, содержащего x_{11} . В нашем примере x_{18} - " $\text{биссектриса}(BACG)$ ". Это утверждение возникло при переходе от посылки " $\text{биссектриса}(BACE)$ " к альтернативному обозначению и поэтому не имело комментария "следствие", указывающего на добавление новой посылки. Создается импликация с антецедентами x_{17} и консеквентом x_{18} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Усмотрение эквивалентности консеквента антецеденту из соображений симметрии.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefklm} (\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ \neg(k^2 + l^2 + m^2 = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \ \& \ l - \text{число} \ \& \ m - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (k, l, m)) \rightarrow \\ \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d, e, f)) \leftrightarrow \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (k, l, m)))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdefklm} (\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ \neg(k^2 + l^2 + m^2 = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \ \& \ l - \text{число} \ \& \ m - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d, e, f)) \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (k, l, m)) \rightarrow \\ \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (k, l, m)))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - вхождение консеквента. Переменной x_{10} присваивается заголовок консеквента. В списке x_8 находится утверждение x_{11} с заголовком x_{10} . В нашем примере - " $\text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d, e, f))$ ". Переменной x_{12} присваивается список корневых операндов утверждения x_{11} . Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x_{13}

присваивается список корневых операндов консеквента. Переменной x14 присваивается вхождение в список x12 некоторого терма x15, имеющего вхождение x16 в список x13. Если символ x10 некоммутативен, то проверяется, что номера вхождений x14 и x16 равны. В нашем примере x15 - "(a, b, c)". Переменной x19 присваивается элемент списка x12, вхождение которого отлично от x14, а переменной x20 - элемент списка x13, вхождение которого отлично от x16. В нашем примере x19 - "(d, e, f)", x20 - "(k, l, m)". Проверяется, что выражения x19, x20 элементарны и имеют равные длины. Переменной x21 присваивается список параметров пары x19, x20. Находится подстановка S вместо переменных x21, переводящая терм "набор(x19 x20)" в терм "набор(x20 x19)". Проверяется, что эта подстановка переобозначает переменные, не отождествляя их. Переменной x23 присваивается результат удаления из списка x8 утверждения x11. Переменной x24 присваивается результат применения к утверждениям x23 подстановки S и обработки их оператором "станд". Переменной x25 присваивается список результатов применения оператора "станд" к утверждениям x23. Проверяется, что каждое утверждение списка x24, отсутствующее в списке x25, является следствием утверждений x25. Затем создается импликация с антецедентами x23, консеквентом которой служит эквивалентность утверждения x11 подтерму x9. Она регистрируется в списке вывода.

4. Усмотрение эквивалентности консеквента имеющему те же параметры антецеденту с помощью задачи на доказательство.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(a = d) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ a \in \text{окружность}(bc) \ \& \ d \in \text{окружность}(bc) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \rightarrow d \in \text{прямая}(ab) \leftrightarrow b \in \text{отрезок}(ad))$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(a = d) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ a \in \text{окружность}(bc) \ \& \ d \in \text{прямая}(ab) \ \& \ d \in \text{окружность}(bc) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \rightarrow b \in \text{отрезок}(ad))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x10 - консеквент. Проверяется отсутствие среди антецедентов равенств и неравенств. Переменной x11 присваивается список параметров терма x10. Определяется список x12 номеров существенных антецедентов теоремы В нашем примере - 1,3,4,5. Выбирается номер x13 из списка x12. В нашем примере - 4. Переменной x14 присваивается антецедент с данным номером. В нашем примере - "d ∈ прямая(ab)". Проверяется, что заголовок его отличен от символа "не", а список параметров равен x11. Переменной x15 присваивается результат замены утверждения x14 в списке x8 на утверждение x10. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x14 - следствие утверждений x15. Создается импликация, антецеденты которой суть отличные от x14 антецеденты исходной теоремы, а консеквент - эквивалентность утверждений x14 и x10. Она регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительной теоремы для формирования гипотезы

1. Поиск контекста, в котором связываемый отношением объект однозначно определяется по данному отношению.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{efABCDE}(\neg(e = f) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ E \in \text{прямая}(ef) \ \& \\ E \in \text{прямая}(CD) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \\ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ \text{прямая}(ef) \perp \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \rightarrow \\ A \in \text{прямая}(ef))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ E \in \text{прямая}(CD) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \rightarrow \text{прямая}(AE) \perp \text{прямая}(CD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDEFGPQR}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ F - \text{точка} \ \& \ P - \text{точка} \ \& \ Q - \text{точка} \ \& \ R - \text{точка} \ \& \ \neg(R \in \text{прямая}(PQ)) \ \& \\ \neg(P = Q) \ \& \ \neg(E = F) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \\ \& \ \text{прямая}(EF) \perp \text{прямая}(CD) \ \& \ G \in \text{прямая}(AB) \ \& \ G \in \text{прямая}(EF) \ \& \\ E \in \text{плоскость}(PQR) \ \& \ F \in \text{плоскость}(PQR) \ \& \ D \in \text{плоскость}(PQR) \ \& \\ C \in \text{плоскость}(PQR) \ \& \ A \in \text{плоскость}(PQR) \ \& \ B \in \text{плоскость}(PQR) \rightarrow \\ \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(EF))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - вхождение консеквента. Вводится индикатор x10 дополнительных ограничений, накладываемых встречающимися в антецедентах логическими символами. Изначально он устанавливается на 0, а затем корректируется с помощью справочника "посылки". В нашем примере x10 переписывается значение "планиметрия".

Переменной x11 присваивается вхождение корневого операнда консеквента, переменной x12 - символ по вхождению x11. В нашем примере x11 - вхождение выражения "прямая(AE)", x12 - символ "прямая". Справочник поиска теорем "равны" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x15 присваивается результат переобозначения в ней переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x15 имеет вид:

$$\forall_{abcdefgPQR}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \\ f - \text{точка} \ \& \ P - \text{точка} \ \& \ Q - \text{точка} \ \& \ R - \text{точка} \ \& \ \neg(R \in \text{прямая}(PQ)) \ \& \\ \neg(P = Q) \ \& \ \neg(e = f) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(cd) \\ \& \ \text{прямая}(ef) \perp \text{прямая}(cd) \ \& \ g \in \text{прямая}(ab) \ \& \ g \in \text{прямая}(ef) \ \& \\ e \in \text{плоскость}(PQR) \ \& \ f \in \text{плоскость}(PQR) \ \& \ d \in \text{плоскость}(PQR) \ \& \\ c \in \text{плоскость}(PQR) \ \& \ a \in \text{плоскость}(PQR) \ \& \ b \in \text{плоскость}(PQR) \rightarrow \\ \text{прямая}(ab) = \text{прямая}(ef))$$

Если x10 отлично от 0, то к антецедентам теоремы x15 добавляется символ x10, после чего эти антецеденты обрабатываются оператором "нормантецеденты" относительно параметров консеквента, и далее x10 из антецедентов исключается. В нашем примере тогда x15 приобретает следующий вид:

$$\forall_{abcdefgPQR}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \\ f - \text{точка} \ \& \ P - \text{точка} \ \& \ Q - \text{точка} \ \& \ R - \text{точка} \ \& \ \neg(R \in \text{прямая}(PQ)) \ \& \\ \neg(P = Q) \ \& \ \neg(e = f) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(cd) \\ \& \ \text{прямая}(cd) \perp \text{прямая}(ef) \ \& \ g \in \text{прямая}(ab) \ \& \ g \in \text{прямая}(ef) \rightarrow \\ \text{прямая}(ab) = \text{прямая}(ef))$$

Переменной x16 присваивается список антецедентов теоремы x15. Иницируется нулем счетчик x17 попыток рассмотрения вариантов унификации. В списке x16 выбирается утверждение x18, заголовком которого равен заголовку консеквента исходной теоремы. В нашем примере x18 имеет вид "прямая(ab) \perp прямая(cd)". Переменной x19 присваивается входение консеквента теоремы x15, переменной x20 - первый операнд входения x19. В нашем примере он имеет вид "прямая(ab)". Переменной x21 присваивается список параметров термов x18 и x20. Определяется подстановка S вместо переменных x21, унифицирующая одновременно x18 с подтермом x9 и x20 с подтермом x11. Сразу после этого счетчик x17 увеличивается на единицу и проверяется, что он не превосходит 5. В нашем примере x17 равно 2.

Переменной x23 присваивается список антецедентов теоремы x15, содержащих подтерм x20. В нашем примере он состоит из утверждений "прямая(ab) \perp прямая(cd)", " $g \in \text{прямая}(ab)$ ". Переменной x24 присваивается список обработанных оператором "станд" антецедентов теоремы x15, содержащих второй операнд консеквента x19, т.е. в нашем примере терм "прямая(ef)". В нашем примере x24 состоит из утверждений "прямая(cd) \perp прямая(ef)", " $g \in \text{прямая}(ef)$ ". Проверяется, что списки x23 и x24 не пересекаются и имеют равные длины. Переменной x25 присваивается список обработанных оператором "станд" результатов замены подтермов x20 в утверждениях списка x23 на второй операнд консеквента x19. В нашем примере x25 после этого оказывается совпадающим со списком x24.

Проверяется, что списки x25 и x24 состоят из одних и тех же элементов. Переменной x26 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям x23. В нашем примере этот список состоит из утверждений "прямая(AE) \perp прямая(DC)", " $g \in \text{прямая}(AE)$ ".

Вводится пустой накопитель x27, в котором будут регистрироваться дополнения к унифицирующей подстановке S .

Далее начинается попытка заполнения списка x27. Переменной x28 присваивается список параметров утверждений x26, отсутствующих в исходной теореме. В нашем примере - единственная переменная g . Проверяется, что список x28 непуст. Переменной x29 присваивается результат добавления к списку x8 антецедентов исходной теоремы ее консеквента. Вводится пустой накопитель x30 альтернативных ответов решаемой ниже задачи на описание.

Далее реализуется внутренний цикл пополнения списка x27. В начале этого цикла переменной x31 присваивается результат добавления к списку x26 отрицаний утверждений списка x30. Решается задача на описание x32, посылками которой служат утверждения x29, а условиями - утверждения x31. Цели задачи - "полный", "пример", "прямойответ", "неизвестные x28". Переменной x33

присваивается ответ задачи. В нашем примере он имеет вид " $g = A$ ". Проверяется, что данный ответ отличен от символа "отказ", и он регистрируется в накопителе $x30$. Переменной $x34$ присваивается список конъюнктивных членов утверждения $x33$. Проверяется, что все они имеют вид равенств с переменной набора $x28$ в левой части. Проверяется, что длины списков $x28$ и $x34$ равны. Переменной $x35$ присваивается список правых частей равенств $x34$. В нашем примере - единственный терм A . Пара $(x28, x35)$ регистрируется в накопителе $x27$, и откат к повторению внутреннего цикла.

По окончании внутреннего цикла проверяется, что список $x27$ непуст. Если он пуст, то откат к продолжению рассмотрения вариантов унификации. Иначе - завершение заполнения накопителя $x27$. В нашем примере $x27$ будет состоять из двух пар (g, A) и (g, E) . При этом все переменные, начиная с $x28$, окажутся не определены.

Рассматриваются подстановки S' , получаемые из подстановки S доопределением на переменных первого элемента какой-либо пары из $x27$ термами второго элемента этой пары. В нашем примере берется пара (g, E) . Переменной $x32$ присваивается список результатов применения подстановки S' утверждениям списка $x16$, не входящим в список $x23$. Переменной $x33$ присваивается объединение списков $x8$ и $x32$. Переменной $x34$ присваивается результат применения подстановки S' к второму операнду вхождения $x19$. Затем создается импликация с антецедентами $x33$, консеквентом которой служит равенство выражения $x34$ подтерму $x11$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода после проверки того, что ее консеквент не является равенством.

Переформулировка теоремы с помощью перехода к координатам

1. Попытка использования координат для исключения промежуточного объекта.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcghqABCDE} (\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \text{коорд}(E, q) = (g, h) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), q) = \text{set}_{ij}(c + ai + bj = 0 \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число}) \ \& \ E \in \text{прямая}(CD) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \ \& \ \text{прямкоорд}(q) \rightarrow \exists_{ij}(ah + bi - aj - bg = 0 \ \& \ \text{коорд}(A, q) = (i, j) \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число}))$$

из теоремы

$$\forall_{efABCDE} (\neg(e = f) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ E \in \text{прямая}(ef) \ \& \ E \in \text{прямая}(CD) \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(ef) \perp \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \rightarrow A \in \text{прямая}(ef))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcdpqABCDEK} (a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = D) \ \&$$

коорд(прямая(AD), K) = $\text{set}_{xy}(ax + by + c = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \&$
 прямая(AD) \perp прямая(BC) $\& \ E \in$ прямая(BC) $\&$ коорд(E , K) = $(p, q) \rightarrow$
 коорд(прямая(BC), K) = $\text{set}_{xy}(bx - ay + aq - bp = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число})$)

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - вхождение консеквента. Вводится индикатор x_{10} дополнительных ограничений, накладываемых встречающимися в антецедентах логическими символами. Изначально он устанавливается на 0, а затем корректируется с помощью справочника "посылки". В нашем примере x_{10} переприсваивается значение "планиметрия".

Если по вхождению x_9 расположен символ "не", то переменной x_{11} присваивается вхождение операнда этого вхождения, иначе - само вхождение x_9 . Проверяется, что по вхождению x_{11} расположен символ "принадлежит". Переменной x_{12} присваивается второй операнд вхождения x_{11} . В нашем примере - терм "прямая(ef)". Переменной x_{13} присваивается список антецедентов, содержащих подтерм x_{12} . В нашем примере он состоит из утверждений " $E \in$ прямая(ef)", "прямая(ef) \perp прямая(CD)". Проверяется, что список x_{13} непуст. Переменной x_{14} присваивается имеющий максимальную оценку сложности заголовок утверждений списка x_{13} . В нашем примере - "перпендикулярно".

Справочник поиска теорем "коорд" определяет по x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{18} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{18} имеет вид:

$$\forall_{abcdglnmnpqr} (a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ l - \text{точка} \ \& \ m - \text{точка} \ \& \\ n - \text{точка} \ \& \ p - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(r) \ \& \ \neg(m = n) \ \& \ \neg(l = p) \ \& \\ \text{коорд}(\text{прямая}(lp), r) = \text{set}_{jk}(aj + bk + c = 0 \ \& \ j - \text{число} \ \& \ k - \text{число}) \ \& \\ \text{прямая}(lp) \perp \text{прямая}(mn) \ \& \ q \in \text{прямая}(mn) \ \& \ \text{коорд}(q, r) = (d, g) \rightarrow \\ \text{коорд}(\text{прямая}(mn), r) = \text{set}_{hi}(bx - ai + ag - bd = 0 \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число}))$$

Переменной x_{19} присваивается вхождение консеквента теоремы x_{18} . Переменной x_{21} присваивается вхождение того операнда вхождения x_{19} , который имеет заголовок "класс", переменной x_{20} - вхождение противоположного операнда. Переменной x_{22} присваивается первый операнд вхождения x_{20} . В нашем примере - терм "прямая(mn)". Переменной x_{23} присваивается список антецедентов теоремы x_{18} , переменной x_{24} - список антецедентов, имеющих вхождение подтерма x_{22} . В нашем примере x_{24} состоит из утверждений " $q \in$ прямая(mn)", "прямая(lp) \perp прямая(mn)".

Проверяется, что длины наборов x_{13} и x_{24} равны. Переменной x_{25} присваивается список параметров утверждений x_{24} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{25} , унифицирующая конъюнкцию утверждений x_{13} с конъюнкцией утверждений x_{24} и одновременно унифицирующая термы x_{12} , x_{22} .

Переменной x_{28} присваивается набор результатов применения подстановки S к не вошедшим в список x_{24} утверждениям набора x_{23} . Переменной x_{29} присваивается список результатов обработки оператором "станд" элементов набора x_{28} , имеющих параметр терма x_{12} . В нашем примере x_{29} состоит из утверждений " $e - \text{точка}$ ", " $f - \text{точка}$ ", " $\neg(e = f)$ ". Переменной x_{30} присваивается список результатов обработки оператором "станд" не входящих в список x_{13}

элементов списка x_8 , имеющих параметр терма x_{12} . Проверяется, что список x_{30} включается в список x_{29} . В нашем примере он состоит из тех же элементов, что и x_{29} .

Переменной x_{31} присваивается список всех утверждений наборов x_8 и x_{28} , параметры которых не пересекаются с параметрами терма x_{12} . Переменной x_{32} присваивается терм вида " $P(t_1, t_2) \in t_3$ ", где P - символ по вхождению x_{20} , t_1 - первый операнд вхождения x_{11} , t_2 - второй операнд вхождения x_{20} , t_3 - подтерм x_{21} . В нашем примере x_{32} имеет вид "коорд(A, r) \in set_{hi}($bh - ai + ag - bd = 0$ & h - число & i - число)". Если по вхождению x_9 располагался символ "не", то переменной x_{33} присваивается отрицание утверждения x_{32} , иначе - само это утверждение. Создается импликация с антецедентом x_{31} и консеквентом x_{33} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Рассмотрение вариантов пропорциональности пар числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ E \in \text{прямая}(AD) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, D, E) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ al(AC) = bl(AB) \ \& \ al(AE) = bl(AD) \ \& \ (\neg(a = 0) \ \vee \ \neg(b = 0)) \ \rightarrow \ \text{прямая}(BD) \ \parallel \ \text{прямая}(CE))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ E \in \text{прямая}(AD) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, D, E) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \ \& \ l(AE)l(AB) = l(AD)l(AC) \ \rightarrow \ \text{прямая}(BD) \ \parallel \ \text{прямая}(CE))$$

Данное преобразование теоремы ориентировано на прием, идентифицирующий соотношения пропорциональности с равенствами в посылках задачи.

Переменной x_8 присваивается список антецедентов. Переменной x_9 присваивается характеристика теоремы, имеющая заголовок "смпропорц". В нашем примере - "смпропорц(четырнадцать $l(AB) \ l(AC)$)". Переменной x_{10} присваивается первый операнд этой характеристики - номер антецедента, представляющего собой соотношение пропорциональности для указанных в характеристике числовых атомов. Переменной x_{11} присваивается пара этих числовых атомов. В нашем примере - $l(AB), l(AC)$. Переменной x_{12} присваивается антецедент с номером x_{10} . В нашем примере - $l(AE)l(AB) = l(AD)l(AC)$. Проверяется, что x_{12} - равенство, в каждой из частей которого расположено произведение. Переменной x_{13} присваивается набор сомножителей левой части, x_{14} - правой. Переменной x_{15} присваивается пересечение списков x_{13} и x_{11} , переменной x_{16} - пересечение список x_{14} и x_{11} . Проверяется, что наборы x_{15} и x_{16} одноэлементны. Переменной x_{17} присваивается пара переменных, не входящих в исходную теорему. В нашем примере - a, b . Переменной x_{18} присваивается

равенство произведения первой переменной списка x17 и первого выражения списка x16 произведению второй переменной списка x17 и первого выражения списка x15. В нашем примере - " $al(AC) = bl(AB)$ ". Переменной x19 присваивается равенство произведения первой переменной списка x17 и не вошедших в список x11 выражений списка x13 произведению второй переменной списка x17 и не вошедших в список x11 выражений списка x14. В нашем примере - " $al(AE) = bl(AD)$ ". Создается импликация, антецеденты которой суть отличные от x12 элементы списка x8 и утверждения " X - число", " Y - число", x18, x19, " $\neg(X = 0) \vee \neg(Y = 0)$ ", а консеквент тот же, что у исходной теоремы. Здесь X, Y - переменные списка x17. Эта импликация регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "отношение".

- Использование аддитивности числовых атомов для варьирования соотношения пропорциональности в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \& \neg(A = D) \& \neg(B = D) \& \neg(C = E) \& l(AB)l(DE) = l(AD)l(BC) \& B \in \text{отрезок}(AC) \& D \in \text{отрезок}(AE) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(BD) \parallel \text{прямая}(CE))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \neg(C = E) \& \neg(B = D) \& \neg(A = B) \& \neg(A = D) \& E \in \text{прямая}(AD) \& C \in \text{прямая}(AB) \& \text{точкалуча}(A, D, E) \& \text{точкалуча}(A, B, C) \& l(AE)l(AB) = l(AD)l(AC) \rightarrow \text{прямая}(BD) \parallel \text{прямая}(CE))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& B \in \text{отрезок}(AC) \rightarrow l(AC) = l(AB) + l(BC))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. В этом списке находится равенство x9 двух произведений. Переменной x10 присваивается список сомножителей левой части равенства, переменной x11 - правой. Проверяется, что оба эти списка двухэлементные. Проверяется, что все эти сомножители имеют один и тот же заголовок x12. В нашем примере x9 имеет вид " $l(AE)l(AB) = l(AD)l(AC)$ ", x12 - символ "расстояние". Проверяется, что все выражения списков x10 и x11 - числовые атомы.

Справочник поиска теорем "сумма" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x10 присваивается первый терм списка x10. Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них x17, x18 - первый и второй элементы пары x11, во втором x17, x18 - второй и первый элементы этой пары. Переменной x19 присваивается второй элемент пары x10. В нашем примере x16 - $l(AE)$, x17 - $l(AC)$, x18 - $l(AD)$, x19 - $l(AB)$.

Переменной x20 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x20 имеет вид:

$$\forall_{abc}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ b \in \text{отрезок}(ac) \rightarrow \\ l(ac) = l(ab) + l(bc))$$

Переменной x_{21} присваивается вхождение консеквента теоремы x_{20} , переменной x_{23} - вхождение того операнда вхождения x_{21} , который имеет заголовок "плюс", переменной x_{22} - вхождение другого операнда. Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{24} присваивается подтерм x_{22} , а переменной x_{25} - второе слагаемое суммы x_{23} ; во втором - наоборот, переменной x_{24} присваивается второе слагаемое суммы x_{23} , а переменной x_{25} - подтерм x_{22} . Переменной x_{26} присваивается первое слагаемое суммы x_{23} . В нашем примере $x_{24} - l(ac)$, $x_{25} - l(bc)$, $x_{26} - l(ab)$. Переменной x_{27} присваивается список параметров термов x_{24} и x_{26} . Проверяется, что этот список включает все переменные теоремы x_{20} .

Находится подстановка S_1 вместо переменных x_{27} , унифицирующая термы x_{24} и x_{16} , а одновременно также термы x_{26} и x_{18} . Находится также подстановка S_2 вместо переменных x_{27} , унифицирующая термы x_{24} и x_{17} , а одновременно также термы x_{26} и x_{19} . Переменной x_{31} присваивается список результатов применения подстановки S_1 к антецедентам теоремы x_{20} , переменной x_{32} - список результатов применения подстановки S_2 к этим антецедентам. Переменной x_{33} присваивается объединение отличных от x_9 утверждения списка x_8 со списками x_{31} и x_{32} . Переменной x_{34} присваивается результат применения подстановки S_1 к выражению x_{25} , а переменной x_{35} - результат применения к этому выражению подстановки S_2 . Если список x_{33} непуст, то проверяется, что консеквент исходной теоремы не является следствием утверждений x_{33} . Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{36} присваивается результат добавления к утверждениям x_{33} равенства произведения x_{34} и x_{19} произведению x_{35} и x_{18} , во втором - результат добавления к x_{33} равенства произведения x_{34} и x_{17} произведению x_{35} и x_{16} . Затем создается импликация с антецедентами x_{36} , консеквент которой такой же, как у исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Прием для контроля противоречивых подслучаев.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdD}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \\ \neg(a = d) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ a \in \text{окружность}(bc) \ \& \ d \in \text{окружность}(bc) \ \& \\ \neg(a = D) \ \& \ \neg(d = D) \ \& \ D \in \text{прямая}(ad) \ \& \ D \in \text{окружность}(bc) \rightarrow \text{ложь})$$

из теоремы

$$\forall_{abcdD}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \\ \neg(a = d) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ a \in \text{окружность}(bc) \ \& \ d \in \text{окружность}(bc) \ \& \\ \neg(a = D) \ \& \ \neg(d = D) \ \& \ D \in \text{прямая}(ad) \rightarrow \neg(D \in \text{окружность}(bc)))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Проверяется, что его заголовок - символ "не", причем операнд этого отрицания не имеет заголовка "равно". Тогда создается импликация, антецеденты которой получены добавлением к антецедентам исходной теоремы отрицания ее консеквента, а консеквентом служит символ "ложь". Она регистрируется в списке вывода.

Обобщение теоремы

1. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abBCD}(\neg(a = B) \& \neg(C = D) \& \neg(\text{прямая}(bB) = \text{прямая}(CD)) \& a \in \text{отрезок}(bB) \& B \in \text{прямая}(CD) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(ab)))$$

из теоремы

$$\forall_{abBCD}(\neg(a = b) \& \neg(a = B) \& \neg(C = D) \& \neg(\text{прямая}(bB) = \text{прямая}(CD)) \& a \in \text{отрезок}(bB) \& B \in \text{прямая}(CD) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(ab)))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - список утверждений, необходимых для сопровождения консеквента по о.д.з. В списке x_8 выбирается не входящее в x_9 утверждение x_{10} , представляющее собой отрицание равенства некоторой переменной x_{13} подтерму x_{14} , не содержащему этой переменной. В нашем примере x_{10} имеет вид " $\neg(a = b)$ ", x_{13} - переменная a , x_{14} - терм b . Переменной x_{15} присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. отличных от x_{10} утверждений списка x_8 . Проверяется, что x_{10} не входит в x_{15} . При помощи задачи на доказательство проверяется, что консеквент теоремы является следствием списка утверждений, полученных заменой в списке x_8 утверждения x_{10} его отрицанием, т.е. равенством x_{13} и x_{14} . Затем создается импликация, полученная из исходной удалением антецедента x_{10} . Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы, помечаемой в этом списке меткой "исключение".

2. Попытка отбросить избыточное отрицание в антецедентах.

Прием является обобщением предыдущего, но срабатывает на более высоком уровне. В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abBCDE}(\neg(a = b) \& \neg(a = D) \& \neg(b = B) \& \neg(B = D) \& \neg(C = E) \& l(aD)l(BC) = l(bB)l(DE) \& C \in \text{прямая}(bB) \& E \in \text{прямая}(aD) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(BD) \& \text{однасторона}(B, D, \text{прямая}(CE)) \& \text{однасторона}(C, E, \text{прямая}(BD)) \rightarrow \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(CE))$$

из теоремы

$$\forall_{abBCDE}(\neg(a = b) \& \neg(a = D) \& \neg(b = B) \& \neg(B = D) \& \neg(C = E) \& \neg(\text{прямая}(ab) = \text{прямая}(aD)) \& l(aD)l(BC) = l(bB)l(DE) \& C \in \text{прямая}(bB) \& E \in \text{прямая}(aD) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(BD) \& \text{однасторона}(B, D, \text{прямая}(CE)) \& \text{однасторона}(C, E, \text{прямая}(BD)) \rightarrow \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(CE))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - список утверждений, необходимых для сопровождения консеквента по о.д.з. В списке x_8 выбирается не входящее в x_9 утверждение x_{10} , представляющее собой

отрицание некоторого утверждения U . В нашем примере утверждение x_{10} имеет вид " $\neg(\text{прямая}(ab) = \text{прямая}(aD))$ ". Переменной x_{11} присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. отличных от x_{10} утверждений списка x_8 . Проверяется, что x_{10} не входит в x_{11} . Переменной x_{12} присваивается результат замены в списке x_8 утверждения x_{10} на утверждение U . При помощи задачи на доказательство устанавливается, что консеквент теоремы является следствием утверждений x_{12} . Затем создается импликация, полученная из исходной удалением антецедента x_{10} . Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы, помечаемой в этом списке меткой "исключение".

3. Попытка ослабить антецедент и, возможно, консеквент, учитывая конечное число дополнительных точек.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bABCD}(\neg(b = A) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ 0 \leq -\angle(bAC) + \pi/2 \ \& \\ 0 < -\angle(bCA) + \pi/2 \ \& \ B \in \text{отрезок}(bC) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \\ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(BD) \rightarrow \\ D \in \text{отрезок}(AC))$$

из теоремы

$$\forall_{bABCD}(\neg(b = A) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ 0 < -\angle(bAC) + \pi/2 \ \& \\ 0 < -\angle(bCA) + \pi/2 \ \& \ B \in \text{отрезок}(bC) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \\ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(BD) \rightarrow \\ D \in \text{интервал}(AC))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - список утверждений, необходимых для сопровождения консеквента по о.д.з. Переменной x_{12} присваивается некоторый не входящий в список x_9 существенный антецедент теоремы. В нашем примере - " $0 < -\angle(bAC) + \pi/2$ ". Переменной x_{14} присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. отличных от x_{12} утверждений списка x_8 . Проверяется, что x_{12} не входит в x_{14} . Синтезатор "конечнослабл" определяет элементарное утверждение x_{15} , возникающее из элементарного утверждения x_{12} добавлением к области истинности конечного числа точек. Переменной x_{16} присваивается дизъюнкция равенств, определяющих дополнительные точки истинности. В нашем примере x_{15} имеет вид " $0 \leq -\angle(bAC) + \pi/2$ ", x_{16} - вид " $0 = -\angle(bAC) + \pi/2$ ".

Переменной x_{18} присваивается консеквент теоремы, переменной x_{19} - результат замены в списке x_8 утверждения x_{12} на x_{16} . В нашем примере x_{18} - " $D \in \text{интервал}(AC)$ ".

Далее последовательно рассматриваются два случая:

- (а) Проверяется, что утверждение x_{15} отлично от x_{18} . При помощи задачи на доказательство проверяется, что x_{18} - следствие утверждений x_{19} . Тогда создается импликация, полученная из исходной заменой антецедента x_{12} на x_{15} . Она регистрируется в списке вывода, и прием завершает работу (второй случай не рассматривается).

- (b) Оператор "конечнослабл" определяет по x18 ослабленную версию x20 и дизъюнкцию равенств x21. В нашем примере утверждение x20 имеет вид " $D \in \text{отрезок}(AC)$ ", x21 - вид " $D = A \vee D = C$ ". Проверяется, что x15 отличается от x20. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x20 - следствие утверждений x19. Тогда создается импликация, полученная из исходной заменой антецедента x12 на x15, а консеквента - на x20. Она регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Попытка варьирования теоремы путем дополнительного построения, позволяющего исключить вспомогательную переменную антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{abCDE}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = D) \ \& \ \neg(b = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \\ & \neg(C = E) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(\text{прямая}(ab) = \text{прямая}(aD)) \ \& \ \neg(\text{прямая}(aD) \parallel \\ & \text{прямая}(bB)) \ \& \ l(aD)l(BC) = l(bB)l(DE) \ \& \ C \in \text{прямая}(bB) \ \& \ E \in \text{прямая}(aD) \\ & \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \\ & E - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(BD) \ \& \ \text{однасторона}(B, D, \text{прямая}(CE)) \ \& \\ & \ \& \ \text{однасторона}(C, E, \text{прямая}(BD)) \rightarrow \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(CE)) \end{aligned}$$

из теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{ABCDE}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ l(AB)l(DE) = \\ & l(AD)l(BC) \ \& \ A \in \text{прямая}(BC) \ \& \ A \in \text{прямая}(DE) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \\ & B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{однасторона}(B, D, \text{прямая}(CE)) \\ & \ \& \ \text{однасторона}(C, E, \text{прямая}(BD)) \rightarrow \text{прямая}(BD) \parallel \text{прямая}(CE)) \end{aligned}$$

Исходная теорема усматривает из соотношений пропорциональности параллельность двух прямых, пересекающихся с двумя пересекающимися в точке A прямыми BC, DE . Итоговая теорема освобождается от точки A , рассматривая пропорциональные отрезки между тремя параллельными прямыми.

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Решается задача на исследование x11, посылками которой служат утверждения x8 и вспомогательный терм "консеквент(x9)". Цели задачи - "допкадр", "неизвестные X", где X - все переменные посылок задачи.

Цель "допкадр" означает, что задача решается для дополнительного построения в антецедентах, имеющего целью исключить из теоремы некоторые выражения (какие именно - определяется в процессе решения задачи). Усмотренные результаты сохраняются в комментариях к списку посылок задачи, имеющих вид (допкадр $A_1 A_2 A_3$). Здесь A_1 - конъюнкция дополнительных антецедентов, содержащих новые переменные; A_2 - конъюнкция соотношений, которые могут оказаться полезными при исключении выражений; A_3 - список выражений, которые должны быть исключены из теоремы после ввода новых антецедентов.

После решения задачи x11 выбирается некоторый комментарий (допкадр $A_1 A_2 A_3$), который присваивается переменной x13. В нашем примере A_1 имеет вид " $a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ \neg(D = a) \ \& \ \neg(B = b) \ \& \ A \in \text{прямая}(Da) \ \&$

$A \in \text{прямая}(Bb) \ \& \ \text{прямая}(DB) \parallel \text{прямая}(ab) \ \& \ \neg(D = B) \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \neg(\text{прямая}(Da) = \text{прямая}(DB)) \ \& \ \text{актив}(l(Da)) \ \& \ \text{актив}(l(Bb))$ ", A_2 - константа "истина", A_3 - одноэлементный набор, образованный переменной A . Переменной x_{14} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения A_1 , переменной x_{15} - набор A_3 . Проверяется, что x_{15} одноэлементен и состоит из переменной, которая присваивается переменной x_{16} .

Приемы, вводящие комментарии (допкадр . . .), собраны в разделе "Логические приемы и структуры данных" - "Вспомогательные приемы вывода теорем - "Дополнительные построения в антецедентах (цель "допкадр)". В нашем примере использован прием "Проведение параллельной прямой для получения соотношения пропорциональности".

Вводится пустой накопитель x_{17} . Переменной x_{18} присваивается объединение списков x_8 и x_{14} . Если x_{16} входит в терм x_9 , то к списку x_{18} добавляется терм "консеквент(x_9)". В нашем примере x_{18} не изменяется. Решается задача на исследование x_{19} , посылками которой служат утверждения x_{18} . Цели задачи - "исключ x_{16} ", "известно", "антецеденты", "неизвестные Y ", где Y - все параметры термов x_{18} . Если после решения в комментариях к посылкам задачи x_{19} обнаруживаются элементы (частичный ответ R), указывающие наборы R утверждений, представляющих собой один из вариантов ответа, то переменной x_{17} переприсваивается список всех таких наборов R . Если таких комментариев нет, то переменной x_{17} переприсваивается набор всех посылок задачи x_{19} , не имеющих заголовка "актив". В нашем примере комментарии (частичный ответ . . .) отсутствуют.

После доопределения набора x_{17} все переменные, начиная с x_{18} , снова оказываются не определенными. Выбирается набор x_{18} списка x_{17} , утверждения которого не содержат переменной x_{16} . Переменной x_{19} присваивается терм x_9 . Если в наборе x_{18} имелся терм "консеквент(K)", то переменной x_{19} переприсваивается утверждение K . Затем создается импликация с антецедентами x_{18} и консеквентом x_{19} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Добавление к консеквенту следствий, выведенных во вспомогательной задаче на исследование и не содержащих новых переменных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDEFG}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC)) \ \& \ l(AD) = l(BD) \ \& \ l(AF) = l(CF) \ \& \ l(BE) = l(CE) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ E \in \text{прямая}(BC) \ \& \ F \in \text{прямая}(AC) \ \& \ G \in \text{отрезок}(AE) \ \& \ G \in \text{отрезок}(BF) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ G - \text{точка} \ \rightarrow \ 2l(DG) = l(CG) \ \& \ 3l(DG) = l(CD) \ \& \ G \in \text{отрезок}(CD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEFG}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC)) \ \& \ l(AD) = l(BD) \ \& \ l(AF) = l(CF) \ \& \ l(BE) = l(CE) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ E \in \text{прямая}(BC) \ \& \ F \in \text{прямая}(AC) \ \& \ G \in \text{отрезок}(AE) \ \& \ G \in \text{отрезок}(BF) \ \&$$

A – точка & B – точка & C – точка & D – точка & E – точка & F – точка & G – точка $\rightarrow G \in \text{отрезок}(CD)$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов исходной теоремы, переменной x_9 – консеквент. Переменной x_{10} присваивается список параметров терма x_9 . Переменной x_{11} присваивается результат добавления к списку x_8 утверждения x_9 . Решается задача на исследование x_{12} с посылками x_{11} и целями "известно", "теорвывод", "неизвестные X ", где X – параметры утверждений x_{11} . Предварительно предпринимается разблокировка приемов, основанных на уже имеющих в списке вывода теоремах. Проверяется, что после решения задачи x_{12} в ее списке посылок нет константы "ложь". Переменной x_{14} присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. утверждений x_8 . Переменной x_{15} присваивается список не входящих в x_8 и x_{14} посылок задачи x_{12} , параметры которых включаются в список x_{10} , а заголовок отличен от символа "актив". В нашем примере он состоит из утверждений " $2l(DG) = l(CG)$ ", " $3l(DG) = l(CD)$ " и " $G \in \text{отрезок}(CD)$ ". Проверяется, что число элементов списка x_{15} не менее 2. Если список x_8 непуст, то из списка x_{15} удаляются утверждения, отличные от x_9 и такие, что вспомогательная задача на доказательство усматривает их выводимость из утверждений x_8 . Проверяется, что и после этого список x_{15} имеет не менее двух элементов. Затем создается импликация с антецедентами x_8 , консеквентом которой служит конъюнкция утверждений x_{15} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Варьирование одного из параметров антецедента и анализ общего контекста.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aABCD}(\neg(a = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ l(aA) = l(aB) \ \& \ l(AC) = l(BC) \ \& \ l(AD) = l(BD) \ \& \ C \in \text{плоскость}(aAB) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow C \in \text{прямая}(aD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ l(AC) = l(BC) \ \& \ l(AD) = l(BD) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов исходной теоремы, переменной x_9 – консеквент. Переменной x_{11} присваивается список существенных антецедентов теоремы. Переменной x_{12} присваивается список всех параметров антецедентов, не упомянутых в характеристиках "опрзнач(...)" исходной теоремы.

В нашем примере теорема имеет единственную характеристику "опрзнач(D)", означающую, что импликация однозначно определяет своим консеквентом значение переменной D , которая независимо от этого определяется некоторой группой антецедентов. В обоих случаях для однозначности определения используется одна и та же группа "фоновых" антецедентов.

В нашем примере x_{12} состоит из переменных A, B, C . Проверяется, что список x_{12} непуст. Переменной x_{16} присваивается одна из таких переменных списка

12, которая имеет наименьшее число вхождений в существенные antecedentes. В нашем примере - переменная C . Переменной x_{17} присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - a . Переменной x_{18} присваивается список, получаемый добавлением к списку x_8 утверждения x_9 . Переменной x_{19} присваивается список результатов замены в утверждениях x_{18} переменной x_{16} на x_{17} , переменной x_{20} - объединение списков x_{18} и x_{19} .

Решается задача на исследование x_{21} с посылками x_{20} и целями "теорвывод", "известно", "допосылки", "неизвестные X ", где X - параметры посылок x_{20} . Проверяется, что после решения в посылках задачи не возникает равенство для переменной x_{17} .

Среди посылок задачи x_{21} выбирается утверждение x_{23} , содержащее переменные x_{16} и x_{17} . В нашем примере - " $C \in \text{прямая}(aD)$ ". Переменной x_{24} присваивается объединение списка x_8 со списком x_{19} , у которого отброшен последний элемент. К набору x_{24} присоединяются все утверждения, выделенные комментариями "допосылки" к посылкам задачи x_{21} . В нашем примере - единственное утверждение " $C \in \text{плоскость}(ABa)$ ". Затем создается импликация с antecedентами x_{24} и консеквентом x_{23} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительной эквивалентности для варьирования консеквента

1. Использование перегруппировочной эквивалентности для исключения уникального условия на о.д.з. консеквента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcdAB} (\neg(b = c) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ l(bA) = l(bB) \ \& \ l(cA) = l(cB) \ \& \ l(dA) = l(dB) \ \& \ b \in \text{плоскость}(cAB) \ \& \ d \in \text{прямая}(AB) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow d \in \text{прямая}(bc))$$

из теоремы

$$\forall_{aABCD} (\neg(a = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ l(aA) = l(aB) \ \& \ l(AC) = l(BC) \ \& \ l(AD) = l(BD) \ \& \ C \in \text{плоскость}(aAB) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow C \in \text{прямая}(aD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \rightarrow C \in \text{прямая}(AB) \leftrightarrow A \in \text{прямая}(BC))$$

Переменной x_8 присваивается список antecedентов, переменной x_9 - консеквент. Проверяется, что x_9 имеет единственный подтерм x_{11} максимальной сложности. В нашем примере - " $\text{прямая}(aD)$ ". Переменной x_{12} присваивается заголовок терма x_{11} , переменной x_{13} - список утверждений, необходимых для сопровождения x_{11} по о.д.з., переменной x_{14} - список утверждений, необходимых для сопровождения antecedентов по о.д.з. Переменной x_{15} присваивается разность списков x_{13} и x_{14} . В нашем примере она состоит из единственного утверждения " $\neg(a = D)$ ". Проверяется, что список x_{15} непуст. Справочник поиска теорем

"группировка" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" присваивает переменной x18 результат преобразования консеквента исходной теоремы при помощи дополнительной теоремы. Утверждение x18 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование эквивалентности общей стандартизации для исключения операнда консеквента, не встречающегося в посылках

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{dABCD}(\neg(d = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ l(AC) = l(BC) \ \& \ l(AD) = l(BD) \ \& \ C \in \text{плоскость}(dAB) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(dD) \perp \text{прямая}(AB) \rightarrow C \in \text{прямая}(dD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ l(AC) = l(BC) \ \& \ l(AD) = l(BD) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \text{прямая}(CD) \perp \text{прямая}(AB) \ \& \ E \in \text{плоскость}(ABD) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \rightarrow \text{прямая}(CE) \perp \text{прямая}(AB) \leftrightarrow E \in \text{прямая}(CD))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается список операндов консеквента. В нем выбирается атомарное выражение x11, не являющееся переменной. В нашем примере - "прямая(CD)". Проверяется, что это выражение не встречается в антецедентах. Переменной x12 присваивается заголовок выражения x11. В нашем примере - "прямая". Переменной x13 присваивается заголовок консеквента. В нашем примере - "перпендикулярно". Переменной x14 присваивается название раздела, к которому относится x13. В нашем примере - "геометрия". Просматриваются теоремы x18 этого раздела, имеющие характеристику "общнорм". В нашем примере x18 - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x22 присваивается ее заменяемая часть. В нашем примере - "прямая(CE) \perp прямая(AB)". Проверяется, что она имеет заголовок x13 и содержит символ x12. Переменной x23 присваивается вхождение заменяющей части дополнительной теоремы. Проверяется, что ее заголовком не является символ "не". Переменной x24 присваивается список операндов заменяющей части, переменной x25 - список антецедентов дополнительной теоремы. Проверяется, что каждый элемент списка x24 является подтермом некоторого утверждения списка x25. Переменной x26 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x26 имеет вид:

$$\begin{aligned} & \forall_{abcde}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \\ & \neg(c = e) \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ \text{прямая}(cd) \perp \text{прямая}(ab) \ \& \\ & e \in \text{плоскость}(abd) \ \& \ c \in \text{прямая}(ab) \rightarrow \text{прямая}(ce) \perp \text{прямая}(ab) \leftrightarrow \\ & e \in \text{прямая}(cd)) \end{aligned}$$

Переменной x29 присваивается набор операндов заменяемой части теоремы x26. Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x30 присваивается список антецедентов теоремы x26. В списке x29 выбирается выражение x31 с заголовком x12. В нашем примере - "прямая(ce)". Проверяется, что x31 не встречается в утверждениях x30. В списке x10 выбирается выражение x32, отличное от x11, а в списке x29 - выражение x33, отличное от x31. В нашем примере x32 - "прямая(AB)", x33 - "прямая(ab)". Переменной x34 присваивается список параметров термов x29.

Определяется подстановка S вместо переменных x34, унифицирующая термы x31, x11 и одновременно - термы x32, x33. Переменной x36 присваивается объединение списка x8 со списком результатов применения подстановки S к утверждениям x30. Переменной x37 присваивается результат применения подстановки S к заменяющему терму теоремы x26.

Для проверки непротиворечивости списка x36 решается вспомогательная задача на исследование с посылками x36. Если после ее решения в посылках не возникает константа "ложь", то создается импликация с антецедентами x36 и консеквентом x37. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительной теоремы для варьирования антецедентов

1. Попытка свести неравенство для одного числового атома в антецедентах к неравенству для других числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(BD) \ \& \ 0 \leq -\pi/2 + \angle(ABC) \rightarrow D \in \text{интервал}(AC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ 0 < \pi/2 - \angle(ABC) \ \& \ 0 < \pi/2 - \angle(BCA) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{прямая}(BD) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow D \in \text{интервал}(AC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(c \in \text{прямая}(ab)) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \rightarrow 0 < -\angle(acb) - \angle(bac) + \pi)$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Переменной x11 присваивается некоторый существенный антецедент теоремы, представляющий собой неравенство. В нашем примере - " $0 < \pi/2 - \angle(BCA)$ ". Проверяется, что терм

x_{11} имеет единственный невырожденный числовой атом, и этот атом присваивается переменной x_{13} . В нашем примере - " $\angle(BAC)$ ".

Выбирается переменная x_{14} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - a . Переменной x_{16} присваивается результат замены всех вхождений выражения x_{13} в терм x_{11} на переменную x_{14} . В нашем примере получаем " $0 < \pi/2 - a$ ". Решается задача на описание x_{18} , посылки которой суть все отличные от x_{11} антецеденты теоремы, а условия - "число(x_{14})" и x_{16} . Цели задачи - "полный", "прямой ответ", "явное", "упростить", "неизвестные x_{14} ". Ответ задачи присваивается переменной x_{19} . В нашем примере - " a - число & $a < \pi/2$ ". Проверяется, что этот ответ отличен от символа "отказ" и что после отбрасывания из его конъюнктивных членов утверждения "число(x_{14})" остается единственное утверждение x_{21} , представляющее собой неравенство с переменной x_{14} в одной из частей. Переменной x_{24} присваивается другая часть. В нашем примере - " $\pi/2$ ".

Переменной x_{25} присваивается заголовок выражения x_{13} . В нашем примере - "угол". Справочник поиска теорем "числпарам" определяет по x_{25} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{28} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{28} совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x_{29} присваивается список антецедентов теоремы x_{28} . Проверяется, что среди них нет равенств и неравенств. Переменной x_{30} присваивается консеквент теоремы x_{28} , переменной x_{31} - корневая связывающая приставка теоремы x_{28} .

Выбирается невырожденный числовой атом x_{32} терма x_{30} , содержащий все переменные x_{31} . В нашем примере - " $\angle(bac)$ ". Определяется подстановка S вместо переменных x_{31} , унифицирующая термы x_{32} и x_{13} . Выбирается переменная x_{35} , не входящая в исходную и дополнительную теоремы. В нашем примере - переменная d . Переменной x_{36} присваивается результат замены всех вхождений выражения x_{32} в терм x_{30} на переменную x_{35} . В нашем примере - " $0 < -\angle(acb) - d + \pi$ ". Решается задача на описание с посылками x_{29} и условиями "число(x_{35})", x_{36} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "упростить", "неизвестные x_{35} ". Ответ присваивается переменной x_{38} . В нашем примере он имеет вид " d - число & $d < -\angle(acb) + \pi$ ". Проверяется, что этот ответ отличен от символа "отказ" и что после удаления из его конъюнктивных членов утверждения "число(x_{35})" остается единственное утверждение x_{40} , представляющее собой неравенство с переменной x_{35} в одной из частей. Переменной x_{43} присваивается другая часть. Проверяется, что эта переменная находится в той же части неравенства, что переменная x_{14} в неравенстве x_{21} .

Переменной x_{44} присваивается результат применения подстановки S к терму x_{43} . В нашем примере получаем " $-\angle(ABC) + \pi$ ". Переменной x_{45} присваивается символ "меньше", если заголовок неравенства x_{11} - "меньше", а неравенства x_{40} - "меньшеилиравно". Иначе переменной x_{45} присваивается символ "меньшеилиравно". Переменной x_{46} присваивается неравенство, получаемое заменой в x_{11} переменной x_{14} на x_{44} . В нашем примере - " $-\angle(ABC) + \pi \leq \pi/2$ ". Переменной x_{47} присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям x_{29} , переменной x_{48} - объединение списка отличных от x_{11} антецедентов исходной теоремы со списком x_{47} .

Утверждение x46 упрощается относительно посылок x48 задачей на преобразование, и результат добавляется к списку x48. В нашем примере - " $0 \leq -\pi/2 + \angle(ABC)$ ".

При помощи процедуры "нормантецеденты" проверяется непротиворечивость списка x48. При этом сам список x48 не изменяется. Затем создается импликация с антецедентами x48, консеквент которой тот же, что у исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка свести неравенство для одного числового атома в антецедентах к неравенству для более простых числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \& \neg(C = D) \& D \in \text{прямая}(AB) \& A\text{-точка} \& B\text{-точка} \& C\text{-точка} \& D\text{-точка} \& \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \& 0 \leq -l(AC) + l(AB) \& 0 \leq -l(BC) + l(AB) \rightarrow D \in \text{интервал}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(a = b) \& \neg(c = D) \& 0 \leq -2\angle(abc) + \pi \& D \in \text{прямая}(ab) \& a\text{-точка} \& b\text{-точка} \& c\text{-точка} \& D\text{-точка} \& \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(cD) \& 0 \leq -l(bc) + l(ab) \rightarrow D \in \text{интервал}(ab))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \& \neg(C \in \text{прямая}(AB)) \& A\text{-точка} \& B\text{-точка} \& C\text{-точка} \& l(BC) \leq l(AB) \rightarrow \angle(BAC) < \pi/2)$$

Начало приема совпадает с началом предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Переменной x11 присваивается некоторый существенный антецедент теоремы, представляющий собой неравенство. В нашем примере - " $0 < -2\angle(abc) + \pi$ ". Проверяется, что терм x11 имеет единственный невырожденный числовой атом, и этот атом присваивается переменной x13. В нашем примере - " $\angle(abc)$ ".

Выбирается переменная x14, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - d . Переменной x16 присваивается результат замены всех вхождений выражения x13 в терм x11 на переменную x14. В нашем примере получаем " $0 < -2d + \pi$ ". Решается задача на описание x18, посылки которой суть все отличные от x11 антецеденты теоремы, а условия - "число(x14)" и x16. Цели задачи - "полный", "прямой ответ", "явное", "упростить", "неизвестные x14". Ответ задачи присваивается переменной x19. В нашем примере - " $d\text{-число} \& d < \pi/2$ ". Проверяется, что этот ответ отличен от символа "отказ" и что после отбрасывания из его конъюнктивных членов утверждения "число(x14)" остается единственное утверждение x21, представляющее собой неравенство с переменной x14 в одной из частей. Переменной x24 присваивается другая часть. В нашем примере - " $\pi/2$ ".

Переменной x_{25} присваивается заголовок выражения x_{13} . В нашем примере - "угол".

Дальше начинаются отличия. Справочник поиска теорем "числоценка" определяет по x_{25} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{28} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{28} совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x_{29} присваивается список антецедентов теоремы x_{28} . Переменной x_{30} присваивается вхождение консеквента теоремы x_{28} . Переменной x_{31} присваивается вхождение той части консеквента, которая имеет заголовок "угол", переменной x_{32} - вхождение другой части консеквента. Переменной x_{33} присваивается подтерм x_{31} . В нашем примере - " $\angle(BAC)$ ". Проверяется, что x_{33} содержит все переменные теоремы x_{28} . Переменной x_{34} присваивается оценка сложности терма x_{33} . В нашем примере она равна 4. Проверяется, что список x_{29} имеет единственное неравенство; это неравенство присваивается переменной x_{36} . В нашем примере - " $l(BC) \leq l(AB)$ ". Проверяется, что оценки сложности числовых атомов терма x_{36} меньше, чем x_{34} .

Переменной x_{38} присваивается результат подстановки выражения x_{13} вместо переменной x_{14} в утверждение x_{21} . В нашем примере имеем " $\angle(abc) < \pi/2$ ". Переменной x_{39} присваивается список параметров терма x_{38} и подтерма x_{30} . В нашем примере - " a, b, c, A, B, C ". Определяется подстановка S вместо переменных x_{39} , унифицирующая терм x_{38} с подтермом x_{30} . Переменной x_{41} присваивается список результатов применения подстановки S к отличным от x_{11} антецедентам исходной теоремы и к антецедентам теоремы x_{28} . Переменной x_{42} присваивается результат применения подстановки S к консеквенту исходной теоремы. Утверждения списка x_{41} обрабатываются оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{42} . Затем создается импликация, антецедентами которой служат измененные утверждения x_{41} , а консеквентом - x_{42} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Попытка реализовать неравенство для одного числового атома в антецедентах, используя эквивалентность равенства с этим атомом нечисловому предикату.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC) \ \& \ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(BD) \rightarrow D \in \text{интервал}(AC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(BD) \ \& \ 0 \leq -\pi/2 + \angle(ABC) \rightarrow D \in \text{интервал}(AC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \angle(ABC) = \pi/2 \leftrightarrow \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Переменной x11 присваивается некоторый существенный антецедент теоремы, представляющий собой неравенство. В нашем примере - " $0 < -\pi/2 + \angle(ABC)$ ". Проверяется, что терм x11 имеет единственный невырожденный числовой атом, и этот атом присваивается переменной x13. В нашем примере - " $\angle(ABC)$ ".

Дальше начинаются отличия. Переменной x14 присваивается заголовок терма x13. В нашем примере - "угол". Справочник поиска теорем "эквтермы" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x17 имеет вид:

$$\forall_{abc}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(a = b) \rightarrow \angle(abc) = \pi/2 \leftrightarrow \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(bc))$$

Проверяется, что консеквент теоремы x17 - эквивалентность. Переменной x18 присваивается вхождение той части эквивалентности, которая представляет собой равенство, переменной x19 - вхождение другой части. В нашем примере x18 - вхождение равенства " $\angle(abc) = \pi/2$ ". Переменной x22 присваивается та часть равенства x18, которая имеет заголовок x14, переменной x25 - другая часть. В нашем примере x22 - выражение " $\angle(abc)$ ", x25 - " $\pi/2$ ". Переменной x23 присваивается список параметров терма x22, переменной x24 - список антецедентов теоремы x17. Проверяется, что x25 не имеет невырожденных числовых атомов. Переменной x26 присваивается подтерм x19. В нашем примере - " $\text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(bc)$ ". Проверяется, что x26 не имеет числовых атомов.

Определяется подстановка S вместо переменных x23, унифицирующая термы x13 и x22. Переменной x28 присваивается результат применения подстановки S к выражению x25, переменной x30 - результат замены вхождений терма x29 в терм x11 на терм x28. В нашем примере x30 имеет вид " $0 \leq -\pi/2 + \pi/2$ ". Переменной x31 присваивается объединение отличных от x11 антецедентов исходной теоремы с результатами применения подстановки S к антецедентам теоремы x17. Проверяется, что x30 - следствие утверждений x31. Переменной x33 присваивается результат применения подстановки S к утверждению x26. В нашем примере - " $\text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC)$ ". Затем создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x31 и утверждение x33, а консеквент тот же, что у исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Попытка преобразовать неравенство для одного числового атома в антецедентах с помощью дополнительного соотношения монотонности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bABCD}(\neg(b = A) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ 0 < -\angle(bAC) + \pi/2 \ \& \ 0 < -\angle(bCA) + \pi/2 \ \& \ B \in \text{отрезок}(bC) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(BD) \rightarrow D \in \text{интервал}(AC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ 0 < \pi/2 - \angle(BAC) \ \& \ 0 < \pi/2 - \angle(BCA) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{прямая}(BD) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow D \in \text{интервал}(AC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ D \in \text{отрезок}(BC) \rightarrow 0 \leq \angle(BAC) - \angle(DAC))$$

Начало приема совпадает с началом одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Переменной x11 присваивается некоторый существенный антецедент теоремы, представляющий собой неравенство. В нашем примере - " $0 < \pi/2 - \angle(BAC)$ ". Проверяется, что терм x11 имеет единственный невырожденный числовой атом, и этот атом присваивается переменной x13. В нашем примере - " $\angle(BAC)$ ".

Выбирается переменная x14, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - a . Переменной x16 присваивается результат замены всех вхождений выражения x13 в терм x11 на переменную x14. В нашем примере получаем " $0 < \pi/2 - a$ ". Решается задача на описание x18, посылки которой суть все отличные от x11 антецеденты теоремы, а условия - "число(x14)" и x16. Цели задачи - "полный", "прямой ответ", "явное", "упростить", "неизвестные x14". Ответ задачи присваивается переменной x19. В нашем примере - " $a - \text{число} \ \& \ a < \pi/2$ ". Проверяется, что этот ответ отличен от символа "отказ" и что после отбрасывания из его конъюнктивных членов утверждения "число(x14)" остается единственное утверждение x21, представляющее собой неравенство с переменной x14 в одной из частей. Переменной x24 присваивается другая часть. В нашем примере - " $\pi/2$ ".

Переменной x25 присваивается заголовок выражения x13. В нашем примере - "угол".

Дальше начинаются отличия. Справочник поиска теорем "Числатомы" определяет по x25 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x28 присваивается результат замены ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x28 имеет вид:

$$\forall_{abcd}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ d \in \text{отрезок}(bc) \rightarrow 0 \leq \angle(bac) - \angle(dac))$$

Переменной x29 присваивается список антецедентов теоремы x28, переменной x30 - вхождение консеквента. Проверяется, что этот консеквент - неравенство с нулем в левой части. Переменной x31 присваивается вхождение правой части неравенства. Переменной x33 присваивается вхождение того операнда правой части, которая имеет заголовок "минус", переменной x32 - вхождение другой части. Если x14 - левая часть неравенства x21, то переменной x34 присваивается корневой операнд вхождения x33, иначе - подтерм x32. В нашем примере x34 - " $\angle(dac)$ ". Переменной x35 присваивается список параметров выражения x34.

Проверяется, что теорема x28 имеет единственную переменную, не входящую в x35.

Определяется подстановка S вместо переменных x35, унифицирующая выражения x13 и x34. Если x14 - левая часть неравенства x21, то переменной x37 присваивается результат применения подстановки S к подтерму x32, а переменной x38 - неравенство с нулем в левой части и разностью x24-x37 в правой. Иначе переменной x37 присваивается результат применения подстановки S к корневому операнду вхождения x33, а переменной x38 - неравенство с нулем в левой части и разностью x37-x24 в правой. Знак неравенства (строгое либо нестрогое) - такой же, как у x21.

В нашем примере x37 имеет вид " $\angle(bAC)$ ", x38 - вид " $0 < \pi/2 - \angle(bAC)$ ".

Переменной x39 присваивается объединение отличных от x11 антецедентов исходной теоремы с результатами применения подстановки S к утверждениям x29 и с утверждением x38. Затем создается импликация с антецедентами x39, консеквент которой тот же, что у исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Попытка исключения многоместных предикатов в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{adgjkE}(\neg(c = j) \ \& \ \neg(d = g) \ \& \ \neg(\text{прямая}(cj) = \text{прямая}(dg)) \ \& \ \neg(k \in \text{прямая}(cj)) \ \& \ d \in \text{отрезок}(ck) \ \& \ j \in \text{отрезок}(gk) \ \& \ E \in \text{прямая}(cj) \ \& \ E \in \text{прямая}(dg) \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ j - \text{точка} \ \& \ k - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \rightarrow E \in \text{отрезок}(dg))$$

из теоремы

$$\forall_{avcdeE}(E - \text{точка} \ \& \ \neg(d = e) \ \& \ E \in \text{прямая}(de) \ \& \ E \in \text{прямая}(ab) \ \& \ \neg(\text{прямая}(ab) = \text{прямая}(de)) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \text{разныестороны}(c, d, \text{прямая}(ab)) \ \& \ \text{однасторона}(c, e, \text{прямая}(ab)) \ \& \ \neg(c \in \text{прямая}(ab)) \rightarrow E \in \text{отрезок}(de))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов теоремы. Проверяется, что среди них имеется более чем двуместное отношение. Процедура "исклмнож" перечисляет результаты x9 преобразования исходной теоремы путем исключения всех более чем двуместных отношений в антецедентах с помощью справочника поиска теорем "множнабор". Последний справочник ссылается на кванторные импликации, имеющие характеристику "вывод", у которых консеквент - предикатный символ с более чем двумя операндами, а все антецеденты имеют не более двух операндов. В нашем примере предпринимается исключение антецедентов с заголовками "разныестороны" и "однасторона". Теорема x9 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Склейка двух теорем

1. Попытка склейки двух теорем, имеющих в антецедентах подобные соотношения для числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(B = C) \& \neg(B = D) \& \neg(C = E) \& \neg(D = E) \& \\ l(AB)l(DE) = l(AD)l(BC) \& A \in \text{прямая}(BC) \& A \in \text{прямая}(DE) \& \\ A\text{-точка} \& B\text{-точка} \& C\text{-точка} \& D\text{-точка} \& E\text{-точка} \& \text{однасторона}(B, D, \\ \text{прямая}(CE)) \& \text{однасторона}(C, E, \text{прямая}(BD)) \& \text{однасторона}(D, E, \\ \text{прямая}(BC)) \rightarrow \text{прямая}(BD) \parallel \text{прямая}(CE))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(C\text{-точка} \& E\text{-точка} \& D\text{-точка} \& B\text{-точка} \& A\text{-точка} \& \\ \neg(B = D) \& \neg(C = E) \& l(AB)l(DE) = l(AD)l(BC) \& B \in \text{отрезок}(AC) \& \\ D \in \text{отрезок}(AE) \rightarrow \text{прямая}(BD) \parallel \text{прямая}(CE))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE}(B\text{-точка} \& E\text{-точка} \& D\text{-точка} \& C\text{-точка} \& A\text{-точка} \& \\ \neg(B = D) \& \neg(C = E) \& l(AC)l(DE) = l(AE)l(BC) \& B \in \text{отрезок}(AC) \& \\ D \in \text{отрезок}(AE) \rightarrow \text{прямая}(BD) \parallel \text{прямая}(CE))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. В этом списке выбирается равенство x9, содержащее невырожденный числовой атом. В нашем примере - " $l(AB)l(DE) = l(AD)l(BC)$ ". В списке вывода находится отличная от исходной теоремы данного приема вывода теорема x11, блок вывода которой не содержит символы "исключение", "результат". Проверяется наличие у нее характеристики "отношение". В нашем примере x11 - указанная выше дополнительная теорема.

Переменной x12 присваивается консеквент исходной теоремы, переменной x13 - консеквент дополнительной. Проверяется, что их заголовки и длины совпадают. Проверяется, что среди антецедентов дополнительной теоремы имеется равенство той же длины, что и x9. Переменной x16 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную. В нашем примере x16 имеет вид:

$$\forall_{abcde}(b\text{-точка} \& e\text{-точка} \& d\text{-точка} \& c\text{-точка} \& a\text{-точка} \& \\ \neg(b = d) \& \neg(c = e) \& l(ac)l(de) = l(ae)l(bc) \& b \in \text{отрезок}(ac) \& \\ d \in \text{отрезок}(ae) \rightarrow \text{прямая}(bd) \parallel \text{прямая}(ce))$$

Переменной x13 переписывается консеквент теоремы x16, переменной x14 - список ее антецедентов. В списке x14 находится равенство x17, длина которого равна длине равенства x9. В нашем примере - " $l(ac)l(de) = l(ae)l(bc)$ ". Переменной x18 присваивается список параметров термов x17 и 13. В нашем примере - a, b, c, d, e . Проверяется, что корневая связывающая приставка теоремы x16 включается в список x18. Определяется подстановка S вместо переменных x18, унифицирующая терм x17 с термом x9 и одновременно терм x13 с термом x12. Проверяется, что эта подстановка выполняет переобозначение переменных, не отождествляющее их. Переменной x20 присваивается список переменных, подставляемых подстановкой S вместо переменных x18. В нашем примере - A, C, B, E, D . Проверяется, что списки x18 и x20 различны.

Переменной x_{21} присваивается список обработанных процедурой "станд" результатов применения подстановки S к отличным от x_{17} элементам набора x_{14} . Переменной x_{22} присваивается список обработанных процедурой "станд" элементов набора x_8 , отличных от x_9 . Проверяется, что списки x_{21} , x_{22} не включаются друг в друга. Переменной x_{23} присваивается их пересечение. В нашем примере оно имеет вид " C – точка", " D – точка", " E – точка", " B – точка", " A – точка", " $\neg(C = E)$ ", " $\neg(B = D)$ ". Проверяется, что список x_{23} непуст. Переменной x_{24} присваивается разность списков x_{22} и x_{23} , переменной x_{25} – разность списков x_{21} и x_{23} .

В нашем примере x_{24} состоит из утверждений " $B \in \text{отрезок}(AC)$ ", " $D \in \text{отрезок}(AE)$ ". Список x_{25} состоит из утверждений " $C \in \text{отрезок}(AB)$ ", " $E \in \text{отрезок}(AD)$ ".

Если в списке x_{24} либо x_{25} содержится отрицание равенства двух переменных, то это отрицание равенства переносится из соответствующего списка в список x_{23} . В нашем примере ничего не изменяется.

Если список x_{24} либо x_{25} имеет не менее двух элементов, то просматриваются его элементы. Если такой элемент является следствием объединения списка x_{23} с другим списком пары x_{24} , x_{25} , то он перебрасывается в список x_{23} . В нашем примере ничего не изменяется.

Далее переменной x_{26} присваивается дизъюнкция конъюнкций элементов списков x_{24} и x_{25} . Решается задача на исследование x_{27} с посылками x_{23} и целями "известно", "неизвестные X ", где X – все параметры ее посылок. Уровень обращения небольшой. Далее дизъюнкция x_{26} обрабатывается оператором "нормили" относительно посылок задачи x_{27} , которому передается комментарий "антецеденты". Этот комментарий разрешает некоторое дополнение преобразуемого утверждения для того, чтобы переформулировать его без дизъюнкции. Результат присваивается переменной x_{29} .

В нашем примере x_{29} имеет вид: " $\neg(B = C) \& \neg(B = D) \& \neg(D = E) \& A \in \text{прямая}(BC) \& A \in \text{прямая}(DE) \& \text{однасторона}(B, D, \text{прямая}(CE)) \& \text{однасторона}(C, E, \text{прямая}(BD)) \& \text{однасторона}(D, E, \text{прямая}(BC))$ ".

Проверяется, что утверждение x_{29} не содержит символа "или". Переменной x_{30} присваивается объединение списка x_{23} с набором конъюнктивных членов утверждения x_{29} и с утверждением x_9 . Затем создается импликация с антецедентами x_{30} и консеквентом x_{12} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Исходная и дополнительная теоремы при этом сопровождаются пометкой "исключение" в их блоках вывода.

2. Склейка двух теорем с дополнительной унификацией параметров антецедентов, не встречающихся в консеквенте.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdD}(\neg(b = c) \& a \in \text{окружность}(bc) \& d \in \text{окружность}(bc) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& d - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \neg(a = D) \& \neg(d = D) \& D \in \text{прямая}(ad) \rightarrow \neg(D \in \text{окружность}(bc)))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdD}(\neg(b = c) \& a \in \text{окружность}(bc) \& d \in \text{окружность}(bc) \& D \in \text{интервал}(ad) \\ \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& d - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow \\ \neg(D \in \text{окружность}(bc)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcdC}(\neg(b = c) \& a \in \text{интервал}(dC) \& a \in \text{окружность}(bc) \& d \in \text{окружность}(bc) \\ \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& d - \text{точка} \& C - \text{точка} \rightarrow \\ \neg(C \in \text{окружность}(bc)))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - теорема списка вывода, отличная от исходной теоремы приема вывода, не имеющая пометок "исключение" и "результат" в своем блоке вывода и имеющая характеристику "отношение". В нашем примере x10 - указанная выше дополнительная теорема.

Переменной x11 присваивается консеквент исходной теоремы, переменной x12 - консеквент дополнительной теоремы. Проверяется, что они имеют равные длины и одинаковые заголовки. Проверяется, что длины корневых связывающих приставок, а также длины списков антецедентов исходной и дополнительной теорем равны. Переменной x13 присваивается результат переобозначения в дополнительной теореме переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x13 имеет вид:

$$\forall_{efghi}(\neg(f = g) \& e \in \text{интервал}(hi) \& e \in \text{окружность}(fg) \& h \in \text{окружность}(fg) \\ \& e - \text{точка} \& f - \text{точка} \& g - \text{точка} \& h - \text{точка} \& i - \text{точка} \rightarrow \\ \neg(i \in \text{окружность}(fg)))$$

Переменной x14 присваивается консеквент теоремы x13, переменной x15 - список ее параметров. Усматривается, что терм x11 является результатом применения к терму x14 некоторой подстановки S вместо переменных x15, причем эта подстановка переобозначает переменные, не отождествляя их. Переменной x17 присваивается результат применения подстановки S к теореме x13. В нашем примере x17 имеет вид:

$$\forall_{ebchD}(\neg(b = c) \& e \in \text{интервал}(hD) \& e \in \text{окружность}(bc) \& h \in \text{окружность}(bc) \\ \& e - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& h - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow \\ \neg(D \in \text{окружность}(bc)))$$

Переменной x28 присваивается список обработанных оператором "станд" антецедентов теоремы x17, переменной x29 присваивается список обработанных оператором "станд" антецедентов исходной теоремы. Переменной x30 присваивается разность списков x28 и x29, переменной x31 - разность списков x29 и x28.

В нашем примере x30 состоит из утверждений " $e \in \text{интервал}(hD)$ ", " $e \in \text{окружность}(bc)$ ", " $h \in \text{окружность}(bc)$ ", " $e - \text{точка}$ ", " $h - \text{точка}$ ". Список x31 состоит из утверждений " $a \in \text{окружность}(bc)$ ", " $d \in \text{окружность}(bc)$ ", " $D \in \text{интервал}(ad)$ ", " $a - \text{точка}$ ", " $d - \text{точка}$ ".

Переменной x32 присваивается список параметров утверждений x30, не являющихся параметрами утверждений x31. В нашем примере - e, h . Проверяется,

что список x_{32} непуст, причем каждое утверждение списка x_{30} имеет параметр из x_{32} . Переменной x_{33} присваивается список тех утверждений набора x_{30} , которые имеют ровно один параметр из x_{32} . В нашем примере - все утверждения списка x_{30} , кроме первого. Проверяется, что в утверждениях x_{33} встречаются все переменные из x_{32} .

Переменной x_{34} присваивается список параметров утверждений x_{31} , не являющихся параметрами утверждений x_{30} . В нашем примере - a, d . Проверяется, что список x_{34} непуст, причем каждое утверждение списка x_{31} имеет параметр из x_{34} . Переменной x_{35} присваивается список тех утверждений набора x_{31} , которые имеют ровно один параметр из x_{34} . В нашем примере - все утверждения списка x_{31} , кроме третьего. Проверяется, что длины списков x_{33} и x_{35} равны. Переменной x_{36} присваивается разность списков x_{30} и x_{33} . Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x_{37} присваивается этот элемент. В нашем примере - " $e \in \text{интервал}(hD)$ ".

Вводится пустой накопитель x_{38} . Для его заполнения перечисляются всевозможные подстановки T вместо переменных x_{32} , переводящие конъюнкцию утверждений x_{33} в конъюнкцию утверждений x_{35} . В накопитель x_{38} заносятся результаты обработки оператором "станд" результатов применения подстановок T к терму x_{37} .

По окончании цикла проверяется, что набор x_{38} непуст. В нашем примере он состоит из утверждений " $a \in \text{интервал}(dD)$ ", " $d \in \text{интервал}(aD)$ ". Переменной x_{39} присваивается первый элемент разности наборов x_{31} и x_{35} . В нашем примере - " $D \in \text{интервал}(ad)$ ". Переменной x_{40} присваивается дизъюнкция утверждений x_{38} , к которым добавлено утверждение x_{39} . Находится результат x_{42} упрощения этой дизъюнкции относительно отличных от x_{39} антецедентов исходной теоремы при помощи задачи на преобразование. В нашем примере он имеет вид " $\neg(a = D) \& \neg(d = D) \& D \in \text{прямая}(ad)$ ". Проверяется, что терм x_{42} не содержит символа "или". Создается импликация, антецедентами которой служат отличные от x_{39} антецеденты исходной теоремы и конъюнктивные члены утверждения x_{42} . Консеквент ее такой же, как у исходной теоремы. Эта импликация регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. При этом исходная и дополнительная теоремы сопровождаются пометкой "исключение" в своих блоках вывода.

Варьирование дополнительной теоремы

1. Варьирование антецедента дополнительной теоремы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a \in \text{интервал}(bc) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \rightarrow l(bc) = l(ab) + l(ac))$$

из теоремы

$$\forall_{aAB}(a \in \text{интервал}(AB) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \rightarrow a \in \text{отрезок}(AB))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ B \in \text{отрезок}(AC) \rightarrow l(AC) = l(AB) + l(BC))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент, переменной x10 - параметры консеквента. Проверяется, что параметры антецедентов включаются в список x10. Проверяется, что теорема имеет единственный существенный антецедент, и переменной x12 присваивается этот антецедент. В нашем примере x12 имеет вид " $a \in \text{интервал}(AB)$ ". Проверяется, что параметры терма x12 образуют список x10 и что утверждение x12 элементарно. Проверяется, что x12 имеет единственный подтерм максимальной сложности, и этот подтерм присваивается переменной x14. В нашем примере - " $\text{интервал}(AB)$ ". Переменной x15 присваивается заголовок терма x14. Проверяется, что x9 имеет единственный подтерм максимальной сложности, и этот подтерм присваивается переменной x17. В нашем примере - " $\text{отрезок}(AB)$ ". Переменной x18 присваивается заголовок терма x17. Проверяется, что он отличен от x15. Просматриваются имеющие характеристику "отношение" либо "числзнач" теоремы x22 того раздела, к которому относится символ x18. В нашем примере x22 - указанная выше дополнительная теорема. Проверяется, что x22 - простая импликация, и переменной x23 присваивается список ее антецедентов. Переменной x24 присваивается список элементов набора x23, содержащих символ x18. Проверяется, что он одноэлементный, и переменной x25 присваивается вхождение его элемента в теорему. Проверяется, что символ x18 не входит в консеквент дополнительной теоремы. Оператор "выводпосылки" определяет результат x26 замещения антецедента x25 исходной теоремы на антецеденты дополнительной теоремы, следствием которых он является. Переменной x27 присваивается список антецедентов теоремы x26, переменной x28 - ее консеквент. Переменной x29 присваивается результат обработки списка x27 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x28. Создается импликация с антецедентами x29 и консеквентом x28. Она обрабатывается операторами "нормтеорема", "сокращающ" и регистрируется в списке вывода.

3.68 Характеристика "отобразж"

Характеристикой "отобразж" снабжаются теоремы, имеющие антецедент, содержащий описатель "отображение".

Использование задачи на описание для получения новой теоремы

1. Исключение описателя "отображение" в антецедентах путем ввода новой переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aei}(\text{предел}(e, i, a) = \text{неопред} \ \& \ \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(e, a, i) \rightarrow \lim_{b \rightarrow a \setminus i}(-e(b)) = \text{неопред})$$

из теоремы

$$\forall_{adi}(\lim_{b \rightarrow a \setminus i}(-d(b)) = \text{неопред} \ \& \ \text{Dom}(d) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(d, a, i) \rightarrow \text{предел}(d, i, a) = \text{неопред})$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - элемент этого списка, содержащий описатель "отображение". Переменной x_{10} присваивается вхождение данного описателя, переменной x_{11} - вхождение его последнего операнда (он определяет значения функция). В нашем примере x_9 - первый антецедент. Фактически, он имеет вид "предел(отображение($b, b \in \text{Dom}(d), -d(b), i, a$)). Переменная x_{11} - вхождение терма " $-d(b)$ ". Проверяется, что подтерм x_{11} неоднобуквенный и не имеет заголовка "значение". Переменной x_{12} присваивается расположенное внутри вхождения x_{11} вхождение символа "значение". Проверяется, что первый операнд данного символа - некоторая переменная x_{13} , второй - некоторая переменная x_{14} . В нашем примере x_{13} - d , x_{14} - b .

Проверяется, что переменная x_{13} входит в каждый отличный от x_9 антецедент не более чем однократно, причем только как операнд одно из символово "функция", "область", "значения", "Локопред". Проверяется, что связывающая приставка описателя x_{10} состоит из единственной переменной x_{14} . Выбираются переменные x_{16} и x_{17} , не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{16} - c , x_{17} - e . Переменной x_{18} присваивается результат замены вхождения x_{12} в подтерме x_{11} на переменную x_{16} . В нашем примере x_{18} имеет вид $-c$. Переменной x_{19} присваивается равенство переменной x_{17} выражению x_{18} . В нашем примере - " $e = -c$ ". Определяется тип t значений подтерма x_{11} . Переменной x_{22} присваивается результат замены в списке x_8 утверждения x_9 на " $t(x_{17})$ ". В нашем примере - на " e - число".

Решается задача на описание x_{23} , посылками которой служат утверждения x_{22} , а единственным условием - утверждение x_{19} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "неизвестные x_{16} ", "одз", "упростить". Ответ присваивается переменной x_{24} . В нашем примере он имеет вид " $c = -e$ ". Проверяется, что данный ответ отличен от символа "отказ". Он преобразуется к виду д.н.ф., после чего выбирается некоторый дизъюнктивный член этой д.н.ф., и список его конъюнктивных членов присваивается переменной x_{27} . В списке x_{27} выбирается равенство x_{28} . В нашем примере оно совпадает с x_{24} .

Переменной x_{29} присваивается выражение " $x_{17}(x_{14})$ ". В нашем примере - " $e(b)$ ". Переменной x_{30} присваивается результат подстановки терма x_{29} вместо переменной x_{17} в правую часть равенства x_{28} . В нашем примере он имеет вид " $-e(b)$ ". Переменной x_{33} присваивается терм "отображение($x_{14} x_{32} x_{30}$)". В нашем примере - " $\lambda_b(-e(b), b \in \text{Dom}(e))$ ". Переменной x_{34} присваивается результат замены вхождения x_{10} в антецедент x_9 на переменную x_{17} . В нашем примере он имеет вид "предел(e, i, a) = неопред". Переменной x_{35} присваивается список результатов подстановки переменной x_{17} вместо x_{13} в отличные от x_9 утверждения списка x_8 , к которому добавлено утверждение x_{34} . Переменной x_{36} присваивается результат подстановки терма x_{33} вместо переменной x_{13} в консеквент исходной теоремы. Для каждого элемента Q списка x_{27} , не содержащего переменной x_{16} , к списку x_{35} добавляется утверждение "длялюбого(x_{14} если x_{32} то Q)".

Переменной x_{37} присваивается результат обработки списка x_{35} оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{36} . Затем создается импликация с антецедентами x_{37} и консеквентом x_{36} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.69 Характеристика "отображение"

Характеристикой "отображение" снабжаются кванторные импликации, имеющие элементарные антецеденты и бескванторный консеквент с описателем "отображение".

Логические следствия теоремы

1. Попытка исключения условного выражения под описателем "отображение" путем фиксации истинностного значения переключателя.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cA}(\text{Val}(A) \subseteq \text{события}(c) \ \& \ A - \text{функция} \ \& \ \text{верпространство}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}(A, c) \rightarrow \text{незавсобытия}(\lambda_y(\text{элементы}(c) \setminus A(y), y \in \text{Dom}(A)), c))$$

из теоремы

$$\forall_{cdA}(d - \text{set} \ \& \ d \subseteq \text{Dom}(A) \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(c) \ \& \ A - \text{функция} \ \& \ \text{верпространство}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}(A, c) \rightarrow \text{незавсобытия}(\lambda_y((\text{элементы}(c) \setminus A(y) \text{ при } y \in d, \text{ иначе } A(y)), y \in \text{Dom}(A)), c))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. В терме x_9 рассматривается вхождение x_{10} символа "вариант", расположенное внутри вхождения x_{11} описателя "отображение". Переменной x_{12} присваивается связывающая приставка описателя, переменной x_{13} - первый операнд условного выражения x_{10} (т.е. переключатель). В нашем примере x_{12} - одноэлементный список, состоящий из переменной y ; терм x_{13} имеет вид " $y \in d$ ". Проверяется, что этот терм содержит переменную списка x_{12} . Переменной x_{14} присваивается предпоследний операнд описателя x_{11} (он определяет условие на варьируемую переменную). В нашем примере x_{14} имеет вид " $y \in \text{Dom}(A)$ ".

Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{15} присваивается кванторная импликация "длялюбого(x_{12} если x_{14} то x_{13})", а переменной x_{16} - 0. Во втором случае переменной x_{15} присваивается кванторная импликация "длялюбого(x_{12} если x_{14} от не(x_{13}))", а переменной x_{16} - 1. В нашем примере x_{15} имеет вид " $\forall_y(y \in \text{Dom}(A) \rightarrow y \in d)$ ", а x_{16} равно 0.

Проверяется, что параметры терма x_{15} включаются в параметры терма x_9 . Переменной x_{17} присваивается результат упрощения терма x_{15} относительно посылок x_8 задачей на преобразование. В нашем примере он имеет вид " $\text{Dom}(A) \subseteq d$ ". Проверяется, что утверждение x_{17} элементарно. Переменной x_{19} присваивается результат добавления x_{17} к списку x_8 . Переменной x_{20} присваивается результат замены вхождения x_{10} в терм x_9 на второй операнд условного выражения x_{10} в случае $x_{16} = 0$ и на последний его операнд в случае $x_{16} = 1$. Затем создается импликация с антецедентами x_{19} и консеквентом x_{20} . Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "Числатом" и регистрируется в списке вывода.

Обобщение теоремы

1. Усиление теоремы путем ввода вспомогательной переменной для подтерма, не содержащего аргумента отображения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cin}(\neg(c = 0) \ \& \ \neg(n = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ c - \text{целое} \rightarrow \\ \text{периодична}(\lambda_b(\sin(i + bc), b - \text{число}), 2\pi n/c))$$

из теоремы

$$\forall_{ain}(\neg(a = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow \\ \text{периодична}(\lambda_b(\sin(i + 2\pi bn/a), b - \text{число}), a))$$

Проверяется, что теорема не имеет характеристики "определение(...)". Переменной x8 присваивается консеквент, переменной x9 - список антецедентов. В терме x8 рассматривается вхождение x10 описателя "отображение". Переменной x11 присваивается его связывающая приставка. В нашем примере x10 - вхождение подтерма " $\lambda_b(\sin(i + 2\pi bn/a), b - \text{число}), a$ ". Выбирается переменная x12 списка x11. В нашем примере - b . Переменной x13 присваивается вхождение последнего операнда описателя (он определяет значения функции). Внутри x13 выбирается вхождение x14 переменной x12. Предпринимается попытка, стартуя с x14 и продвигаясь к вхождению x13, определить не содержащий переменной x12 терм x18 - "коэффициент" при x12. Допускаются простейшие преобразования. При этом переменной x16 присваивается та операция, применение которой к x18 и переменной x12 дает выражение, равное исходному подтерму вхождения x13. Переменной x17 присваивается номер операнда x12 при соединении его с x18 операцией x16. Переменной x15 присваивается вхождение подтерма x13, равного данному результату соединения.

В нашем примере x16 - "умножение", x17 - 1, x18 имеет вид " $2\pi n/a$ ", x15 - вхождение подтерма " $2\pi bn/a$ ".

Проверяется, что x18 - неоднобуквенный подтерм. Переменной x19 присваивается список переменных терма x8, имеющих вхождения вне подтерма x10. В нашем примере - единственная переменная a . Переменной x20 присваивается пересечение списка параметров терма x18 со списком x19. Проверяется, что оно одноэлементное, и переменной x21 присваивается этот элемент. В нашем примере - a .

Проверяется, что параметры терма x18 включаются в параметры антецедентов. Переменной x22 присваивается список антецедентов, содержащих переменную x21. В нашем примере - " $\neg(a = 0)$ " и " $a - \text{число}$ ". Определяется тип t значения выражения x18. В нашем примере - "число". Выбирается переменная x24, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - c . Переменной x25 присваивается результат добавления к списку x22 равенства выражения x18 переменной x24, переменной x26 - результат добавления к не входящим в список x22 антецедентам утверждения " $t(x24)$ ". В нашем примере - утверждения " $c - \text{число}$ ".

Решается задача на описание x_{27} , посылки которой суть утверждения x_{26} , а условия - x_{25} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "известные x_{21} ". Ответ задачи присваивается переменной x_{28} . В нашем примере он имеет вид:

$$\neg(a = 0) \ \& \ c = 0 \ \& \ n = 0 \ \& \ a - \text{число} \ \vee \ \neg(c = 0) \ \& \ \neg(2\pi n/c = 0) \ \& \\ a = 2\pi n/c \ \& \ 2\pi n/c - \text{число}$$

Проверяется, что этот ответ отличен от символа "отказ". Среди дизъюнктивных членов ответа выбирается утверждение x_{29} . В нашем примере - второй дизъюнктивный член. Переменной x_{30} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{29} . В нем выбирается равенство x_{31} с переменной x_{21} в левой части. В нашем примере - равенство " $a = 2\pi n/c$ ". Если x_{17} равно 1, то переменной x_{32} присваивается выражение " $x_{16}(x_{12}, x_{24})$ ", иначе - выражение " $x_{16}(x_{24}, x_{12})$ ". В нашем примере - bc . Переменной x_{33} присваивается результат замены вхождения x_{15} в терм x_8 на x_{32} . В нашем примере - "периодична($\lambda_b(\sin(i + bc), b - \text{число}), a$)". Переменной x_{34} присваивается результат подстановки правой части равенства x_{31} вместо переменной x_{21} в терм x_{33} . Переменной x_{35} присваивается объединение списка x_{26} с отличными от x_{31} элементами набора x_{30} . Затем создается импликация с антецедентами x_{35} и консеквентом x_{34} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Варьирование теоремы для приема подбора последовательности, удовлетворяющей заданному условию - случай кванторной импликации (наложение условия на неизвестную функцию).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ \forall_c(c - \text{натуральное} \rightarrow b(c) = a) \rightarrow \lim(\lambda_c(b(c), c - \text{натуральное})) = a)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \lim(\lambda_c(a, c - \text{натуральное})) = a)$$

Теорема создается для приема, подбирающего пример последовательности с заданным пределом: второй антецедент будет замещать условие задачи.

Переменной x_8 присваивается консеквент, переменной x_9 - список антецедентов. В терме x_8 рассматривается вхождение x_{10} описателя "отображение". Переменной x_{11} присваивается его связывающая приставка. В нашем примере x_{10} - вхождение подтерма " $\lambda_c(a, c - \text{натуральное})$ ". Проверяется, что список x_{11} одноэлементный, и переменной x_{12} присваивается его элемент. В нашем примере x_{12} - переменная c . Переменной x_{13} присваивается предпоследний операнд описателя x_{10} (он определяет условие на варьируемую переменную). Проверяется, что этот операнд имеет вид " $\text{натуральное}(x_{12})$ ". Переменной x_{14} присваивается последний операнд описателя (он определяет значение функции). Выбирается переменная x_{15} , не входящая в теорему. В нашем примере - переменная b . Переменной x_{16} присваивается утверждение "длялюбого(x_{12} если

натуральное(x_{12}) то равно($x_{15}(x_{12}) x_{14}$)". В нашем примере x_{16} имеет вид " $\forall_c(c - \text{натуральное} \rightarrow b(c) = a)$ ". Переменной x_{17} присваивается выражение "отображение(x_{12} натуральное(x_{12}) значение($x_{15} x_{12}$))". В нашем примере - " $\lambda_c(b(c), c - \text{натуральное})$ ". Переменной x_{18} присваивается результат замены вхождения x_{10} в терм x_8 на x_{17} . Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x_9 и утверждение x_{16} , а консеквент - x_{18} . Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "подбор($x_{15} N$)", где N - номер последнего антецедента.

2. Варьирование теоремы для приема подбора последовательности, удовлетворяющей заданному условию - случай кванторной импликации (подбор значения неизвестной).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b = \lambda_c(a, c - \text{натуральное}) \rightarrow \text{lim}(b) = a)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \text{lim}(\lambda_c(a, c - \text{натуральное})) = a)$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_8 присваивается консеквент, переменной x_9 - список антецедентов. В терме x_8 рассматривается вхождение x_{10} описателя "отображение". Переменной x_{11} присваивается его связывающая приставка. В нашем примере x_{10} - вхождение подтерма " $\lambda_c(a, c - \text{натуральное})$ ". Проверяется, что список x_{11} одноэлементный, и переменной x_{12} присваивается его элемент. В нашем примере x_{12} - переменная c . Переменной x_{13} присваивается предпоследний операнд описателя x_{10} (он определяет условие на варьируемую переменную). Проверяется, что этот операнд имеет вид "натуральное(x_{12})". Переменной x_{14} присваивается последний операнд описателя (он определяет значение функции). Выбирается переменная x_{15} , не входящая в теорему. В нашем примере - переменная b .

Дальше начинаются отличия. Переменной x_{16} присваивается результат добавления к списку x_9 равенства переменной x_{15} подтерму x_{10} . Переменной x_{17} присваивается результат замены вхождения x_{10} в терм x_8 на переменную x_{15} . Затем создается импликация с антецедентами x_{16} и консеквентом x_{17} . Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "подбор($x_{15} N$)", где N - номер последнего антецедента.

3. Варьирование теоремы для приема подбора последовательности, удовлетворяющей заданному условию - случай бескванторной теоремы (наложение условия на неизвестную функцию).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(\forall_b(b - \text{натуральное} \rightarrow a(b) = b) \rightarrow \text{lim}(\lambda_b(a(b), b - \text{натуральное})) = \infty)$$

из теоремы

$$\lim(\lambda_b(b, b - \text{натуральное})) = \infty$$

Проверяется, что заголовок теоремы отличен от символа "длялюбого". Переменной x8 присваивается вхождение в нее описателя "отображение", переменной x9 - связывающая приставка описателя. Проверяется, что список x9 одноэлементный, и переменной x10 присваивается его элемент. В нашем примере - b . Переменной x11 присваивается предпоследний операнд описателя. Проверяется, что он имеет вид "натуральное(x10)". Переменной x12 присваивается последний операнд описателя (он определяет значение функции).

Выбирается переменная x13, не входящая в теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x14 присваивается утверждение "длялюбого(x10 если натуральное(x10) то равно(значение(x13 x10)x12))". В нашем примере оно имеет вид " $\forall_b(b - \text{натуральное} \rightarrow a(b) = b)$ ". Переменной x15 присваивается выражение "отображение(x10 натуральное(x10) значение(x13 x10))", переменной x16 - результат замены вхождения x8 на терм x15. Затем создается импликация с антецедентом x14 и консеквентом x16. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "подбор(x13 1)".

4. Варьирование теоремы для приема подбора последовательности, удовлетворяющей заданному условию - случай бескванторной теоремы (подбор значения неизвестной).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a = \lambda_b(b, b - \text{натуральное}) \rightarrow \lim(a) = \infty)$$

из теоремы

$$\lim(\lambda_b(b, b - \text{натуральное})) = \infty$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Проверяется, что заголовок теоремы отличен от символа "длялюбого". Переменной x8 присваивается вхождение в нее описателя "отображение", переменной x9 - связывающая приставка описателя. Проверяется, что список x9 одноэлементный, и переменной x10 присваивается его элемент. В нашем примере - b . Переменной x11 присваивается предпоследний операнд описателя. Проверяется, что он имеет вид "натуральное(x10)". Переменной x12 присваивается последний операнд описателя (он определяет значение функции). Выбирается переменная x13, не входящая в теорему. В нашем примере - переменная a .

Дальше начинаются отличия. Переменной x14 присваивается равенство переменной x13 подтерму x8, переменной x15 - результат замены вхождения x8 на переменную x13. Затем создается импликация с антецедентом x14 и консеквентом x15. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "подбор(x13 1)".

5. Варьирование теоремы для приема подбора последовательности, чья характеристика не равна заданному значению.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bd}(\exists_a(a\text{-число} \& \forall_c(c\text{-натуральное} \rightarrow b(c) = a) \& \neg(a = d)) \rightarrow \neg(\lim(\lambda_c(b(c), c\text{-натуральное})) = d))$$

из теоремы

$$\forall_a(a\text{-число} \rightarrow \lim(\lambda_c(a, c\text{-натуральное})) = a)$$

Начало программы приема совпадает с началом программы одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается консеквент, переменной x9 - список антецедентов. В терме x8 рассматривается вхождение x10 описателя "отображение". Переменной x11 присваивается его связывающая приставка. В нашем примере x10 - вхождение подтерма " $\lambda_c(a, c\text{-натуральное})$ ". Проверяется, что список x11 одноэлементный, и переменной x12 присваивается его элемент. В нашем примере x12 - переменная c . Переменной x13 присваивается предпоследний операнд описателя x10 (он определяет условие на варьируемую переменную). Проверяется, что этот операнд имеет вид " $\text{натуральное}(x12)$ ". Переменной x14 присваивается последний операнд описателя (он определяет значение функции). Выбирается переменная x15, не входящая в теорему. В нашем примере - переменная b . Переменной x16 присваивается утверждение " $\text{длялюбого}(x12\text{ если натуральное}(x12)\text{ то равно}(x15(x12)\ x14))$ ". В нашем примере x16 имеет вид " $\forall_c(c\text{-натуральное} \rightarrow b(c) = a)$ ". Переменной x17 присваивается выражение " $\text{отображение}(x12\ \text{натуральное}(x12)\ \text{значение}(x15\ x12))$ ". В нашем примере - " $\lambda_c(b(c), c\text{-натуральное})$ ". Переменной x18 присваивается результат замены вхождения x10 в терм x8 на x17. В нашем примере - " $\lim(\lambda_c(b(c), c\text{-натуральное})) = a$ ".

Проверяется, что x18 - равенство некоторой переменной x21 выражению, не содержащему этой переменной. Выбирается переменная x22, не входящая в исходную теорему и отличная от переменной x15. В нашем примере - переменная d . Переменной x23 присваивается результат добавления к списку x9 утверждения x16 и утверждения " $\text{не(равно}(x21\ x22))$ ". Переменной x24 присваивается результат навешивания квантора существования по x21 на конъюнкцию утверждений x23. Переменной x25 присваивается результат замены переменной x21 в равенстве x18 на переменную x22. Затем создается импликация с антецедентом x24, консеквентом которой служит отрицание утверждения x25. Эта импликация регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой " $\text{подбор}(x15\ 1)$ ".

6. Переход к теореме, использующей кванторное тождество из контекста для исключения сложного числового атома под описателем "отображение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{afABC}(C\text{-set} \& C \subseteq A \& \text{конечное}(B) \& \text{конечное}(C) \& \text{Отображение}(f, A, B) \& \forall_y(y \in B \rightarrow \text{card}(\text{слой}(\text{сужение}(f, C), y)) = a(y)) \rightarrow \text{card}(C) = \sum_{y,y \in B} a(y))$$

из теоремы

$$\forall_{fABC}(C\text{-set} \& C \subseteq A \& \text{конечное}(B) \& \text{конечное}(C) \& \text{Отображение}(f, A, B) \rightarrow \text{card}(C) = \sum_{y,y \in B} \text{card}(\text{слой}(\text{сужение}(f, C), y)))$$

Выводимая теорема ориентирована на прием, использующий кванторное тождество из контекста для определения мощности множества B .

Проверяется, что теорема имеет характеристику "числзнач" и представляет собой тождество. Переменной x_9 присваивается список антецедентов. В консеквенте рассматривается вхождение x_{10} описателя "отображение". В нашем примере - описатель " $\lambda_y(\text{card}(\text{слой}(\text{сужение}(f, C), y)), i \in B)$ " под конечной суммой. Переменной x_{11} присваивается последний операнд этого описателя (он определяет значение функции). Проверяется, что этот операнд является числовым атомом. Переменной x_{13} присваивается кванторная приставка описателя "отображение" В нашем примере она состоит из единственной переменной y . Проверяется, что x_{10} - единственный операнд внешнего вхождения x_{14} . В нашем примере - вхождения символа "суммавсех".

Выбирается переменная x_{15} , не входящая в теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{16} присваивается утверждение "длялюбого(x_{13} если P то равно(x_{11} значение(x_{15} x_{13})))", где P - предпоследний операнд описателя x_{10} . В нашем примере x_{16} имеет вид " $\forall_y(y \in B \rightarrow \text{card}(\text{слой}(\text{сужение}(f, C), y)) = a(y))$ ". Переменной x_{17} присваивается результат замены в консеквенте теоремы последнего операнда описателя "отображение" на терм "значение(x_{15} x_{13})". В нашем примере x_{17} имеет вид " $\text{card}(C) = \sum_{y, y \in B} a(y)$ ". Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x_9 и утверждение x_{16} . Консеквентом служит x_{17} . Эта импликация регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "кванторныйконтекст".

Вывод теоремы путем доказательства гипотезы

1. Усмотрение эквивалентности для свойства функции, отбрасывающей внешнюю операцию типа отрицания.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_f(\text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \rightarrow \text{сходится}(\lambda_n(-f(n), n - \text{натуральное})) \leftrightarrow \text{сходится}(f))$$

из теоремы

$$\forall_f(\text{сходится}(f) \& \text{последовательность}(f, \mathbb{R}) \rightarrow \text{сходится}(\lambda_n(-f(n), n - \text{натуральное})))$$

Переменной x_8 присваивается консеквент, переменной x_9 - список антецедентов. Проверяется, что теорема - не тождество и не эквивалентность. Проверяется, что консеквент x_8 имеет единственный подтерм максимальной сложности, причем этот подтерм совпадает с консеквентом. Проверяется, что корневое отношение консеквента одноместное, причем его единственным операндом служит описатель "отображение". Переменной x_{11} присваивается список антецедентов, имеющих тот же заголовок, что и консеквент. Проверяется, что этот список одноэлементный, и переменной x_{12} присваивается его единственный элемент. В нашем примере x_{12} имеет вид "сходится(f)".

Проверяется, что корневым операндом антецедента x_{12} служит некоторая переменная x_{13} . Проверяется, что данная переменная имеет единственное вхождение в консеквент. Переменной x_{14} присваивается вхождение переменной x_{13} в терм x_8 . Проверяется, что это вхождение - операнд вхождения x_{15} символа "значение". Переменной x_{16} присваивается второй операнд вхождения x_{15} . В нашем примере - переменная n .

Переменной x_{17} присваивается вхождение первого операнда консеквента x_8 , т.е. вхождение описателя "отображение". Переменной x_{18} присваивается связывающая приставка этого описателя. Проверяется, что она состоит из единственного символа x_{16} . Переменной x_{19} присваивается результат исключения из списка x_9 утверждений x_{11} . Проверяется, что этот результат непуст. При помощи задачи на доказательство устанавливается равенство областей определения функций x_{13} и x_{17} . Посылками служат утверждения x_{19} .

При помощи справочника "отрицание" устанавливается, что для заголовка s последнего операнда x_{20} описателя x_{17} выполняется тождество " $s(s(x)) = x$ ". Проверяется, что первый операнд терма x_{20} равен подтерму x_{15} . Затем создается импликация с антецедентами x_{19} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_8 и x_{12} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Усмотрение эквивалентности для свойства функции, отбрасывающей внешнюю операцию.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ag}(a - \text{число} \ \& \ \text{последовательность}(g, \mathbb{R}) \rightarrow \text{сходится}(\lambda_c(a + g(c)), c - \text{натуральное}) \leftrightarrow \text{сходится}(g))$$

из теоремы

$$\forall_{ag}(a - \text{число} \ \& \ \text{сходится}(g) \ \& \ \text{последовательность}(g, \mathbb{R}) \rightarrow \text{сходится}(\lambda_c(a + g(c), c - \text{натуральное})))$$

Предыдущий прием является частным случаем данного приема. Он был ориентирован на легко распознаваемую операцию типа "отрицание". Программа данного приема в своей начальной части почти полностью воспроизводит программу предыдущего приема. Для удобства чтения повторим ее.

Переменной x_8 присваивается консеквент, переменной x_9 - список антецедентов. Проверяется, что теорема - не тождество и не эквивалентность. Проверяется, что консеквент x_8 имеет единственный подтерм максимальной сложности, причем этот подтерм совпадает с консеквентом. Проверяется, что корневое отношение консеквента одноместное, причем его единственным операндом служит описатель "отображение". Переменной x_{11} присваивается список антецедентов, имеющих тот же заголовок, что и консеквент. Проверяется, что этот список одноэлементный, и переменной x_{12} присваивается его единственный элемент. В нашем примере x_{12} имеет вид "сходится(g)".

Проверяется, что корневым операндом антецедента x_{12} служит некоторая переменная x_{13} . Проверяется, что данная переменная имеет единственное вхождение в консеквент. Переменной x_{14} присваивается вхождение переменной x_{13}

в терм x_8 . Проверяется, что это вхождение - операнд вхождения x_{15} символа "значение". Переменной x_{16} присваивается второй операнд вхождения x_{15} . В нашем примере - переменная c .

Переменной x_{17} присваивается вхождение первого операнда консеквента x_8 , т.е. вхождение описателя "отображение". Переменной x_{18} присваивается связывающая приставка этого описателя. Проверяется, что она состоит из единственного символа x_{16} . Переменной x_{19} присваивается результат исключения из списка x_9 утверждений x_{11} . Проверяется, что этот результат непуст. При помощи задачи на доказательство устанавливается равенство областей определения функций x_{13} и x_{17} . Посылками служат утверждения x_{19} . Переменной x_{20} присваивается последний операнд описателя x_{17} . В нашем примере - " $a + g(c)$ ".

Дальше начинаются отличия. Переменной x_{21} присваивается пересечение списков параметров термов x_8 и x_{20} , из которого удалена переменная x_{13} . В нашем примере оно состоит из единственной переменной a . Проверяется, что список x_{21} непуст. Переменной x_{22} присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого на единицу больше длины списка x_{21} . В нашем примере x_{22} состоит из переменных b, d . Первая из переменных списка x_{22} присваивается переменной x_{23} , набор оставшихся переменных - переменной x_{24} . В нашем примере x_{23} - переменная b , x_{24} состоит из единственной переменной d .

Переменной x_{25} присваивается результат замены вхождения x_{15} в подтерм x_{17} на переменную x_{23} . В нашем примере имеем " $a + b$ ". Переменной x_{26} присваивается результат замены переменных x_{21} на x_{24} в терме x_{25} . В нашем примере имеем " $d + b$ ". Переменной x_{27} присваивается результат подстановки терма x_{26} вместо переменной x_{23} в терм x_{25} . В нашем примере имеем " $a + (d + b)$ ". Переменной x_{28} присваивается результат добавления к списку x_{19} утверждения "принадлежит(x_{23} значения(x_{13}))". Переменной x_{29} присваивается набор результатов замены переменных x_{21} на x_{24} в утверждениях списка x_{19} , имеющих параметр из x_{21} , к которому добавляется равенство выражений x_{27} и x_{23} .

Решается задача на описание x_{30} с посылками x_{28} и условиями x_{29} . Ее цели - "полный", "явное", "прямой ответ", "неизвестные x_{24} ", "параметры x_{24} ". В нашем примере посылки суть " a - число", "последовательность(g, \mathbb{R})", " $b \in \text{Val}(g)$ ". Условия - " d - число", " $a + (d + b) = b$ ". Неизвестной служит переменная d .

Ответ присваивается переменной x_{31} . В нашем примере это константа "истина". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Затем решается задача на преобразование, имеющая посылки x_{28} и условие "существует($x_{24} x_{31}$)". Единственная цель - "нормтеорема". Ответ присваивается переменной x_{33} . В нашем примере это снова константа "истина". Среди дизъюнктивных членов утверждения x_{33} выбирается такой элемент x_{34} , параметры которого не пересекаются со списком x_{22} . В нашем примере x_{34} - "истина". Наконец, создается импликация, antecedentes которой получаются добавлением утверждения x_{34} к списку x_{19} , а консеквентом служит эквивалентность утверждений x_{12} и x_8 . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Преобразование консеквента теоремы с помощью дополнительной эквивалентности

1. Попытка исключить операцию над описателем "отображение" с помощью определения некоторого понятия.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(b\text{-set} \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ \text{разбиение}(b, c) \ \& \ \text{конечные}(c) \ \& \ \text{классмножеств}(c) \rightarrow \text{card}(b) = \sum_{a, a \in c} \text{card}(a))$$

из теоремы

$$\forall_c(\text{конечное}(c) \ \& \ \text{конечные}(c) \ \& \ \text{классмножеств}(c) \ \& \ \text{Разделимы}(c) \rightarrow \text{card}(\bigcup_{a, a \in c} a) = \sum_{a, a \in c} \text{card}(a))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a\text{-set} \ \& \ \text{классмножеств}(b) \rightarrow \text{разбиение}(a, b) \leftrightarrow \text{Разделимы}(b) \ \& \ a = \bigcup_{x, x \in b} x)$$

Переменной x8 присваивается консеквент. В нем рассматривается вхождение x9 описателя "отображение". Это вхождение является единственным операндом внешнего вхождения x10, по которому расположен символ x11. В нашем примере x9 - вхождение подтерма " $\lambda_a(a, a \in c)$ ", x11 - символ "объединениевсех". Справочник поиска теорем "отображ" находит по x11 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x14 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x14 имеет вид:

$$\forall_{bd}(b\text{-set} \ \& \ \text{классмножеств}(d) \rightarrow \text{разбиение}(b, d) \leftrightarrow \text{Разделимы}(d) \ \& \ b = \bigcup_{e, e \in d} e)$$

Переменной x15 присваивается вхождение консеквента теоремы x14. Он представляет собой эквивалентность. Переменной x17 присваивается вхождение той части эквивалентности, которая представляет собой конъюнкцию. Переменной x18 присваивается список операндов этой конъюнкции. Среди них находится равенство x19, в одной из частей которой расположена операция x11 от описателя "отображение". Переменной x22 присваивается эта часть, переменной x23 - подтерм x10. В нашем примере x22 имеет вид " $\bigcup_{e, e \in d} e$ ", x23 - вид " $\bigcup_{a, a \in c} a$ ". Переменной x24 присваивается список параметров термов x22 и x23. В нашем примере - c, d .

Определяется подстановка S вместо переменных x24, унифицирующая термы x22 и x23. Переменной x26 присваивается список результатов применения этой подстановки к антецедентам исходной теоремы и теоремы x14. Переменной x27 присваивается список результатов применения подстановки S к отличным от x19 элементам списка x18. Эти результаты исключаются из списка x26. Переменной x28 присваивается результат применения подстановки S к отличному от x17 операнду консеквента теоремы x14. В нашем примере он имеет вид "разбиение(b, c)". Утверждение x28 присоединяется к списку x26. Переменной

x29 присваивается результат применения подстановки S к подтерму x20. Переменной x30 присваивается результат замены вхождения x10 в терм x8 на терм x29 и одновременной подстановки S вместо вхождений переменных, расположенных вне x10. В нашем примере x30 имеет вид " $\text{card}(b) = \sum_{a,a \in c} \text{card}(a)$ ". Затем создается импликация с антецедентами x26 и консеквентом x30. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.70 Характеристика "отр"

Характеристикой "отр(x1)" снабжаются кванторные тождества вида $f(g(x)) = x$, не имеющие существенных посылок. x1 - символ g .

Логические следствия теоремы

1. Вывод из тождества для самодвойственной операции эквивалентности для равенства с этой операцией.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(c - \text{комплексное} \ \& \ a - \text{комплексное} \rightarrow c = \text{сопряженное}(a) \leftrightarrow \text{сопряженное}(c) = a)$$

из теоремы

$$\forall_c(c - \text{комплексное} \rightarrow \text{сопряженное}(\text{сопряженное}(c)) = c)$$

Переменной x9 присваивается вхождение консеквента. Он представляет собой равенство. Переменной x12 присваивается та часть равенства, которая является переменной, переменной x10 - вхождение другой части равенства. Проверяется, что заголовок подтерма x10 и заголовок его первого операнда совпадают. Этот заголовок присваивается переменной x13. В нашем примере - символ "сопряженное". Переменной x14 присваивается список антецедентов. Проверяется, что корневая связывающая приставка теоремы состоит из единственной переменной x12. Выбирается переменная x15, не входящая в теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x16 присваивается объединение списка x14 со списком результатов замены в утверждениях x14 переменной x12 на x15. Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x17 присваивается эквивалентность равенства " $\text{равно}(x12 \ x13(x15))$ " равенству " $\text{равно}(x13(x12)x15)$ ", во втором - эквивалентность равенства " $\text{равно}(x13(x12)x13(x15))$ " равенству " $\text{равно}(x12 \ x15)$ ". В нашем примере имеет место первый случай. Далее создается импликация с антецедентами x16 и консеквентом x17, которая регистрируется в списке вывода.

3.71 Характеристика "параметризация"

Характеристикой "параметризация" снабжаются эквивалентности с квантором существования в одной из своих частей, которые можно избыточным образом использовать для получения явного параметрического описания.

Логические следствия теоремы

1. Извлечение из явного параметрического описания простых импликаций.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c \in a \ \& \ d \in b \rightarrow (c, d) \in a \times b)$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow \exists_{cd}(f = (c, d) \ \& \ c \in a \ \& \ d \in b))$$

Переменной x10 присваивается вхождение консеквента. Он представляет собой эквивалентность. Переменной x11 присваивается вхождение той части эквивалентности, заголовком которой служит квантор существования. Среди конъюнктивных членов противоположной части выбирается элементарное утверждение x13. В нашем примере - " $f \in a \times b$ ". Создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к антецедентам теоремы подтерма x11, а консеквентом служит x13. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка устранить повторные вхождения переменной путем ввода вспомогательного параметра, если он однозначно определяется прочими переменными.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdef}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow \text{кортеж}(c, f, d \times e) \leftrightarrow \exists_{ab}(c = \text{кортежпар}(a, b) \ \& \ \text{кортеж}(a, f, d) \ \& \ \text{кортеж}(b, f, e)))$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow \text{кортеж}(c, l(c), d \times e) \leftrightarrow \exists_{ab}(c = \text{кортежпар}(a, b) \ \& \ \text{кортеж}(a, l(a), d) \ \& \ \text{кортеж}(b, l(a), e)))$$

Переменной x8 присваивается вхождение консеквента. Он представляет собой эквивалентность. Переменной x10 присваивается вхождение той части эквивалентности, заголовком которой служит квантор существования, переменной x11 - противоположная часть эквивалентности. Проверяется, что утверждение x11 элементарно и имеет повторные вхождения переменных. В нашем примере x11 имеет вид " $\text{кортеж}(c, l(c), d \times e)$ ". Внутри x11 выбирается вхождение x12 неоднобуквенного подтерма x13. В нашем примере x13 - " $l(c)$ ". Проверяется, что x13 имеет единственный параметр, причем этот параметр имеет вхождение в x11 вне подтерма x12. Проверяется отсутствие надтерма вхождения x12, каждый параметр которого имеет вхождение в терме x11 вне данного надтерма.

Выбирается переменная x16, не входящая в исходную теорему. Переменной x17 присваивается результат замены вхождения x12 в терм x11 на переменную x16. В нашем примере - " $\text{кортеж}(c, f, d \times e)$ ". Переменной x18 присваивается список антецедентов теоремы. Проверяется, что он непуст. Переменной x19 присваивается результат добавления к списку x18 утверждения x17. В нашем примере x19 состоит из утверждений " $d - \text{set}$ ", " $e - \text{set}$ ", " $\text{кортеж}(c, f, d \times e)$ ". При помощи задачи на доказательство проверяется, что равенство выражений x16 и x13 (в нашем примере - " $f = l(c)$ ") является следствием утверждений x19.

Переменной x_{21} присваивается параметр терма x_{13} . В нашем примере - c . Переменной x_{22} присваивается последний операнд квантора существования x_{10} , переменной x_{23} - список конъюнктивных членов этого операнда. Переменной x_{24} присваивается связывающая приставка квантора x_{10} . В нашем примере - " a, b ".

Проверяется, что переменная x_{21} имеет единственное вхождение в терм x_{22} , причем в списке x_{23} находится равенство x_{25} с переменной x_{21} в левой части. В нашем примере x_{25} имеет вид " $c = \text{кортежпар}(a, b)$ ". Переменной x_{26} присваивается результат подстановки в равенство выражений x_{16} и x_{13} правой части равенства x_{25} вместо переменной x_{21} . В нашем примере x_{26} имеет вид " $f = l(\text{кортежпар}(a, b))$ ". Переменной x_{27} присваивается результат добавления x_{26} к списку отличных от x_{25} утверждений набора x_{23} .

Решается задача на описание с посылками x_{18} и условиями x_{27} . Цели задачи - "полный", "прямойответ", "попыткаспуска", "упростить", "редуцирование", "нормтеорема", "неизвестные x_{24} ".

В нашем примере посылки задачи суть " $d - \text{set}$ ", " $e - \text{set}$ "; условия - " $l(a) = f$ ", " $\text{кортеж}(a, f, d)$ ", " $\text{кортеж}(b, f, e)$ ". Неизвестные - a, b .

Ответ задачи x_{28} присваивается переменной x_{29} . В нашем примере он имеет вид " $\text{кортеж}(a, f, d) \ \& \ \text{кортеж}(b, f, e)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и не имеет связанных переменных. Создается импликация с антецедентами x_{18} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждения x_{17} результату навешивания квантора существования по x_{24} на конъюнкцию утверждений x_{25} и x_{29} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Извлечение импликации для вывода параметрического описания.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a \subseteq b \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow \exists_c(c - \text{set} \ \& \ a = b \cap c))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow a \subseteq b \leftrightarrow \exists_c(c - \text{set} \ \& \ a = b \cap c))$$

Переменной x_8 присваивается вхождение консеквента. Он представляет собой эквивалентность. Переменной x_{10} присваивается вхождение той части эквивалентности, заголовком которой служит квантор существования, переменной x_{11} - противоположная часть эквивалентности. Проверяется, что утверждение x_{11} элементарно. Создается импликация, антецеденты которой получены добавлением утверждения x_{11} к антецедентам теоремы, а консеквентом служит подтерм x_{10} . Эта импликация регистрируется в списке вывода.

4. Попытка вывести равенство для мощностей классов при усмотрении однозначной разрешимости параметризующего выражения относительно параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(d - \text{set} \rightarrow \text{card}(\text{set}_{ab}(\text{card}(a) = 1 \ \& \ a \subseteq d \ \& \ c(a, b))) = \text{card}(\text{set}_{ab}(a \in d \ \& \ c(\{a\}, b))))$$

из теоремы

$$\forall_{ad}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow \text{card}(a) = 1 \ \& \ a \subseteq d \Rightarrow \exists_b(a = \{b\} \ \& \ b \in d))$$

Проверяется, что теорема не имеет характеристики "общнорм". Переменной x8 присваивается входение консеквента. Он представляет собой эквивалентность. Переменной x10 присваивается входение той части эквивалентности, заголовком которой служит квантор существования, переменной x11 - противоположная часть эквивалентности. Переменной x12 присваивается связывающая приставка квантора x10, переменной x13 - список конъюнктивных членов подкванторного утверждения. В списке x13 выбирается равенство x14, в одной части которого расположена некоторая переменная x17, встречающаяся в терме x11, а в другой - не содержащее переменной x17 выражение x18. В нашем примере x14 имеет вид " $a = \{b\}$ ". Проверяется, что список x13 неоднородный, а список x12 - однородный. Переменной x19 присваивается элемент списка x12. В нашем примере - переменная b . Проверяется, что переменная x19 встречается в терме x18. Переменной x20 присваивается список антецедентов теоремы.

Решается задача на описание x22, посылками которой служат утверждения x20, условиями - утверждения x13, а цели - "полный", "явное", "прямойответ", "функционально", "неизвестные x19". В нашем примере посылки суть " $a - \text{set}$ ", " $d - \text{set}$ ", а условия - " $a = \{b\}$ ", " $b \in d$ ". Неизвестной служит b . Ответ задачи присваивается переменной x23. В нашем примере он имеет вид " $b = \text{элемент}(a) \ \& \ b \in d$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ".

Переменной x24 присваивается список конъюнктивных членов утверждения x23. В нем выбирается равенство x25 с переменной x19 в левой части. Проверяется, что эта переменная не входит в правую часть. Выбирается переменная x26, не входящая в теорему. В нашем примере - переменная c .

Переменной x27 присваивается выражение "мощность(класс(x17 x19 P)), где P - конъюнкция утверждения x11 и терма "значение(x26 набор(x17 x19))". В нашем примере x27 имеет вид " $\text{card}(\text{set}_{ab}(\text{card}(a) = 1 \ \& \ a \subseteq d \ \& \ c(a, b)))$ ". Переменной x28 присваивается список результатов замены переменной x19 на x17 в отличных от x14 элементах списка x13. Переменной x29 присваивается результат такой же замены в терме x18. В нашем примере x28 состоит из единственного утверждения " $a \in d$ ", x29 - выражение " $\{a\}$ ". Переменной x30 присваивается выражение "мощность(класс(x17 x19 Q))", где Q - конъюнкция утверждений списка x28 и терма "значение(x26 набор(x29 x19))". В нашем примере x30 имеет вид " $\text{card}(\text{set}_{ab}(a \in d \ \& \ c(\{a\}, b)))$ ".

Переменной x31 присваивается результат обработки утверждений x20 оператором "нормантецеденты" относительно параметров термов x27 и x30. Затем создается импликация с антецедентами x31, консеквентом которой служит равенство выражений x27 и x30. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "упрощэkv(второйтерм)".

5. Попытка перейти от параметрического задания класса к обычному.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{am}(m - \text{целое} \rightarrow \text{set}_n(\exists_k(n = km \ \& \ k - \text{целое}) \ \& \ n \in a) = \text{set}_n(n - \text{целое} \ \& \ m \mid n \ \& \ n \in a))$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m \mid n \leftrightarrow \exists_k(k - \text{целое} \ \& \ n = mk))$$

Переменной x8 присваивается вхождение консеквента. Он представляет собой эквивалентность. Переменной x10 присваивается вхождение той части эквивалентности, заголовком которой служит квантор существования, переменной x11 - противоположная часть эквивалентности. Проверяется, что утверждение x11 элементарно. Проверяется отсутствие у теоремы существенных antecedентов. Переменной x12 присваивается связывающая приставка квантора x10, переменной x13 - список конъюнктивных членов подкванторного утверждения.

В списке x13 выбирается равенство x14, в одной части которого расположена некоторая переменная x15, а в другой - не содержащее переменной x15 выражение x21. В нашем примере x14 имеет вид " $n = mk$ ". Переменной x16 присваивается подтерм x10. Выбирается переменная x17, не входящая в теорему. В нашем примере - a . Переменной x18 присваивается список antecedентов теоремы. Он разбивается на подсписок x19 утверждений, содержащих x15, и подсписок x20 остальных утверждений.

Переменной x22 присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x12 на конъюнкцию утверждений списка x13 и результатов подстановки выражения x21 вместо переменной x15 в утверждения списка x19. В нашем примере x22 имеет вид " $\exists_k(k - \text{целое} \ \& \ n = mk \ \& \ mk - \text{целое})$ ". Переменной x25 присваивается результат упрощения терма x22 задачей на преобразование относительно посылок x20. Цели задачи - "упростить" и "нормтеорема". В нашем примере x25 имеет вид " $\exists_k(k - \text{целое} \ \& \ n = mk)$ ".

Переменной x26 присваивается выражение "класс(x15 и(x25 принадлежит(x15 x17)))". В нашем примере - " $\text{set}_n(\exists_k(n = km \ \& \ k - \text{целое}) \ \& \ n \in a)$ ". Переменной x27 присваивается выражение "класс(x15 и(x19 x11 принадлежит(x15 x17)))". В нашем примере - " $\text{set}_n(n - \text{целое} \ \& \ m \mid n \ \& \ n \in a)$ ". Затем создается импликация с antecedентами x20, консеквентом которой служит равенство выражений x26 и x27. Она регистрируется в списке вывода.

6. Попытка усмотреть транзитивность.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abx}(\neg(a = \text{вектор}0) \ \& \ \neg(b = \text{вектор}0) \ \& \ \text{коллинеарны}(a, b) \ \& \ \text{коллинеарны}(a, x) \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Вектор}(x) \rightarrow \text{коллинеарны}(b, x))$$

из теоремы

$$\forall_{ax}(\neg(a = \text{вектор}0) \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(x) \rightarrow \text{коллинеарны}(a, x) \leftrightarrow \exists_y(x = ya \ \& \ y - \text{число}))$$

В качестве умножения здесь фигурирует операция "умножвект" умножение вектора на число.

Переменной x8 присваивается входение консеквента. Он представляет собой эквивалентность. Переменной x10 присваивается входение той части эквивалентности, заголовком которой служит квантор существования, переменной x11 - противоположная часть эквивалентности. Переменной x12 присваивается связывающая приставка квантора x10, переменной x13 - список конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Переменной x14 присваивается список равенств, содержащихся в списке x13. В нашем примере - единственное равенство $x = ya$. Переменной x15 присваивается остаток списка x13. Переменной x16 присваивается список заголовков левых частей равенств x14. Проверяется, что эти заголовки - попарно различные переменные. В нашем примере x16 - единственная переменная x . Проверяется, что списки x16 и x12 не пересекаются. Переменной x18 присваивается список правых частей равенств x14. В нашем примере - единственное выражение " ya ".

Переменной x19 присваивается набор наборов не входящих в список x12 параметров утверждений списка x18. В нашем примере x19 состоит из единственного одноэлементного набора, содержащего переменную a . Проверяется, что все наборы списка x19 одноэлементные и состоят из различных переменных. Переменной x20 присваивается список этих переменных.

Переменной x21 присваивается результат переобозначения переменных теоремы на переменные, не входящие в нее. В нашем примере x21 имеет вид:

$$\forall_{bc}(\neg(b = \text{вектор}0) \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Вектор}(c) \rightarrow \text{коллинеарны}(b, c) \leftrightarrow \exists_d(c = db \ \& \ d - \text{число}))$$

Переменной x22 присваивается корневая связывающая приставка исходной теоремы, переменной x23 - корневая связывающая приставка теоремы x21. В нашем примере x22 имеет вид a, x , x23 - b, c . Переменной x24 присваивается список переменных набора x23, соответствующих входениям в набор x22 переменных x16. В нашем примере x24 состоит из единственной переменной c , соответствующей переменной x . Переменной x25 присваивается результат замены в теореме x21 переменных x24 на переменные x20. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{ba}(\neg(b = \text{вектор}0) \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Вектор}(a) \rightarrow \text{коллинеарны}(b, a) \leftrightarrow \exists_d(a = db \ \& \ d - \text{число}))$$

Переменной x26 присваивается входение консеквента теоремы x25. Этот консеквент является эквивалентностью. Переменной x28 присваивается входение той ее части, которая является квантором существования, переменной x27 - входение другой части. Переменной x29 присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором x28, переменной x30 - список равенств, содержащихся в наборе x29. В нашем примере - единственное равенство " $a = db$ ". Переменной x31 присваивается список заголовков левых частей равенств x30, переменной x32 - список правых частей. Переменной x33 присваивается список результатов подстановки термов x32 вместо переменных x31 в выражения x18. В нашем примере - единственный терм " $y(db)$ ". Переменной x34 присваивается связывающая приставка квантора x28, переменной x35 - список не входящих

в исходную теорему и в теорему x21 переменных, длина которого равна длине списка x34. В нашем примере x35 состоит из единственной переменной e . Переменной x36 присваивается список результатов замены переменных x34 на x35 в выражениях набора x32. В нашем примере x36 состоит из единственного термина eb . Переменной x37 присваивается список равенств выражений списка x33 соответствующим выражениям списка x36. В нашем примере - единственное равенство " $y(db) = eb$ ".

Переменной x38 присваивается список результатов замены переменных x34 на x35 в утверждениях списка x29, не вошедших в список x30. В нашем примере x38 состоит из единственного утверждения " e — число". Переменной x39 присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x35 на конъюнкцию утверждений x37 и x38. В нашем примере - " $\exists_e(y(db) = eb \ \& \ e \text{ — число})$ ". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x40 - следствие антецедентов теоремы x25, утверждений x15 и не вошедших в список x30 утверждений x29.

Переменной x42 присваивается список переменных набора x23, соответствующих вхождению переменных x20 в набор x22. В нашем примере x42 состоит из единственной переменной b . Переменной x44 присваивается объединение списков антецедентов исходной теоремы и теоремы x25, а также списка результатов замены переменных x20 на x42 в антецедентах исходной теоремы. К нему добавляются утверждение x11 и подтерм x27. Переменной x45 присваивается результат замены переменных x20 на x42 в утверждении x11. Затем создается импликация с антецедентами x44 и консеквентом x45. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Варьирование параметрического описания с помощью дополнительной теоремы

1. Попытка преобразования небиективного параметрического описания в биективное.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow b \subseteq a \leftrightarrow \exists_c(c - \text{set} \ \& \ a = b \cup c \ \& \ \text{непересек}(b, c))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow b \subseteq a \leftrightarrow \exists_c(c - \text{set} \ \& \ a = b \cup c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, b) \rightarrow (a \cup b) \setminus a = b)$$

Проверяется, что теорема не имеет характеристик "биекция" и "связка". Переменной x8 присваивается вхождение консеквента. Он представляет собой эквивалентность. Переменной x10 присваивается вхождение той части эквивалентности, заголовком которой служит квантор существования, переменной x11 - противоположная часть эквивалентности. Переменной x12 присваивается связывающая приставка квантора x10, переменной x13 - список конъюнктивных членов утверждения под этим квантором. Среди них находится равенство x14

не входящей в список x_{12} переменной x_{15} некоторому выражению x_{16} . В нашем примере x_{15} - " a ", x_{16} - " $b \cup c$ ". Проверяется, что число корневых операндов выражения x_{16} равно 2, причем одним из этих операндов служит переменная x_{19} списка x_{12} , а другим - выражение x_{20} , не содержащее переменных x_{12} . В нашем примере x_{19} - " c ", x_{20} - " b ". Справочник поиска теорем "поглощается" находит по заголовку выражения x_{16} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{23} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{23} имеет вид:

$$\forall_{de}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(d, e) \rightarrow (d \cup e) \setminus d = e)$$

Консеквент теоремы x_{23} - равенство. Переменной x_{27} присваивается переменная в одной из частей этого равенства, переменной x_{26} - вхождение другой части равенства. Один из операндов вхождения x_{26} представляет собой некоторую переменную x_{30} , другой операнд присваивается переменной x_{31} . В нашем примере x_{31} имеет вид " $d \cup e$ ".

Переменной x_{32} присваивается корневая связывающая приставка теоремы x_{23} . Проверяется, что терм x_{31} включает все ее переменные. Определяется подстановка S вместо переменных x_{32} , унифицирующая термы x_{31} и x_{16} . Проверяется, что эта подстановка переводит переменную x_{30} в x_{20} . Переменной x_{34} присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_{23} , переменной x_{35} - объединение списков x_{13} и x_{34} . Переменной x_{36} присваивается список антецедентов исходной теоремы. Элементы списка x_{36} исключаются из списка x_{35} . В итоге x_{35} состоит из утверждений " $c - \text{set}$ ", " $a = b \cup c$ ", " $\text{непересек}(b, c)$ ". Переменной x_{37} присваивается результат добавления к списку x_{36} утверждения x_{11} . Переменной x_{38} присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x_{12} на конъюнкцию утверждений x_{35} . При помощи задачи на доказательство проверяется, что x_{38} - следствие утверждений x_{37} . Затем создается импликация с антецедентами x_{36} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{11} и x_{38} . Она регистрируется в списке вывода.

2. Попытка получения параметрического описания для подтипа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcei}(e - \text{set} \ \& \ b \in e \ \& \ i - \text{натуральное} \ \& \ 0 \leq -i + \text{card}(e) \ \& \ \text{конечное}(e) \rightarrow \text{перестановка}(c, e) \ \& \ b = c(i) \leftrightarrow \exists_a(\text{перестановка}(a, e \setminus \{b\}) \ \& \ c = \text{Вставка}(a, i, b))$$

из теоремы

$$\forall_{bci}(i - \text{натуральное} \ \& \ i \leq l(c) \rightarrow c - \text{слово} \ \& \ b = c(i) \leftrightarrow \exists_a(a - \text{слово} \ \& \ i \in \{1, \dots, l(a) + 1\} \ \& \ c = \text{Вставка}(a, i, b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(b) \ \& \ \text{перестановка}(a, b) \rightarrow a - \text{слово})$$

Переменной x_8 присваивается вхождение консеквента. Он представляет собой эквивалентность. Переменной x_{10} присваивается вхождение той части эквивалентности, заголовком которой служит квантор существования, переменной x_{11}

- набор конъюнктивных членов противоположной части. В списке x11 выбирается утверждение x12 с единственным корневым операндом, представляющим собой некоторую переменную x13. В нашем примере x12 имеет вид "c – слово". Справочник поиска теорем "подтип" определяет по заголовку утверждения x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x16 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x16 имеет вид:

$$\forall_{de}(e - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(e) \ \& \ \text{перестановка}(d, e) \rightarrow d - \text{слово})$$

Переменной x17 присваивается вхождение консеквента теоремы x16, переменной x18 - переменная, являющаяся операндом вхождения x17. В нашем примере x18 - переменная d . Переменной x19 присваивается список антецедентов теоремы x16. В нем выбирается утверждение x20, содержащее переменную x18. В нашем примере x20 - утверждение "перестановка(d, e)". Переменной x21 присваивается результат замены в терме x20 переменной x18 на x13. В нашем примере x21 имеет вид "перестановка(c, e)". Переменной x22 присваивается конъюнкция утверждений списка, полученного из x11 заменой утверждения x12 на x21. В нашем примере x22 имеет вид " $b = c(i) \ \& \ \text{перестановка}(c, e)$ ". Переменной x23 присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы, к которым добавляются отличные от x20 утверждения списка x19.

Переменной x24 присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором x10, переменной x25 - связывающая приставка этого квантора. В списке x24 находится равенство x26 с переменной x13 в левой части. В нашем примере - " $c = \text{Вставка}(a, i, b)$ ". Переменной x27 присваивается правая часть данного равенства. Переменной x28 присваивается результат подстановки выражения x27 вместо переменной x13 в утверждение x21. В нашем примере x28 имеет вид "перестановка($\text{Вставка}(a, i, b), e$)". Переменной x29 присваивается результат замены в списке x24 утверждения x26 на x28.

Решается задача на описание x30, посылками которой служат утверждения x23, а условиями - x29. Цели задачи - "полный", "прямойответ", "попыткаспуска", "упростить", "неизвестные x25". В нашем примере посылки суть " i – натуральное", " $i \leq l(e)$ ", " $e - \text{set}$ ", "конечное(e)". Условия суть " $a - \text{слово}$ ", " $i \in \{1, \dots, l(a) + 1\}$ ", "перестановка($\text{Вставка}(a, i, b), e$)". Неизвестная - a .

Ответ задачи присваивается переменной x31. В нашем примере он имеет вид "перестановка($a, e \setminus \{b\}$) & $b \in e$ & $0 \leq -i + \text{card}(e)$ ". Проверяется, что этот ответ отличен от символа "отказ". Переменной x32 присваивается список конъюнктивных членов утверждения x31, переменной x33 - подсписок списка x32, образованный утверждениями, содержащими переменные списка x25. Переменной x34 присваивается объединение списка x23 с не вошедшими в список x33 утверждениями набора x32. Переменной x35 присваивается эквивалентность утверждения x22 результату навешивания квантора существования по переменным x25 на конъюнкцию утверждения x33 и x26. В нашем примере x35 имеет вид " $b = c(i) \ \& \ \text{перестановка}(c, e) \leftrightarrow \exists_a(\text{перестановка}(a, e \setminus \{b\}) \ \& \ c = \text{Вставка}(a, i, b))$ ". Список x34 состоит из утверждений " i – натуральное", " $0 \leq -i + l(e)$ ", " $e - \text{set}$ ", "конечное(e)", " $b \in e$ ", " $0 \leq -i + \text{card}(e)$ ".

Далее начинается ветвь программы, выполняющая коррекцию списка х34. Переменной х36 присваивается список всех содержащих переменную х13 утверждений списка х34. В нашем примере - единственное утверждение " $0 \leq -i + l(c)$ ". Проверяется, что список х36 не пуст, и переменной х37 присваивается объединение не вошедших в х36 утверждений х34 с конъюнктивными членами утверждения х22. Переменной х38 присваивается список максимальных надвыражений вхождений переменной х13 в утверждения списка х36. Если хотя бы одно из таких надвыражений совпадает с х13, то коррекция списка х34 отменяется. Иначе - проверяется непустота списка х38. В нашем примере этот список состоит из выражения " $-i + l(c)$ ". Переменной х39 присваивается список переменных, не входящих в термы списка х37 и в х35, причем имеющий ту же длину, что список х38. В нашем примере х39 состоит из переменной d . Переменной х40 присваивается список равенств выражений х38 соответствующим переменным х39. В нашем примере - единственное равенство " $d = -i + l(c)$ ".

Решается задача на описание х41 с посылками х37 и условиями х40. Цели ее - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные х39", "известно А", где А - список отличных от х13 параметров утверждений х37. В нашем примере неизвестная - d , известные параметры - b, e, i . Посылки суть " i - натуральное", " e - set", "конечное(e)", " $b \in e$ ", " $0 \leq -i + \text{card}(e)$ ", " $b = c(i)$ ", "перестановка(c, e)". Ответ задачи присваивается переменной х42. В нашем примере он имеет вид " $d = -i + \text{card}(e)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной х43 присваивается список конъюнктивных членов утверждения х42. Просматривается список х39, и для каждой его переменной X рассматривается равенство списка х39 с этой переменной в левой части. Формируется пара (выражение списка х38, соответствующее переменной X - правая часть равенства). Список таких пар присваивается переменной х44. В нашем примере он состоит из единственной пары (" $-i + l(c)$ ", " $-i + \text{card}(e)$ "). Переменной х45 присваивается список результатов замены в утверждении х36 первых элементов пар х44 на вторые элементы. В нашем примере х45 состоит из единственного утверждения " $0 \leq -i + \text{card}(e)$ ". Предпринимается замена в списке х34 утверждений х36 на х45, и коррекция списка х34 завершается.

По окончании коррекции списка х34 создается импликация с антецедентами х34 и консеквентом х35. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Попытка исключения кванторной импликации в параметризуемом условии путем перехода к более сильному элементарному утверждению.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow \text{кортеж}(c, l(c), d \times e) \leftrightarrow \exists_{ab}(c = \text{кортежпар}(a, b) \ \& \ \text{кортеж}(a, l(a), d) \ \& \ \text{кортеж}(b, l(a), e)))$$

из теоремы

$$\forall_c(\forall_i(i \in \{1, \dots, l(c)\} \rightarrow l(c(i)) = 2 \ \& \ c(i) - \text{слово}) \ \& \ c - \text{слово} \leftrightarrow \exists_{ab}(c = \text{кортежпар}(a, b) \ \& \ l(a) = l(b) \ \& \ a - \text{слово} \ \& \ b - \text{слово}))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ f \in a \times b \rightarrow l(f) = 2)$$

Переменной x8 присваивается вхождение консеквента. Он представляет собой эквивалентность. Переменной x10 присваивается вхождение той части эквивалентности, заголовком которой служит квантор существования, переменной x11 - противоположная часть. Проверяется, что эта часть не является элементарным утверждением, и переменной x12 присваивается список ее конъюнктивных членов. В нем выбирается утверждение x13, представляющее собой кванторную импликацию. В нашем примере - " $\forall_i(i \in \{1, \dots, l(c)\} \rightarrow l(c(i)) = 2 \ \& \ c(i) - \text{слово})$ ". Переменной x14 присваивается остаток списка x12. Переменной x15 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x16 - список антецедентов импликации x13. Проверяется, что список x16 непуст. Переменной x17 присваивается объединение списков x15, x16 и x14, переменной x18 - список конъюнктивных членов консеквента импликации x13. В списке x18 рассматривается равенство x19. В нашем примере - " $l(c(i)) = 2$ ". Проверяется, что оно имеет единственный невырожденный числовой атом x21, причем этот атом - одна из частей равенства. В нашем примере x21 имеет вид " $l(c(i))$ ". Переменной x24 присваивается заголовок терма x21. В нашем примере - "длинанабора". Справочник поиска теорем "числатом" определяет по x24 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x27 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x27 имеет вид:

$$\forall_{def}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f \in d \times e \rightarrow l(f) = 2)$$

Переменной x28 присваивается консеквент теоремы x27, переменной x29 - список параметров этого консеквента. В нашем примере x29 состоит из единственной переменной f . Определяется подстановка S вместо переменных x29, унифицирующая термы x28 и x19. Переменной x31 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x27. Переменной x32 присваивается связывающая приставка квантора x13. Список x31 разбивается на подсписок x33 утверждений, содержащих переменные x32, и подсписок x34 остальных утверждений.

Переменной x35 присваивается объединение списков x15 и x34, переменной x36 - результат замены в списке x12 кванторной импликации x13 на импликацию "длялюбого(x32 если x16 то P)", где P - конъюнкция отличных от x19 утверждений списка x18 и утверждений x33. В нашем примере заменяющая импликация имеет вид " $\forall_i(i \in \{1, \dots, l(c)\} \rightarrow c(i) - \text{слово} \ \& \ c(i) \in d \times e)$ ". Список x35 состоит из утверждений " $d - \text{set}$ " и " $e - \text{set}$ ".

Решается задача на описание x37 с посылками x35 и условиями x36. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "редакция", "свертка". Ответ присваивается переменной x38. В нашем примере он имеет вид " $\text{кортеж}(c, l(c), d \times e)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и не имеет связанных переменных. Переменной x39 присваивается связывающая приставка квантора существования x10, переменной x40 - список конъюнктивных членов утверждения под этим квантором. В списке x40 находится равенство x41 с некоторой переменной x42 в левой части. Проверяется, что эта переменная входит в терм

x38; переменной x43 присваивается правая часть равенства x41. В нашем примере x41 имеет вид " $c = \text{кортежпар}(a, b)$ ", x42 - переменная c . Проверяется, что переменная x42 имеет единственное вхождение в подтерм x10.

Переменной x44 присваивается результат подстановки терма x43 вместо переменной x42 в терм x38. В нашем примере он имеет вид " $\text{кортеж}(\text{кортежпар}(a, b), l(\text{кортежпар}(a, b)), d \times e)$ ". Переменной x45 присваивается результат замены в списке x40 элементов x41 на x44. Затем решается задача на описание x46, послышки которой суть утверждения x35, условия - x45, а цели - "полный", "прямой-ответ", "попыткаспуска", "упростить", "редуцирование", "неизвестные x39". В нашем примере условия задачи суть " $l(a) = l(b)$ ", " a - слово", " b - слово", " $\text{кортеж}(\text{кортежпар}(a, b), l(\text{кортежпар}(a, b)), d \times e)$ ". Неизвестные задачи - a, b .

Ответ задачи x46 присваивается переменной x47. В нашем примере он имеет вид " $\text{кортеж}(a, l(a), d) \ \& \ \text{кортеж}(b, l(a), e)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и не имеет связанных переменных. Переменной x48 присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x39 на конъюнкцию утверждений x47 и x41. Затем создается импликация с антецедентами x35, консеквентом которой является эквивалентность утверждений x38 и x48. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Использование эквивалентности общей стандартизации для рассмотрения дополнительного условия.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ad}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow \text{card}(a) = 1 \ \& \ a \subseteq d \leftrightarrow \exists_b(a = \{b\} \ \& \ b \in d))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \rightarrow \exists_b(a = \{b\}) \leftrightarrow \text{card}(a) = 1)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{be}(e - \text{set} \rightarrow \{b\} \subseteq e \leftrightarrow b \in e)$$

Переменной x8 присваивается вхождение консеквента. Он представляет собой эквивалентность. Переменной x10 присваивается вхождение той части эквивалентности, заголовком которой служит квантор существования, переменной x11 - противоположная часть эквивалентности. Переменной x12 присваивается связывающая приставка квантора x10, переменной x13 - список конъюнктивных членов утверждения под этим квантором. Среди них находится равенство x14 входящей в терм x11 переменной x17 некоторому выражению x18, не содержащему этой переменной. В нашем примере x14 имеет вид " $a = \{b\}$ ", x17 - переменная a . Проверяется, что утверждение x11 элементарно. Переменной x19 присваивается заголовок выражения x18. В нашем примере - символ "перечень". Справочник поиска теорем "упрощлс" находит по x19 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x22 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x22 имеет вид:

$$\forall_{cd}(d - \text{set} \rightarrow \{c\} \subseteq d \leftrightarrow c \in d)$$

Переменной x26 присваивается вхождение заменяемой части эквивалентности x22 согласно ее характеристике "общнорм". В нашем примере - вхождение включения " $\{c\} \subseteq d$ ". Переменной x27 присваивается вхождение того операнда вхождения x26, который имеет заголовок x19, переменной x28 - подтерм x27. Переменной x29 присваивается список параметров терма x28.

Определяется подстановка S вместо переменных x29, унифицирующая термы x28 и x18. Переменной x31 присваивается результат применения этой подстановки к заменяющей части эквивалентности x22. В нашем примере x31 имеет вид " $b \in d$ ". Переменной x32 присваивается конъюнкция утверждений x13 и x31, переменной x33 - результат навешивания на x32 квантора существования по переменным x12. В нашем примере x33 имеет вид " $\exists_b(a = \{b\} \& b \in d)$ ". Переменной x34 присваивается результат замены вхождения x27 в терм x26 на переменную x17. В нашем примере x34 имеет вид " $a \subseteq d$ ". Переменной x35 присваивается конъюнкция утверждений x11 и x34, переменной x36 - объединение списка антецедентов исходной теоремы и результатов применения подстановки S к антецедентам дополнительной теоремы. Затем создается импликация с антецедентами x36, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x35 и x33.

- Использование тождества обобщенной дистрибутивности для расщепления варьируемой переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{amn}(m|a \& m|n \& a - \text{целое} \& m - \text{целое} \& n - \text{целое} \rightarrow m|(a + n))$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \& n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(k - \text{целое} \& n = mk))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы одного из ранее приведенных приемов. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается вхождение консеквента. Он представляет собой эквивалентность. Переменной x10 присваивается вхождение той части эквивалентности, заголовком которой служит квантор существования, переменной x11 - противоположная часть эквивалентности. Переменной x12 присваивается связывающая приставка квантора x10, переменной x13 - список конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Переменной x14 присваивается список равенств, содержащихся в списке x13. В нашем примере - единственное равенство $n = mk$. Переменной x15 присваивается остаток списка x13. Переменной x16 присваивается список заголовков левых частей равенств x14. Проверяется, что эти заголовки - попарно различные переменные. В нашем примере x16 - единственная переменная n . Проверяется, что списки x16 и x12 не пересекаются.

Переменной x_{18} присваивается список правых частей равенств x_{14} . В нашем примере - единственное выражение " mk ".

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что список x_{12} одноэлементный, и переменной x_{19} присваивается его элемент. В нашем примере - переменная k . Переменной x_{20} присваивается первый элемент списка x_{18} . Проверяется, что его корневая операция имеет ровно два операнда. Переменной x_{21} присваивается заголовок выражения x_{20} . В нашем примере - "умножение". Переменной x_{22} присваивается вхождение того из корневых операндов выражения x_{20} , который представляет собой переменную x_{19} . Проверяется, что эта переменная не встречается в другом корневом операнде.

Переменной x_{24} присваивается номер операнда x_{22} . Нумерация начинается с единицы, причем в случае коммутативной операции x_{24} полагается равным 0. Проверяется, что каждый элемент списка x_{18} имеет заголовок x_{21} и ровно два корневых операнда, один из которых равен x_{19} , а другой - не содержит x_{19} . При этом номер операнда x_{19} равняется x_{24} . Переменной x_{25} присваивается список операндов, отличных от x_{19} . В нашем примере x_{25} состоит из единственного выражения m .

Справочник поиска теорем "дистрибразвертка" определяет по символу x_{21} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{28} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{28} совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x_{32} присваивается вхождение заменяемой части теоремы x_{28} согласно ее характеристике "дистрибразвертка". В нашем примере - вхождение выражения " $a(b + c)$ ". Переменной x_{33} присваивается вхождение того операнда вхождения x_{32} , который представляет собой некоторую переменную x_{35} . Проверяется, что номер другого операнда x_{34} равен x_{24} . Переменным x_{36} , x_{37} присваиваются переменные - операнды вхождения x_{34} . В нашем примере x_{36} - b , x_{37} - c .

Переменной x_{38} присваивается список antecedентов исходной теоремы, переменной x_{39} - объединение этого списка со списком результатов замены переменной x_{19} на x_{36} в утверждениях x_{15} и со списком результатов замены переменной x_{19} на x_{37} в утверждениях x_{15} . Переменной x_{40} присваивается список результатов замены переменной x_{19} на подтерм x_{34} в утверждениях x_{15} . При помощи задачи на доказательство устанавливается, что конъюнкция утверждений x_{40} - следствие утверждений x_{39} . В нашем примере x_{40} состоит из единственного утверждения " $b + c$ - целое", x_{39} - из утверждений " m - целое", " n - целое", " b - целое", " c - целое".

Создается список x_{42} содержащих хотя бы одну из переменных x_{36} , x_{37} результатов подстановки выражений списка x_{25} вместо переменной x_{35} в antecedенты теоремы x_{28} , а также список x_{43} остальных результатов таких подстановок. В нашем примере x_{42} состоит из утверждений " b - число", " c - число"; x_{43} - из единственного утверждения " m - число". Проверяется, что конъюнкция утверждений x_{42} - следствие утверждений x_{39} .

Переменной x_{45} присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x_{16} . В нашем примере x_{45} состоит

из единственной переменной a . Переменной $x46$ присваивается список результатов подстановки переменных $x45$ вместо переменных $x16$ в утверждения $x38$. В нашем примере $x46$ состоит из утверждений " m – целое", " a – целое". Переменной $x47$ присваивается объединение списков $x38$, $x46$ и $x43$. Переменной $x48$ присваивается результат подстановки переменных $x45$ вместо переменных $x16$ в терм $x11$. В нашем примере - " $m|a$ ". К списку $x47$ добавляются утверждения $x11$ и $x48$.

Переменной $x49$ присваивается вхождение заменяющей части теоремы $x28$, переменной $x50$ - символ по вхождению $x49$. В нашем примере - "плюс". Переменной $x51$ присваивается список результатов соединения операцией $x50$ элементов списка $x16$ с соответствующими элементами списка $x45$. В нашем примере - единственное выражение $n + a$. Переменной $x52$ присваивается результат подстановки выражений $x51$ вместо переменных $x16$ в терм $x11$. В нашем примере - " $m|(n+a)$ ". Затем создается импликация с антецедентами $x47$ и консеквентом $x52$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

6. Попытка вывести эквивалентность для дизъюнктивной развертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bfgi}(\text{Dom}(g) = \{1, \dots, i\} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ i - \text{натуральное} \ \rightarrow \\ f \in \{; \lambda_h(g(h), h \in \{1, \dots, i\})\} \times b \leftrightarrow \exists_{dh}(f = (g(h), d) \ \& \ d \in b \ \& \ h \in \{1, \dots, i\}))$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow \exists_{cd}(f = (c, d) \ \& \ c \in a \ \& \ d \in b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{adf}(d - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(d) = \{1, \dots, f\} \ \& \ f - \text{натуральное} \ \rightarrow a \in \{; \lambda_e(d(e), \\ e \in \{1, \dots, f\})\} \leftrightarrow \exists_e(e \in \{1, \dots, f\} \ \& \ a = d(e))$$

Прием, основанный на выводимой теореме, разворачивает квантор существования в дизъюнкцию.

Переменной $x8$ присваивается вхождение консеквента. Он представляет собой эквивалентность. Переменной $x10$ присваивается вхождение той части эквивалентности, заголовком которой служит квантор существования, переменной $x11$ - связывающая приставка квантора. Среди конъюнктивных членов утверждения под квантором существования выбирается вхождение $x12$ элементарного утверждения $x13$, заголовок которого отличен от символа "не". В нашем примере $x13$ - утверждение " $c \in a$ ". Переменной $x14$ присваивается заголовок этого утверждения. В нашем примере - символ "принадлежит". Справочник поиска теорем "развтеор" определяет по $x14$ указанную выше дополнительную теорему. Она представляет собой эквивалентность. Переменной $x18$ присваивается вхождение той части эквивалентности, которая является квантором существования. Оператор "тождвывод" определяет результат $x20$ преобразования вхождения $x12$ при помощи дополнительной теоремы, ориентированной в направлении к $x18$. Теорема $x20$ обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому передается комментарий "словно". Этот комментарий блокирует переход

от функции, область определения которой - начальный отрезок натурального ряда, к слову заданной длины. Результат регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Вывод тождества определения характеристики класса с помощью эквивалентности для принадлежности множеству.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{be}(\text{card}(\text{set}_c(c = b \ \& \ e)) = (1 \text{ при } e, \text{ иначе } 0))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \rightarrow \exists_b(a = \{b\}) \leftrightarrow \text{card}(a) = 1)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a = b \leftrightarrow a \in \{b\})$$

Начало программы приема совпадает с началом программы одного из ранее рассмотренных приемов. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается входение консеквента. Он представляет собой эквивалентность. Переменной x10 присваивается входение той части эквивалентности, заголовком которой служит квантор существования, переменной x11 - противоположная часть эквивалентности. Проверяется, что x11 - равенство. Переменной x12 присваивается связывающая приставка квантора x10, переменной x13 - список конъюнктивных членов утверждения под этим квантором. Среди них находится равенство x14 входящей в терм x11 переменной x17 некоторому выражению x18, не содержащему этой переменной. В нашем примере x14 имеет вид " $a = \{b\}$ ", x17 - переменная a . Проверяется, что утверждение x11 элементарно. Переменной x19 присваивается заголовок выражения x18. В нашем примере - символ "перечень". Справочник поиска теорем "упрощилс" находит по x19 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x22 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x22 имеет вид:

$$\forall_{cd}(c = d \leftrightarrow c \in \{d\})$$

Переменной x26 присваивается входение заменяемой части эквивалентности x22 согласно ее характеристике "общнорм". В нашем примере - входение условия принадлежности " $c \in \{d\}$ ". Переменной x27 присваивается входение того операнда входения x26, который имеет заголовок x19, переменной x28 - подтерм x27. Переменной x29 присваивается список параметров терма x28.

Определяется подстановка S вместо переменных x29, унифицирующая термы x28 и x18. Переменной x31 присваивается результат применения этой подстановки к заменяющей части эквивалентности x22. В нашем примере x31 имеет вид " $c = b$ ".

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что по входению x26 расположен символ "принадлежит". Первым операндом этого отношения принадлежности

служит некоторая переменная x32. В нашем примере - переменная s . Переменной x33 присваивается список антецедентов теоремы x22. Проверяется, что переменная x32 не входит в параметры этих антецедентов. Переменной x36 присваивается та часть равенства x11, которая содержит переменную x17, переменной x37 - другая часть. Проверяется, что x37 не содержит переменной x17. В нашем примере x36 - выражение "card(a)", x37 - единица. Проверяется, что оценка сложности выражения x37 меньше оценки сложности выражения x36.

Переменной x38 присваивается переменная, не входящая в исходную теорему и в теорему x22. В нашем примере - переменная e . Переменной x39 присваивается выражение "класс(x32 и (x31 x38))". В нашем примере - "set_c($c = b \ \& \ e$)". Переменной x40 присваивается результат подстановки в выражение x36 терма x39 вместо переменной x17. В нашем примере - "card(set_c($c = b \ \& \ e$))".

Переменной x41 присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы с отличными от x14 элементами списка x13 и с результатами применения подстановки S к антецедентам теоремы x22. Переменной x42 присваивается набор результатов подстановки терма x39 вместо переменной x17 в утверждения списка x41. Переменной x43 присваивается результат подстановки в x36 символа пустого множества вместо переменной x17. В нашем примере - "card(\emptyset)". Переменной x45 присваивается результат упрощения выражения x43 относительно посылок x42. В нашем примере - ноль. Переменной x47 присваивается выражение "вариант(x38 x37 x46)", переменной x48 - равенство выражений x40 и x47. Переменной x49 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка x42 относительно параметров терма x48. Затем создается импликация с антецедентами x49 и консеквентом x48, которая регистрируется в списке вывода.

Преобразование дополнительной теоремы с помощью текущей

1. Вывод тождества для определения мощности класса при помощи взаимно-однозначного параметрического описания.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abm}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ m - \text{натуральное} \rightarrow \text{card}(\text{set}_n(m|n \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ n \leq bm \ \& \ am \leq n)) = \max(1 + [b] + [-a], 0))$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(k - \text{целое} \ \& \ n = mk))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{set}_x(x - \text{целое} \ \& \ a \leq x \ \& \ x \leq b) = \{-[a], \dots, [b]\})$$

Переменной x8 присваивается входжение консеквента. Он представляет собой эквивалентность. Переменной x10 присваивается входжение той ее части, которая представляет собой квантор существования. Проверяется, что связывающая приставка этого квантора одноэлементна, и переменной x12 присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная k . Переменной x13 присваивается

другая часть эквивалентности. В нашем примере - " $m|n$ ". Проверяется, что утверждение x_{13} элементарно. Переменной x_{14} присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_{15} - набор конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. Проверяется, что список x_{15} двухэлементный. В нем выбирается утверждение x_{16} длины 2, первым операндом которого служит переменная x_{12} . В нашем примере x_{16} имеет вид " k - целое". Переменной x_{17} присваивается заголовок утверждения x_{16} . В нашем примере - символ "целое". Проверяется, что x_{17} - название типа объектов. В списке x_{15} находится равенство x_{18} , в левой части которого расположена переменная x_{19} , отличная от x_{12} . В нашем примере x_{18} имеет вид " $n = mk$ ". Переменной x_{20} присваивается правая часть равенства x_{18} . Проверяется, что переменная x_{19} не входит в x_{20} .

Решается задача на описание x_{21} с посылками x_{14} и условиями x_{15} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "упростить", "неизвестные x_{12} ". В нашем примере x_{14} состоит из утверждений " m - целое", " n - целое"; x_{15} - из утверждений " k - целое", " $n = mk$ ". Неизвестная - k .

Ответ присваивается переменной x_{22} . В нашем примере он имеет вид " $\neg(m = 0) \ \& \ k = n/m \ \& \ (n/m) - \text{целое} \ \vee \ m = 0 \ \& \ n = 0 \ \& \ k - \text{целое}$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{23} присваивается набор дизъюнктивных членов результата преобразования утверждения x_{22} к виду д.н.ф. В этом наборе выбирается утверждение x_{24} . В нашем примере - " $\neg(m = 0) \ \& \ k = n/m \ \& \ (n/m) - \text{целое}$ ". Переменной x_{25} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{24} . В нем выбирается равенство x_{26} с переменной x_{12} в левой части. Переменной x_{27} присваивается список всех элементов набора x_{25} , не содержащих переменных x_{12} и x_{19} . В нашем примере - единственное утверждение " $\neg(m = 0)$ ". Переменной x_{28} присваивается конъюнкция утверждений x_{27} .

При помощи задач на доказательство проверяется, что отрицание каждого отличного от x_{24} элемента списка x_{23} является следствием утверждений x_{14} и x_{28} .

Переменной x_{29} присваивается список пар (теорема - набор ее характеристик), полученных справочником поиска теорем "свертка набора" по символу x_{17} . В нашем примере x_{29} состоит из единственной пары, первым элементом которой служит указанная выше дополнительная теорема, а вторым - список характеристик "Равно", "описатель(второй терм)".

Предпринимается расчистка списка x_{29} . Просматриваются пары x_{30} набора x_{29} . Переменной x_{31} присваивается теорема - первый элемент пары x_{30} . Для фиксированной пары x_{30} просматриваются отличные от нее пары x_{32} набора x_{29} . Переменной x_{33} присваивается теорема - первый элемент пары x_{32} . Переменной x_{34} присваивается входжение консеквента теоремы x_{31} , переменной x_{37} - консеквента теоремы x_{33} . Эти консеквенты суть равенства. Переменной x_{35} присваивается входжение той части равенства x_{34} , которая является описателем "класс"; аналогично, переменной x_{38} присваивается входжение той части равенства x_{37} , которая является описателем "класс". Указанные описатели присваиваются, соответственно, переменным x_{40} и x_{41} . Проверяется, что

длины выражений x_{40} и x_{41} равны. Переменной x_{42} присваивается список переменных терам x_{40} . Усматривается, что x_{41} получается из x_{40} подстановкой S вместо переменных x_{42} , переобозначающей переменные без отождествления их. Переменной x_{44} присваивается список антецедентов теоремы x_{33} , переменной x_{45} - список результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_{31} . Если каждое утверждение списка x_{45} является следствием утверждений x_{44} , то пара x_{32} исключается из списка x_{29} , после чего реализуется повторный просмотр данного списка.

По окончании расчистки списка x_{29} все переменные, начиная с x_{30} , снова оказываются не определены. В списке x_{29} выбирается пара x_{30} ; переменной x_{31} присваивается первый элемент этой пары, т.е. указанная выше дополнительная теоремы. Переменной x_{32} присваивается второй элемент пары, т.е. список характеристик данной теоремы. Переменной x_{33} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{33} совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x_{34} присваивается вхождение консеквента теоремы x_{33} . Этот консеквент - равенство. Переменной x_{35} присваивается вхождение той его части, которая представляет собой описатель "класс", переменной x_{36} - вхождение другой части. Проверяется, что связывающая приставка описателя состоит из единственной переменной x_{38} . В нашем примере - из переменной x . Переменной x_{39} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под описателем. В списке x_{39} находится утверждение x_{40} с заголовком x_{17} и единственным корневым операндом x_{38} . В нашем примере - " x — целое". Переменной x_{41} присваивается правая часть равенства x_{26} . В нашем примере - " n/m ". Список x_{14} разбивается на подсписок x_{42} утверждений, содержащих переменную x_{19} , и подсписок x_{43} остальных утверждений. Переменной x_{46} присваивается объединение списка x_{42} и списка результатов подстановки выражения x_{41} вместо переменной x_{38} в отличные от x_{40} утверждения списка x_{39} , к которому добавляется утверждение x_{13} . Переменной x_{51} присваивается результат упрощения выражения "мощность(x_{36})" относительно антецедентов теоремы x_{33} при помощи задачи на преобразование. В нашем примере упрощаемое выражение имеет вид " $\text{card}(\{-[-a], \dots, [b]\})$ ", результат упрощения - вид " $\max(1 + [b] + [-a], 0)$ ". Проверяется, что выражение x_{51} не содержит символа "мощность".

Переменной x_{52} присваивается объединение списков x_{49} , x_{27} и x_{43} . Решается задача на описание x_{53} с посылками x_{52} и условиями x_{46} . Цели задачи - "полный", "прямойответ", "попыткаспуска", "элементарка", "неизвестные x_{19} ". В нашем примере посылки суть " a — число", " b — число", " $\neg(m = 0)$ ", " m — целое". Условия - " n — целое", " $m|n$ ", " $a \leq n/m$ ", " $n/m \leq b$ ". Неизвестная - n .

Ответ задачи x_{53} присваивается переменной x_{54} . В нашем примере он имеет вид: " $m < 0 \ \& \ m|n \ \& \ n$ — целое $\ \& \ n \leq am \ \& \ bm \leq n \ \vee \ m|n \ \& \ n$ — целое $\ \& \ n \leq bm \ \& \ am \leq n \ \& \ 0 \leq m - 1$ ". Переменной x_{55} присваивается список дизъюнктивных членов результата приведения утверждения x_{54} к виду д.н.ф.

Просматриваются разбиения списков конъюнктивных членов элементов набора x_{55} на подсписок P утверждений, содержащих переменную x_{19} , и подсписок Q утверждений, не содержащих ее. Переменной x_{56} присваивается список пар

(Q, P) , возникающих в процессе просмотра. В списке х56 выбирается элемент х57. Переменной х58 присваивается его первый элемент, переменной х59 - второй. В нашем примере х58 состоит из единственного утверждения " $0 \leq m - 1$ ", х59 - из утверждений " $m|n$ ", " $n - \text{целое}$ ", " $n \leq bm$ ", " $am \leq n$ ".

Проверяется, что для каждой отличной от х57 пары списка х56 отрицание конъюнкции утверждений ее первого элемента является следствием утверждений х52 и х58. Затем переменной х60 присваивается выражение " $\text{мощность}(\text{класс}(x19 R))$ ", где R - конъюнкция утверждений х59. Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения х52 и х58, а консеквент - равенство выражений х60 и х51. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.72 Характеристика "парамописание"

Характеристикой "парамописание(х1)" снабжаются тождества, преобразующие параметрическое описание класса в его явное задание. х1 - направление замены.

Применение дополнительного тождества для упрощения заменяемого термина

1. Попытка зануления фрагмента параметрического описания.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcfe} (\neg(e^2 + f^2 = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((x - a, y - b, z - c), (0, e, f))) = \text{set}_{xyz}(\exists_g(y = b + eg \ \& \ z = c + fg \ \& \ g - \text{число}) \ \& \ x = a))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdef} (\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (x - a, y - b, z - c))) = \text{set}_{xyz}(\exists_g(x = a + dg \ \& \ y = b + eg \ \& \ z = c + fg \ \& \ g - \text{число})))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a (a - \text{число} \rightarrow a \cdot 0 = 0)$$

Переменной х10 присваивается вхождение заменяемой части консеквента. В нашем примере - правой части равенства. Проверяется, что эта часть - описатель "класс". Переменной х11 присваивается подтерм х10, переменной х12 - список его параметров. В нашем примере - " a, b, c, d, e, f ". Переменной х13 присваивается расположенное внутри х10 вхождение переменной х14 списка х12. В нашем примере - переменной d . Переменной х15 присваивается вхождение, непосредственным операндом которого служит х13, переменной х16 - символ по вхождению х15. В нашем примере х16 - "умножение". Справочник поиска теорем "констнабор" определяет по х16 указанную выше дополнительную теорему. Переменной х19 присваивается вхождение ее консеквента, переменной х22 - направление замены согласно данному консеквенту от неоднобуквенного термина

к однобуквенному. Оператор "тождвывод" определяет результат x23 преобразования вхождения x15 при помощи дополнительной теоремы, применяемой в направлении x22. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.73 Характеристика "перестановка"

Характеристикой "перестановка" снабжаются тождества перестановочного типа.

Применение дополнительного тождества для упрощения консеквента

1. Применение дополнительного тождества для сильного упрощения одной из частей равенства, в результате которого возникает тождество общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \text{Dom}(a) \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(\text{сужение}(a, b)) \rightarrow \text{card}(b) = \text{card}(\text{образ}(a, b)))$$

из теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \text{card}(\text{Dom}(f)) = \text{card}(\text{Val}(f)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{Af}(A - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ A \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow \text{Val}(\text{сужение}(f, A)) = \text{образ}(f, A))$$

Переменной x8 присваивается вхождение консеквента, являющегося равенством. Внутри одной из частей данного равенства выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - подтерма "Val(f)". Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. В нашем примере - символ "значения". Проверяется, что этот символ не входит в другую часть равенства. Справочник поиска теорем "упрощстанд" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x17 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Допускается характеристика "нормализация".

Использование тождества для преобразования дополнительной теоремы

1. Попытка проварьировать тождество общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdefg}(\neg(f - 1 = 0) \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < f \ \& \ 0 < g \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \rightarrow d^{e \log_f g} g^c = g^{c + e \log_f d})$$

из теоремы

$$\forall_{acde}(\neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < e \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e^{c \log_a a} = a^{c \log_a e})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < a \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$$

Переменной x8 присваивается вхождение консеквента, являющегося равенством. Переменной x9 присваивается вхождение неоднобуквенной части данного равенства, переменной x10 - символ по вхождению x9. В нашем примере x9 - вхождение выражения " $e^{c \log_a a}$ ", x10 - символ "степень". Справочник поиска теорем "извлечпарам" определяет по x10 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x16 присваивается вхождение заменяемой части консеквента дополнительной теоремы (в нашем примере - левой части). Внутри вхождения x16 рассматривается вхождение x17 символа x10. В нашем примере x17 - вхождение подтерма " a^b ". Оператор "тождвывод" присваивает переменной x18 результат преобразования вхождения x17 при помощи исходной теоремы, применяемой в направлении от вхождения x9. Теорема x18 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Допускаются характеристики "свертка", "склейка".

Обобщение теоремы

1. Обобщение перестановочного тождества путем примененик обеим его частям операции типа "возведение в степень".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdefg}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow (f - e)^c (g - d)^c = (d - g)^c (e - f)^c)$$

из теоремы

$$\forall_{acde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow (d - c)(e - a) = (c - d)(a - e))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^c b^c = (ab)^c)$$

Проверяется отсутствие у теоремы характеристики с заголовком "нормализация". Переменной x8 присваивается вхождение консеквента. Этот консеквент - равенство. Переменной x9 присваивается вхождение неоднобуквенной части равенства, переменной x10 - символ по этому вхождению. В нашем примере x9 - вхождение выражения " $(d - c)(e - a)$ ", x10 - символ "умножение". Проверяется, что число корневых операндов вхождения x9 равно 2. Справочник поиска теорем "раздпарам" определяет по символу x10 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x15 присваивается вхождение консеквента дополнительной теоремы. Этот консеквент - равенство. Переменной x16 присваивается вхождение заменяемой части равенства. Проверяется, что число ее операндов равно 2, и переменной x17 присваивается заголовок этой части. В нашем примере x16 - вхождение терма " $(ab)^c$ ", x17 - символ "степень". Проверяется, что символ x17 имеет некоторую единицу E по одному из своих операндов. В нашем примере $E = 1$, причем операнд второй. Переменной x19 присваивается вхождение того операнда операции x16, который имеет заголовок x10. В нашем

примере - вхождение первого операнда. Проверяется, что единица E имеется для другого операнда P операции x16.

Переменной x21 присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет заголовок x10, каждый его корневой операнд Q - заголовок x17, причем тот операнд терма Q , который расположен так же, как указанный выше операнд P операции x16, равен P . В нашем примере - показатели степеней a^c, b^c равны c .

Оператор "тождвывод" определяет результат x22 преобразования вхождения x19 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы, применяемой в направлении "от x9". Теорема x22 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.74 Характеристика "перечисл"

Характеристикой "перечисл" снабжаются эквивалентности для преобразования элементарного утверждения в квантор существования, подлежащий развертке в дизъюнкцию.

Логические следствия теоремы

1. Переход к теореме развертки квантора существования.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bmn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow \exists_c(c \in \{m, \dots, n\} \ \& \ b(c)) \leftrightarrow \exists_a(a \in \{0, \dots, n - m\} \ \& \ b(a + m))$$

из теоремы

$$\forall_{cmn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow c \in \{m, \dots, n\} \leftrightarrow \exists_a(c = a + m \ \& \ a \in \{0, \dots, n - m\}))$$

Выводимая теорема порождает прием для развертки квантора существования в ее левой части в дизъюнкцию, определяемую правой частью.

Переменной x8 присваивается вхождение консеквента. Этот консеквент - эквивалентность. Переменной x10 присваивается вхождение той части эквивалентности, которая представляет собой квантор существования, переменной x9 - вхождение другой части. Переменной x11 присваивается список конъюнктивных членов подкванторного утверждения, переменной x12 - связывающая приставка квантора x10. В списке x11 находится равенство x13 с некоторой переменной x14 в левой части. В нашем примере оно имеет вид " $c = a + m$ ", причем x14 - переменная c . Проверяется, что переменная x14 имеет единственное вхождение в подтерм x10.

Выбирается переменная x15, не входящая в теорему. В нашем примере - переменная b . Переменной x16 присваивается терм "значение(x15 x14)", переменной x17 - результат навешивания квантора существования по x14 на конъюнкцию термов x9 и x16. В нашем примере x17 имеет вид " $\exists_c(c \in \{m, \dots, n\} \ \& \ b(c))$ ".

Переменной x_{18} присваивается результат добавления к списку отличных от x_{13} утверждений набора x_{11} термина "значение($x_{15} P$)" где P - правая часть равенства x_{13} , переменной x_{19} - эквивалентность утверждения x_{17} и результата навешивания квантора существования по переменным x_{12} на конъюнкцию утверждений x_{18} . Затем создается импликация с теми же антецедентами, что у исходной теоремы, консеквентом которой служит утверждение x_{19} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "дизъюнкциявсех(второйтерм)".

3.75 Характеристика "планиметрия"

Характеристикой "планиметрия" снабжаются теоремы, для которых имеет смысл попытка дополнительного редактирования, в предположении, что ситуация планиметрическая.

Логические следствия теоремы

1. Упрощение теоремы в предположении планиметрической ситуации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ACEF}(\neg(A = E) \ \& \ \neg(C = F) \ \& \ l(AC) = l(AF) \ \& \ A \in \text{прямая}(CF) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AE) \perp \text{прямая}(CF) \rightarrow l(CE) = l(EF))$$

из теоремы

$$\forall_{ACEF}(\neg(A = E) \ \& \ \neg(A = F) \ \& \ l(AC) = l(AF) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(AE) \ \& \ \text{прямая}(AE) \perp \text{прямая}(AF) \rightarrow l(CE) = l(EF))$$

Прием обрабатывается исходную теорему оператором "Нормтеорема", которому передается комментарий "планиметрия". Проверяется, что результат отличен от исходной теоремы, после чего он регистрируется в списке вывода.

3.76 Характеристика "подмнож"

Характеристикой "подмнож(x_1)" снабжаются теоремы, выражающие сложную операцию над множеством через такую же операцию над множествами - значениями переменных, через которые выражено данное множество. x_1 - направление замены.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Переход к описателям "класс" и попытка вычислить операции над ними.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdfg}(f - \text{число} \ \& \ \text{card}(\text{set}_e(c(e))) = f \ \& \ \text{card}(\text{set}_e(c(e) \ \& \ d(e))) = g \rightarrow \text{card}(\text{set}_e(c(e) \ \& \ \neg(d(e)))) = -g + f)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(b) \ \& \ a \subseteq b \rightarrow \text{card}(b \setminus a) = \text{card}(b) - \text{card}(a))$$

Переменной x_9 присваивается список антецедентов. В нем находится утверждение x_{11} с заголовком "содержится", корневые операнды которого суть некоторые переменные x_{12} и x_{13} . В нашем примере x_{11} имеет вид " $a \subseteq b$ ", x_{12} - переменная a , x_{13} - переменная b . Переменной x_{14} присваивается заменяемое выражение. В нем усматривается вхождение x_{15} символа "разность", причем первым операндом разности служит переменная x_{13} , а вторым - x_{12} . Проверяется, что переменные x_{12} , x_{13} исчерпывают все переменные теоремы.

Выбирается список x_{16} из пяти переменных, отличных от x_{12} и x_{13} . В нашем примере - переменные c, d, e, f, g . Переменной x_{17} присваивается первая из них, переменной x_{18} - вторая, переменной x_{19} - третья. Переменной x_{20} присваивается выражение "класс(x_{19} значение(x_{17} x_{19}))", переменной x_{21} - выражение "класс(x_{19} и(значение(x_{17} x_{19})значение(x_{18} x_{19})))", переменной x_{22} - выражение "класс(x_{19} и(значение(x_{17} x_{19})не(значение(x_{18} x_{19}))))". Переменной x_{23} присваивается заголовок выражения x_{14} . В нашем примере - "мощность". Переменной x_{24} присваивается пара утверждений "равно($x_{23}(x_{20})X$)", "равно($x_{23}(x_{21})Y$)", где X, Y - две последние переменные списка x_{16} .

Переменной x_{25} присваивается результат замены в заменяющей части теоремы термина " $x_{23}(x_{12})$ " на Y , а термина " $x_{23}(x_{13})$ " - на X . В нашем примере x_{25} имеет вид " $-g + f$ ". Переменной x_{26} присваивается равенство выражения " $x_{23}(x_{22})$ " выражению x_{25} . Переменной x_{27} присваивается объединение списка результатов подстановки выражений x_{21} и x_{20} вместо переменных x_{12} и x_{13} в отличные от x_{11} утверждения набора x_9 со списком x_{24} . Переменной x_{28} присваивается результат обработки списка x_{27} оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x_{26} . Затем создается импликация с антецедентами x_{28} и консеквентом x_{26} . Она регистрируется в списке вывода с характеристиками "вычисление", "см(не(входит(x_{23} X))не(входит(x_{23} Y)))".

3.77 Характеристика "подмножества"

Характеристикой "подмножества(x_1)" снабжаются тождества, выражающие сложную операцию над множеством через значения этой операции на подмножествах. x_1 - направление замены.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Попытка получить пару непересекающихся множеств с помощью условного выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{defg}(\text{конечное}(\text{set}_c(f(c) \ \& \ g(c, d(c)))) \ \& \ \text{конечное}(\text{set}_c(\neg(f(c)) \ \& \ g(c, e(c)))) \rightarrow \text{card}(\text{set}_c(g(c, (d(c) \ \text{при} \ f(c), \ \text{иначе} \ e(c)))))) = \text{card}(\text{set}_c(g(c, d(c)) \ \& \ f(c))) + \text{card}(\text{set}_c(g(c, e(c)) \ \& \ \neg f(c))))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, b) \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a \cup b) = \text{card}(a) + \text{card}(b))$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов. В нем находится утверждение x11 с заголовком "непересек", корневые операнды которого суть некоторые переменные x12 и x13. В нашем примере x11 имеет вид "непересек(a, b)", x12 - переменная a, x13 - переменная b. Переменной x14 присваивается заменяемое выражение. В нем усматривается вхождение x15 двуместного символа "объединение", причем одним операндом служит переменная x13, а вторым - x12. Переменной x18 присваивается подтерм x15. В нашем примере - "a ∪ b". Проверяется, что в заменяющий терм переменные x12 и x13 не входят как операнды одной и той же операции.

Переменной x19 присваивается список не входящих в теорему переменных X, Y, Z, U, V. В нашем примере - список "c, d, e, f, g". Переменной x20 присваивается выражение "set_X(V(X, (Y(X) при U(X), иначе Z(X))))", переменной x21 - выражение "set_X(V(X, Y(X)) & U(X))", переменной x22 - выражение "set_X(V(X, Z(X)) & ¬(U(X)))". Переменной x24 присваивается список результатов подстановки выражений x21 и x22 вместо переменных x12 и x13 в отличные от x11 утверждения набора x9.

Переменной x25 присваивается консеквент теоремы, переменной x27 - результат замены вхождений терма x18 в этот консеквент на терм x20. Переменной x28 присваивается результат подстановки в x27 термов x21 и x22 вместо переменных x12 и x13. Переменной x29 присваивается результат обработки процедурой "нормантецеденты" утверждений x24 относительно параметров терма x28. Переменной x30 присваивается импликация с антецедентами x29 и консеквентом x28. Она регистрируется в списке вывода.

3.78 Характеристика "подстзамена"

Характеристикой "подстзамена" снабжаются эквивалентности двух утверждений вида $P(A, B), P(C, B)$, где P - самый сложный символ теоремы.

Логические следствия теоремы

1. Вывод импликации из эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bde}(d|b \ \& \ d|(b + e) \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \rightarrow d|e)$$

из теоремы

$$\forall_{bde}(d|b \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \rightarrow d|(b + e) \leftrightarrow d|e)$$

Переменной x10 присваивается вхождение одной из частей эквивалентности в консеквенте, переменной x11 - вхождение другой. Создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы

подтерма x_{10} , а консеквентом служит подтерм x_{11} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.79 Характеристика "попыткаспуска"

Характеристикой "попыткаспуска" снабжаются простая импликация с неповторными антецедентами и консеквентом, причем каждая переменная антецедентов встречается в консеквенте.

Логические следствия теоремы

1. Группировка в левых частях всех ненулевых членов для антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ 0 < b - a \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \neg(a = b))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ a < b \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \neg(a = b))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Переменной x_{10} присваивается исходная теорема.

Реализуется цикл коррекций значений переменной x_{10} . Для этого просматриваются всевозможные вхождения в теорему двуместных предикатных символов P . Переменной x_{12} присваивается символ P , однако в случае равенства ей переприсваивается тип операндов данного равенства. Справочник "перегруппировка" находит по x_{12} тройку (A, B, C) , такую, что возможна перегруппировка A - членов отношения P из одной части в другую с изменением знака B . При этом C - единица операции A . Если оба операнда отношения C отличны от C , то предпринимается перегруппировка всех членов в левую часть отношения, а в правой части помещается C . Изменения относятся лишь к теореме x_{10} .

По окончании цикла коррекций все переменные, начиная с x_{11} , снова оказываются не определенными. Проверяется, что теорема x_{10} отлична от исходной теоремы. Переменной x_{11} присваивается список антецедентов теоремы x_{10} , и предпринимается цикл обращений к упрощению каждого существенного антецедента относительно остальных антецедентов. Используются задачи на преобразование.

По окончании обработки списка x_{11} проверяется, что результат отличен от исходного набора антецедентов теоремы x_{10} . Затем создается импликация с антецедентами x_{11} , консеквент которой - такой же, как у исходной теоремы. Она регистрируется в списке вывода.

2. Группировка в левых частях всех ненулевых членов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 < b - a \rightarrow \neg(0 < a - b))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \rightarrow \neg(b < a))$$

Начало программы приема дословно воспроизводит программу предыдущего приема - вплоть до окончания обработки списка x11. Далее начинаются отличия. Переменной x12 присваивается консеквент теоремы x10. Рассматривается утверждение x13, получающееся из x12 отбрасыванием корневого отрицания, если таковое имеется. Переменной x15 присваивается результат упрощения термина x13 относительно списка x11 при помощи задачи на преобразование. Переменной x16 присваивается результат восстановления у x15 отброшенного выше отрицания; если его не было, то x16 равно x15. Затем создается импликация с антецедентами x11 и консеквентом x16. Она регистрируется в списке вывода.

3. Контрапозиция для получения приема проверочного оператора.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aAB}(\neg(A = B) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ A \in \text{интервал}(aB) \rightarrow \neg(a \in \text{луч}(AB)))$$

из теоремы

$$\forall_{aAB}(\neg(A = B) \ \& \ a \in \text{луч}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \neg(A \in \text{интервал}(aB)))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент, переменной x10 - список параметров утверждения x9. Среди антецедентов выбирается элементарное утверждение x11, список параметров которого равен x10. В нашем примере - утверждение " $a \in \text{луч}(AB)$ ". Проверяется, что x11 - существенный антецедент теоремы. Переменной x12 присваивается отрицание утверждения x11. Проверяется, что для усмотрения истинности утверждений вида x12 имеется проверочный оператор. Переменной x16 присваивается отрицание утверждения x9. Переменной x17 присваивается результат удаления утверждения x11 из списка x8. Утверждение x16 упрощается относительно посылок x17 задачей на преобразование; результат присваивается переменной x20. Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x17 и x20, а консеквент - x12. Она регистрируется в списке вывода.

Использование исходного определения

1. Попытка усмотреть альтернативное определение многоместного предиката - вывод эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ D\text{-точка} \rightarrow \text{прямоугольник}(ABCD) \leftrightarrow l(AC) = l(BD) \ \& \ \text{параллелограмм}(ABCD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ D\text{-точка} \ \& \ \text{прямоугольник}(ABCD) \rightarrow l(BD) = l(AC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A\text{-точка} \& B\text{-точка} \& C\text{-точка} \& D\text{-точка} \rightarrow \text{прямоугольник}(ABCD) \\ \leftrightarrow \text{параллелограмм}(ABCD) \& \angle(ABC) = \pi/2)$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов. В нем выбирается утверждение x_9 , имеющее более двух корневых операндов. В нашем примере - "прямоугольник($ABCD$)". Переменной x_{10} присваивается заголовок данного утверждения. Рассматривается стартовая теорема списка вывода. Переменной x_{13} присваивается ее характеристика "определение(T)". В нашем примере - "определение(прямоугольник($ABCD$))". Проверяется, что заголовком термина T служит символ x_{10} . Переменной x_{14} присваивается сама стартовая теорема списка вывода. В нашем примере - приведенная выше дополнительная теорема. Проверяется, что эта теорема - эквивалентность. Переменной x_{16} присваивается вхождение той части эквивалентности, которая имеет заголовок x_{10} , переменной x_{17} - вхождение другой части. Переменной x_{18} присваивается подтерм x_{16} , переменной x_{19} - список параметров термина x_{18} . В нашем примере x_{18} - "прямоугольник($ABCD$)". Проверяется, что список переменных дополнительной теоремы включается в список x_{19} . Усматривается подстановка S вместо переменных x_{19} , переводящая терм x_{18} в терм x_9 . Переменной x_{21} присваивается результат применения подстановки S к подтерму x_{17} . В нашем примере он имеет вид "параллелограмм($ABCD$) & $\angle(ABC) = \pi/2$ ". Переменной x_{22} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{21} . В этом списке выбирается утверждение x_{23} , число корневых операндов которого равно числу корневых операндов термина x_9 . В нашем примере - "параллелограмм($ABCD$)". Переменной x_{24} присваивается набор отличных от x_{23} элементов списка x_{22} . Проверяется, что все утверждения этого набора имеют менее трех корневых операндов.

Переменной x_{25} присваивается объединение списка отличных от x_9 элементов набора x_8 со списком результатов применения подстановки S к антецедентам дополнительной теоремы. Переменной x_{26} присваивается консеквент исходной теоремы. Проверяется, что число его корневых операндов меньше 3. Проверяется, что задача на доказательство при попытке вывести x_{26} из утверждений x_{25} и утверждения x_{23} выдает "отказ". При этом другая задача на доказательство устанавливает, что конъюнкция утверждений x_{24} - следствие утверждений списка x_{25} и утверждений x_{23} , x_{26} . Тогда создается импликация с антецедентами x_{25} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждения x_9 конъюнкции утверждений x_{23} и x_{26} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка усмотреть альтернативное определение многоместного предиката - вывод импликации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(l(AC) = l(BD) \& \text{параллелограмм}(ABCD) \& A\text{-точка} \& B\text{-точка} \& C\text{-точка} \& D\text{-точка} \rightarrow \text{прямоугольник}(ABCD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A\text{—точка} \& B\text{—точка} \& C\text{—точка} \& D\text{—точка} \& \text{прямоугольник}(ABCD) \\ \rightarrow l(BD) = l(AC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A\text{—точка} \& B\text{—точка} \& C\text{—точка} \& D\text{—точка} \rightarrow \text{прямоугольник}(ABCD) \\ \leftrightarrow \text{параллелограмм}(ABCD) \& \angle(ABC) = \pi/2)$$

Начало программы приема полностью совпадает с началом программы предыдущего приема, вплоть до момента формирования результирующей импликации. В нашем случае, вместо этого, создается импликация с антецедентами x25, x23, x26 и консеквентом x9. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительной эквивалентности для преобразования консеквента

1. Использование определения заголовка консеквента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(\text{параллелограмм}(abcd) \& a\text{—точка} \& b\text{—точка} \& c\text{—точка} \& d\text{—точка} \rightarrow \\ \neg(a \in \text{прямая}(bc)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\text{параллелограмм}(ABCD) \& A\text{—точка} \& B\text{—точка} \& C\text{—точка} \& \\ D\text{—точка} \rightarrow \text{четыреугольник}(ABCD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A\text{—точка} \& B\text{—точка} \& C\text{—точка} \& D\text{—точка} \rightarrow \\ \text{четыреугольник}(ABCD) \leftrightarrow \neg(B = C) \& \neg(A \in \text{прямая}(BC)) \& \\ \neg(D \in \text{прямая}(AB)) \& \neg(D \in \text{прямая}(BC)) \& \text{однасторона}(A, D, \text{прямая}(BC)) \\ \& \text{однасторона}(C, D, \text{прямая}(AB)))$$

Переменной x8 присваивается вхождение консеквента, переменной x9 - заголовок консеквента. Проверяется, что он отличен от символов "не", "равно", "меньше", "меньшеилиравно". Справочник поиска теорем "определение" находит по x9 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что эта теорема - кванторная эквивалентность. Переменной x13 присваивается вхождение той части эквивалентности, которая имеет заголовок x9. Оператор "тождывывод" определяет результат x15 преобразования вхождения x8 при помощи дополнительной теоремы, применяемой в направлении "от x13". Переменной x16 присваивается результат преобразования теоремы x15 нормализатором "нормдлялюбого". Этот результат представляет собой конъюнкцию кванторных импликаций. Среди них выбирается импликация x17. Проверяется, что ее антецеденты и консеквент суть элементарные формулы, причем число переменных не больше, чем в исходной теореме. Переменной x18 присваивается результат обработки теоремы x17 оператором "сокращаент", удаляющим избыточные антецеденты. Затем x18 регистрируется в списке вывода.

Обобщение теоремы

1. Попытка перейти к ослабленным отношениям в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(|a| = |b| \ \& \ 0 \leq ab \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a = b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(|a| = |b| \ \& \ 0 < ab \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a = b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \rightarrow a \leq b)$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x9 - ее консеквент. Переменной x11 присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения консеквента по о.д.з. Просматриваются элементы x13 списка x8, представляющие собой не входящие в x11 элементарные утверждения. В нашем примере x13 имеет вид " $0 < ab$ ". Переменной x14 присваивается заголовок утверждения x13. Справочник поиск теорем "ослабление" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается заголовок консеквента этой теоремы. В нашем примере - "меньшеилиравно". Переменной x18 присваивается результат замены заголовка утверждения x13 на x17. В нашем примере - " $0 \leq ab$ ". Переменной x19 присваивается объединение списка x11, результата замены в наборе x8 утверждения x13 на его отрицание и утверждения x18. При помощи задачи на доказательство проверяется, что x9 - следствие утверждений x19 и что после решения данной задачи ее список посылок не содержит константы "ложь". Тогда предпринимается замена утверждения x13 в списке x8 на утверждение x18. Данная попытка ослабления предпринимается для всех элементов списка x8. Если имела место хотя бы одна замена, создается импликация с антецедентами x8 и консеквентом x9, которая регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

2. Попытка отбросить избыточное отрицание в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefghij}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d, e, f)) \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (h, i, j)) \rightarrow \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (a + h, b + i, c + j)))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdefghij}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d, e, f)) \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (h, i, j)) \rightarrow \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (a + h, b + i, c + j)))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - утверждения, необходимые для сопровождения консеквента по о.д.з. Среди антецедентов

выбирается утверждение x_{10} с заголовком "не", не входящее в список x_9 . В нашем примере x_{10} имеет вид " $\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0)$ ". Переменной x_{11} присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. консеквентов, отличных от x_{10} . Проверяется, что x_{10} не входит в список x_{11} . Проверяется, что при исключении x_{10} из списка x_8 возникает такой набор утверждений, что все утверждения списков x_9 и x_{11} являются их следствиями. Переменной x_{12} присваивается результат замены в списке x_8 утверждения x_{10} на его отрицание. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что консеквент теоремы - следствие утверждений x_{12} . Затем создается импликация, получаемая из исходной отбрасыванием антецедента x_{10} . Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

3.80 Характеристика "предвумножение"

Характеристикой "предвумножение($x_1 x_2 x_3$)" снабжаются тождества, позволяющие с помощью нормализаторов общей стандартизации свернуть константный терм, содержащий единственную сложную операцию, в терм, заголовком которого служит данная операция, а операндами - константы. x_1 - направление замены, x_2 - конъюнкция фильтров, уточняющих контекст стандартизации (в нее включаются указания на типы константных значений переменных), x_3 - список подвыражений заменяющего терма, обрабатываемых путем вычислений.

Обобщение теоремы

1. Обобщение тождества свертки константного выражения путем ввода неповторного внешнего параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abef} (\neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow \log_a(a^e b^f) = e + f \log_a b)$$

из теоремы

$$\forall_{cde} (\neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \log_d(cd^e) = e + \log_d c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cde} (\neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \log_c d = \log_c(d^e))$$

Характеристика исходной теоремы - "предвумножение(первыйтерм, и(дробнаявеличина(d))целое(e))дробнаявеличина(c)), cd^e ".

Переменной x_8 присваивается первый операнд характеристики. В нашем примере - "первыйтерм". Переменной x_{10} присваивается вхождение заменяемой части теоремы согласно указателю направления x_8 . В нашем примере - вхождение правой части равенства. Переменной x_{11} присваивается подтерм x_{10} . Проверяется, что x_{11} имеет единственный подтерм x_{13} максимальной сложности. В нашем примере x_{13} имеет вид " $\log_d c$ ". Переменной x_{14} присваивается

вхождение терма x_{13} в теорему, расположенное внутри вхождения x_{10} . Переменной x_{15} присваивается заголовок терма x_{13} . В нашем примере - "логарифм".

Справочник поиска теорем "обобщаемое" определяет по x_{15} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{21} присваивается заменяющая часть дополнительной теоремы. В нашем примере - левая часть равенства. Проверяется, что заголовком терма x_{21} служит ассоциативный и коммутативный символ x_{22} . В нашем примере - символ "умножение". Проверяется, что x_{14} не является операндом операции x_{22} , имеющей своим другим операндом некоторую переменную, неповторную в заменяемой части исходной теоремы. Оператор "тождвывод" определяет результат x_{23} преобразования вхождения x_{14} при помощи дополнительной теоремы. Переменной x_{24} присваивается результат преобразования теоремы x_{23} оператором "нормтеорема". В нашем примере x_{24} - указанная выше выводимая теорема. Проверяется, что x_{24} - кванторное тождество. Переменной x_{26} присваивается его заменяющая часть согласно направлению замены x_8 , переменной x_{27} - заменяемая часть. Проверяется, что оценки сложности выражений x_{26} и x_{27} равны, причем каждое из них имеет единственный подтерм максимальной сложности, совпадающий в случае выражения x_{26} с самим этим выражением.

Определяется набор максимальных подвыражений терма x_{26} , допускающих вычисления над константными значениями переменных с помощью нормализаторов общей стандартизации; переменной x_{30} присваивается набор пар (подвыражение - тип его константного значения), а переменной x_{31} - набор пар (переменная терма x_{26} - тип ее константного значения). Все это делает оператор "вычтерм".

Проверяется, что для каждого неоднобуквенного корневого операнда выражения x_{26} в списке x_{30} имеется пара, первым элементом которой является этот операнд. Создается терм x_{32} вида "предвумножение($x_8 P Q$)", где P - конъюнкция термов $T(X)$ для всевозможных пар (X, T) набора x_{31} ; Q - список первых элементов пар набора x_{30} .

Наконец, теорема x_{24} регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой x_{32} . Указывается, что она является обобщением исходной теоремы.

3.81 Характеристика "префикснаярекурсия"

Характеристикой "префикснаярекурсия(x_1)" снабжаются тождества, позволяющие перейти от сложной операции с подтермом "префикс(A, B)" к такой же операции с подтермом B . x_1 - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Попытка упростить префиксное выражение при альтернативном antecedенте и вывод тождества с условным выражением.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{слово} \rightarrow \text{card}\{d; c\} = (0 \text{ при } d \in \{; c\}, \text{ иначе } 1) + \text{card}\{; c\})$$

из теоремы

$$\forall_{cd}(\neg(d \in \{; c\}) \ \& \ c - \text{слово} \rightarrow \text{card}\{d; c\} = 1 + \text{card}\{; c\})$$

Переменной x_9 присваивается вхождение консеквента, переменной x_{10} - список антецедентов. Переменной x_{11} присваивается заменяемое выражение. В нашем примере - " $\text{card}\{d; c\}$ ". Переменной x_{12} присваивается вхождение символа "префикс" в выражение x_{11} . В нашем примере - вхождение подтерма "префикс(d, c)". Переменной x_{13} присваивается переменная - первый операнд вхождения x_{12} . В нашем примере - переменная d .

Проверяется, что теорема имеет единственный существенный антецедент. Он присваивается переменной x_{16} . В нашем примере - антецедент " $\neg(d \in \{; c\})$ ". Проверяется, что утверждение x_{16} элементарно и содержит переменную x_{13} . Переменной x_{17} присваивается результат замены в списке x_{10} утверждения x_{16} на его отрицания. При помощи вспомогательной задачи на преобразование определяется результат x_{19} упрощения терма x_{11} относительно списка x_{17} . В нашем примере - " $\text{card}\{; c\}$ ". Проверяется, что выражение x_{19} не содержит переменной x_{13} . Переменной x_{20} присваивается выражение "вариант(x_{16} P x_{19})", где P - заменяющая часть исходной теоремы. Затем создается импликация, антецеденты которой суть все отличные от x_{16} утверждения списка x_{10} , а консеквент - равенство выражений x_{11} и x_{20} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Переход от эквивалентности для префиксной рекурсии к эквивалентности для развертки конечного набора.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{adf}(d - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(d) = \{1, \dots, f\} \ \& \ f - \text{натуральное} \rightarrow a \in \{; \lambda_e(d(e), e \in \{1, \dots, f\})\} \leftrightarrow \exists_e(e \in \{1, \dots, f\} \ \& \ a = d(e))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(c - \text{слово} \rightarrow a \in \{b; c\} \leftrightarrow a = b \vee a \in \{; c\})$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемое выражение. В нашем примере - " $a \in \{b; c\}$ ". Переменной x_{11} присваивается вхождение заменяющей части. Проверяется, что по этому вхождению расположен символ "и" либо "или". Переменной x_{12} присваивается список корневых операндов вхождения x_{11} . В нашем примере - " $a = b$ ", " $a \in \{; c\}$ ". Переменной x_{13} присваивается вхождение символа "префикс" в терм x_{10} . В нашем примере - вхождение подтерма "префикс(b, c)". Проверяется, что первым операндом вхождения x_{13} служит некоторая переменная x_{14} , а вторым - некоторая переменная x_{15} . В нашем примере x_{14} - b , x_{15} - c . Проверяется, что каждая из этих переменных имеет единственное вхождение в терм x_{10} .

Переменной x_{16} присваивается результат замены вхождения x_{13} на переменную x_{15} . В нашем примере - " $a \in \{; c\}$ ". Проверяется, что утверждение x_{16} встречается в списке x_{12} , причем этот список двухэлементный. Переменной x_{17} присваивается элемент списка x_{12} , отличный от x_{16} . В нашем примере - равенство " $a = b$ ". Проверяется, что утверждение x_{17} не содержит переменной

x15. Выбираются переменные x19, x20 и x21, не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные d, e, f .

Переменной x22 присваивается выражение "отображение(x20 принадлежит(x20 номера(1 x21)) значение(x19 x20))". Переменной x23 присваивается результат замены вхождения x13 в терм x10 на терм x22. В нашем примере он имеет вид " $a \in \{\lambda_e(d(e), e \in \{1, \dots, f\})\}$ ". Переменной x24 присваивается результат подстановки в x17 выражения "значение(x19 x20)" вместо переменной x14. В нашем примере он имеет вид " $a = d(e)$ ".

Переменной x25 присваивается список антецедентов исходной теоремы. Проверяется, что подсписок x26 списка x25, образованный соержжащими x15 утверждениями, состоит из единственного элемента "слово(x15)". Переменной x27 присваивается объединение набора не входящих в подсписок x26 утверждений списка x25 с утверждениями "функция(x19)", "равно(область(x19) номера(1 x21))", "натуральное(x21)".

Каждое содержащее переменную x14 утверждение P списка x27 заменяется на импликацию "длялюбого(x20 если принадлежит(x20 номера(1 x21))то Q)", где Q - результат подстановки в P выражения "значение(x19 x20)" вместо переменной x14.

Далее рассматриваются два случая:

- (a) x11 - вхождение символа "или". Тогда переменной x28 присваивается утверждение "существует(x20 и(принадлежит(x20 номера(1 x21)) x24))", переменной x29 - эквивалентность утверждений x23 и x28. Переменной x30 присваивается результат обработки процедурой "нормантецеденты" списка x27 относительно параметров терма x29. Далее создается импликация с антецедентами x30 и консеквентом x29, которая регистрируется в списке вывода.
- (b) x11 - вхождение символа "и". Тогда переменной x28 присваивается утверждение "длялюбого(x20 если принадлежит(x20 номера(1 x21)) то x24)". Далее - в точности те же действия, что и в предыдущем пункте.

3.82 Характеристика "пример"

Характеристикой "пример" снабжаются кванторные импликации без существенных посылок, консеквент которых - элементарное утверждение вида $f(A_1 \dots A_n)$ либо отрицание такого утверждения. Здесь все A_i , кроме, быть может, одного, суть попарно различные переменные.

Логические следствия теоремы

1. Использование простой импликации без существенных посылок для усмотрения отрицания равенства константе.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(\neg(a \subseteq b) \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \neg(a = \emptyset))$$

из теоремы

$$\forall_b(b - \text{set} \rightarrow \emptyset \subseteq b)$$

Переменной x_8 присваивается консеквент. В нем рассматривается вхождение x_9 однобуквенного подтерма, образованного логическим символом x_{10} . Проверяется, что этот символ не имеет других вхождений в x_8 . Выбирается переменная x_{11} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{12} присваивается утверждение "не(равно(x_{11} x_{10}))". Проверяется, что усмотрения истинности утверждений вида x_{12} имеется проверочный оператор. Переменной x_{14} присваивается результат замены вхождения x_9 в терм x_8 на x_{11} . В нашем примере - " $a \subseteq b$ ". Создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы отрицания утверждения x_{14} , а консеквент равен x_{12} . Она регистрируется в списке вывода, причем отбираются только характеристики с заголовком "легковидеть".

- Использование простой импликации без существенных посылок для вывода теорем приемов непосредственного усмотрения истинности квантора существования либо ложности квантора общности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{set} \rightarrow \exists_a(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq b))$$

из теоремы

$$\forall_b(b - \text{set} \rightarrow b \subseteq b)$$

Проверяется, что теорема - кванторная импликация. Переменной x_8 присваивается консеквент. Если заголовок утверждения x_8 - отрицание, то переменной x_9 присваивается вхождение его корневого операнда, иначе - само корневое вхождение. Переменной x_{10} присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_{11} - список операндов вхождения x_9 . В нашем примере он состоит из двух одинаковых термов b . Проверяется, что в списке x_{11} более одного элемента. Переменной x_{12} присваивается вхождение в список x_{11} , переменной x_{13} - результат исключения в списке x_{11} вхождения x_{12} . Проверяется, что элементы набора x_{13} - попарно различные переменные. В нашем примере x_{13} состоит из единственного однобуквенного терма b . Переменной x_{14} присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Рассматривается символ F по вхождению x_9 , и переменной x_{15} присваивается утверждение с заголовком F , операнды которого служат элементы набора, полученного из x_{11} заменой разряда x_{12} на переменную x_{14} . В нашем примере x_{15} имеет вид " $a \subseteq b$ ". Если заголовком терма x_8 было отрицание, то на x_{15} тоже навешивается отрицание. Переменной x_{17} присваивается тип значения терма T , расположенного в наборе x_{11} на позиции x_{12} . Он определяется либо по логическому символу - заголовку терма T , либо по явному указанию в антецедентах x_{10} . Если тип значения определить не удастся, x_{17} полагается равным 0.

Если список X параметров термов x_{10} , не являющихся параметрами терма x_{15} , непуст, то рассматривается подсписок M списка x_{10} , образованный всеми

утверждениями, содержащими параметры X . Если этот подсписок не пуст, то определяется результат обработки процедурой "нормантецеденты" списка, полученного заменой в наборе $x10$ утверждений M на " $\exists_X(M)$ ". После этого $x10$ заменяется на данный результат, с отбрасыванием из него константы "истина", если она имеется.

Переменной $x18$ присваивается список содержащих переменную $x14$ утверждений, используемых для сопровождения терма $x15$ по о.д.з. Если $x17$ не равно 0, он пополняется утверждением " $x17(x14)$ ".

Если в списке $x18$ имеются два различных утверждения $A(Y)$, $B(Y)$, где Y - переменная, то предпринимается попытка усмотреть избыточность одного из них и удалить из списка $x18$. В нашем примере $x18$ в итоге состоит из единственного утверждения " $a - set$ ".

Переменной $x19$ присваивается результат добавления к списку $x18$ утверждения $x15$, переменной $x20$ - результат навешивания квантора существования по $x14$ на конъюнкцию утверждений $x19$. В нашем примере $x20$ имеет вид " $\exists_a(a - set \ \& \ a \subseteq b)$ ".

Проверяется, что при упрощении вспомогательной задачей на преобразование утверждения $x20$ относительно утверждений списка $x10$, из которых отброшено не используемое для сопровождения терма $x20$ по о.д.з. утверждение, не получается константа "истина". Затем создается импликация с антецедентами $x10$ и консеквентом $x20$. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "нормсуществует".

3. Упрощение примера.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{целое} \rightarrow 1|a)$$

из теоремы

$$\forall_{km}(m - \text{целое} \ \& \ k - \text{целое} \rightarrow m|km)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a \cdot 1 = a)$$

Внутри консеквента теоремы рассматривается вхождение $x9$ неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - вхождение подтерма " km ". Переменной $x10$ присваивается символ по этому вхождению. Справочник поиска теорем "констанбор" определяет по $x10$ указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что эта теорема - кванторное тождество. Оператор "тождвывод" определяет результат $x16$ преобразования вхождения $x9$ при помощи дополнительной теоремы. Переменной $x18$ присваивается результат последовательной обработки теоремы $x16$ операторами "Спускоперандов", "демодификация", "Полныепосылки" и "нормтеорема". Этот результат регистрируется в списке вывода.

Последовательное применение двух кванторных импликаций

1. Попытка вывести из простой импликации без существенных посылок другую аналогичную импликацию, используя импликацию, исключающую параметр антецедента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(d - \text{слово} \rightarrow \neg(\{c; d\} = \emptyset))$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(c - \text{слово} \rightarrow b \in \{b; c\})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a \in b \rightarrow \neg(b = \emptyset))$$

Переменной x8 присваивается вхождение консеквента. Если по этому вхождению располагается символ "не", то переменной x9 присваивается заголовок утверждения под этим отрицанием, иначе - заголовок консеквента. Справочник поиска теорем "исклпарам" находит по x9 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x14 присваивается вхождение некоторого существенного антецедента дополнительной теоремы. В нашем примере - вхождение антецедента " $a \in b$ ". Оператор "выводпосылки" определяет результат x15 последовательного применения исходной теоремы, консеквент которой унифицируется с антецедентом x14, и дополнительной теоремы. В нашем примере x15 уже совпадает с указанной выше выводимой теоремой.

Переменной x16 присваивается результат последовательной обработки теоремы x15 операторами "Спускоперандов" и "демодификация". Проверяется, что x16 - кванторная импликация. В нашем примере она совпадает с x15. Переменной x17 присваивается список антецедентов импликации x16, переменной x18 - консеквент. Проверяется существование проверочного оператора, обрабатывающего утверждения вида x18. Переменной x22 присваивается результат обработки списка x17 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x18. Переменной x23 присваивается импликация с антецедентами x22 и консеквентом x18. После проверки избыточности она регистрируется в списке вывода.

Получение параметрического описания

1. Попытка непосредственного извлечения явного параметрического описания.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow a \subseteq b \leftrightarrow \exists_c(c - \text{set} \ \& \ a = b \cap c))$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow b \cap c \subseteq b)$$

Переменной x_8 присваивается вхождение консеквента, переменной x_9 - набор конечных операндов этого вхождения. В нашем примере - " $b \cap c$ " и " b ". Проверяется, что список x_9 имеет не менее двух элементов. Переменной x_{10} присваивается некоторая позиция списка x_9 , переменной x_{11} - терм, расположенный на этой позиции. В нашем примере x_{10} - начало списка. Проверяется, что терм x_{11} неоднобуквенный. Переменной x_{12} присваивается список, получаемый из x_9 удалением позиции x_{10} . Проверяется, что он образован различными переменными. Переменной x_{13} присваивается список параметров термов набора x_{12} . В нашем примере - единственная переменная b . Проверяется, что параметры терма x_{11} не включаются в список x_{13} .

Выбирается переменная x_{14} , не входящая в теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{15} присваивается терм, получаемый из консеквента теоремы заменой подтерм x_{11} на переменную x_{14} . В нашем примере он имеет вид " $a \subseteq b$ ". Переменной x_{16} присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_{17} - подсписок списка x_{16} , образованный всеми утверждениями, параметры которых включаются в список x_{13} . К списку x_{17} добавляются все утверждения, необходимые для сопровождения терма x_{15} по о.д.з. Переменной x_{18} присваивается результат добавления к списку x_{17} утверждения x_{15} . Переменной x_{19} присваивается разность списка параметров терма x_{11} и списка x_{13} . В нашем примере она состоит из единственной переменной c . Проверяется, что список x_{19} одноэлементный. Переменной x_{20} присваивается результат навешивания квантора существования по x_{19} на конъюнкцию не вошедших в список x_{17} элементов списка x_{16} и равенства выражений x_{14} , x_{11} . При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x_{20} - следствие утверждений x_{18} . Затем создается импликация с антецедентами x_{17} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{15} и x_{20} . Она регистрируется в списке вывода.

2. Попытка использования обобщающей импликации для получения явного параметрического описания.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ae}(e - \text{set} \rightarrow a \in e \leftrightarrow \exists_c(e = c \cup \{a\} \ \& \ c - \text{set}))$$

из теоремы

$$\forall_a(a \in \{a\})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ a \in b \rightarrow a \in b \cup c)$$

Переменной x_9 присваивается консеквент, переменной x_{10} - его заголовок. В нашем примере - символ "принадлежит". Справочник поиска теорем "обобщение" определяет по x_{10} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{13} присваивается результат переобозначения в исходной теореме ее переменных на переменные, не входящие в дополнительную теорему. В нашем примере имеем " $\forall_a(d \in \{d\})$ ". Переменной x_9 переписывается консеквент теоремы x_{13} . Переменной x_{14} присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Выбирается ее характеристика "обобщение($i \ X$)". Здесь i - номер антецедента, X - его переменная, по которой происходит обобщение. В нашем примере

$i = 3, X = b$. Переменной x_{18} присваивается антецедент с номером i . В нашем примере - " $a \in b$ ". Переменной x_{19} присваивается консеквент дополнительной теоремы. Усматривается, что x_{19} - результат применения подстановки некоторого терма T вместо переменной X . В нашем примере - терма $b \cup c$. Переменной x_{21} присваивается список параметров терма x_{18} . Усматривается, что x_9 - результат применения к терму x_{18} некоторой подстановки R вместо переменных x_{21} . Переменной x_{23} присваивается терм, подставляемый этой подстановкой вместо переменной X . В нашем примере - " $\{a\}$ ".

Проверяется, что терм x_{23} имеет единственное вхождение в x_9 . Выбирается переменная x_{25} , не входящая в исходную и дополнительную теоремы. В нашем примере - переменная e . Переменной x_{26} присваивается результат замены вхождения терма x_{23} в x_9 на переменную x_{25} . В нашем примере получаем " $a \in e$ ". Проверяется, что x_{26} содержит все параметры терма x_9 . Переменной x_{27} присваивается объединение списка антецедентов теоремы x_{13} с результатами применения подстановки R к отличным от x_{18} антецедентам дополнительной теоремы. Переменной x_{28} присваивается результат применения подстановки R к терму T . В нашем примере - " $\{a\} \cup c$ ". Переменной x_{29} присваивается список параметров терма x_{28} , не являющихся параметрами терма x_{26} . В нашем примере - единственная переменная s . Проверяется, что список x_{29} непуст.

Переменной x_{30} присваивается список утверждения набора x_{27} , имеющих параметр из списка x_{29} . В нашем примере - единственное утверждение " $c - set$ ". Переменной x_{32} присваивается результат добавления к списку x_{30} равенства выражений x_{25} и x_{28} . Определяется тип H значений выражения x_{28} . В нашем примере - "множество". Переменной x_{34} присваивается утверждение " $H(x_{25})$ ". В нашем примере - "множество(e)". Переменной x_{35} присваивается результат добавления к списку не вошедших в набор x_{30} элементов набора x_{27} утверждений x_{34} и x_{26} .

Решается задача на описание x_{36} с посылками x_{35} и условиями x_{32} . Цели задачи - "полный", "пример", "неизвестные x_{29} ", "параметры x_{29} ". В нашем примере посылки суть " $e - set$ ", " $a \in e$ ", " $\{a\} - set$ ", условия - " $c - set$ ", " $e = \{a\} \cup c$ ". Неизвестная - переменная s . Ответ задачи присваивается переменной x_{37} . В нашем примере он имеет вид " $c = e$ ". Проверяется, что x_{37} отлично от символа "отказ".

Переменной x_{38} присваивается эквивалентность утверждения x_{26} результату навешивания квантора существования по переменным x_{29} на конъюнкцию утверждений x_{32} . Затем создается импликация, антецедентами которой служат не вошедшие в x_{30} утверждения x_{27} и утверждение x_{34} , а консеквентом - утверждение x_{38} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Отбирается только характеристика с заголовком "параметризация".

3.83 Характеристика "принадл"

Характеристикой "принадл" снабжаются кванторные импликации, консеквент которых имеет вид " $x \in t$ ", где x - переменная, не встречающаяся в выражении t .

Реализация антецедента

1. Использование утверждения о принадлежности для реализации антецедента, имеющего вид принадлежности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD FP} (F \in \text{прямая}(AD) \ \& \ P \in \text{отрезок}(BC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ P - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AD) \perp \text{прямая}(FP) \ \& \ \text{трапеция}(ABCD) \rightarrow F \in \text{отрезок}(AD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE F} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \neg(E = F) \ \& \ \text{трапеция}(ABCD) \ \& \ E \in \text{фигура}(ABCD) \ \& \ F \in \text{прямая}(AD) \ \& \ \text{прямая}(EF) \perp \text{прямая}(AD) \rightarrow F \in \text{отрезок}(AD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{aniP} (n - \text{натуральное} \ \& \ 3 \leq n \ \& \ \text{кортеж}(a, n, \text{Точки}) \ \& \ \text{планарно}(\{; a\}) \ \& \ i \in \{1, \dots, n\} \ \& \ P \in \text{отрезок}(a(i)a(i \bmod n + 1)) \rightarrow P \in \text{фигура}(a))$$

Рассматривается вхождение x_9 антецедента теоремы, имеющего заголовок "принадлежит". В нашем примере - вхождение утверждения " $E \in \text{фигура}(ABCD)$ ". Переменной x_{10} присваивается заголовок второго операнда этого отношения принадлежности. Проверяется, что он не является переменной. В нашем примере x_{10} - символ "фигура". Справочник поиска теорем "принадл" определяет по x_{10} указанную выше дополнительную теорему. Оператор "выводпосылки" присваивает переменной x_{13} теорему, получаемую последовательным применением исходной и дополнительной теорем путем унификации антецедента x_9 с консеквентом дополнительной теоремы. Переменной x_{14} присваивается результат обработки импликации x_{13} оператором "нормтеорема". Переменной x_{15} присваивается некоторый конъюнктивный член утверждения x_{14} . При помощи вспомогательной задачи на исследование проверяется непротиворечивость антецедентов теоремы x_{15} . Затем она регистрируется в списке вывода.

3.84 Характеристика "принадлежит"

Характеристикой "принадлежит(x_1)" снабжаются кванторные эквивалентности, которые можно рассматривать как определение принадлежности множеству. x_1 - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Вывод из определения принадлежности равенства для определяемого множества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc} (b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow b \cap c = \text{set}_a(a \in b \ \& \ a \in c))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$$

Переменной x10 присваивается входение заменяемой части. Проверяется, что она имеет заголовок "принадлежит", причем ее первым операндом служит символ переменной x11, не входящей во второй операнд. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Проверяется, что переменная x11 не встречается среди параметров утверждений данного списка. Переменной x14 присваивается утверждение "класс(x11 P)", где P - заменяющая часть теоремы. Затем создается импликация с антецедентами x12, консеквентом которой служит равенство второго операнда отношения принадлежности x10 выражению x14. Она регистрируется в списке вывода.

2. Вывод из определения принадлежности эквивалентности для равенства множеству.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(d - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d = b \cap c \leftrightarrow \forall_a(a \in b \ \& \ a \in c \leftrightarrow a \in d))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$$

Переменной x10 присваивается входение заменяемой части. Проверяется, что она имеет заголовок "принадлежит", причем ее первым операндом служит символ переменной x11, не входящей во второй операнд. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Проверяется, что переменная x11 не встречается среди параметров утверждений данного списка. Переменной x14 присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная d. Переменной x15 присваивается утверждение "длялюбого(x11 эквивалентно(P принадлежит(x11 x14)))", где P - заменяющая часть. Переменной x16 присваивается утверждение "эквивалентно(равно(x14 Q) x15)", где Q - второй операнд отношения принадлежности x10. Затем создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x12 и "множество(x14)", а консеквент равен x16. Она регистрируется в списке вывода.

3. Вывод из определения принадлежности эквивалентности для включения множества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \text{образ}(f, a) \subseteq b \leftrightarrow \forall_y(y \in a \rightarrow f(y) \in b))$$

из теоремы

$$\forall_{afx}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \rightarrow x \in \text{образ}(f, a) \leftrightarrow \exists_y(y \in a \ \& \ x = f(y)))$$

Переменной x10 присваивается входение заменяемой части. Проверяется, что она имеет заголовок "принадлежит", причем ее первым операндом служит символ переменной x11, не входящей во второй операнд. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Проверяется, что переменная x11 не встречается

среди параметров утверждений данного списка. Переменной x14 присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Переменной x15 присваивается заменяющая часть теоремы. Переменной x16 присваивается утверждение "длялюбого(x11 если x15 то принадлежит(x11 x14))". Переменной x17 присваивается утверждение "эквивалентно(содержится(Q x14) x16)", где Q - второй операнд отношения принадлежности x10. Затем создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x12 и "множество(x14)", а консеквент равен x17. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Вывод из определения принадлежности эквивалентности для включения в множество.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow b \subseteq \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow b \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \text{образ}(f, b) \subseteq a)$$

из теоремы

$$\forall_{afx}(f - \text{функция} \ \& \ a - \text{set} \rightarrow x \in \text{прообраз}(f, a) \leftrightarrow x \in \text{Dom}(f) \ \& \ f(x) \in a)$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Проверяется, что она имеет заголовок "принадлежит", причем ее первым операндом служит символ переменной x11, не входящей во второй операнд. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Проверяется, что переменная x11 не встречается среди параметров утверждений данного списка. Выбирается переменная x14, не входящая в теорему. В нашем примере - b . Переменной x15 присваивается утверждение "длялюбого(x11 если принадлежит(x11 x14) то P)", где P - заменяющая часть теоремы. Переменной x16 присваивается утверждение "эквивалентно(содержится(x14 Q) x15)", где Q - второй операнд отношения принадлежности x10. Затем создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x12 и "множество(x14)", а консеквент равен x16. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Вывод из определения принадлежности эквивалентности для непересечения с множеством.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(d, b \cap c) \leftrightarrow \forall_a(a \in b \ \& \ a \in c \rightarrow \neg(a \in d))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \cap c \leftrightarrow a \in b \ \& \ a \in c)$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Проверяется, что она имеет заголовок "принадлежит", причем ее первым операндом служит символ переменной x11, не входящей во второй операнд. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Проверяется, что переменная x11 не встречается среди параметров утверждений данного списка. Переменной x14 присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная d . Переменной x15 присваивается заменяющая часть теоремы. Переменной x16

присваивается утверждение "длялюбого(x_{11} если x_{15} то не($\text{принадлежит}(x_{11}, x_{14})$)))". Переменной x_{17} присваивается утверждение "эквивалентно($\text{непересек}(Q, x_{14})$) x_{16} ", где Q - второй операнд отношения принадлежности x_{10} . Затем создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x_{12} и " $\text{множество}(x_{14})$ ", а консеквент равен x_{17} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

6. Попытка альтернативной свертки класса, определяющего операцию.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \rightarrow \text{образ}(f, \text{Dom}(f)) = \text{Val}(f))$$

из теоремы

$$\forall_{af}(f - \text{функция} \rightarrow a \in \text{Val}(f) \leftrightarrow \exists_x(x \in \text{Dom}(f) \ \& \ a = f(x)))$$

Переменной x_{10} присваивается вхождение заменяемой части. Проверяется, что она имеет заголовок "принадлежит", причем ее первым операндом служит символ переменной x_{11} , не входящей во второй операнд. Переменной x_{12} присваивается список антецедентов. Проверяется, что переменная x_{11} не встречается среди параметров утверждений данного списка. Переменной x_{14} присваивается терм " $\text{класс}(x_{11} \ P)$ ", где P - заменяющая часть теоремы. При помощи задачи на преобразование предпринимается упрощение выражения x_{14} относительно посылок x_{12} . Ответ присваивается переменной x_{16} . В нашем примере имеем " $\text{образ}(f, \text{Dom}(f))$ ". Проверяется, что выражение x_{16} элементарное. Создается импликация с антецедентами x_{12} , консеквентом которой служит равенство выражения x_{16} второму операнду отношения принадлежности x_{10} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

7. Попытка явного разрешения относительно связанной переменной условия в сворачиваемом классе.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow [b, c] = \text{set}_a(a < c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b \leq a))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a \in [b, c] \leftrightarrow a - \text{число} \ \& \ 0 \leq a - b \ \& \ 0 < c - a)$$

Переменной x_{10} присваивается вхождение заменяемой части. Проверяется, что она имеет заголовок "принадлежит", причем ее первым операндом служит символ переменной x_{11} , не входящей во второй операнд. Переменной x_{12} присваивается список антецедентов. Проверяется, что переменная x_{11} не встречается среди параметров утверждений данного списка.

Переменной x_{15} присваивается набор конъюнктивных членов заменяющей части теоремы. Предпринимается просмотр вхождений x_{16} в набор x_{15} . Переменной x_{17} присваивается утверждение по вхождению x_{16} . Проверяется, что оно элементарно, содержит переменную x_{11} , не имеет заголовка "не", причем глубина вхождения переменной x_{11} в x_{17} больше единицы. Тогда решается задача

на описание с посылками x12, условиями которой служат утверждение x17 и все утверждения, необходимые для сопровождения x17 по о.д.з. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x11". Ответ задачи присваивается переменной x20. Если он отличен от символа "отказ", то вхождение x16 заменяется на x20.

По окончании просмотра вхождений x16 проверяется, что набор x15 был изменен. При этом все переменные, начиная с x16, оказываются не определены. Переменной x16 присваивается выражение "класс(x11 P)", где P - конъюнкция утверждений измененного списка x15. Создается импликация с антецедентами x12, консеквентом которой служит равенство второго операнда отношения принадлежности x10 выражению x16. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Вывод тождества для группировки под описатель.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cfgh}(c - \text{set} \ \& \ (h(e) \ \& \ \neg(f(e) \in c)) = g \rightarrow \text{set}_d(\exists_e(d = f(e) \ \& \ h(e))) \setminus c = \text{set}_d(\exists_e(d = f(e) \ \& \ g)))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow a \in b \setminus c \leftrightarrow a \in b \ \& \ \neg(a \in c))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок "принадлежит", причем первым операндом ее служит некоторая переменная x11. Переменной x12 присваивается список конъюнктивных членов заменяющей части. Среди них находится утверждение x13 с заголовком "принадлежит", первым операндом которого служит та же переменная x11. В нашем примере x10 имеет вид " $a \in b \setminus c$ ", x13 - вид " $a \in b$ ". Проверяется, что вторым операндом утверждения x13 служит некоторая переменная x14, входящая в x10. В нашем примере x11 - a, x14 - b. Выбираются переменные A, B, C, D, E, не входящие в исходную теорему. В нашем примере это переменные d, e, f, g, h. Переменной x18 присваивается выражение " $\text{set}_A(\exists_B(A = C(B) \ \& \ E(B)))$ ". Переменной x19 присваивается выражение " $C(B)$ ". Переменной x20 присваивается конъюнкция отличных от x13 элементов списка x12. В нашем примере - " $\neg(a \in c)$ ". Переменной x21 присваивается результат подстановки в x20 выражения x19 вместо переменной x11. В нашем примере - " $\neg(f(e) \in c)$ ". Переменной x22 присваивается терм "равно($\text{и}(E(B)x21) D$)". В нашем примере - терм " $(h(e) \ \& \ \neg(f(e) \in c)) = g$ ".

Переменной x23 присваивается список результатов подстановки выражения x18 вместо переменной x14 в антецеденты исходной теоремы. В нашем примере он состоит из двух утверждений: " $\text{set}_d(\exists_e(d = f(e) \ \& \ h(e))) - \text{set}$ ", " $c - \text{set}$ ". Переменной x24 присваивается результат подстановки во второй операнд утверждения x10 выражения x18 вместо переменной x14. Переменной x25 присваивается терм "равно($x24 \ \text{set}_A(\exists_B(A = C(B) \ \& \ D))$)". Переменной x26 присваивается результат обработки набора x23 процедурой "нормантецеденты" относительно

параметров терма x_{25} . Переменной x_{27} присваивается список параметров терма x_{25} . В нашем примере - c, f, g, h . Переменной x_{28} присваивается импликация со связывающей приставкой x_{27} , антецедентами которой служат утверждения x_{26} и x_{22} , а консеквентом - x_{25} . Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "см(короче($D H$))", где H - левая часть равенства x_{22} .

Примерка определения принадлежности бескванторно определяемому множеству на элементарные операции раздела

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abmn}(a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow (a + b) \in \{m, \dots, n\} \leftrightarrow a \in \{m - b, \dots, n - b\})$$

из теоремы

$$\forall_{mnx}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow x \in \{m, \dots, n\} \leftrightarrow x - \text{целое} \ \& \ 0 \leq x - m \ \& \ 0 \leq n - x)$$

Переменной x_{10} присваивается вхождение заменяемой части. Проверяется, что она имеет заголовок "принадлежит", причем первым операндом ее служит некоторая переменная x_{11} . В нашем примере - переменная x . Проверяется, что теорема имеет характеристики с заголовками "и", "определение". Переменной x_{12} присваивается набор конъюнктивных членов определяющей части, переменной x_{13} - список антецедентов теоремы. Проверяется, что x_{11} не входит в параметры утверждений x_{13} . Среди утверждений x_{12} выбирается утверждение x_{14} вида $P(x_{11})$, где P - название типа объектов. В нашем примере - символ "целое". Переменной x_{16} присваивается список, полученный добавлением к P всех его надтипов. В нашем примере x_{16} состоит из символов "целое", "рациональное", "число", "комплексное".

Переменная x_{17} перечисляет по возрастанию разделы, к которым относится символ P . Переменной x_{18} присваивается список понятий раздела x_{17} . В нашем примере x_{18} - "элементарная алгебра". В списке x_{18} выбирается символ x_{19} операции, тип значения которой принадлежит списку x_{20} , причем арность x_{21} этой операции отлична от 0 и от символа "натуральное". В нашем примере x_{19} - символ "плюс", $x_{21} = 2$.

Переменной x_{22} присваивается список из x_{21} переменной, не входящих в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b . Переменной x_{23} присваивается список утверждений вида " $P(X)$ ", где X - элемент списка x_{22} . В нашем примере x_{23} состоит из утверждений " $a - \text{целое}$ ", " $b - \text{целое}$ ". Переменной x_{24} присваивается утверждение " $P(T)$ ", где T - результат соединения операцией x_{19} переменных x_{22} . В нашем примере - " $(a + b) - \text{целое}$ ". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x_{24} и все сопровождающие x_{24} по о.д.з. утверждения суть следствия утверждений x_{23} .

Переменной x_{26} присваивается список результатов подстановки выражения T вместо переменной x_{11} в утверждения x_{12} . Выбирается элемент x_{27} списка x_{26} . В нашем примере - переменная a . Переменной x_{28} присваивается результат добавления к x_{26} утверждения " $P(x_{27})$ ". В нашем примере - утверждения " $a - \text{целое}$ ". Переменной x_{29} присваивается результат добавления к списку x_{13} утверждений $P(X)$ для всех отличных от x_{27} переменных набора x_{22} .

Решается задача на описание x_{30} , имеющая посылки x_{29} , условия x_{28} и цели "полный", "явное", "прямой ответ", "неизвестные x_{27} ". В нашем примере посылки суть

" m – целое", " n – целое", " b – целое". Условия - " a – целое", " $(a + b)$ – целое", " $0 \leq (a + b) - m$ ", " $0 \leq n - (a + b)$ ". Неизвестная - a . Ответ присваивается переменной $x31$. В нашем примере он имеет вид " a – целое & $m - b \leq a$ & $a \leq n - b$ & $m - b \leq n - b$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", не содержит символа "или" и не имеет связанных переменных. Переменной $x32$ присваивается список конъюнктивных членов ответа. Переменной $x33$ присваивается подсписок списка $x32$, образованный утверждениями, содержащими переменную $x27$.

Проверяется, что конъюнкция не вошедших в $x33$ утверждений списка $x32$ является следствием утверждений $x29$ и $x33$. Переменной $x34$ присваивается выражение "класс($x27$ Q)", где Q - конъюнкция утверждений $x33$. В нашем примере $x34$ имеет вид " $\text{set}_a(a$ – целое & $m - b \leq a$ & $a \leq n - b)$ ". Переменной $x36$ присваивается результат упрощения выражения $x34$ относительно посылок $x29$ при помощи вспомогательной задачи на преобразование. В нашем примере получаем " $\{m - b, \dots, n - b\}$ ". Проверяется, что утверждение $x36$ элементарно. Переменной $x37$ присваивается результат подстановки в заменяемую часть теорему выражения T вместо переменной $x11$. В нашем примере имеем " $(a + b) \in \{m, \dots, n\}$ ". Переменной $x38$ присваивается эквивалентность утверждения $x37$ утверждению "принадлежит($x27$ $x36$)". Переменной $x39$ присваивается результат добавления к списку $x13$ всевозможных утверждений $P(X)$, где X - переменная списка $x22$. Затем создается импликация с антецедентами $x39$ и консеквентом $x38$. Переменной $x40$ присваивается результат обработки данной импликации оператором "нормтеорема". Рассматривается характеристика "определение(R)" исходной теоремы. Определяется заголовок s подтерма терма R , имеющего максимальную сложность. В нашем примере - символ "номера". Проверяется, что символ s встречается в теореме $x40$. После этого теорема $x40$ регистрируется в списке вывода.

3.85 Характеристика "пропорция"

Характеристикой "пропорция($x1$ $x2$)" снабжаются соотношения пропорциональности для числовых атомов $x1$, $x2$.

Логические следствия теоремы

1. Вывод соотношения пропорциональности из нескольких других соотношений пропорциональности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{abcdABCDEF} (\neg(A = C) \ \& \ \neg(A = F) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \\ & \neg(C = E) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AC) = \text{прямая}(BC)) \ \& \ al(AF) = bl(DF) \ \& \\ & cl(CE) = dl(AE) \ \& \ D \in \text{отрезок}(BC) \ \& \ E \in \text{отрезок}(AC) \ \& \ F \in \text{прямая}(AD) \ \& \\ & F \in \text{прямая}(BE) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \\ & A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \rightarrow \\ & (bd - ac)l(BD) = acl(CD)) \end{aligned}$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEF} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ F - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ E \in \text{отрезок}(AC) \ \&$$

$D \in \text{отрезок}(BC) \ \& \ F \in \text{прямая}(AD) \ \& \ F \in \text{прямая}(BE) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AC) = \text{прямая}(BC)) \rightarrow l(AF)l(BD)l(CE) = l(DF)l(BC)l(AE)$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что он имеет не менее 5 элементов. В нашем примере - шесть. Проверяется, что для каждого элемента списка x10 имеется характеристика "пропорция(...)", содержащая этот элемент. Переменной x11 присваивается результат добавления к списку x8 термов "актив(T)" для всех элементов T набора x10.

Решается задача на исследование x12, посылки которой суть термы x11, а цели - "известно", "теорвывод", "неизвестные X". Здесь X - все параметры посылок x11. После этого переменной x14 присваивается список пар (Q_1, Q_2) , где Q_1 - числовой атом набора x10, для которого в списке посылок задачи x12 имеется равенство его сумме Q_2 двух числовых атомов, причем один из них принадлежит списку x10, а другой - не принадлежит. В нашем примере x14 имеет единственную пару $(l(BC), l(BD) + l(CD))$.

Переменной x15 присваивается консеквент x9. Если список x14 непуст, то предпринимается замена в x15 всех подтермов - первых элементов пар x14 на вторые элементы этих пар. Результат обрабатывается нормализатором раскрытия скобок "стандплюс". В нашем примере x15 приобретает вид $l(AF)l(BD)l(CE) = l(AE)l(BD)l(DF) + l(AE)l(CD)l(DF)$. Переменной x16 присваивается набор слагаемых частей равенства x15, причем слагаемые правой части берутся со знаком "минус". В нашем примере x16 состоит из трех выражений $l(AF)l(BD)l(CE)$, $-l(AE)l(BD)l(DF)$, $-l(AE)l(CD)l(DF)$. Переменной x17 присваиваются списки сомножителей элементов списка x16. Знак "минус" отбрасывается. В нашем примере x17 состоит из трех троек: $l(AF), l(BD), l(CE)$, $l(AE), l(BD), l(DF)$, $l(AE), l(CD), l(DF)$. Переменной x19 присваивается набор числовых атомов терма x15. В нашем примере - $l(AF), l(BD), l(CE), l(AE), l(DF), l(CD)$.

Составляется список x20 таких пар невырожденных числовых атомов списка x19, для которых список посылок задачи x12 имеет утверждение, содержащее эти атомы и не содержащее прочих атомов из x19. Пересечение пар по элементам списка x19 не допускается (если он есть, пара не добавляется к списку x20). В нашем примере x20 состоит из пар $l(AF), l(DF)$, $l(BD), l(CD)$, $l(CE), l(AE)$.

Проверяется, что каждый элемент набора x19 вошел в некоторую пару списка x20. Проверяется также, что каждая пара набора x20 пересекается с каждым набором списка x17 ровно по одному элементу.

Рассматривается некоторая пара x21 набора x20. В нашем примере - $l(BD), l(CD)$. Переменной x22 присваивается список переменных исходной теоремы. Вводятся пустые накопители x23 и x24. В накопитель x23 будут заноситься дополнительные антецеденты, в накопитель x24 - пары для замены подтермов терма x15 на вспомогательные переменные.

Начинается цикл просмотра отличных от x21 пар x25 набора x20. Выбираются две переменные u, v , не входящие в список x22. Эти переменные сразу же добавляются к списку x22. Переменной x27 присваивается равенство " $uP = vQ$ ", где P, Q - первый и второй элементы пары x25. К списку x23 добавляются равенство x27 и утверждения " $\neg(P = 0)$ ", " u - число", " v - число". К списку x24 добавляются пары (P, v) и (Q, u) . Далее - переход к очередной паре x25.

По окончании просмотра пар x25 все переменные начиная с x25 снова оказываются не определены. Переменной x25 присваивается результат замены в терме x15 первых элементов пар x24 на вторые элементы. В результате в нашем примере имеем: " $bl(BD)d = cl(BD)a + cl(CD)a$ ". Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x8 и x23, а консеквент - x25. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Усмотрение равенства числовых атомов, выразимых с помощью пропорции через равные числовые атомы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdef}(\neg(a = b) \& \neg(a = c) \& \neg(b = c) \& \neg(d = f) \& \neg(e \in \text{прямая}(df)) \& l(ac) = l(df) \& \angle(acb) = \angle(dfe) \& \angle(bac) = \angle(edf) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& d - \text{точка} \& e - \text{точка} \& f - \text{точка} \rightarrow l(bc) = l(ef))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = b) \& \neg(a = c) \& \neg(b = c) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \rightarrow \sin(\angle(acb) + \angle(bac))l(bc) = \sin(\angle(bac))l(ac))$$

Текущая характеристика - "пропорция($l(bc), l(ac)$)". Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - список операндов текущей характеристики. В нашем примере - " $l(bc), l(ac)$ ". Переменной x11 присваивается набор сомножителей левой части равенства в консеквенте, переменной x12 - набор сомножителей правой части. Проверяется, что общее число характеристик "пропорция(...)" у теоремы не более 2. В нашем примере оно равно 1. Проверяется, что никакой антецедент теоремы не содержит всех ее переменных. Переменной x13 присваивается консеквент теоремы. Проверяется, что его параметры содержат все переменные теоремы. Переменной x14 присваивается список числовых атомов консеквента. Проверяется, что все они невырожденные и каждый их корневой операнд - переменная. В списке x14 выбирается числовой атом x15, входящий в список x9. В нашем примере - " $l(bc)$ ". Проверяется, что x15 входит либо в x11, либо в x12, причем в первом случае переменной x16 присваивается список остальных элементов набора x11, а во втором - список остальных элементов набора x12.

Переменной x17 присваивается отрицание равенства нулю произведения выражений x16. Переменной x19 присваивается результат упрощения утверждения x17 вспомогательной задачей на преобразование относительно посылок x8. В нашем примере x19 имеет вид " $\neg(b \in \text{прямая}(ac))$ ". Проверяется, что терм x19 не имеет числовых атомов. Переменной x20 присваивается результат удаления из списка x14 элемента x15. Переменной x21 присваивается список переменных исходной теоремы. Выбирается список x22 переменных, не входящих в x21 и

имеющий ту же длину, что x21. Переменной x23 присваивается объединение списка x8 с набором конъюнктивных членов утверждения x19. Переменной x24 присваивается список результатов подстановки в утверждения x23 переменных x22 вместо переменных x21, переменной x25 - список результатов такой же подстановки в атомы набора x20. Переменной x26 присваивается список равенств атомов набора x20 соответствующим атомам набора x25. Переменной x27 присваивается объединение списков x23, x24 и x26. Переменной x28 присваивается результат подстановки переменных x22 вместо x21 в атом x15. Создается импликация с антецедентами x27 и консеквентом "равно(x15 x28)". Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- Использование неоднозначной определимости объектов для двукратного применения соотношения пропорциональности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDE}(\neg(a = A) \& \neg(a = D) \& \neg(b = B) \& \neg(A = B) \& \neg(A = D) \& \neg(A = E) \& \neg(B = C) \& \neg(\text{прямая}(AD) = \text{прямая}(AE)) \& a \in \text{прямая}(DE) \& b \in \text{прямая}(aA) \& b \in \text{прямая}(BC) \& B \in \text{прямая}(AD) \& C \in \text{прямая}(AE) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(DE) \rightarrow l(bB)l(DE) = l(aD)l(BC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \neg(A = E) \& \neg(B = C) \& \neg(D = E) \& \neg(A = D) \& B \in \text{прямая}(AD) \& \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC) \& C \in \text{прямая}(AE) \& \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(AD)) \rightarrow l(AB)l(DE) = l(AD)l(BC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \neg(A = B) \& \neg(B = C) \& A \in \text{прямая}(BC) \rightarrow \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC))$$

Текущая характеристика - "пропорция($l(DE), l(BC)$)". Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - список операндов текущей характеристики. В нашем примере - " $l(DE), l(BC)$ ". Переменной x11 присваивается набор сомножителей левой части равенства в консеквенте, переменной x12 - набор сомножителей правой части. Переменной x13 присваивается пересечение списков x11 и x10. Проверяется, что оно одноэлементно, и переменной x14 присваивается его элемент. В нашем примере - " $l(DE)$ ". Аналогично, переменной x15 присваивается пересечение списков x12 и x10; проверяется, что оно одноэлементно, и переменной x16 присваивается его элемент. В нашем примере - " $l(BC)$ ". Проверяется, что заголовки выражений x14 и x16 одинаковы. Проверяется, что списки x11 и x12 двухэлементные. Переменной x17 присваивается элемент списка x11, отличный от x14, переменной x18 - элемент списка x12, отличный от x16. В нашем примере x17 - " $l(AB)$ ", x18 - " $l(AD)$ ". Проверяется, что теорема имеет характеристику "числовой атом" и что параметры ее антецедентов включаются в параметры консеквента. Проверяется, что среди антецедентов теоремы нет равенств. Проверяется отсутствие антецедента с заголовком "эквуглы".

Переменной x_{20} присваивается консеквент теоремы, переменной x_{21} - список его параметров. Выбирается параметр x_{22} выражения x_{14} , имеющий единственное вхождение в терм x_{20} . В нашем примере - переменная E . Выбирается параметр x_{23} терма x_{16} , тоже имеющий единственное вхождение в x_{20} . В нашем примере - переменная C . Проверяется, что любая отличная от x_{22} и x_{23} переменная x_{24} списка x_{21} имеет более одного вхождения в x_{20} .

Выбирается антецедент x_{24} , в нем выделяется вхождение x_{25} переменной x_{22} , и рассматривается вхождение x_{26} , операндом которого служит вхождение x_{25} . В нашем примере x_{24} - утверждение " $\text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC)$ ", x_{26} - вхождение выражения " $\text{прямая}(DE)$ ". Переменной x_{27} присваивается символ по вхождению x_{26} . В нашем примере - " прямая ". Справочник "варьиртерма" определяет по x_{27} набор x_{28} номеров операндов вхождения x_{26} , для которых возможно варьирование, не изменяющее значения подтерма x_{26} . В нашем примере можно варьировать обе точки, по которым определяется прямая, так что x_{28} состоит из 1 и 2. Проверяется, что набор x_{28} определить удалось и что номер операнда x_{25} вхождения x_{26} принадлежит этому набору. Переменной x_{29} присваивается подтерм x_{26} . В нашем примере - выражение " $\text{прямая}(DE)$ ". Проверяется, что переменная x_{23} не входит в x_{29} .

Рассматривается вхождение x_{30} переменной x_{23} в утверждение x_{24} и определяется вхождение x_{31} , операндом которого служит x_{30} . В нашем примере x_{31} - вхождение выражения " $\text{прямая}(BC)$ ". Проверяется, что по вхождению x_{31} расположен символ x_{27} и что номер операнда x_{30} вхождения x_{31} принадлежит списку x_{28} . Переменной x_{32} присваивается подтерм x_{31} . Проверяется, что переменная x_{22} не входит в x_{32} .

Справочник поиска теорем "вартеор" определяет по x_{27} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{35} присваивается пара переменных X, Y , не входящих в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b . Переменной x_{36} присваивается результат подстановки в терм x_{29} переменной X вместо x_{22} . В нашем примере получаем " $\text{прямая}(Da)$ ". Переменной x_{37} присваивается равенство выражений x_{29} и x_{36} . Переменной x_{38} присваивается консеквент дополнительной теоремы, переменной x_{39} - список его параметров. В нашем примере x_{37} имеет вид " $\text{прямая}(DE) = \text{прямая}(Da)$ ", x_{38} - вид " $\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)$ ". Определяется подстановка S вместо переменных x_{39} , унифицирующая равенства x_{37} и x_{38} . Переменной x_{41} присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам дополнительной теоремы. Переменной x_{42} присваивается результат подстановки в выражение x_{32} переменной Y вместо переменной x_{23} . Переменной x_{43} присваивается равенство выражений x_{32} и x_{42} . В нашем примере - равенство " $\text{прямая}(BC) = \text{прямая}(Bb)$ ". Определяется подстановка R вместо переменных x_{39} , унифицирующая равенства x_{38} и x_{43} . Переменной x_{45} присваивается список результатов применения подстановки R к антецедентам дополнительной теоремы.

Переменной x_{46} присваивается список отличных от x_{24} антецедентов исходной теоремы, содержащих хотя бы одну из переменных x_{22}, x_{23} . Переменной x_{47} присваивается список результатов подстановки в утверждения x_{46} переменных

X, Y вместо переменных x_{22}, x_{23} . Переменной x_{48} присваивается объединение списков $x_8, x_{47}, x_{41}, x_{45}$ с отрицаниями равенства нулю выражений x_{17} и x_{18} . Переменной x_{49} присваивается результат подстановки в выражение x_{14} переменной X вместо x_{22} , переменной x_{50} - результат подстановки в выражение x_{16} переменной Y вместо x_{23} . Переменной x_{51} присваивается утверждение "равно(умножение($x_{14} x_{50}$) умножение($x_{16} x_{49}$)))". Затем создается импликация с антецедентами x_{48} и консеквентом x_{51} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Отождествление противоположных числовых атомов в соотношении пропорциональности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \& \neg(A = E) \& \neg(B = C) \& \neg(\text{прямая}(AD) = \text{прямая}(AE)) \& l(AB) = l(AD) \& B \in \text{прямая}(AD) \& C \in \text{прямая}(AE) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(DE) \rightarrow l(DE) = l(BC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \neg(A = E) \& \neg(B = C) \& \neg(D = E) \& \neg(A = D) \& B \in \text{прямая}(AD) \& \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC) \& C \in \text{прямая}(AE) \& \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(AD)) \rightarrow l(AB)l(DE) = l(AD)l(BC))$$

Характеристика - "пропорция($l(AB), l(AD)$)".

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{10} - список числовых атомов консеквента. Проверяется, что все они невырожденные и что их количество равно 4. В нашем примере x_{10} состоит из атомов $l(AB), l(DE), l(AD), l(BC)$. Переменной x_{11} присваивается список операндов текущей характеристики. В нашем примере - $l(AB), l(AD)$. Проверяется, что x_{11} включается в список x_{10} . Переменной x_{12} присваивается набор сомножителей левой части равенства в консеквенте теоремы, переменной x_{13} - набор сомножителей правой части. Проверяется, что оба списка x_{12}, x_{13} включаются в список x_{10} . Переменной x_{14} присваивается разность списков x_{12} и x_{11} , переменной x_{15} - разность списков x_{13} и x_{11} . Оба эти списка одноэлементны; переменной x_{16} присваивается элемент списка x_{14} , а переменной x_{17} - элемент списка x_{15} . В нашем примере x_{16} - выражение $l(DE)$, а x_{17} - $l(BC)$. Переменной x_{18} присваивается результат добавления к списку x_8 равенства выражений x_{11} и отрицания равенства первого из этих выражений нулю. Переменной x_{19} присваивается равенство выражений x_{16} и x_{17} . Переменной x_{20} присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка x_{18} относительно параметров терма x_{19} . Создается импликация с антецедентами x_{20} и консеквентом x_{19} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Попытка исключения отношения двух числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \& \neg(B = C) \& \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)) \& \angle(ABD) = \angle(CBD) \& D \in \text{прямая}(AC) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow 2 \cos(\angle(CBD))l(AB)l(BC) = (l(AB) + l(BC))l(BD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \neg(B = C) \& \neg(A = B) \& \angle(ABD) = \angle(DBC) \& D \in \text{прямая}(AC) \& \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)) \rightarrow l(AB)l(CD) = l(AD)l(BC))$$

Характеристика - "пропорция($l(CD)$, $l(AD)$)".

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{10} - список операндов текущей характеристики. В нашем примере - $l(CD)$, $l(AD)$. Переменной x_{11} присваивается набор сомножителей левой части равенства в консеквенте теоремы, переменной x_{12} - набор сомножителей правой части. Проверяется, что эти наборы двухэлементные. Переменной x_{13} присваивается пересечение списков x_{11} и x_{10} . Проверяется, что оно одноэлементное, и переменной x_{14} присваивается его элемент. Переменной x_{15} присваивается пересечение списков x_{12} и x_{10} . Проверяется, что оно одноэлементное, и переменной x_{16} присваивается его элемент. В нашем примере x_{14} - " $l(CD)$ ", x_{16} - " $l(AD)$ ". Проверяется, что заголовки выражений x_{14} и x_{16} совпадают. Переменной x_{17} присваивается отличный от x_{14} элемент набора x_{11} , переменной x_{18} - отличный от x_{16} элемент набора x_{12} . В нашем примере x_{17} - " $l(AB)$ ", x_{18} - " $l(BC)$ ".

Проверяется, что все параметры антецедентов встречаются в консеквенте. Переменной x_{19} присваивается список равенств, встречающихся среди антецедентов. Проверяется, что он непуст. В нашем примере - единственное равенство " $\angle(ABD) = \angle(DBC)$ ". Переменной x_{20} присваивается список числовых атомов, встречающихся в равенствах x_{19} . В нашем примере - " $\angle(ABD)$ ", " $\angle(DBC)$ ". Проверяется, что эти числовые атомы невырожденные. Проверяется, что ни один из атомов списка x_{20} не содержит всех переменных текущей характеристики.

Переменной x_{21} присваивается пара переменных X, Y , не входящих в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b . Переменной x_{22} присваивается результат добавления к списку x_8 утверждений "равно($x_{14} X$)", "равно($x_{16} Y$)", "равно(умножение($X x_{17}$)умножение($Y x_{18}$))". Решается задача на исследование x_{23} , посылками которой служат утверждения x_{22} . Ее цели - "известно", "теорема", "неизвестные Z ", "исключ $X Y$ ".

В нашем примере посылки суть: " $l(AB) = a$ ", " $l(BC) = b$ ", " $al(CD) = bl(AD)$ ", " $A - \text{точка}$ ", " $B - \text{точка}$ ", " $C - \text{точка}$ ", " $D - \text{точка}$ ", " $\neg(B = C)$ ", " $\neg(A = B)$ ", " $\angle(ABD) = \angle(DBC)$ ", " $D \in \text{прямая}(AC)$ ", " $\neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC))$ ". Неизвестные - a, b, A, B, C, D , причем имеется цель "исключ $a b$ ".

После решения задачи x_{23} выбирается ее посылка x_{25} , содержащая символ "равно", имеющая комментарий с заголовком "следствие" и не содержащая переменных X, Y . Проверяется, что посылка x_{25} содержит все параметры консеквента теоремы, причем каждый ее дизъюнктивный член является равенством.

В нашем примере x_{25} имеет вид " $2 \cos(\angle(ABD))l(AB)l(BC) - l(AB)l(BD) - l(BC)l(BD) = 0 \vee -l(AB) + l(BC) = 0$ ".

Далее, если посылка x_{25} имеет заголовок "или", реализуется цикл ее коррекций. Если среди дизъюнктивных членов терма x_{25} имеется равенство нулю разности двух выражений P, Q , то рассматривается результат R удаления в x_{25} данного дизъюнктивного члена U . Проверяется, что каждое из выражений P, Q встречается в R . Проверяется, что R является следствием antecedентов теоремы и равенства U . Затем x_{25} заменяется на R . Если x_{25} по-прежнему является дизъюнкцией, попытка повторяется.

По окончании указанного цикла проверяется, что x_{25} - равенство. В нашем примере оно имеет вид " $2 \cos(\angle(ABD))l(AB)l(BC) - l(AB)l(BD) - l(BC)l(BD) = 0$ ". Затем создается импликация с antecedентами x_8 и консеквентом x_{25} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Извлечение из соотношения пропорциональности соотношения, позволяющего выразить невырожденный числовой атом через числовые параметры.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABC}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& al(AC) = bl(AB) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow b = a \operatorname{tg}(\angle(ABC)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \neg(A = C) \& \neg(A = B) \& \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(AC) = \operatorname{tg}(\angle(ABC))l(AB))$$

Характеристика - "пропорция($l(AC), l(AB)$)".

Переменной x_8 присваивается список antecedентов, переменной x_9 - список операндов текущей характеристики. В нашем примере - $l(AC), l(AB)$. Переменной x_{11} присваивается набор сомножителей левой части равенства в консеквенте теоремы, переменной x_{12} - набор сомножителей правой части. В пересечении списков x_{11} и x_9 выбирается элемент x_{13} , в пересечении списков x_{12} и x_9 - элемент x_{14} , отличный от x_{13} . В нашем примере x_{13} - " $l(AC)$ ", x_{14} - " $l(AB)$ ". Переменной x_{15} присваивается произведение элементов списка x_{11} , отличных от x_{13} ; переменной x_{16} - произведение элементов списка x_{12} , отличных от x_{14} . В нашем примере x_{15} - единица, x_{16} - " $\operatorname{tg}(\angle(ABC))$ ". Переменной x_{17} присваивается список числовых атомов выражений x_{15} и x_{16} . Проверяется, что этот список одноэлементный, и переменной x_{18} присваивается его элемент. В нашем примере x_{18} имеет вид " $\angle(ABC)$ ". Проверяется, что числовой атом x_{18} невырожденный.

Выбираются переменные X, Y , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b . При помощи оператора "усмне0" устанавливается, что значение выражения x_{14} не равно 0. Переменной x_{21} присваивается утверждение "равно(умножение(X x_{13}) умножение(Y x_{14}))". В нашем примере -

" $al(AC) = bl(AB)$ ". Переменной x22 присваивается утверждение "равно(умножение(Y x15) умножение(X x16))". В нашем примере - " $b \cdot 1 = a \operatorname{tg}(\angle(ABC))$ ".

Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x8, "число(X)", "число(Y)" и x21, а консеквентом - x22. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "числсвяз".

2. Фиксация отношения двух числовых атомов через соотношение пропорциональности в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abdefg}(\neg(d = g) \& \neg(e = f) \& \neg(e = g) \& \neg(f = g) \& al(de) = bl(ef) \& e \in \text{отрезок}(df) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& d - \text{точка} \& e - \text{точка} \& f - \text{точка} \& g - \text{точка} \rightarrow b \sin(\angle(egf))l(fg) = a \sin(\angle(dge))l(dg))$$

из теоремы

$$\forall_{defg}(f - \text{точка} \& d - \text{точка} \& \neg(d = g) \& \neg(e = g) \& \neg(f = g) \& e \in \text{отрезок}(df) \& e - \text{точка} \& g - \text{точка} \rightarrow \sin(\angle(egf))l(de)l(fg) = \sin(\angle(dge))l(dg)l(ef))$$

Характеристика - "пропорция($l(de), l(ef)$)".

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Проверяется, что теорема имеет не более 4 переменных, а число ее характеристик с заголовком "пропорция" не менее 4. В нашем примере - ровно 4. Переменной x10 присваивается список операндов текущей характеристики. В нашем примере - $l(de), l(ef)$. Переменной x11 присваивается набор сомножителей левой части равенства в консеквенте теоремы, переменной x12 - набор сомножителей правой части. Переменной x13 присваивается пересечение списков x11 и x10. Проверяется, что оно одноэлементное, и переменной x15 присваивается его элемент. Переменной x14 присваивается пересечение списков x12 и x10. Проверяется, что оно одноэлементное, и переменной x16 присваивается его элемент. В нашем примере x15 - " $l(de)$ ", x16 - " $l(ef)$ ".

Выбираются переменные X, Y , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b . Переменной x18 присваивается утверждение "равно(умножение(X x15) умножение(Y x16))". В нашем примере - " $al(de) = bl(ef)$ ". Переменной x19 присваивается утверждение "равно(умножение(Y P) умножение(X Q))", где P - произведение отличных от x15 выражений списка x11, Q - произведение отличных от x16 элементов списка x12. В нашем примере x19 имеет вид " $b \sin(\angle(egf))l(fg) = a \sin(\angle(dge))l(dg)$ ".

Переменной x20 присваивается объединение списка x8 с утверждениями x18, "число(X)", "число(Y)", "не(равно(x16 0))". Затем создается импликация с антецедентами x20 и консеквентом x19. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Обобщение теоремы

1. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abdefg}(\neg(d = g) \& \neg(e = g) \& \neg(f = g) \& al(de) = bl(ef) \& \\ e \in \text{отрезок}(df) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& d - \text{точка} \& e - \text{точка} \& \\ f - \text{точка} \& g - \text{точка} \rightarrow b \sin(\angle(egf))l(fg) = a \sin(\angle(dge))l(dg))$$

из теоремы

$$\forall_{abdefg}(\neg(d = g) \& \neg(e = f) \& \neg(e = g) \& \neg(f = g) \& al(de) = bl(ef) \& \\ e \in \text{отрезок}(df) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& d - \text{точка} \& e - \text{точка} \& \\ f - \text{точка} \& g - \text{точка} \rightarrow b \sin(\angle(egf))l(fg) = a \sin(\angle(dge))l(dg))$$

Характеристика - "пропорция($l(fg), l(dg)$)". Эта теорема была выведена в предыдущем примере.

Прием уже встречался ранее в связи с другими характеристиками. Для удобства чтения повторим его описание. Среди антецедентов теоремы выбирается утверждение $x10$ вида " $\neg(x = t)$ ", где x - переменная, не встречающаяся в выражении t . Проверяется, что данное утверждение не является сопровождающим по о.д.з. для консеквента либо других антецедентов. Создается список $x17$, полученный из набора антецедентов теоремы заменой утверждения $x10$ на равенство $x = t$ и добавлением всех утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. отличных от $x10$ антецедентов. Предпринимается попытка доказать, что консеквент теоремы является следствием утверждений $x17$. После этого создается результирующая теорема, полученная из исходной отбрасыванием антецедента $x10$ и добавлением утверждений, недостающих для сопровождения по о.д.з. остальных антецедентов.

Попытка использования дополнительного тождества для преобразования консеквента

1. Двукратное применение соотношения пропорциональности с отождествлением двух пар числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aABC}(\neg(a = B) \& \neg(a = C) \& \neg(A = C) \& \neg(B \in \text{прямая}(AC)) \& \\ \angle(BaC) = \angle(BAC) \& a - \text{точка} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \rightarrow \\ \sin(\angle(aBC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(aC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \neg(B = C) \& \neg(A = B) \& \\ \neg(A = C) \rightarrow \sin(\angle(BAC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$$

Характеристика - "пропорция($l(AC), l(BC)$)".

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{10} - список операндов текущей характеристики. В нашем примере - $l(AC)$, $l(BC)$. Переменной x_{11} присваивается набор сомножителей левой части равенства в консеквенте теоремы, переменной x_{12} - набор сомножителей правой части. Проверяется, что списки x_{11} и x_{12} двухэлементные. Переменной x_{13} присваивается пересечение списков x_{11} и x_{10} . Проверяется, что оно одноэлементное, и переменной x_{14} присваивается его элемент. Переменной x_{15} присваивается пересечение списков x_{12} и x_{10} . Проверяется, что оно одноэлементное, и переменной x_{16} присваивается его элемент. В нашем примере x_{14} - " $l(AC)$ ", x_{16} - " $l(BC)$ ". Проверяется, что заголовки выражений x_{14} и x_{16} одинаковы. Переменной x_{17} присваивается отличный от x_{14} элемент списка x_{11} , переменной x_{18} - отличный от x_{16} элемент списка x_{12} . В нашем примере x_{17} имеет вид " $\sin(\angle(BAC))$ ", x_{18} - вид " $\sin(\angle(ABC))$ ". Проверяется, что теорема не имеет другой характеристики с заголовком "пропорция" и что оценки сложности выражений x_{14} , x_{16} равны.

Переменной x_{20} присваивается список числовых атомов выражения x_{17} , переменной x_{23} - список числовых атомов выражения x_{18} . Проверяется, что оба эти списка одноэлементные. Переменной x_{21} присваивается элемент списка x_{20} , переменной x_{24} - элемент списка x_{23} . Проверяется, что атомы x_{21} , x_{24} невырожденные и имеют одну и ту же оценку сложности, большую оценки сложности атома x_{14} . В нашем примере x_{21} имеет вид " $\angle(BAC)$ ", x_{24} - вид " $\angle(ABC)$ ".

Переменной x_{25} присваивается список параметров терма x_{16} , переменной x_{26} - список переменных теоремы. Переменной x_{27} присваивается разность списков x_{26} и x_{25} . В нашем примере x_{27} состоит из единственной переменной A .

Переменной x_{28} присваивается список однобуквенных слов, образованных переменными, отличными от переменных x_{26} , и имеющий такую же длину, как список x_{27} . В нашем примере x_{28} состоит из единственного выражения a . Переменной x_{29} присваивается результат подстановки термов x_{28} вместо переменных x_{27} в выражение x_{18} , переменной x_{30} - результат такой же подстановки в выражение x_{17} . В нашем примере x_{29} имеет вид " $\sin(\angle(aBC))$ ", x_{30} - вид " $\sin(\angle(BaC))$ ". Переменной x_{31} присваивается список результатов подстановки термов x_{28} вместо переменных x_{27} в выражения x_{11} . В нашем примере он состоит из выражений " $\sin(\angle(BaC))$ ", " $l(aC)$ ". Переменной x_{32} присваивается равенство произведения выражений списка x_{11} и выражения x_{29} произведению выражений списка x_{31} и выражения x_{18} . Переменной x_{33} присваивается объединение списка x_8 со списком результатов подстановки термов x_{28} вместо переменных x_{27} в утверждения того же списка x_8 .

Переменной x_{34} присваивается результат подстановки термов x_{28} вместо переменных x_{27} в атом x_{21} , переменной x_{35} - результат такой же подстановки в атом x_{24} . В нашем примере x_{34} имеет вид " $\angle(BaC)$ ", x_{35} - вид " $\angle(aBC)$ ". Последовательно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{36} присваивается атом x_{21} , переменной x_{37} - атом x_{34} , переменной x_{38} - выражение x_{17} . Во втором случае переменной x_{36} присваивается атом x_{24} , переменной x_{37} - атом x_{35} , переменной x_{38} - выражение x_{18} . В нашем примере рассматривается первый случай. Переменной x_{39} присваивается результат добавления к списку x_{33} равенства выражений x_{36} , x_{37} и отрицания равенства нулю выражения x_{38} . Далее создается импликация с антецедентами x_{39} и консеквентом

x32. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Двукратное применение соотношения пропорциональности с отождествлением внутренних числовых атомов и фиксацией отношения внешних.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdef}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \\ el(bc) = fl(cd) \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \\ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \text{точкалуча}(c, d, b) \rightarrow f \sin(\angle(acd) + \angle(adc)) \cdot \\ \sin(\angle(acd) + \angle(bac)) = e \sin(\angle(adc)) \sin(\angle(bac)))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \rightarrow \\ \sin(\angle(acb) + \angle(bac))l(bc) = \sin(\angle(bac))l(ac))$$

Характеристика - "пропорция($l(bc)$, $l(ac)$)".

Начало программы приема совпадает с началом программы одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - список операндов текущей характеристики. В нашем примере - $l(bc)$, $l(ac)$. Переменной x11 присваивается набор сомножителей левой части равенства в консеквенте теоремы, переменной x12 - набор сомножителей правой части. Проверяется, что списки x11 и x12 двухэлементные. Переменной x13 присваивается пересечение списков x11 и x10. Проверяется, что оно одноэлементное, и переменной x14 присваивается его элемент. Переменной x15 присваивается пересечение списков x12 и x10. Проверяется, что оно одноэлементное, и переменной x16 присваивается его элемент. В нашем примере x14 - " $l(bc)$ ", x16 - " $l(ac)$ ". Проверяется, что заголовки выражений x14 и x16 одинаковы. Переменной x17 присваивается отличный от x14 элемент списка x11, переменной x18 - отличный от x16 элемент списка x12. В нашем примере x17 имеет вид " $\sin(\angle(acb) + \angle(bac))$ ", x18 - вид " $\sin(\angle(bac))$ ". Проверяется, что теорема не имеет другой характеристики с заголовком "пропорция" и что оценки сложности выражений x14, x16 равны.

Дальше начинаются отличия. Переменной x20 присваивается список числовых атомов выражений x17 и x18. В нашем примере - " $\angle(acb)$, $\angle(bac)$ ". Проверяется, что этот список двухэлементный, причем заголовки его элементов одинаковые. Проверяется, что оценки сложности термов списка x20 одинаковые и больше оценки сложности выражений x14, x16. Рассматриваются два случая. В первом из них переменной x22 присваивается атом x14, а переменной x23 - атом x16. Во втором случае, наоборот, переменной x22 присваивается x16, а переменной x23 - x14. В нашем примере рассматривается второй случай.

Переменной x24 присваивается список переменных теоремы, переменной x25 - набор однобуквенных слов, образованных переменными, не входящими в список x24, длина которого равна длине списка x24. В нашем примере x24 - переменные a, b, c ; x25 - d, e, f . Рассматриваются два случая. В первом из них переменной x26 присваивается атом x14, а переменной x27 - атом x16. Во втором случае

x_{26} присваивается x_{16} , а x_{27} - x_{14} . В нашем примере рассматривается первый случай.

Переменной x_{28} присваивается результат подстановки термов x_{25} вместо переменных x_{24} в атом x_{26} . В нашем примере он имеет вид " $l(ef)$ ". Переменной x_{29} присваивается список переменных выражения x_{28} . Усматривается, что терм x_{22} является результатом применения к терму x_{28} некоторой подстановки S вместо переменных x_{29} , которая лишь переобозначает переменные, не отождествляя их. В нашем примере вместо переменных e, f подставляются a, c . Предпринимается замена переменных списка x_{25} на их образы при подстановке S . В результате список x_{25} приобретает вид " d, a, c ".

Переменной x_{31} присваивается результат подстановки термов x_{25} вместо переменных x_{24} в выражение x_{27} . В нашем примере - " $l(dc)$ ". Если x_{22} совпадает с x_{14} , то переменной x_{32} присваивается выражение x_{17} , а переменной x_{33} - выражение x_{18} . Иначе - переменной x_{32} присваивается x_{18} , а переменной x_{33} - x_{17} . Если x_{26} совпадает с x_{14} , то переменной x_{34} присваивается выражение x_{17} , а переменной x_{35} - x_{18} . Иначе переменной x_{34} присваивается x_{18} , а переменной x_{35} - x_{17} . В нашем примере выражения x_{32}, x_{33}, x_{34} и x_{35} суть " $\sin(\angle(bac))$ ", " $\sin(\angle(acb) + \angle(bac))$ ", " $\sin(\angle(acb) + \angle(bac))$ ", " $\sin(\angle(bac))$ ".

Переменной x_{38} присваивается список переменных терма x_{22} . В нашем примере - a, c . В списке x_{20} выбирается выражение x_{39} , параметры которого включают список x_{38} . В нашем примере - выражение " $\angle(acb)$ ". Переменной x_{40} присваивается список результатов применения подстановки термов x_{25} вместо переменных x_{24} в выражения x_{20} . В нашем примере - " $\angle(dca), \angle(adc)$ ". В списке x_{40} выбирается выражение x_{41} , параметры которого включают переменные x_{38} , а заголовок равен заголовку терма x_{39} . В нашем примере x_{41} имеет вид " $\angle(dca)$ ".

Переменной x_{42} присваивается список параметров термов x_{39} и x_{41} , не вошедших в список x_{38} . В нашем примере - переменные b, d . Проверяется, что список x_{42} непуст. Находится подстановка R вместо переменных x_{42} , унифицирующая термы x_{39} и x_{41} . Оператору "унификация" передается опция (развязка x_{42} пустоеслово). Она означает, что при унификации предпринимается попытка развязки переменных списка x_{42} . Последний элемент этой тройки (изначально - "пустоеслово") служит накопителем развязывающих утверждений, вводимых при унификации. В нашем примере получается единственное развязывающее утверждение "точкалуча(c, d, b)", причем вместо переменных b, d подстановка R для отождествления термов $\angle(acb), \angle(dca)$ подставляет сами эти переменные. Без опции (развязка ...) пришлось бы вместо переменной b подставлять переменную d .

Проверяется, что унифицирующая подстановка R - тождественная. Переменной x_{51} присваивается объединение списка x_8 со списком результатов подстановки термов x_{25} вместо переменных x_{24} в утверждения x_8 , а также со списком утверждений из накопителя опции (развязка ...). Выбираются переменные X, Y , не входящие в объединение списка x_{24} с параметрами термов x_{25} . В нашем примере - переменные e, f . Переменной x_{52} присваивается утверждение "равно(умножение(X x_{23}) умножение(Y x_{31}))". К списку x_{50} добавляются утверждения $x_{52}, \text{"не(равно}(x_{31} 0)\text{)", "число}(X)\text{" и "число}(Y)\text{"}$.

Переменной х53 присваивается результат замены в выражении х33 вхождений терма х39 на терм х41. В нашем примере получаем: " $\sin(\angle(dca) + \angle(bac))$ ". Переменной х54 присваивается результат такой же замены в выражении х32. В нашем примере имеем: " $\sin(\angle(bac))$ ". Переменной х55 присваивается утверждение "равно(умножение(Y х36 х53) умножение(X х54 х37))". Наконец, создается импликация с антецедентами х50 и консеквентом х55. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Ей передается характеристика "числовойатом". Кроме того, характеризатор может передать этой теореме характеристику "смпропорц".

3. Попытка разложения на множители для сокращения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(A \in \text{прямая}(BC)) \ \& \ 2\angle(ABC) = \angle(BAC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow 2 \cos(\angle(ABC))l(AC) = l(BC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \rightarrow \sin(\angle(BAC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \sin(2a) = 2 \sin a \cos a)$$

Характеристика - "пропорция($l(AC), l(BC)$)".

Проверяется, что теорема не имеет антецедента с заголовком "равно". Переменной х8 присваивается список антецедентов, переменной х10 - набор числовых атомов консеквента. Проверяется, что все они невырожденные. Переменной х11 присваивается наибольшая из оценок сложности атомов х10. Проверяется отсутствие у теоремы другой характеристики с заголовком "пропорция". Переменной х12 присваивается набор сомножителей левой части равенства в консеквенте теоремы, переменной х13 - набор сомножителей правой части. Рассматриваются два случая. В первом из них переменной х14 присваивается набор х12, а переменной х15 - набор х13. Во втором случае переменной х14 присваивается х13, а переменной х15 - х12. В нашем примере рассматривается первый случай. Выбирается выражение х16 списка х14, не входящее в список х10. В нашем примере - " $\sin(\angle(BAC))$ ". Проверяется, что выражение х16 неконстантное, неоднобуквенное и имеет оценку сложности, большую х11. Проверяется, что оно содержит атом из списка х10. Переменной х17 присваивается заголовок выражения х16. В нашем примере - символ "синус".

Справочник поиска теорем "дублпарам" определяет по х17 указанную выше дополнительную теорему. Она представляет собой кванторное тождество. Переменной х21 присваивается вхождение той части равенства, которая имеет заголовок х17, переменной х22 - другой части. Проверяется, что по вхождению х22 расположен символ "умножение". Переменной х23 присваивается набор сомножителей. В нем выбирается выражение х24. В нашем примере - " $\sin a$ ". Переменной х25 присваивается заголовок выражения х24. В списке х15 выбирается выражение х26 с заголовком х25. В нашем примере - " $\sin(\angle(ABC))$ ".

Проверяется, что это выражение не входит в список x_{10} и что его оценка сложности больше x_{11} . Проверяется, что в терме x_{26} встречается атом списка x_{10} .

Переменной x_{27} присваивается список параметров терма x_{24} . Проверяется, что этот список включают все переменные дополнительной теоремы. Усматривается, что выражение x_{26} является результатом некоторой подстановки S вместо переменных x_{27} в выражение x_{24} . Переменной x_{29} присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам дополнительной теоремы. Переменной x_{30} присваивается результат применения подстановки S к подтерму x_{21} . В нашем примере - " $\sin(2\angle(ABC))$ ". Процедура "сравнтермов" определяет по термам x_{30} и x_{16} вхождения x_{31} и x_{32} наименьших подтермов, в которых эти термы различаются. Соответственно, вхождения подтермов " $2\angle(ABC)$ " и " $\angle(BAC)$ ". Переменной x_{33} присваивается равенство подтермов x_{31} и x_{32} . Проверяется, что никакой атом списка x_{10} не входит в терм x_{33} более одного раза.

Переменной x_{34} присваивается объединение списков x_8 и x_{29} , к которому добавлены утверждения x_{33} и " $\text{не(равно}(x_{26} 0))$ ". Переменной x_{35} присваивается объединение списка отличных от x_{16} выражений набора x_{14} с результатами применения подстановки S к отличным от x_{24} выражениям списка x_{23} . Переменной x_{37} присваивается произведение отличных от x_{26} выражений набора x_{15} . Проверяется, что оценка терма x_{37} не превосходит x_{11} . Создается импликация с антецедентами x_{34} , консеквентом которой служит равенство произведения выражений x_{35} выражению x_{37} . Она обрабатывается оператором "норм-теорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Попытка использования дополнительного соотношения пропорциональности для сокращения на сложный множитель.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cABC}(\neg(c = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(\angle(ABC) = \pi/2) \ \& \ \neg(A \in \text{прямая}(BC)) \ \& \ 2\angle(ABC) = \angle(BAC) \ \& \ c \in \text{прямая}(AB) \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(cC) \perp \text{прямая}(BC) \rightarrow 2l(AC) = l(cB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(A \in \text{прямая}(BC)) \ \& \ 2\angle(ABC) = \angle(BAC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow 2 \cos(\angle(ABC))l(AC) = l(BC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(AB) = \cos(\angle(ABC))l(BC))$$

Характеристика - " $\text{пропорция}(l(AC), l(BC))$ ".

Начало программы приема почти полностью совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{10} - набор числовых атомов консеквента. Проверяется, что все они невырожденные. Переменной x_{11} присваивается наибольшая из оценок сложности атомов x_{10} . Проверяется отсутствие

у теоремы другой характеристики с заголовком "пропорция". Переменной x12 присваивается набор сомножителей левой части равенства в консеквенте теоремы, переменной x13 - набор сомножителей правой части. Рассматриваются два случая. В первом из них переменной x14 присваивается набор x12, а переменной x15 - набор x13. Во втором случае переменной x14 присваивается x13, а переменной x15 - x12. В нашем примере рассматривается первый случай. Выбирается выражение x16 списка x14, не входящее в список x10. В нашем примере - " $\cos(\angle(ABC))$ ". Проверяется, что выражение x16 неконстантное, неоднобуквенное и имеет оценку сложности, большую x11. Проверяется, что оно содержит атом из списка x10. Переменной x17 присваивается заголовок выражения x16. В нашем примере - символ "косинус".

Проверяется, что выражение x16 имеет единственный числовой атом, который присваивается переменной x19. В нашем примере - " $\angle(ABC)$ ". Проверяется, что оценки сложности выражений списка x14, отличных от x16, а также выражений списка x15 не больше x11. Переменной x20 присваивается заголовок выражения x19. В нашем примере - "угол". Справочник поиска теорем "числатомы" определяет по x20 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она содержит символ x17. Переменной x23 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x23 имеет вид:

$$\forall_{abc}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(ac) \rightarrow l(ab) = \cos(\angle(abc))l(bc))$$

Переменной x25 присваивается список антецедентов теоремы x23. В списке x15 выбирается выражение x26, входящее в список x10. В нашем примере - " $l(BC)$ ". Переменной x27 присваивается его заголовок. В нашем примере - "расстояние". Консеквент теоремы x23 - равенство. Переменной x30 присваивается та часть этого равенства, которая содержит символ x27, переменной x29 - вхождение другой части равенства. В нашем примере x30 имеет вид " $l(ab)$ ". Проверяется, что x30 имеет единственный числовой атом, который присваивается переменной x32. Проверяется, что его заголовок равен x27. Переменной x33 присваивается список сомножителей выражения x30. Проверяется, что в нем встречается выражение x32. Переменной x34 присваивается список параметров выражения x32. В нашем примере - a, b .

Усматривается, что выражение x26 является результатом некоторой подстановки S вместо переменных x34 в терм x32. Переменной x36 присваивается произведение результатов применения подстановки S к отличным от x32 элементам списка x33. Переменной x37 присваивается результат применения подстановки S к подтерму x29. В нашем примере он имеет вид " $\cos(\angle(CBc))l(Bc)$ ". Переменной x38 присваивается список сомножителей выражения x37. В этом списке выбирается выражение x39 с заголовком x17. В нашем примере - " $\cos(\angle(CBc))$ ". Переменной x40 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям набора x25. Проверяется, что выражение x39 имеет единственный числовой атом, который присваивается переменной x42. В нашем примере - " $\angle(CBc)$ ". Проверяется, что выражение x42 имеет заголовок x20. Переменной x43 присваивается список параметров выражений x39 и x16, не являющихся параметрами выражения x26. В нашем примере x43 состоит из переменных c, A .

Определяется постановка R вместо переменных $x43$, унифицирующая термы $x16$ и $x39$. Оператору "унификация" здесь передается опция (развязка $x43$ пустое слово). Она означает, что при унификации предпринимается попытка развязки переменных списка $x43$. Последний элемент этой тройки (изначально - "пустое слово") служит накопителем развязывающих утверждений, вводимых при унификации. В нашем примере получается единственное развязывающее утверждение "точкалуча(B, c, A)". Его наличие позволяет в качестве унифицирующей подстановки выбрать такую, чтобы вместо каждой из переменных c, A подставлялось выражение, не содержащее другой переменной.

Проверяется, что подстановка R - тождественная, т.е. подставляет вместо каждой переменной ее саму. Переменной $x46$ присваивается произведение отличных от $x16$ элементов списка $x14$. В нашем примере - $2l(AC)$. Переменной $x47$ присваивается результат применения подстановки S к произведению отличных от $x39$ элементов набора $x38$. В нашем примере - " $l(Bc)$ ". Переменной $x48$ присваивается объединение списков $x8, x40$, развязывающих утверждений, введенных при унификации, с добавлением утверждения "не(равно($x16$ 0))". Переменной $x49$ присваивается равенство произведения выражений $x46$ и $x36$ произведению выражения $x47$ и отличных от $x26$ элементов списка $x15$. Затем создается импликация с антецедентами $x48$ и консеквентом $x49$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Повторное применение соотношения пропорциональности с отождествлением части антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ceABCDE}(\neg(c = C) \ \& \ \neg(e = A) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(\text{прямая}(eA) = \text{прямая}(AE)) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(BC)) \ \& \ c \in \text{прямая}(eA) \ \& \ B \in \text{прямая}(AD) \ \& \ C \in \text{прямая}(AE) \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(cC) \parallel \text{прямая}(eE) \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(DE) \rightarrow l(cC)l(AD) = l(eE)l(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ B \in \text{прямая}(AD) \ \& \ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC) \ \& \ C \in \text{прямая}(AE) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(BC)) \rightarrow l(AD)l(AC) = l(AE)l(AB))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ B \in \text{прямая}(AD) \ \& \ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC) \ \& \ C \in \text{прямая}(AE) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(AD)) \rightarrow l(AB)l(DE) = l(AD)l(BC))$$

Характеристика - "пропорция($l(AC), l(AE)$)".

Начало программы приема совпадает с началом программы одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его. Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{10} - список операндов текущей характеристики. В нашем примере - $l(AC), l(AE)$. Переменной x_{11} присваивается набор сомножителей левой части равенства в консеквенте теоремы, переменной x_{12} - набор сомножителей правой части. Проверяется, что списки x_{11} и x_{12} двухэлементные. Переменной x_{13} присваивается пересечение списков x_{11} и x_{10} . Проверяется, что оно одноэлементное, и переменной x_{14} присваивается его элемент. Переменной x_{15} присваивается пересечение списков x_{12} и x_{10} . Проверяется, что оно одноэлементное, и переменной x_{16} присваивается его элемент. В нашем примере x_{14} - " $l(AC)$ ", x_{16} - " $l(AE)$ ". Проверяется, что заголовки выражений x_{14} и x_{16} одинаковы. Переменной x_{17} присваивается отличный от x_{14} элемент списка x_{11} , переменной x_{18} - отличный от x_{16} элемент списка x_{12} . В нашем примере x_{17} имеет вид " $l(AD)$ ", x_{18} - вид " $l(AB)$ ". Проверяется, что теорема имеет характеристику "числовойатом" и все параметры антецедентов содержатся в параметрах консеквента. Проверяется отсутствие антецедента с заголовком "равно".

Дальше начинаются отличия. Переменной x_{21} присваивается список параметров текущей характеристики. В нашем примере - A, C, E . Проверяется, что консеквент имеет хотя бы два других параметра. Переменной x_{22} присваивается список антецедентов, параметры которых включаются в список x_{21} . Проверяется наличие существенного антецедента, входящего в x_{22} и имеющего заголовок, отличный от символа "не". В нашем примере - " $C \in \text{прямая}(AE)$ ". Переменной x_{23} присваивается произведение выражений x_{10} . В списке вывода находится теорема, имеющая характеристику x_{27} с заголовком "пропорция". Она лексикографически предшествует исходной либо совпадает с ней. В нашем примере это указанная выше дополнительная теорема. Проверяется, что как исходная, так и дополнительная теоремы суть стартовые теоремы ячейки вывода. В нашем примере x_{27} имеет вид "пропорция($l(AB), l(AD)$)". Переменной x_{28} присваивается произведение операндов терма x_{27} . Проверяется, что x_{28} является результатом некоторой подстановки в x_{23} вместо переменных x_{21} .

Переменной x_{29} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{abcde} (a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \neg(a = e) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(d = e) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ b \in \text{прямая}(ad) \ \& \ \text{прямая}(de) \parallel \text{прямая}(bc) \ \& \ c \in \text{прямая}(ae) \ \& \ \neg(\text{прямая}(ae) = \text{прямая}(ad)) \rightarrow l(ab)l(de) = l(ad)l(bc))$$

Переменной x_{30} присваивается связывающая приставка теоремы x_{29} , переменной x_{31} - связывающая приставка дополнительной теоремы. Переменной x_{32} присваивается результат замены переменных x_{31} на x_{30} в выражении x_{28} . В нашем примере - " $l(ab)l(ad)$ ". Переменной x_{33} присваивается список антецедентов теоремы x_{29} , переменной x_{34} - список параметров выражения x_{32} . Переменной x_{35} присваивается список утверждений набора x_{33} , параметры которых включаются в список x_{34} . Проверяется, что длины списков x_{35} и x_{22} равны.

Оператор "подборзначений" определяет подстановку S вместо переменных x_{34} , переводящую утверждения x_{35} в утверждения x_{22} . Проверяется, что эта под-

становка лишь переобозначает переменные, не отождествляя их. Переменной x39 присваивается набор результатов применения подстановки S к утверждениям x33, переменной x40 - объединение списков x8 и x39. Переменной x41 присваивается результат применения подстановки S к консеквенту теоремы x29. В нашем примере - " $l(AC)l(Ee) = l(AE)l(Cc)$ ". Переменной x42 присваивается вхождение одной части равенства x41, переменной x43 - вхождение другой части. В нашем примере x42 - вхождение левой части.

Переменной x44 присваивается список сомножителей части x42. Проверяется, что она содержит атом x14. Переменной x45 присваивается другой сомножитель данной части. В нашем примере - " $l(Ee)$ ". Переменной x46 присваивается список сомножителей части x43. Проверяется, что она содержит атом x16. Переменной x47 присваивается другой сомножитель части x43. Переменной x48 присваивается утверждение "равно(умножение(x17 x47) умножение(x18 x45))", переменной x49 - результат добавления к списку x40 утверждений "не(равно(x14 0))" и "не(равно(x16 0))". Затем создается импликация с антецедентами x49 и консеквентом x48. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.86 Характеристика "равно"

Характеристикой "равно" снабжаются теоремы, консеквент которых - равенство двух переменных либо конъюнкция таких равенств.

Вывод теоремы путем доказательства гипотезы

1. Попытка усмотреть эквивалентность консеквента одному из антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \leq ab \rightarrow |a| = |b| \leftrightarrow a = b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(|a| = |b| \ \& \ 0 \leq ab \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a = b)$$

Переменной x9 присваивается левая часть равенства в консеквенте, переменной x10 - правая. В нашем примере x9, x10 - переменные a, b . Проверяется, что эти переменные различны. Переменной x11 присваивается список антецедентов. В нем выбирается элементарное утверждение x12, содержащее обе переменные x9, x10. В нашем примере - утверждение " $|a| = |b|$ ". Проверяется, что x12 - следствие списка антецедентов x11, в котором x12 заменено на консеквент. Затем создается импликация, антецеденты которой суть отличные от x12 утверждения списка x11, а консеквент - эквивалентность утверждения x12 консеквенту исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительной теоремы для опровержения антецедента и последующей свертки квантора общности

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abBCD}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(\text{прямая}(bB) = \text{прямая}(CD)) \ \& \\ a \in \text{отрезок}(bB) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \\ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(ab)))$$

из теоремы

$$\forall_{abABCD}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(\text{прямая}(ab) = \text{прямая}(CD)) \ \& \ A \in \text{прямая}(CD) \\ \& \ A \in \text{отрезок}(ab) \ \& \ B \in \text{прямая}(ab) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \\ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow A = B)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = C) \ \& \ A \in \text{отрезок}(BC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \\ \neg(C \in \text{отрезок}(AB)))$$

Переменной x11 присваивается одна из частей равенства в консеквенте, переменной x12 - другая. В нашем примере x11 - переменная A, x12 - переменная B. Переменной x13 присваивается список антецедентов теоремы. Выбирается существенный антецедент x16, содержащий переменную x11, не содержащий переменной x12 и не имеющий заголовка "не". В нашем примере x16 имеет вид "A ∈ отрезок(ab)". Переменной x17 присваивается результат подстановки в терм x16 переменной x12 вместо x11. В нашем примере - "B ∈ отрезок(ab)". Переменной x18 присваивается отрицание утверждения x17. Проверяется, что терм x18 имеет единственный подтерм максимальной сложности, который присваивается переменной x20. В нашем примере x20 - выражение "отрезок(ab)". Переменной x21 присваивается заголовок выражения x20. Справочник поиска теорем "усмнепринадлежит" находит по x21 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x24 присваивается ее консеквент, переменной x25 - параметры консеквента. В нашем примере x25 - A, B, C. Усматривается подстановка S вместо переменных x25, переводящая терм x24 в терм x18. В нашем примере x24 имеет вид "¬(C ∈ отрезок(AB))", x18 - вид "¬(B ∈ отрезок(ab))".

Переменной x27 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам дополнительной теоремы, переменной x28 - объединение списка x27 с отличными от x16 утверждениями набора x13. Список x28 разбивается на подсписок x29 утверждений, содержащих переменную x11, и подсписок x30 остальных утверждений. Переменной x32 присваивается утверждение "длялюбого(x11 если x29 то не(x16))". В нашем примере - "∀_A(A ∈ прямая(CD) & A - точка → ¬(A ∈ отрезок(ab)))". Решается задача на преобразование x33 с посылками x30 и условием x32, имеющая цель "свертка". Ответ ее присваивается переменной x34. В нашем примере он имеет вид "непересек(прямая(CD), отрезок(ab))". Проверяется, что x34 - элементарное утверждение. Затем создается импликация с антецедентами x30 и консеквентом x34. Она обрабатывается оператором "номтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.87 Характеристика "равнозначны"

Характеристикой "равнозначны" снабжаются теоремы, консеквент которых - равенство для координат объекта, вытекающее из равенства некоторых объектов. Эта ха-

рактеристика создается только приемами вывода теорем.

Логические следствия теоремы

1. Вывод соотношений для координат объектов, явно указанных в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefhK}(\text{коорд}(a, K) = (f, h) \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \\ b = ea \ \& \ \text{коорд}(b, K) = (c, d) \rightarrow c = ef \ \& \ d = eh)$$

из теоремы

$$\forall_{abefhK}(\text{коорд}(a, K) = (f, h) \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \\ b = ea \rightarrow \text{коорд}(b, K) = (ef, eh))$$

Переменной x9 присваивается консеквент, переменной x10 - список антецедентов. Переменной x12 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте теоремы которая имеет заголовок "набор". Переменной x13 присваивается набор термов - операндов вхождения x12. Переменной x14 присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему, имеющий ту же длину, что список x13. В нашем примере - переменные c, d . Переменной x15 присваивается список равенств переменных списка x14 соответствующим выражениям списка x13. В нашем примере x15 состоит из равенств " $c = ef$ ", " $d = eh$ ".

Переменной x16 присваивается результат замены в консеквенте теоремы вхождения x12 на терм "набор(x14)". В нашем примере этот результат имеет вид " $\text{коорд}(b, K) = (c, d)$ ". Переменной x17 присваивается результат добавления к списку x10 утверждения x16. Затем создается импликация с антецедентами x17, консеквентом которой служит конъюнкция равенств x15. Она регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на описание для получения новой теоремы

1. Разрешение координат объекта, встречающегося в антецедентах, относительно координат объекта, заданных в консеквенте.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefgK}(\text{коорд}(a, K) = (e, g) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \\ b = c + a \ \& \ \text{коорд}(b, K) = (d, f) \rightarrow \text{коорд}(c, K) = (d - e, f - g))$$

из теоремы

$$\forall_{abceglmK}(\text{коорд}(c, K) = (l, m) \ \& \ \text{коорд}(a, K) = (e, g) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \\ \text{Вектор}(c) \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \ b = c + a \rightarrow \text{коорд}(b, K) = (e + l, g + m))$$

Переменной x9 присваивается консеквент, переменной x10 - список антецедентов. Переменной x12 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте теоремы которая имеет заголовок "набор", переменной x11 - вхождение другой части. Переменной x13 присваивается набор термов - операндов вхождения x12, переменной x14 - подтерм по вхождению x11. Проверяется, что заголовок выражения x14 - название координат. Среди антецедентов выбирается

равенство x_{15} , у которого в одной части расположено выражение x_{18} , заголовок которого - от же, что у x_{14} , а в другой части - выражение с заголовком "набор". Переменной x_{19} присваивается список операндов этого набора. В нашем примере x_{15} имеет вид "коорд(c, K) = (l, m)", x_{19} - l, m . Проверяется, что длины наборов x_{19} и x_{13} равны, причем элементы набора x_{19} суть различные переменные.

Переменной x_{20} присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему, имеющий ту же длину, что и список x_{13} . В нашем примере - переменные d, f . Переменной x_{21} присваивается список параметров однобуквенных термов x_{19} , переменной x_{22} - список утверждений набора x_{10} , не содержащих параметров x_{21} . Переменной x_{23} присваивается равенство выражения x_{14} выражению "набор(x_{20})", переменной x_{24} - результат добавления равенства x_{23} к списку x_{22} . Переменной x_{25} присваивается список равенств выражений x_{13} переменным x_{20} .

Решается задача на описание x_{26} с посылками x_{24} и условиями x_{25} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{21} ". В нашем примере посылки суть утверждения "коорд(a, K) = (e, g)", "систкоорд(K)", "Вектор(c)", "Вектор(a)", " $b = c + a$ ", "коорд(b, K) = (d, f)", условия - " $e + l = d, g + m = f$ ". Неизвестные - l, m . Ответ задачи присваивается переменной x_{27} . В нашем примере он имеет вид " $l = d - e, m = f - g$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ".

Утверждение x_{27} преобразуется к виду д.н.ф., и среди дизъюнктивных членов результата выбирается некоторое утверждение x_{29} . В нашем примере оно совпадает с x_{27} . Переменной x_{30} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{29} . Проверяется, что для каждой переменной списка x_{19} в наборе x_{30} имеется равенство, в левой части которого расположена данная переменная. Переменной x_{31} присваивается список правых частей этих равенств. В нашем примере - " $d - e$ ", " $f - g$ ". Переменной x_{32} присваивается равенство выражения x_{18} выражению "набор(x_{31})". Переменной x_{33} присваивается объединение списка отличных от x_{15} утверждений x_{10} со списком не содержащих переменных x_{21} утверждений набора x_{30} , к которому добавлено равенство x_{23} . Затем создается импликация с антецедентами x_{33} и консеквентом x_{32} . Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "равнозначны".

Попытка использовать тождество для реализации сложного антецедента другого тождества для координат объекта

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abdg hij AB} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{коорд}(A, j) = (a, b) \ \& \ i - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(j) \ \& \ \text{коорд}(d, j) = (g, h) \ \& \ \neg(i = 0) \ \& \ d = i \text{вектор}(AB) \rightarrow \text{коорд}(B, j) = (a + g/i, b + h/i))$$

из теоремы

$$\forall_{abcde K} (e - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \ b = ea \ \& \ \text{коорд}(b, K) = (c, d) \ \& \ \neg(e = 0) \rightarrow \text{коорд}(a, K) = (c/e, d/e))$$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abefABK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (e, f) \rightarrow \text{коорд}(B, K) = (a + e, b + f))$

Переменной x9 присваивается консеквент, переменной x10 - список антецедентов. Переменной x12 присваивается входение той части равенства в консеквенте теоремы которая имеет заголовок "набор", переменной x11 - входение другой части. Переменной x13 присваивается заголовок первого операнда взхождения x11. В нашем примере - переменная a . Проверяется, что x13 - переменная. Выбирается антецедент x14, имеющий вид " $P(x13)$ ", где P - название типа объектов. В нашем примере - "Вектор". В списке вывода рассматривается теорема x17, имеющая характеристику "систкоорд". В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x20 присваивается входение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок "набор", переменной x21 - другая часть равенства. В нашем примере x21 имеет вид " $\text{коорд}(B, K)$ ". У дополнительной теоремы находится входение антецедента x22, представляющего собой равенство. Переменной x24 присваивается входение той части равенства, которая имеет заголовок "набор", а переменной x25 - другая часть равенства. В нашем примере x25 имеет вид " $\text{коорд}(\text{вектор}(AB), K)$ ". Проверяется, что x21 получается из x25 вычеркиванием части операндов некоторых операций, причем параметры терма x25 не включаются в параметры терма x21.

Переменной x26 присваивается первый операнд выражения x21. Если этот операнд - переменная, то проверяется отсутствие у дополнительной теоремы антецедента $P(x26)$. В противном случае проверяется, что тип значений выражений с тем же заголовком, что у x26, отличен от P . В нашем примере x26 - переменная B , и ее значением служит точка, а не вектор.

Оператор "выводпосылки" определяет результат x27 последовательного применения исходной и дополнительной теорем, причем консеквент исходной теоремы унифицируется с антецедентом x22 дополнительной. В нашем примере x27 имеет вид:

$\forall_{abdghijAB}(\text{систкоорд}(j) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{коорд}(A, j) = (a, b) \ \& \ i - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(j) \ \& \ \text{Вектор}(\text{вектор}(AB)) \ \& \ d = i\text{вектор}(AB) \ \& \ \text{коорд}(d, j) = (g, h) \ \& \ \neg(i = 0) \rightarrow \text{коорд}(B, j) = (a + g/i, b + h/i))$

Переменной x28 присваивается список антецедентов теоремы x27, переменной x29 - консеквент. Переменной x30 присваивается список утверждений набора x28, не являющихся равенствами с переменной в одной из своих частей. Переменной x31 присваивается остаток списка x28. Переменной x32 присваивается результат обработки списка x30 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x29. Переменной x33 присваивается объединение списков x32 и x31. Определяется результат x35 упрощения утверждения x29 относительно посылок x33 при помощи задачи на преобразование. Затем создается импликация с антецедентами x33 и консеквентом x35, которая регистрируется в списке вывода.

3.88 Характеристика "равны"

Характеристикой "равны" снабжаются теоремы, консеквент которых - равенство двух атомарных выражений.

Логические следствия теоремы

1. Контрапозиция и замена отрицания равенства в антецедентах на неравенство.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aAB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ 0 < l(AB) - l(aA) \rightarrow \neg(a \in \text{окружность}(AB)))$$

из теоремы

$$\forall_{aAB}(\neg(A = B) \ \& \ a \in \text{окружность}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow l(aA) = l(AB))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - консеквент. Переменной x11 присваивается список числовых атомов консеквента. Он состоит из обеих частей P, Q равенства в консеквенте. Проверяется, что теорема имеет единственный существенный антецедент, и этот антецедент присваивается переменной x13. В нашем примере - утверждение " $a \in \text{окружность}(AB)$ ". Проверяется, что x13 имеет вид принадлежности некоторой переменной x14 неоднобуквенному выражению x15, не содержащему этой переменной. В нашем примере x15 имеет вид " $\text{окружность}(AB)$ ". Проверяется, что параметры консеквента включаются в параметры утверждения x13, причем выражение x15 имеет лишь одно вхождение в теорему. Проверяется, что выражение x15 атомарное. Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x16 присваивается неравенство $P < Q$, во втором - $Q < P$. Переменной x17 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" результата замены в списке x8 утверждений x13 на x16. Обработка ведется относительно параметров терма x13. Затем создается импликация с антецедентами x17, консеквентом которой служит отрицание утверждения x13. Она регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Контрапозиция с развязкой операнда, ориентированная на получение теоремы приема специального оператора усмотрения различия.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abBCD}(\neg(a = b) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(CD) \ \& \ \neg(\text{прямая}(BC) = \text{прямая}(CD)) \rightarrow \neg(\text{прямая}(BC) = \text{прямая}(ab)))$$

из теоремы

$$\forall_{BCD}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(CD) \rightarrow \text{прямая}(BC) = \text{прямая}(CD))$$

Проверяется, что обе части равенства в консеквенте имеют один и тот же заголовок x9. В нашем случае - "прямая". Справочник "разныеточки" определяет по x9 название x10 проверочного оператора проверки несовпадения объектов типа x9. В нашем примере - "разныепрямые". Переменной x11 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x12 - список переменных, не входящих в теорему, длина которого равна числу операндов левой части равенства

в консеквенте. В нашем примере x12 - список a, b . Переменной x13 присваивается выражение "x9(x12)". В нашем примере - "прямая(ab)". Переменной x14 присваивается левая часть равенства в консеквенте. В нашем примере - "прямая(BC)". Переменной x15 присваивается отрицание консеквента, переменной x16 - утверждение "не(равно(x14 x13))". В нашем примере x15 имеет вид " $\neg(\text{прямая}(BC) = \text{прямая}(CD))$ ", x16 - вид " $\neg(\text{прямая}(BC) = \text{прямая}(ab))$ ".

Проверяется, что выражение x14 встречается в антецедентах теоремы. Переменной x17 присваивается список результатов замены в антецедентах теоремы всех вхождений подтерма x14 на терм x13. Переменной x18 присваивается список результатов обработки оператором "нормантецеденты" объединения списка x17 с утверждениями x15 и утверждениями, сопровождающими x16 по о.д.з. Обработка ведется относительно параметров терма x16. Затем создается импликация с антецедентами x18 и консеквентом x16. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "спуск(x10)".

Использование текущего тождества для варьирования дополнительной теоремы

1. Реализация антецедента дополнительной теоремы, выводящей равенство двух числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(a = c) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ \neg(b \in \text{прямая}(ad)) \ \& \ \angle(adb) = \angle(adc) \ \& \ \text{биссектриса}(bacd) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \rightarrow l(bd) = l(cd))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \text{биссектриса}(BACD) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \angle(CAD) = \angle(BAD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDEFGF}(\neg(A = C) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(D = F) \ \& \ \neg(E = F) \ \& \ \neg(B \in \text{прямая}(AC)) \ \& \ l(AC) = l(DF) \ \& \ \angle(ACB) = \angle(DFE) \ \& \ \angle(BAC) = \angle(EDF) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \rightarrow l(AB) = l(DE))$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов. Проверяется, что в нем не более одного равенства. Проверяется, что обе части равенства в консеквенте имеют один и тот же заголовок x10. В нашем примере - "угол". Справочник поиска теорем "равныетермы" находит по x10 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что либо эта теорема имеет не более одного равенства в антецедентах, либо исходная теорема имеет характеристику "числовой атом", а параметры ее антецедентов включаются в параметры консеквента. В нашем примере имеет место второй случай. Рассматривается вхождение x13 антецедента дополнительной теоремы, представляющего собой равенства. В нашем примере - вхождение антецедента " $\angle(ACB) = \angle(DFE)$ ". Проверяется, что заголовки обеих частей равенства x13 равны x10.

Оператор "выводпосылки" определяет результат x14 последовательного применения исходной и дополнительной теорем, при котором консеквент исходной теоремы унифицируется с антецедентом x13. В нашем примере x14 имеет вид:

$$\forall_{abcd}(\neg(d = a) \ \& \ \neg(d = c) \ \& \ \neg(d = a) \ \& \ \neg(c = a) \ \& \ \neg(b \in \text{прямая}(da)) \ \& \\ l(da) = l(da) \ \& \ \angle(bda) = \angle(cda) \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \\ d - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \\ \text{биссектриса}(bacd) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \rightarrow l(db) = l(dc))$$

Переменной x15 присваивается список антецедентов теоремы x14. Решается задача на исследование x16 с посылками x15 и целями "контроль", "известно", "неизвестные X", где X - все параметры посылок. При необходимости вводится указание на планиметрическую ситуацию. После решения задачи x16 проверяется отсутствие среди ее посылок константы "ложь". Переменной x18 присваивается объединение списка антецедентов теоремы x14 с такими посылками задачи x16, которые содержат только параметры исходного списка посылок x15 и представляют собой равенства некоторой переменной выражению, не содержащему этой переменной. Переменной x19 присваивается результат обработки списка x18 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров консеквента теоремы x14.

Далее создается импликация с антецедентами x19 и консеквентом теоремы x14. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому разрешается использовать уже имеющиеся в списке вывода теоремы и разблокировать основанные на них приемы. После обработки результат регистрируется в списке вывода.

2. Реализация антецедента дополнительной теоремы, выводящей элементарное утверждение, не являющееся равенством либо отрицанием.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdef}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(d = e) \ \& \ \neg(e = f) \ \& \ l(de) = l(ef) \ \& \ d \in \text{окружность}(ab) \ \& \\ e \in \text{окружность}(ab) \ \& \ f \in \text{окружность}(ab) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \\ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ \text{разныестороны}(d, f, \text{прямая}(ae)) \rightarrow \\ \text{биссектриса}(defa))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEFG}(\neg(A = B) \ \& \ l(CD) = l(EF) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ F \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \rightarrow \\ \angle(ACD) = \angle(AEF))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \angle(BAD) = \angle(CAD) \ \& \\ 0 \leq \pi/2 - \angle(CAD) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \\ \text{разныестороны}(B, C, \text{прямая}(AD)) \rightarrow \text{биссектриса}(BACD))$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов. Проверяется, что в этом списке не более одного равенства. Проверяется, что обе части равенства в

консеквенте теоремы имеют один и тот же заголовок x10. В нашем примере - символ "угол". Справочник поиска теорем "числовоеравенство" определяет по x10 указанную выше дополнительную теорему. Рассматривается вхождение x13 антецедента дополнительной теоремы, представляющего собой равенство. В нашем примере - вхождение антецедента " $\angle(BAD) = \angle(CAD)$ ". Оператор "выводпосылки" определяет результат x14 последовательного применения исходной и дополнительной теорем, при котором консеквент исходной теоремы унифицируется с антецедентом x13 дополнительной теоремы. Теорема x14 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительного тождества для варьирования теоремы

1. Использование тождества, выражающего числовой атом через более простые, для вывода равенства числовых атомов нового типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(\neg(A = B) \ \& \ l(CD) = l(EF) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ F \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ F - \text{точка} \rightarrow S(\text{фигура}(ADC)) = S(\text{фигура}(AEF)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(\neg(A = B) \ \& \ l(CD) = l(EF) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ F \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ F - \text{точка} \rightarrow \angle(CAD) = \angle(EAF))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \\ 2S(\text{фигура}(ABC)) = l(AB)l(AC) \sin(\angle(BAC)))$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов теоремы. Проверяется, что обе части равенства в консеквенте теоремы имеют один и тот же заголовок x10. В нашем примере - символ "угол". Справочник поиска теорем "числатомы" определяет по x10 указанную выше дополнительную теорему. Рассматривается одна из частей x16 равенства в консеквенте дополнительной теоремы. В нашем примере она имеет вид " $l(AB)l(AC) \sin(\angle(BAC))$ ". Внутри терма x16 рассматривается вхождение x17 символа x10. Переменной x18 присваивается подтерм по этому вхождению, переменной x19 - список его параметров. В нашем примере x18 - " $\angle(BAC)$ ". Проверяется, что все переменные дополнительной теоремы содержатся в списке x19. Переменной x21 присваивается отличная от x16 часть равенства. В нашем примере - " $2S(\text{фигура}(ABC))$ ". Проверяется, что терм x21 имеет единственный невырожденный числовой атом, и этот атом присваивается переменной x23. В нашем примере - " $S(\text{фигура}(ABC))$ ". Проверяется, что оценка сложности терма x18 меньше оценки сложности терма x23 и что все переменные дополнительной теоремы содержатся среди параметров терма x23.

Определяется подстановка R вместо переменных x_{19} , унифицирующая левую часть консеквента исходной теоремы с выражение x_{18} . Затем определяется подстановка Q вместо переменных x_{19} , унифицирующая правую часть консеквента исходной теоремы с выражением x_{18} . Переменной x_{26} присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Проверяется, что результат применения как подстановки R , так и подстановки Q к произвольному утверждению списка x_{26} является следствием антецедентов исходной теоремы.

Переменной x_{27} присваивается результат применения подстановки R к выражению x_{16} , переменной x_{28} - результат применения подстановки Q к этому же выражению. В нашем примере x_{27} , x_{28} суть выражения " $l(AD)l(AC) \sin(\angle(DAC))$ ", " $l(AE)l(AF) \sin(\angle(EAF))$ ". Переменной x_{29} присваивается результат добавления к антецедентам исходной теоремы ее консеквента. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство выражений x_{27} и x_{28} - следствие утверждений x_{29} .

Переменной x_{31} присваивается результат применения подстановки R к выражению x_{21} , переменной x_{32} - результат применения подстановки Q к этому же выражению. Переменной x_{33} присваивается результат применения подстановки R к выражению x_{23} , переменной x_{34} - результат применения подстановки Q к этому же выражению. В нашем примере x_{31} и x_{32} имеют вид " $2S(\text{фигура}(ADC))$ ", " $2S(\text{фигура}(AEF))$ "; x_{33} и x_{34} - вид " $S(\text{фигура}(ADC))$ ", " $S(\text{фигура}(ADC))$ ". Переменной x_{35} присваивается результат добавления к антецедентам исходной теоремы равенства выражений x_{31} и x_{32} . При помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство выражений x_{33} и x_{34} - следствие утверждений x_{35} . Затем создается импликация с антецедентами x_9 , консеквентом которой служит равенство выражений x_{33} и x_{34} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование определения сложного антецедента

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ \neg(\text{прямая}(ab) = \text{прямая}(cd)) \ \& \ l(ab) = l(cd) \ \& \\ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(cd) \ \& \\ \text{однасторона}(b, d, \text{прямая}(ac)) \rightarrow \text{вектор}(ab) = \text{вектор}(cd))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(CD) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \\ \text{однаправлены}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD)) \rightarrow \text{вектор}(AB) = \text{вектор}(CD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{однаправлены}(\text{вектор}(AB), \\ \text{вектор}(CD)) \leftrightarrow A = B \ \& \ C = D \ \vee \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ (\text{прямая}(AB) \parallel \\ \text{прямая}(CD) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD)) \ \& \ \text{однасторона}(B, D, \text{прямая}(AC)) \ \vee \\ \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD) \ \& \ (\text{точкалуча}(A, B, D) \ \& \ C \in \text{отрезок}(AD) \ \vee \\ \text{точкалуча}(C, D, B) \ \& \ A \in \text{отрезок}(BC))))$$

Переменной x_9 присваивается список антецедентов. Определяется оценка x_{10} сложности консеквента. В списке x_9 выбирается утверждение x_{11} , оценка сложности которого больше, чем x_{10} . В нашем примере - утверждение " $\text{однаправлены}(\text{вектор}(AB),$

вектор(CD)). Переменной x_{12} присваивается заголовок утверждения x_{11} . В нашем примере - символ "однонаправлены". Справочник поиска теорем "определение" находит по x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{15} присваивается вхождение антецедента x_{11} в исходную теорему. Переменной x_{16} присваивается вхождение консеквента дополнительной теоремы. Проверяется, что этот консеквент - эквивалентность. Переменной x_{17} присваивается вхождение той части эквивалентности, которая имеет заголовок x_{12} , переменной x_{19} - другая часть эквивалентности. Проверяется, что терм x_{19} не имеет связанных переменных.

Оператор "тождвывод" находит результат x_{20} преобразования вхождения x_{15} в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Переменной x_{21} присваивается результат преобразования терма x_{20} оператором "нормтеорема". Конъюнктивные члены утверждения x_{21} регистрируются в списке вывода.

Замена переменных в теореме

1. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{fghi}(\neg(f = \text{вектор}0) \ \& \ \neg(g = \text{вектор}0) \ \& \ \neg(h = \text{вектор}0) \ \& \ \neg(i = \text{вектор}0) \ \& \ \text{Вектор}(f) \ \& \ \text{Вектор}(g) \ \& \ \text{Вектор}(h) \ \& \ \text{Вектор}(i) \ \& \ \text{однонаправлены}(f, h) \ \& \ \text{однонаправлены}(g, i) \rightarrow \text{уголмежду}(f, g) = \text{уголмежду}(h, i))$$

из теоремы

$$\forall_{abcde}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(a = e) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \text{точкалуча}(a, b, c) \ \& \ \text{точкалуча}(a, d, e) \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(ad)) = \text{уголмежду}(\text{вектор}(ac), \text{вектор}(ae)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{10} - консеквент. Рассматривается вхождение x_{11} в терм x_{10} неоднобуквенного подтерма x_{12} . В нашем примере - подтерма "вектор(ab)". Проверяется, что выражение x_{12} атомарное. Переменной x_{13} присваивается его заголовок. В нашем примере - символ "вектор". Переменной x_{15} присваивается тип значений выражений с заголовком x_{13} . В нашем примере - "Вектор". Переменной x_{16} присваивается список всех атомарных неоднобуквенных подтермов терма x_{10} , имеющих тип x_{15} . В нашем примере - выражения "вектор(ab)", "вектор(ad)", "вектор(ac)", "вектор(ae)". Переменной x_{17} присваивается список параметров выражений x_{16} . В нашем примере - a, b, c, d, e . Проверяется, что каждый из этих параметров встречается в x_{10} только внутри некоторого подтерма списка x_{16} .

Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по x_{15} указанную выше дополнительную теорему. Ее консеквент - эквивалентность. Проверяется, что заголовок левой части данной эквивалентности равен x_{15} , а правая часть является квантором существования. Переменной x_{22} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под этим квантором. Переменной x_{23} присваивается корневой операнд левой части консеквента дополнительной теоремы.

Проверяется, что этот операнд - переменная. В нашем примере - переменная a . В списке x_{22} находится равенство x_{24} с переменной x_{23} в левой части. В нашем примере - равенство " $a = \text{вектор}(AB)$ ". Проверяется, что заголовок правой части данного равенства - символ x_{13} .

Переменной x_{25} присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему, длина которого равна длине списка x_{16} . В нашем примере - переменные f, g, h, i . Переменной x_{28} присваивается результат замены в терме x_{10} подтермов x_{16} на соответствующие переменные списка x_{25} . В нашем примере имеем: " $\text{уголмежду}(f, g) = \text{уголмежду}(h, i)$ ". Переменной x_{29} присваивается список параметров терма x_{28} . В нашем примере - " f, g, h, i ".

Переменной x_{30} присваивается объединение списка утверждений набора x_8 , не содержащих переменных x_{17} , с утверждениями " $x_{15}(X)$ ", где X - переменные списка x_{25} . Переменной x_{31} присваивается объединение списка утверждений набора x_8 , содержащих переменные x_{17} , с равенствами выражений x_{16} соответствующим переменным x_{25} . Решается задача на описание x_{32} , посылками которой служат утверждения x_{30} , условиями - утверждения x_{31} , а цели суть "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{17} ", "параметры x_{17} ", "исключ". В нашем примере посылки суть "Вектор(f)", "Вектор(g)", "Вектор(h)", "Вектор(i)"; условия - " $\neg(a = b)$ ", " $\neg(a = c)$ ", " $\neg(a = d)$ ", " $\neg(a = e)$ ", " a - точка", " b - точка", " c - точка", " d - точка", " e - точка", "точкалуча(a, b, c)", "точкалуча(a, d, e)", "вектор(ab) = f ", "вектор(ad) = g ", "вектор(ac) = h ", "вектор(ae) = i ". Неизвестными служат переменные a, b, c, d, e . Все они несущественные.

Ответ задачи присваивается переменной x_{33} . В нашем примере он имеет вид " $\neg(i = \text{вектор}0) \ \& \ \neg(g = \text{вектор}0) \ \& \ \text{однонаправлены}(g, i) \ \& \ \neg(h = \text{вектор}0) \ \& \ \neg(f = \text{вектор}0) \ \& \ \text{однонаправлены}(f, h)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Затем создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x_{30} и конъюнктивные члены ответа x_{33} . Консеквент импликации - утверждение x_{28} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Реализация антецедента

1. Использование примера для реализации антецедента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abB}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = B) \ \& \ B \in \text{прямая}(ab) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(aB) = \text{прямая}(ab))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ A \in \text{прямая}(CD) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow A \in \text{прямая}(AB))$$

Переменной x10 присваивается вхождение некоторого существенного антецедента теоремы. В нашем примере - антецедента " $A \in \text{прямая}(CD)$ ". Если заголовок данного антецедента - символ "не", то переменной x11 присваивается вхождение утверждения под этим отрицанием, иначе переменной x11 присваивается значение x10. Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. В нашем примере - символ "принадлежит". Справочник поиска теорем "пример" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что либо эта теорема - утверждение без переменных, либо число параметров ее консеквента меньше числа параметров антецедента x10. Оператор "вывод-посылки" определяет результат x15 последовательного применения исходной и дополнительной теорем, при котором консеквент дополнительной теоремы унифицируется с антецедентом x10. Переменной x16 присваивается консеквент импликации x15, переменной x17 - результат обработки ее антецедентов оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x16. Затем создается импликация с антецедентами x17 и консеквентом x16. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- Использование дополнительного тождества для реализации равенства наиболее сложных числовых атомов при унификации двух других равенств - антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcCF} (\neg(a = c) \ \& \ \neg(a = C) \ \& \ \neg(a = F) \ \& \ l(ab) = l(bc) \ \& \ l(aC) = l(cF) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \text{точкалуча}(a, c, C) \ \& \ \text{точкалуча}(c, a, F) \rightarrow l(bC) = l(bF))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEFA} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \neg(D = F) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \angle(BAC) = \angle(EDF) \ \& \ l(AB) = l(DE) \ \& \ l(AC) = l(DF) \rightarrow l(BC) = l(EF))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ l(AB) = l(BC) \rightarrow \angle(BAC) = \angle(BCA))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается оценка сложности терма x9. Переменной x11 присваивается список антецедентов, представляющих собой равенство двух невырожденных числовых атомов. Проверяется, что x11 имеет не менее двух элементов. В нашем примере x11 состоит из равенств " $\angle(BAC) = \angle(EDF)$ ", " $l(AB) = l(DE)$ ", " $l(AC) = l(DF)$ ". В списке x11 выбирается равенство x12, оценка сложности x13 которого больше x10. В нашем примере - равенство " $\angle(BAC) = \angle(EDF)$ ". Проверяется, что прочие равенства списка x11 имеют оценку сложности, меньшую x13. Проверяется, что заголовки x14 обеих частей равенства x12 одинаковы. Справочник поиска теорем "равнчисл" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется наличие у нее антецедента с заголовком "равно". Переменной x17 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не встречающиеся в исходной теореме. В нашем примере x17 имеет вид:

$$\forall_{abc}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \\ l(ab) = l(bc) \rightarrow \angle(bac) = \angle(bca))$$

Переменной x_{18} присваивается список антецедентов теоремы x_{17} , переменной x_{19} - ее консеквент. В списке x_{11} выбирается отличное от x_{12} равенство x_{20} . В нашем примере - " $l(AB) = l(DE)$ ". Переменной x_{21} присваивается общий заголовок обеих частей равенства x_{20} . В нашем примере - символ "расстояние". В списке x_{18} находится равенство x_{22} , у которого заголовки обеих частей тоже равны x_{21} . В нашем примере - равенство " $l(ab) = l(bc)$ ". Переменной x_{23} присваивается список переменных равенств x_{12} и x_{20} . В нашем примере - A, B, C, D, E, F .

Создается список x_{24} таких параметров X числовых атомов Q равенств x_{12} , x_{20} , что справочник "варьиртерма" определяет возможность варьирования значения X без изменения атома Q , причем X имеет единственное вхождение в равенства x_{12} , x_{20} и встречается также в некотором равенстве списка x_{11} , отличном от x_{12} , x_{20} . В нашем примере x_{24} состоит из переменных C, F .

Определяется подстановка S вместо переменных x_{23} , унифицирующая термы x_{12} и x_{19} , а одновременно также термы x_{20} и x_{22} . Оператору "унификация передается опция (развязка x_{24} пустоеслово). Она означает, что при унификации предпринимается попытка развязки переменных списка x_{24} . Последний элемент этой тройки (изначально - "пустоеслово") служит накопителем развязывающих утверждений, вводимых при унификации. В нашем примере получают два развязывающих утверждения - "точкалуча(a, c, C)" и "точкалуча(c, a, F)". Его наличие позволяет в качестве унифицирующей подстановки выбрать такую, чтобы вместо каждой из переменных F подставлялось выражение, не содержащее другой переменной. Фактически набор подставляемых выражений подстановки S имеет вид a, b, C, c, b, F , т.е. переменные C, F переводятся в себя.

Переменной x_{27} присваивается объединение списка x_{18} с результатами применения подстановки S к отличным от x_{12} и x_{20} антецедентам исходной теоремы. Далее к списку x_{27} присоединяется набор результатов применения подстановки S к утверждениям накопителя (развязка ...). Переменной x_{28} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_9 . Затем создается импликация с антецедентами x_{27} и консеквентом x_{28} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Использование дополнительного тождества для реализации равенства наиболее сложных числовых атомов при автоунификации одного из равенств в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcCF}(\neg(a = c) \ \& \ \neg(a = C) \ \& \ \neg(c = F) \ \& \ l(ab) = l(bc) \ \& \ l(aC) = l(cF) \ \& \\ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \text{точкалуча}(a, b, C) \ \& \\ \text{точкалуча}(c, b, F) \rightarrow l(cC) = l(aF))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ F - \text{точка} \ \& \ \neg(D = F) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \\ \angle(BAC) = \angle(EDF) \ \& \ l(AB) = l(DE) \ \& \ l(AC) = l(DF) \rightarrow l(BC) = l(EF))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \\ l(AB) = l(BC) \rightarrow \angle(BAC) = \angle(BCA))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается оценка сложности терма x9. Переменной x11 присваивается список антецедентов, представляющих собой равенство двух невырожденных числовых атомов. Проверяется, что x11 имеет не менее двух элементов. В нашем примере x11 состоит из равенств " $\angle(BAC) = \angle(EDF)$ ", " $l(AB) = l(DE)$ ", " $l(AC) = l(DF)$ ". В списке x11 выбирается равенство x12, оценка сложности x13 которого больше x10. В нашем примере - равенство " $\angle(BAC) = \angle(EDF)$ ". Проверяется, что прочие равенства списка x11 имеют оценку сложности, меньшую x13. Проверяется, что заголовки x14 обеих частей равенства x12 одинаковы. Справочник поиска теорем "равнчисл" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется наличие у нее антецедента с заголовком "равно". Переменной x17 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не встречающиеся в исходной теореме. В нашем примере x17 имеет вид:

$$\forall_{abc}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \\ l(ab) = l(bc) \rightarrow \angle(bac) = \angle(bca))$$

Переменной x18 присваивается список антецедентов теоремы x17, переменной x19 - ее консеквент. В списке x11 выбирается отличное от x12 равенство x20. В нашем примере - " $l(AB) = l(DE)$ ". Переменной x21 присваивается общий заголовок обеих частей равенства x20. В нашем примере - символ "расстояние". Проверяется, что символ x21 коммутативный. Создается список x22 таких параметров X числовых атомов Q равенств x12, x20, что справочник "варьиртерма" определяет возможность варьирования значения X без изменения атома Q , причем X имеет единственное вхождение в равенства x12, x20. В нашем примере x22 состоит из переменных C, F .

Переменной x23 присваивается список переменных атомов x12 и x20. В нашем примере - A, B, C, D, E, F . Определяется подстановка S вместо переменных x23, унифицирующая термы x12 и x19, а одновременно также левую и правую части равенства x20. Оператору "унификация" передается опция (развязка x22 пустоеслово). Она означает, что при унификации предпринимается попытка развязки переменных списка x22. Последний элемент этой тройки (изначально - "пустоеслово") служит накопителем развязывающих утверждений, вводимых при унификации. В нашем примере получают два развязывающих утверждения - "точкалуча(a, b, C)" и "точкалуча(c, b, F)". Его наличие позволяет в качестве унифицирующей подстановки выбрать такую, чтобы вместо каждой из переменных F подставлялось выражение, не содержащее другой

переменной. Фактически набор подставляемых выражений подстановки S имеет вид a, c, C, c, a, F , т.е. переменные C, F переводятся в себя.

Переменной x_{26} присваивается объединение списка x_{18} с результатами применения подстановки S к отличным от x_{12} и x_{20} утверждениям списка x_8 . К списку x_{26} добавляются результаты применения подстановки S к утверждениям накопителя (развязка ...). Переменной x_{27} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_9 . Затем создается импликация с антецедентами x_{26} и консеквентом x_{27} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Реализация единственного равенства в антецеденте путем отождествления его соответствующих переменных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcABE}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = E) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(b = E) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ a \in \text{окружность}(AB) \ \& \ b \in \text{окружность}(AB) \ \& \ c \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{разныестороны}(c, A, \text{прямая}(ab)) \ \& \ \text{разныестороны}(E, A, \text{прямая}(ab)) \rightarrow \angle(aEb) = \angle(acb))$$

из теоремы

$$\forall_{abcABCDE}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \angle(aAb) = \angle(CAD) \ \& \ a \in \text{окружность}(AB) \ \& \ b \in \text{окружность}(AB) \ \& \ c \in \text{окружность}(AB) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \ D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{разныестороны}(c, A, \text{прямая}(ab)) \ \& \ \text{разныестороны}(E, A, \text{прямая}(CD)) \rightarrow \angle(CED) = \angle(acb))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов. В нем выбирается равенство x_9 двух невырожденных числовых атомов. В нашем примере - равенство " $\angle(aAb) = \angle(CAD)$ ". Проверяется отсутствие других равенств в антецедентах. Переменной x_{11} присваивается консеквент теоремы, переменной x_{12} - список его параметров. В нашем примере x_{12} состоит из переменных a, b, c, C, D, E . Переменной x_{13} присваивается список параметров терма x_9 . В нашем примере - a, b, A, C, D . Проверяется, что список x_{12} имеет не менее двух переменных, не входящих в список x_{13} . Проверяется, что обе части равенства x_9 имеют один и тот же заголовок x_{14} . Определяются списки x_{16} и x_{18} заголовков корневых операндов левой и правой частей равенства x_9 . Проверяется, что все эти заголовки суть переменные, причем длины списков x_{16} и x_{18} равны. Переменной x_{19} присваивается объединение списка антецедентов теоремы со списком равенств переменных x_{16} соответствующим переменным x_{18} . Создается импликация с антецедентами x_{19} и консеквентом x_{11} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Реализация равенства коммутативных двуместных числовых атомов в антецедентах путем отождествления переменных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{CDEF}(\neg(C = D) \& \neg(C = E) \& \neg(D = E) \& \neg(E = F) \& l(CD) = l(DF) \& \angle(CDE) = \angle(EDF) \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& F - \text{точка} \rightarrow \angle(CED) = \angle(DEF))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEFA}(\neg(D = F) \& \neg(D = E) \& \neg(A = C) \& \neg(A = B) \& \neg(B = C) \& \neg(E = F) \& \angle(BAC) = \angle(EDF) \& l(AB) = l(DE) \& l(AC) = l(DF) \rightarrow \angle(ABC) = \angle(DEF))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Среди них выбирается равенство x9 двух невырожденных числовых атомов. В нашем примере x9 имеет вид " $l(AB) = l(DE)$ ". Проверяется, что среди антецедентов имеются и другие равенства, но общее число равенств в антецедентах не более 3. Проверяется, что заголовком обеих частей равенства x9 служит некоторый коммутативный символ x13, причем каждая из этих частей имеет ровно два операнда, представляющих собой переменные. Переменной x14 присваивается список операндов левой части равенства x9, переменной x15 - правой. В нашем примере x14 - A, B , x15 - D, E . Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x16 присваиваются равенство начал списков x14, x15 и равенство их концов; во втором - равенство начала списка x14 концу списка x15 и конца списка x14 началу списка x15. Переменной x17 присваивается объединение отличных от x9 элементов списка x8 и списка x16, переменной x18 - консеквент исходной теоремы. Переменной x19 присваивается результат обработки списка x17 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров термина x18. Затем создается импликация с антецедентами x19 и консеквентом x18. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Варьирование антецедента с помощью дополнительной теоремы

1. Попытка варьирования антецедента с помощью утверждения существования для соотношения между несколькими числовыми атомами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdjABCDE}(\neg(a = b) \& \neg(c = d) \& \neg(c = j) \& \neg(d = j) \& \neg(A = B) \& \text{neg}(C = D) \& \neg(C = E) \& \neg(D = E) \& \angle(cjd) + \angle(CED) = \pi \& c \in \text{окружность}(ab) \& d \in \text{окружность}(ab) \& j \in \text{окружность}(ab) \& C \in \text{окружность}(AB) \& D \in \text{окружность}(AB) \& E \in \text{окружность}(AB) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& d - \text{точка} \& j - \text{точка} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \rightarrow \angle(CAD) = \angle(cad))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdeABCDE}(\neg(a = b) \& \neg(c = d) \& \neg(c = e) \& \neg(d = e) \& \neg(A = B) \& \text{neg}(C = D) \& \neg(C = E) \& \neg(D = E) \& \angle(ced) = \angle(CED) \& c \in \text{окружность}(ab) \& d \in \text{окружность}(ab) \& e \in \text{окружность}(ab) \& C \in \text{окружность}(AB) \& D \in \text{окружность}(AB) \& E \in \text{окружность}(AB) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& d - \text{точка} \& e - \text{точка} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \rightarrow \angle(CAD) = \angle(cad))$$

и дополнительной теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{ABCDEF} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ & \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \ D \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ & E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ \neg(D = E) \rightarrow \exists_F (F \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ & F - \text{точка} \ \& \ \neg(F = C) \ \& \ \neg(F = D) \ \& \ \angle(CED) + \angle(CFD) = \pi) \end{aligned}$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. В нем выбирается равенство x9 двух невырожденных числовых атомов. Переменной x10 присваивается пара этих атомов. В нашем примере x9 - равенство " $\angle(ced) = \angle(CED)$ ". Проверяется отсутствие других равенств в антецедентах. Переменной x11 присваивается заголовок левой части равенства x9. В нашем примере - "угол". Справочник поиска теорем "существованием" определяет по x11 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x14 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не встречающиеся в исходной теореме. В нашем примере x14 имеет вид:

$$\begin{aligned} & \forall_{fghijk} (f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ i - \text{точка} \ \& \ j - \text{точка} \ \& \\ & \neg(f = g) \ \& \ h \in \text{окружность}(fg) \ \& \ i \in \text{окружность}(fg) \ \& \ j \in \text{окружность}(fg) \\ & \ \& \ \neg(h = jE) \ \& \ \neg(i = j) \rightarrow \exists_k (k \in \text{окружность}(fg) \ \& \ k - \text{точка} \ \& \\ & \neg(k = h) \ \& \ \neg(k = i) \ \& \ \angle(hji) + \angle(hki) = \pi) \end{aligned}$$

Переменной x15 присваивается вхождение консеквента теоремы x14. Этот консеквент представляет собой квантор существования. Переменной x16 присваивается варьируемая переменная квантора, переменной x17 - набор конъюнктивных членов утверждения под квантором. В нашем примере x16 - переменная k . Среди утверждений x17 выбирается равенство x18. В нашем примере - " $\angle(hji) + \angle(hki) = \pi$ ". Переменной x19 присваивается список антецедентов теоремы x14, переменной x20 - объединение x19 с отличными от x18 утверждениями набора x17. Рассматривается числовой атом x21 утверждения x18. В нашем примере - " $\angle(hki)$ ". Проверяется, что этот атом содержит переменную x16. В списке x10 выбирается атом x22. В нашем примере - " $\angle(ced)$ ".

Переменной x23 присваивается результат добавления к списку отличных от x18 утверждений набора x17 терма "фикс(x21)". Переменной x24 присваивается результат добавления к списку x8 терма "фикс(x22)". Переменной x25 присваивается список параметров утверждений x23. В нашем примере - " f, g, h, i, k ". Оператор "подборзначений" усматривается подстановку S вместо переменных x25, переводящую утверждения x23 в подмножество утверждений x24. В нашем примере подставляемые термы суть a, b, c, d, e . При этом переменной x27 присваивается набор утверждений списка x24, в который переведены утверждения x23.

Переменной x28 присваивается терм, подставляемый подстановкой S вместо переменной x16. Переменной x29 присваивается заголовок терма x28. В нашем примере - переменная " e ". Проверяется, что x29 - переменная. Переменной x30 присваивается список отличных от x9 утверждений набора x8, содержащих переменную x29. В нашем примере - утверждения " $\neg(c = e)$ ", " $\neg(d = e)$ ", " $e \in \text{окружность}(ab)$ ", " $e - \text{точка}$ ". Проверяется, что x30 включается в список x27.

Переменной x31 присваивается вхождение атома x21 в утверждение x18. Среди пары атомов x10 выбирается атом x32, отличный от x22. В нашем примере - " $\angle(CED)$ ". Определяется результат x33 замены вхождения x31 на атом x32 и одновременной подстановки S , применяемой к переменным вне вхождения x31. В нашем примере он имеет вид " $\angle(cjd) + \angle(CED) = \pi$ ". Переменной x34 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям x19, переменной x35 - объединение списка отличных от x9 утверждений набора x8 со списком x34. К этому объединению добавляется утверждение x33. Переменной x36 присваивается консеквент исходной теоремы. Переменной x37 присваивается результат обработки списка x35 оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x36. Затем создается импликация с антецедентами x37 и консеквентом x36. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка варьирования равенства числовых атомов в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdef}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(e = f) \ \& \ l(cd) = l(ef) \ \& \ c \in \text{окружность}(ab) \ \& \ d \in \text{окружность}(ab) \ \& \ e \in \text{окружность}(ab) \ \& \ f \in \text{окружность}(ab) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \rightarrow \angle(acd) = \angle(aef))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEFGF}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \neg(D = F) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(E = F) \ \& \ \angle(BAC) = \angle(EDF) \ \& \ l(AB) = l(DE) \ \& \ l(AC) = l(DF) \rightarrow \angle(ABC) = \angle(DEF))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDEFGF}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \ D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ F \in \text{окружность}(AB) \ \& \ l(CD) = l(EF) \rightarrow \angle(CAD) = \angle(EAF))$$

Переменной x8 присваивается вхождение антецедента теоремы, представляющего собой равенство двух выражений с одинаковым заголовком x9. В нашем примере - равенство " $\angle(BAC) = \angle(EDF)$ ". Справочник поиска теорем "равныедлины" определяет по x9 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x12 присваивается вхождение консеквента дополнительной теоремы, переменной x13 - вхождение равенства в ее антецедентах, обе части которого имеют своим заголовком один и тот же логический символ x14. В нашем примере x13 - вхождение равенства " $l(CD) = l(EF)$ ". Проверяется, что все параметры подтерма x13 встречаются в консеквенте x12.

Оператор "выводпосылки" определяет результат x15 последовательного применения исходной и дополнительной теорем, при котором антецедент x8 исходной теоремы унифицируется с консеквентом дополнительной теоремы. Переменной x16 присваивается консеквент теоремы x15. Определяется результат x17 обработки антецедентов теоремы x15 оператором "нормантецеденты" относительно

параметров терма x16. Затем создается импликация с антецедентами x17 и консеквентом x16. Она обрабатывается оператором "нормтеорема". Проверяется, что длина связывающей приставки результата x18 равна длине связывающей приставки исходной теоремы. Затем теорема x18 регистрируется в списке вывода.

3. Попытка перехода к подмножеству в условии принадлежности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCD}(\neg(a = b) \& \neg(A = B) \& \neg(C = D) \& A \in \text{прямая}(CD) \& A \in \text{отрезок}(ab) \& B \in \text{прямая}(ab) \& B \in \text{отрезок}(CD) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(CD) = \text{прямая}(ab))$$

из теоремы

$$\forall_{abABCD}(\neg(a = b) \& \neg(A = B) \& \neg(C = D) \& A \in \text{прямая}(ab) \& A \in \text{прямая}(CD) \& B \in \text{прямая}(ab) \& B \in \text{прямая}(CD) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(CD) = \text{прямая}(ab))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& \neg(A = B) \rightarrow \text{отрезок}(AB) \subseteq \text{прямая}(AB))$$

Проверяется отсутствие у теоремы характеристики "числовой атом". Переменной x8 присваивается список антецедентов. В нем находится утверждение x9 с заголовком "принадлежит", у которого первым операндом служит некоторая переменная x10, а вторым - выражение x11, не содержащее данной переменной. В нашем примере x9 имеет вид " $A \in \text{прямая}(ab)$ ". Переменной x12 присваивается заголовок выражения x11. В нашем примере - символ "прямая". Справочник поиска теорем "подмнож" находит по x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x15 присваивается входение консеквента дополнительной теоремы. Этот консеквент - отношения включения. Переменной x16 присваивается правая часть включения, переменной x17 - список параметров выражения x16. В нашем примере x16 - выражение " $\text{прямая}(AB)$ ". Проверяется, что x17 включает все переменные дополнительной теоремы. Переменной x18 присваивается заголовок левой части включения. В нашем примере - символ "отрезок". Проверяется, что в списке x8 нет отношения принадлежности, у которого заголовок правой части равен x18.

Определяется подстановка S вместо переменных x17, унифицирующая выражения x11 и x16. Переменной x20 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам дополнительной теоремы, переменной x21 - результат применения этой подстановки к левой части включения x15. В нашем примере x21 имеет вид " $\text{отрезок}(ab)$ ". Переменной x22 присваивается утверждение "принадлежит(x10 x21)". Переменной x23 присваивается объединение списка отличных от x9 элементов набора x8 со списком x20. К этому объединению добавляется утверждение x22. Затем создается импликация с антецедентами x23. Ее консеквент такой же, как у исходной теоремы. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Создание квазипротокола

1. Ввод в рассмотрение пары новых числовых атомов при доказательстве равенства другой пары числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим создание квазипротокола

$$\forall_{ABCDEF}(l(AB) = l(DE) \& l(AC) = l(DF) \rightarrow \text{актив}(\angle(BAC)) \& \text{актив}(\angle(EDF)))$$

по теореме

$$\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& F - \text{точка} \& \neg(D = F) \& \neg(D = E) \& \neg(A = C) \& \neg(A = B) \& \neg(B = C) \& \neg(E = F) \& \angle(BAC) = \angle(EDF) \& l(AB) = l(DE) \& l(AC) = l(DF) \rightarrow \angle(ABC) = \angle(DEF))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - пара левой и правой частей равенства в консеквенте. Переменной x12 присваивается список существенных антецедентов. В нашем примере - " $\angle(BAC) = \angle(EDF)$ ", " $l(AB) = l(DE)$ ", " $l(AC) = l(DF)$ ". Проверяется, что каждый элемент списка x12, не имеющий заголовка "не", представляет собой равенство двух невырожденных числовых атомов. После этого из x12 отбрасываются все утверждения с заголовком "не".

Переменной x13 присваивается некоторое равенство из списка x12. В нашем примере - " $\angle(BAC) = \angle(EDF)$ ". Переменной x14 присваивается остаток списка x12. Переменной x15 присваивается список параметров числовых атомов набора x14, за исключением тех параметров, для которых возможно варьирование без изменения значения содержащего их числового атома. В нашем примере x15 состоит из переменных A, B, D, E, C, F . Проверяется, что все параметры равенства x13 содержатся в списке x15. Затем создается импликация с антецедентами x14, консеквентом которой служит терм " $\text{актив}(P) \& \text{актив}(Q)$ ", где P, Q - левая и правая части равенства x13. Эта импликация регистрируется в списке вывода с характеристиками "теоремаприема", "актив", "равныетермы(x10)".

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Попытка свести равенство двух числовых атомов в антецедентах к равенству двух других числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\angle(ABC) = \angle(BCD) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \text{трапеция}(ABCD) \rightarrow l(AB) = l(CD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\angle(ADC) = \angle(BAD) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \text{трапеция}(ABCD) \rightarrow l(AB) = l(CD))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. В не находится равенство x9 двух невырожденных числовых атомов. В нашем примере - " $\angle(ADC) = \angle(BAD)$ ". Проверяется отсутствие в списке x8 других равенств. Выбирается

переменная x_{11} , не входящая в теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{12} присваивается результат добавления к списку x_8 равенства левой части равенства x_9 переменной x_{11} и утверждения "число(x_{11})". Решается задача на исследование x_{13} с посылками x_{12} и целями "известно", "неизвестные X ", где X - все параметры антецедентов x_8 . В нашем примере посылки задачи x_{13} суть: " $\angle(ADC) = \angle(BAD)$ ", " A - точка", " B - точка", " C - точка", " D - точка", "трапеция($ABCD$)", " $\angle(ADC) = a$ ", " a - число". После решения этой задачи в списке ее посылок находится равенство x_{16} , правая часть x_{17} которого содержит переменную x_{11} , а левая часть x_{18} - не содержит. В нашем примере x_{16} имеет вид " $\angle(ABC) = -a + \pi$ ". Проверяется, что выражение представляет собой числовой атом, не входящий в список x_{10} . В том же списке посылок задачи x_{13} находится другое равенство x_{21} , правая часть которого равна x_{17} . Левая часть x_{22} этого равенства представляет собой числовой атом. В нашем примере x_{21} имеет вид " $\angle(BCD) = -a + \pi$ ". Переменной x_{24} присваивается равенство выражений x_{18} и x_{22} . В нашем примере - " $\angle(ABC) = \angle(BCD)$ ". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство x_9 является следствием отличных от x_9 утверждений набора x_8 и утверждения x_{24} . Затем создается импликация с антецедентами x_{25} и тем же консеквентом, что у исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка вывести из консеквента равенство двух других числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ l(AC) = l(BC) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ D\text{-точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \rightarrow \angle(BDC) = \angle(ADC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ l(AC) = l(BC) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ D\text{-точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \rightarrow \angle(BAD) = \angle(ABD))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов. В этом списке имеется единственное равенство. Переменной x_{10} присваивается набор из левой и правой частей равенства в консеквенте теоремы. Эти части суть невырожденные числовые атомы. Выбирается переменная x_{12} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{13} присваивается результат добавления к списку x_8 равенств переменной a каждому из выражений пары x_{10} , а также утверждения "число(x_{12})". Решается задача на исследование x_{14} с посылками x_{13} и целями "известно", "неизвестные X ", где X - все параметры утверждений x_8 .

После решения задачи x_{14} в ее списке посылок находится равенство x_{17} которого не содержащего переменной x_{12} и не встречающегося в паре x_{10} числового атома x_{19} выражению x_{18} , содержащему переменную x_{12} . В нашем примере x_{17} имеет вид " $\angle(BDC) = -a + \pi/2$ ". В списке посылок задачи x_{14} находится еще одно равенство x_{22} , правая часть которого равна x_{18} , а левая часть x_{23} представляет собой числовой атом. В нашем примере x_{22} имеет вид

" $\angle(ADC) = -a + \pi/2$ ". Переменной x25 присваивается равенство выражений x19 и x23. Затем создается импликация с антецедентами x8 и консеквентом x25. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на доказательство для вывода следствий теоремы

1. Усмотрение эквивалентности консеквента конъюнкции антецедентов, выраженных через его части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{BCD}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ D \text{ — точка} \ \rightarrow \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(CD) \leftrightarrow \text{прямая}(BC) = \text{прямая}(CD))$$

из теоремы

$$\forall_{BCD}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ D \text{ — точка} \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(CD) \rightarrow \text{прямая}(BC) = \text{прямая}(CD))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - пара частей равенства в консеквенте. Переменной x12 присваивается список существенных антецедентов теоремы. В нашем примере - единственный антецедент "прямая(BC) || прямая(CD)". Переменной x13 присваивается список параметров консеквента. В нашем примере - B, C, D . Переменной x14 присваивается подсписок списка x12, образованный утверждениями, параметры которых включаются в список x13. В нашем примере он состоит из указанного выше существенного антецедента. Проверяется, что список x14 непуст и что каждое вхождение переменной в любое из утверждений списка расположено внутри подтерма, равного терму списка x10. Переменной x15 присваивается результат замены утверждений x14 списка x8 на консеквент теоремы. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что конъюнкция утверждений x14 является следствием утверждений x15. Затем создается импликация, антецеденты которой суть все не вошедшие в список x14 утверждения списка x8, а консеквент - эквивалентность конъюнкции утверждений x14 консеквенту исходной теоремы. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Склейка теорем

1. Склейка теорем, отличающихся парами антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{defghi}(\neg(g = h) \ \& \ \neg(d = g) \ \& \ \neg(g = i) \ \& \ \neg(d = h) \ \& \ \neg(h = i) \ \& \ \neg(e = f) \ \& \ g \in \text{окружность}(ef) \ \& \ h \in \text{окружность}(ef) \ \& \ d \in \text{окружность}(ef) \ \& \ i \in \text{окружность}(ef) \ \& \ g \text{ — точка} \ \& \ h \text{ — точка} \ \& \ d \text{ — точка} \ \& \ e \text{ — точка} \ \& \ f \text{ — точка} \ \& \ i \text{ — точка} \ \& \ \text{однасторона}(d, i, \text{прямая}(gh)) \rightarrow \angle(gih) = \angle(gdh))$$

из теоремы

$$\forall_{abcABE}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = E) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(b = E) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ a \in \text{окружность}(AB) \ \& \ b \in \text{окружность}(AB) \ \& \ c \in \text{окружность}(AB) \ \& \ e \in \text{окружность}(AB))$$

$E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{разныестороны}(c, A, \text{прямая}(ab)) \ \& \ \text{разныестороны}(E, A, \text{прямая}(ab)) \rightarrow \angle(aEb) = \angle(acb)$

и дополнительной теоремы

$\forall_{aABCDE}(\neg(a = C) \ \& \ \neg(a = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ a \in \text{окружность}(AB) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \ D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{однасторона}(a, A, \text{прямая}(CD)) \ \& \ \text{однасторона}(A, E, \text{прямая}(CD)) \rightarrow \angle(CED) = \angle(CaD))$

Переменной x_9 присваивается список antecedентов, переменной x_{10} - консеквент, переменной x_{11} - кванторная приставка теоремы. В списке вывода рассматривается теорема x_{13} , длина которой равна длине исходной теоремы и отличная от нее. Проверяется, что теорема x_{13} имеет характеристику "равны". В нашем примере x_{13} - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x_{14} присваивается результат переобозначения переменных теоремы x_{13} на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{14} имеет вид:

$\forall_{defghi}(\neg(d = g) \ \& \ \neg(d = h) \ \& \ \neg(e = f) \ \& \ \neg(g = h) \ \& \ \neg(g = i) \ \& \ \neg(h = i) \ \& \ d \in \text{окружность}(ef) \ \& \ g \in \text{окружность}(ef) \ \& \ h \in \text{окружность}(ef) \ \& \ i \in \text{окружность}(ef) \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ i - \text{точка} \ \& \ \text{однасторона}(d, e, \text{прямая}(gh)) \ \& \ \text{однасторона}(e, i, \text{прямая}(gh)) \rightarrow \angle(gih) = \angle(gdh))$

Переменной x_{15} присваивается консеквент теоремы x_{14} . Проверяется, что он имеет ту же длину, что утверждение x_{10} . Переменной x_{16} присваивается список antecedентов теоремы x_{14} . Проверяется, что его длина равна длине списка x_9 . Переменной x_{17} присваивается кванторная приставка теоремы x_{14} , переменной x_{18} - список параметров терма x_{10} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{18} , переводящая терм x_{10} в терм x_{15} .

Если разность Q списков x_{11} и x_{18} непуста, то ищется элемент R списка x_9 , содержащий все переменные Q и хотя бы одну переменную списка x_{18} . Определяется результат U применения к утверждения U подстановки S . Затем определяется подстановка H вместо переменных Q , переводящая U в утверждение списка x_{16} . После этого подстановка S корректируется - объединяется с подстановкой U . При этом список x_{18} переменных подстановки S пополняется списком Q , а список подставляемых термов - списком таких термов у подстановки U . Указанным образом просматриваются все элементы R списка x_9 .

По завершении цикла коррекций подстановки S и набора x_{18} проверяется, что длины наборов x_{11} и x_{18} равны. Переменной x_{20} присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям x_9 . Переменной x_{21} присваивается набор результатов обработки утверждения x_{20} оператором "станд", переменной x_{22} - набор результатов обработки этим оператором утверждений x_{16} . Переменной x_{23} присваивается разность списков x_{21} и x_{22} , переменной x_{24} - разность списков x_{22} и x_{21} . Проверяется, что каждая из этих разностей двухэлементная. В нашем примере x_{23} состоит из утверждений "разныестороны($d, e,$

прямая(gh)", "разныестороны(i, e , прямая(gh))". Список x_{24} состоит из утверждений "однасторона(d, e , прямая(gh))", "однасторона(e, i , прямая(gh))". Переменной x_{25} присваивается пересечение списков x_{21} и x_{22} . Переменной x_{26} присваивается дизъюнкция конъюнкции утверждений списка x_{23} и конъюнкции утверждений списка x_{24} . При помощи задачи на преобразование эта дизъюнкция упрощается относительно посылок x_{25} . Ответ присваивается переменной x_{28} . В нашем примере он имеет вид " $e \in$ прямая(gh) \vee однасторона(d, i , прямая(gh))". Переменной x_{30} присваивается список дизъюнктивных членов ответа x_{28} . Проверяется, что все они суть элементарные утверждения. Среди них выбирается утверждение x_{30} . В нашем примере оно имеет вид "однасторона(d, i , прямая(gh))". Затем создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x_{25} и x_{30} , а консеквентом - утверждение x_{15} . Эта импликация регистрируется в списке вывода. По окончании рассмотрения всевозможных утверждений x_{30} исходная и дополнительная теоремы помечаются в списке вывода элементом "исключение".

2. Склейка двух теорем при помощи третьей теоремы с характеристикой "равнойдлинны".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abKT}(\text{неподв}(b, T) \ \& \ \text{неподв}(K, T) \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \ \& \ \text{мтело}(b) \ \& \ \text{мтело}(K) \rightarrow \text{Скорость}(a, K, T) = \text{Скорость}(a, b, T))$$

из теоремы

$$\forall_{abKT}(\text{неподв}(b, T) \ \& \ \text{неподв}(K, T) \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \ \& \ \text{мтело}(b) \ \& \ \text{мтело}(K) \rightarrow \text{длина}(\text{Скорость}(a, K, T)) = \text{длина}(\text{Скорость}(a, b, T)))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{ab}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(b) \rightarrow a = b \leftrightarrow \text{длина}(a) = \text{длина}(b) \ \& \ \text{однонаправлены}(a, b))$$

$$\forall_{abKT}(\text{неподв}(b, T) \ \& \ \text{неподв}(K, T) \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \ \& \ \text{мтело}(b) \ \& \ \text{мтело}(K) \rightarrow \text{однонаправлены}(\text{Скорость}(a, K, T)) \leftrightarrow \text{однонаправлены}(\text{Скорость}(a, b, T)))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов. Проверяется, что обе части равенства в консеквенте имеют один и тот же заголовок x_{10} . В нашем примере - символ "длина". Переменной x_{11} присваивается консеквент. Справочник поиска теорем "равнойдлинны" определяет по символу x_{10} указанную выше первую дополнительную теорему. Переменной x_{14} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{14} имеет вид:

$$\forall_{cd}(\text{Вектор}(c) \ \& \ \text{Вектор}(d) \rightarrow c = d \leftrightarrow \text{длина}(c) = \text{длина}(d) \ \& \ \text{однонаправлены}(c, d))$$

Проверяется, что параметры антецедентов исходной теоремы включаются в параметры консеквента x_{11} . Переменной x_{15} присваивается вхождение той части

эквивалентности в консеквенте теоремы x14, которая имеет заголовок "и". Переменной x16 присваивается список конъюнктивных членов этой части. В нашем примере - утверждения "длина(c) = длина(d)" и "однонаправлены(c, d)". Проверяется, что данный список двухэлементный. В списке x16 выбирается утверждение x17, заголовок которого отличен от символа "равно". В нашем примере - "однонаправлены(c, d)". Переменной x18 присваивается список параметров утверждения x17. Проверяется, что он совпадает со списком переменных теоремы x14.

В списке вывода выбирается не помеченная отметкой "исключение" теорема x21, консеквент которой имеет тот же заголовок, что и терм x17. В нашем примере это вторая дополнительная теорема. Проверяется, что все переменные этой теоремы содержатся в ее консеквенте. Переменной x23 присваивается результат переобозначения переменных второй дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему и в теорему x14. В нашем примере x23 имеет вид:

$$\forall_{efgh}(\text{неподв}(f, h) \ \& \ \text{неподв}(g, h) \ \& \ \text{мточка}(e) \ \& \ \text{Числотр}(h) \ \& \ \text{мтело}(f) \ \& \ \text{мтело}(g) \rightarrow \text{однонаправлены}(\text{Скорость}(e, f, h)) = \text{однонаправлены}(\text{Скорость}(e, g, h)))$$

Переменной x24 присваивается консеквент теоремы x23, переменной x25 - список параметров термов x24 и x17. В нашем примере - список c, d, e, f, g, h . В списке x16 выбирается равенство x26. Определяется подстановка S вместо переменных x25, унифицирующая одновременно терм x11 с термом x26 и терм x24 с термом x17. Переменной x28 присваивается набор обработанных оператором "станд" результатов применения подстановки S к утверждениям x8. Переменной x29 присваивается набор обработанных оператором "станд" результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x23. Проверяется, что списки x28 и x29 составлены из одних и тех же утверждений. В нашем примере - из утверждений "неподв(b, T)", "неподв(K, T)", "мточка(a)", "Числотр(T)", "мтело(b)", "мтело(K)". Переменной x30 присваивается набор обработанных оператором "станд" результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x14. В нашем примере x30 состоит из утверждений "Вектор(Скорость(a, K, T))", "Вектор(Скорость(a, b, T))". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что конъюнкция утверждений x30 является следствием утверждений x28.

Переменной x33 присваивается результат применения подстановки S к той части консеквента теоремы x14, которая является равенством. Затем создается импликация с антецедентами x28 и консеквентом x33. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Исходная теорема и вторая дополнительная помечаются в списке вывода символом "исключение".

3.89 Характеристика "развертка"

Характеристикой "развертка(x1 x2)" снабжаются эквивалентности для кванторной расшифровки. x1 - тип возникающего при расшифровке квантора ("длялюбого", "существует"); x2 - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Переход к отрицаниям эквивалентности для кванторной импликации, дающий эквивалентность для параметрического описания.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \neg(a \subseteq b) \leftrightarrow \exists_c(\neg(c \in b) \ \& \ c \in a))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow c \in b))$$

Характеристика - "развертка(длялюбого второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она является элементарным утверждением. Переменной x11 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что ее заголовком служит квантор общности. Переменной x12 присваивается список антецедентов теоремы. Создается импликация с антецедентами x12, консеквентом которой служит эквивалентность отрицания утверждения x10 отрицанию квантора x11. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Единственные допустимые характеристики - "параметризация" и "попыткапараметризации".

2. Эквивалентность для кванторной расшифровки порождает импликацию для проверочного оператора (первый прием).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abfy}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{образ}(f, a) \subseteq b \ \& \ y \in a \rightarrow f(y) \in b)$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \text{образ}(f, a) \subseteq b \leftrightarrow \forall_y(y \in a \rightarrow f(y) \in b))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она является элементарным утверждением. Переменной x11 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что ее заголовком служит квантор общности. Переменной x12 присваивается список антецедентов теоремы. Проверяется, что x11 - простая импликация, т.е. ее антецеденты и консеквент элементарны. Переменной x13 присваивается результат присоединения к антецедентам импликации x11 отрицания ее консеквента. Выбирается позиция x14 списка x13, и переменной x15 присваивается отрицание утверждения на данной позиции. В нашем примере x15 имеет вид " $f(y) \in b$ ". Проверяется существование проверочного оператора, обрабатывающего утверждения вида x15. Переменной x19 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" объединения списка x12 и отличных от x15 утверждений набора x13, к которому добавлено утверждение x10. Обработка ведется относительно параметров утверждения x15. Проверяется, что в списке x19 отсутствует равенство переменной не содержащему ее выражению и что проверочные операторы не усматривают истинность x15 из посылок x19. Тогда создается импликация с антецедентами x19 и консеквентом x15. Она регистрируется в списке вывода.

3. Эквивалентность для кванторной расшифровки порождает импликацию для проверочного оператора (второй прием).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c \in a \ \& \ c \in b \rightarrow \neg(\text{непересек}(a, b)))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(a, b) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow \neg(c \in b)))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она является элементарным утверждением. Переменной x11 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что ее заголовком служит квантор. Переменной x12 присваивается список антецедентов теоремы. Если x11 - квантор существования, то переменной x13 присваивается список конъюнктивных членов подкванторного утверждения, иначе - результат добавления к списку антецедентов квантора x11 отрицания его консеквента. Проверяется, что все утверждения списка x13 элементарны. Если x11 - квантор существования, то переменной x14 присваивается утверждение x10, иначе - его отрицание. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x12 и x13, а консеквентом - x14. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Эквивалентность для кванторной расшифровки порождает импликацию для проверочного оператора (третий прием).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \& \ c \in b \ \& \ \text{наименьший}(a, b) \rightarrow a \leq c)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{наименьший}(a, b) \leftrightarrow a \in b \ \& \ \forall_c(c \in b \rightarrow a \leq c))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она является элементарным утверждением. Переменной x11 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что ее заголовком служит символ "и". Переменной x12 присваивается список конъюнктивных членов консеквента. Среди этих членов выбирается утверждение x13, заголовком которого служит квантор общности. Переменной x14 присваивается список антецедентов исходной теоремы. Переменной x15 присваивается объединение списка x14 и списка антецедентов утверждения x13, к которому добавлено утверждение x10. Создается импликация с антецедентами x15, консеквентом которой служит консеквент утверждения x13. Эта импликация регистрируется в списке вывода.

5. Эквивалентность для кванторной расшифровки порождает импликацию для проверочного оператора (четвертый прием).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы:

$$\forall_{afA}(\text{Dom}(f) = \{1, \dots, a\} \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ \text{Val}(f) = A \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \text{перестановка}(f, A))$$

из теоремы

$$\forall_{fA}(A - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(A) \rightarrow \text{перестановка}(f, A) \leftrightarrow \exists_a(\text{Dom}(f) = \{1, \dots, a\} \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ 0 \leq a) \ \& \ A = \text{Val}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{заимнооднозначно}(f))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она является элементарным утверждением. Переменной x11 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что ее заголовком служит символ "и". Переменной x12 присваивается список конъюнктивных членов консеквента. Среди этих членов выбирается утверждение x13, заголовком которого служит квантор существования. Переменной x14 присваивается список antecedентов исходной теоремы. Переменной x15 присваивается список утверждений набора x12, отличных от x13. Проверяется, что все эти утверждения элементарны. Переменной x16 присваивается объединение списков x14, x15 и списка конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. Переменной x17 присваивается результат обработки списка x16 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терм x10. Затем создается импликация с antecedентами x17 и консеквентом x10, которая регистрируется в списке вывода.

6. Эквивалентность для кванторной расшифровки порождает импликацию для проверочного оператора (пятый прием).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{atKT}(t \in T \ \& \ \text{точка}(a) \ \& \ \text{одномерндвиж}(a, K, T) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Числотр}(T) \rightarrow \text{Место}(a, t) \in \text{осьабсцисс}(K))$$

из теоремы

$$\forall_{aKT}(\text{точка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{одномерндвиж}(a, K, T) \leftrightarrow \forall_t(t \in T \rightarrow \text{Место}(a, t) \in \text{осьабсцисс}(K) \ \& \ \text{одномерный}(\text{Скорость}(a, K, t), K) \ \& \ \text{одномерный}(\text{Ускорение}(a, K, t), K)))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она является элементарным утверждением. Переменной x11 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что ее заголовком служит квантор общности. Переменной x12 присваивается список antecedентов теоремы. Переменной x14 присваивается список antecedентов кванторной импликации x11. Проверяется, что ее консеквент представляет собой конъюнкцию. Среди ее конъюнктивных членов выбирается элементарное утверждение x15. В нашем примере - "Место(a, t) ∈ осьабсцисс(K)". Переменной x16 присваивается объединение списков x12 и x14, к которому добавляется утверждение x10. Создается импликация с antecedентами x16 и консеквентом x15. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

7. Эквивалентность для кванторной расшифровки порождает упрощающее тождество.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{xAC}(\neg(x = \emptyset) \ \& \ x - \text{set} \ \& \ x \subseteq \text{Dom}(A) \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ A - \text{функция} \ \& \ \text{конечное}(x) \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \& \ \text{незавсобытия}(A, C) \rightarrow \text{вероятность}(\bigcap_{y, y \in x} A(y), C) = \prod_{y, y \in x} \text{вероятность}(A(y), C))$$

из теоремы

$\forall_{AC}(A - \text{функция} \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow$
 $\text{незавсобытия}(A, C) \leftrightarrow \forall_x(x \subseteq \text{Dom}(A) \ \& \ x - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(x) \ \& \ \neg(x = \emptyset) \rightarrow$
 $\text{вероятность}(\bigcap_{y,y \in x} A(y), C) = \prod_{y,y \in x} \text{вероятность}(A(y), C))$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она является элементарным утверждением. Переменной x11 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что ее заголовком служит квантор общности. Переменной x12 присваивается список антецедентов теоремы. Переменной x14 присваивается список антецедентов кванторной импликации x11. Проверяется, что все эти антецеденты суть элементарные утверждения, а консеквент x13 представляет собой равенство. Переменной x15 присваивается объединение списков x12 и x14. Переменной x18 присваивается та часть равенства x13, у которой подтерм максимальной сложности совпадает с ней самой. В нашем примере она имеет вид:

$\text{вероятность}(\bigcap_{y,y \in x} A(y), C)$

Переменной x20 присваивается другая часть равенства, переменной x21 - список подтермом выражения x20, имеющих максимальную сложность. Проверяется, что либо оценка сложности терма x20 меньше оценки сложности терма x18, либо эти оценки равны, а каждый терм списка x21 короче терма x18. Переменной x22 присваивается результат добавления утверждения x10 к списку x15. Создается импликация с антецедентами x22, консеквентом которой служит равенство x13. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

8. Эквивалентность для кванторной расшифровки с конъюнкцией в заменяющей части порождает кванторную импликацию с кванторным консеквентом.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_a(\text{убывмножества}(a) \rightarrow \forall_{ij}(i \in \mathbb{N} \ \& \ j \in \mathbb{N} \ \& \ i < j \rightarrow a(j) \subseteq a(i)))$

из теоремы

$\forall_a(\text{убывмножества}(a) \leftrightarrow \text{семействомножеств}(a) \ \& \ \text{Dom}(a) = \mathbb{N} \ \& \ \forall_{ij}(i \in \mathbb{N} \ \& \ j \in \mathbb{N} \ \& \ i < j \rightarrow a(j) \subseteq a(i)))$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она является элементарным утверждением. Переменной x11 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что ее заголовком служит символ "и". Переменной x12 присваивается список конъюнктивных членов консеквента. Среди этих членов выбирается утверждение x13, заголовком которого служит квантор. Переменной x14 присваивается список антецедентов исходной теоремы. Переменной x15 присваивается импликация, антецеденты которой суть утверждения списка x14 и утверждение x10, а консеквентом служит утверждение x13. Она регистрируется в списке вывода с характеристикой "квантимплик". Дополнительно может быть введена характеристика "квантор".

9. Эквивалентность для кванторной расшифровки с квантором общности, фиксирующим значения выражения: вывод условия неизменности значения этого выражения для двух различных значений параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abtT}(b \in T \ \& \ t \in T \ \& \ \text{неподв}(a, T) \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \rightarrow \text{Место}(a, t) = \text{Место}(a, b))$$

из теоремы

$$\forall_{aTt}(\text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \rightarrow \text{неподв}(a, T) \leftrightarrow \exists_A(A - \text{точка} \ \& \ \forall_t(t \in T \rightarrow \text{Место}(a, t) = A)))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяющая часть консеквента теоремы. В нашем примере - правая часть. Внутри этой части находится вхождение x_{11} квантора общности. Если x_{11} - корневое вхождение, то переменным x_{12} и x_{13} присваиваются пустые наборы. Иначе - проверяется, что x_{11} - конъюнктивный член некоторого утверждения U под корневым квантором существования. При этом переменной x_{12} присваивается связывающая приставка квантора, а переменной x_{13} - список отличных от x_{11} конъюнктивных членов утверждения под этим квантором. В нашем примере x_{12} состоит из единственной переменной A , x_{13} - из единственного утверждения " A - точка".

Переменной x_{14} присваивается связывающая приставка квантора x_{11} . Проверяется, что она одноэлементна, и переменной x_{15} присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная t . Переменной x_{16} присваивается конъюнкция антецедентов импликации x_{11} . В нашем примере - " $t \in T$ ". Переменной x_{17} присваивается список отличных от x_{15} параметров утверждения x_{16} . В нашем примере - единственная переменная T . Проверяется, что списки x_{12} и x_{17} не пересекаются.

Переменной x_{18} присваивается вхождение консеквента импликации x_{11} . Проверяется, что этот консеквент - равенство. Переменной x_{21} присваивается та часть равенства, которая не содержит переменной x_{15} , переменной x_{22} - та часть, которая содержит переменную x_{15} . В нашем примере x_{21} - A , x_{22} - $\text{Место}(t, T)$. Переменной x_{23} присваивается пересечение списка параметров терма x_{22} со списком x_{12} . В нашем примере список x_{23} пуст. Переменной x_{24} присваивается список утверждений набора x_{13} , имеющих параметры списка x_{23} . В нашем примере список x_{24} тоже пуст.

Если список x_{24} непуст, то рассматривается список X переменных, не входящих в исходную теорему, длина которого равна длине списка x_{23} . Определяется результат R замены переменных x_{23} на переменные X в выражении x_{22} , и при помощи задачи на доказательство проверяется, что равенство выражений x_{22} и R - следствие антецедентов теоремы, утверждений x_{13} , антецедентов импликации x_{11} и результатов замены переменных x_{23} на X в утверждениях x_{24} .

Если список x_{24} пуст, либо указанная проверка дала положительный результат, то выбирается не входящая в исходную теорему переменная x_{25} . В нашем примере - переменная b . Определяется результат x_{26} замены в выражении x_{22}

переменной x_{15} на x_{25} . В нашем примере - "Место(a, b)". Переменной x_{27} присваивается равенство выражений x_{22} и x_{26} , переменной x_{28} - результат замены в утверждении x_{16} переменной x_{15} на x_{25} . В нашем примере x_{28} имеет вид " $b \in T$ ". Переменной x_{29} присваивается объединение списка antecedентов исходной теоремы, конъюнктивных членов утверждений x_{16} и x_{28} и списка x_{24} , к которому добавляется заменяемое утверждение исходной теоремы. Затем создается импликация с antecedентами x_{29} и консеквентом x_{27} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

10. Перенесение в antecedенты элементарных конъюнктивных членов заменяющей части для теоремы кванторной расшифровки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{нижнягрань}(b, a) \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{нижнягрань}(b, a) \leftrightarrow b - \text{число} \ \& \ \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она является элементарным утверждением. Переменной x_{11} присваивается заменяющая часть. Проверяется, что ее заголовком служит символ "и". Переменной x_{12} присваивается список конъюнктивных членов консеквента. Среди этих членов выбирается утверждение x_{13} , заголовком которого служит квантор. Переменной x_{14} присваивается список antecedентов исходной теоремы. Переменной x_{15} присваивается список отличных от x_{13} элементов набора x_{12} . Проверяется, что все они суть элементарные утверждения. Создается импликация, antecedенты которой суть утверждения списков x_{14} и x_{15} , а консеквент - эквивалентность утверждений x_{10} и x_{13} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

11. Извлечение из эквивалентности кванторной свертки простой импликации для проверочного оператора путем ослабления условия существования.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bce}(\neg(b = c) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \text{коллинеарны}(\text{вектор}(bc), \text{вектор}(be)) \rightarrow e \in \text{прямая}(bc))$$

из теоремы

$$\forall_{bce}(\neg(b = c) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \rightarrow \text{коллинеарны}(\text{вектор}(bc), \text{вектор}(be)) \leftrightarrow \exists_y(\text{увектор}(bc) = \text{вектор}(be) \ \& \ y - \text{число}))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяющая часть эквивалентности в консеквенте теоремы. В нашем примере - правая часть. Проверяется, что заменяемая часть элементарна, а заголовком заменяющей служит квантор. Если заголовок утверждения x_{10} - квантор существования, то переменной x_{11} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором x_{10} . Если заголовок утверждения x_{10} - квантор общности, то переменной x_{11} присваивается результат добавления к списку antecedентов импликации x_{10} отрицания ее консеквента. В нашем примере имеет место первый случай.

Переменной x_{12} присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_{13} - связывающая приставка квантора x_{10} . Переменной x_{14} присваивается объединение списков x_{12} и x_{11} . Решается задача на исследование x_{15} , имеющая посылки x_{14} и идентичную цель (исключ x_{13}). В нашем примере посылки суть " $\neg(b = c)$ ", " b - точка", " c - точка", " e - точка", " y вектор(bc) = вектор(be)", " y - число". Цель - "исключ y ". После решения задачи x_{15} в ее списке посылок выбирается не содержащее переменных x_{13} элементарное утверждение x_{17} , не входящее в список x_{12} и не имеющее заголовка "актив". В нашем примере - " $e \in \text{прямая}(bc)$ ". Проверяется, что проверочные операторы не усматривают истинность x_{17} из посылок x_{12} . Переменной x_{18} присваивается результат добавления к списку x_{12} отрицания утверждения x_{17} , переменной x_{19} - заменяемый терм исходной теоремы. Если утверждение x_{10} имеет заголовок "существует", то переменной x_{20} присваивается отрицание утверждения x_{19} , иначе - само это утверждение. Затем создается импликация с антецедентами x_{18} и консеквентом x_{20} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

12. Извлечение простой импликации из эквивалентности для кванторной расшифровки, имеющей элементарный конъюнктивный член заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{наименьший}(a, b) \rightarrow a \in b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{наименьший}(a, b) \leftrightarrow a \in b \ \& \ \forall_c(c \in b \rightarrow a \leq c))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она является элементарным утверждением. Переменной x_{11} присваивается заменяющая часть. Проверяется, что ее заголовком служит символ "и". Переменной x_{12} присваивается список конъюнктивных членов консеквента. Среди этих членов выбирается элементарное утверждение x_{13} . Переменной x_{14} присваивается список антецедентов исходной теоремы. Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения списка x_{14} и утверждение x_{10} , а консеквентом служит x_{13} . Она регистрируется в списке вывода.

13. Попытка альтернативной свертки конъюнктивного члена заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{наименьший}(a, b) \leftrightarrow a \in b \ \& \ \text{нижняягрань}(a, b))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{наименьший}(a, b) \leftrightarrow a \in b \ \& \ \forall_c(c \in b \rightarrow a \leq c))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она является элементарным утверждением. Переменной x_{11} присваивается заменяющая часть. Проверяется, что ее заголовком служит символ "и". Переменной x_{12} присваивается список конъюнктивных членов консеквента. Среди этих членов выбирается утверждение x_{13} , заголовком которого служит квантор. Переменной

x14 присваивается список антецедентов исходной теоремы. Решается задача на описание x15 с посылками x14, единственным условием которой служит утверждение x13. Цели задачи - "полный", "прямойответ", "свертка", "редакция". Ответ присваивается переменной x16. Проверяется, что этот ответ - элементарное утверждение. Переменной x17 присваивается эквивалентность утверждения x10 конъюнкции утверждений x12, в которых вместо x13 берется x16. Создается импликация с антецедентами x14 и консеквентом x17. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

14. Попытка усмотреть симметричное следствие из двух версий заменяемого утверждения, отличающихся варьированием переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{наименьший}(a, b) \ \& \ \text{наименьший}(d, b) \rightarrow d = a)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{set} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{наименьший}(a, b) \leftrightarrow a \in b \ \& \ \forall_c(c \in b \rightarrow a \leq c))$$

Переменной x10 присваивается заменяющее утверждение, переменной x11 - список его конъюнктивных членов. В данном списке находится кванторная импликация x12. Переменной x13 присваивается остаток списка x11. Переменной x14 присваивается заменяемое утверждение теоремы. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x15 присваивается список антецедентов импликации x12. Переменной x16 присваивается связывающая приставка квантора x12. В нашем примере она состоит из единственной переменной c . В списке x13 выбирается элементарное утверждение x17. В нашем примере - " $a \in b$ ". Среди элементов списка x15 находится утверждение x18 с тем же заголовком, что x17. В нашем примере - " $c \in b$ ". Переменной x19 присваивается пересечение списка x16 со списком параметров утверждения x18. В нашем примере - единственная переменная c . Определяется подстановка S вместо переменных x19, переводящая утверждение x18 в x17. Выбирается переменная x21, входящая в параметры терма x14 и в параметры термов, подставляемых подстановкой S . В нашем примере - переменная a .

Выбирается переменная x22, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная d . Переменной x23 присваивается результат замены в терме x14 переменной x21 на переменную x22. В нашем примере он имеет вид "наименьший(d, b)".

Переменной x24 присваивается список антецедентов исходной теоремы, переменной x25 - список результатов замены в содержащих переменную x21 утверждениях набора x24 этой переменной на переменную x22. Переменной x26 присваивается список результатов замены в утверждениях x11 переменной x21 на переменную x22. Переменной x27 присваивается объединение списков x24, x25, x11 и x26. Решается задача на исследование x28 с посылками x27 и целями "известно", "теорема". После этого в списке посылок задачи x28 выбирается элементарное утверждение x30, содержащее переменные x21 и x22. В нашем примере - утверждение " $d = a$ ". Переменной x31 присваивается результат переобозначения в x30 переменных x21 и x22 друг на друга. Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" утверждений x30 и x31 совпадают. Затем

создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списков x24, x25, а также утверждения x14 и x23. Консеквентом является утверждение x30. Импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

15. Извлечение вспомогательной импликации из определения типа объекта.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \rightarrow x + iy - \text{комплексное})$$

из теоремы

$$\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$$

Проверяется наличие характеристики с заголовком "определение". Переменной x10 присваивается заменяемая часть эквивалентности в консеквенте теоремы. Проверяется, что она элементарна. Переменной x11 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что ее заголовком служит квантор существования. Переменной x12 присваивается список антецедентов теоремы.

Переменной x13 присваивается заголовок утверждения x10. В нашем примере - символ "комплексное". Проверяется, что x13 - название рода объектов. Переменной x14 присваивается переменная - первый операнд утверждения x10. В нашем примере - z . Переменной x15 присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором x11. В списке x15 находится равенство x16 с переменной x14 в левой части. В нашем примере - " $z = x + iy$ ". Переменной x17 присваивается правая часть равенства x16. Проверяется, что справочник "тип" определяет по заголовку выражения x17 (в нашем примере - символу "Плюс") список типов значений, содержащий тип x13. Переменной x19 присваивается объединение списка антецедентов теоремы с отличными от x16 элементами списка x15. Затем создается импликация с антецедентами x19 и консеквентом "x13(x17)". Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "родобъекта".

16. Перенесение свойства функции на ее сужение.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{af}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \text{взаимнооднозначно}(\text{сужение}(f, a)))$$

из теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \rightarrow \text{взаимнооднозначно}(f) \leftrightarrow \forall_{xy}(f(x) = f(y) \ \& \ x \in \text{Dom}(f) \ \& \ y \in \text{Dom}(f) \rightarrow x = y))$$

Проверяется наличие характеристики с заголовком "определение". Переменной x10 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что она представляет собой кванторную импликацию. Переменной x11 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x12 - список антецедентов импликации x10. Переменной x13 присваивается связывающая приставка импликации x10. В нашем примере она состоит из переменных x, y . Проверяется, что для каждой переменной

X списка $x13$ среди утверждений $x12$ существует отношение включения либо принадлежности с первым операндом X и вторым операндом "область(F)" для одной и той же при всех X переменной F . Переменной $x14$ присваивается данная переменная F , а переменной $x15$ - список всех указанных отношений включения либо принадлежности. В нашем примере $x14$ - f , $x15$ состоит из утверждений " $x \in \text{Dom}(f)$ ", " $y \in \text{Dom}(f)$ ". Проверяется, что каждое вхождение переменной $x14$ в утверждения списка $x12$, не вошедшие в список $x15$, имеет вид "значение($x14$ Y)", где Y - переменная списка $x13$. Проверяется, что каждое содержащее $x14$ утверждение списка $x11$ имеет либо вид "функция($x14$)", либо вид "содержится(область($x14$) T)", либо вид "содержится(значения($x14$) T)", где выражение T не содержит переменной $x14$. Переменной $x16$ присваивается консеквент импликации $x10$.

Проверяется, что каждое вхождение V переменной $x14$ в утверждение $x16$ имеет вид "значение($x14$ Z)", где либо Z - переменная, входящая в список $x13$, либо V расположено внутри описателя "отображение", причем Z - элемент его связывающей приставки, а предпоследний операнд описателя (он определяет условия на варьируемую переменную) имеет вид "принадлежит(Z, Y)"; Y - переменная списка $x13$.

Выбирается переменная $x17$, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной $x18$ присваивается результат добавления к списку $x11$ заменяемой части теоремы и утверждений "множество($x17$)", "содержится($x17$ область($x14$))". Переменной $x19$ присваивается результат подстановки выражения "сужение($x14$ $x17$)" вместо переменной $x14$ в заменяемую часть теоремы. Затем создается импликация с антецедентами $x18$ и консеквентом $x19$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

17. Перенесение свойства семейства на эквивалентное семейство.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aAC}(\text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ A - \text{функция} \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \& \ \text{незавсобытия}(A, C) \ \& \ \text{эксемейства}(a, A) \rightarrow \text{незавсобытия}(a, C))$$

из теоремы

$$\forall_{AC}(A - \text{функция} \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{незавсобытия}(A, C) \leftrightarrow \forall_x(x \subseteq \text{Dom}(A) \ \& \ x - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(x) \ \& \ \neg(x = \emptyset) \rightarrow \text{вероятность}(\bigcap_{y,y \in x} A(y), C) = \prod_{y,y \in x} \text{вероятность}(A(y), C)))$$

Проверяется наличие характеристики с заголовком "определение". Переменной $x10$ присваивается заменяющая часть. Проверяется, что она представляет собой кванторную импликацию. Переменной $x11$ присваивается список антецедентов теоремы, переменной $x12$ - список антецедентов импликации $x10$. Переменной $x13$ присваивается связывающая приставка импликации $x10$. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной $x14$ присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная x . В списке $x12$ находится утверждение $x15$ вида "содержится($x14$ область(F))", где F - переменная. Эта переменная присваивается переменной $x16$. В нашем примере - переменная A . Проверяется, что в антецеденты

теоремы переменная x16 входит только как операнд символа "функция" либо "значения". Проверяется, что каждое вхождение переменной x14 в отличное от x15 утверждение списка x12 имеет вид "конечное(x14)" либо "множество(x14)" либо "мощность(x14)" либо "равно(x14 пусто)". Проверяется, что переменная x16 не входит в отличные от x15 утверждения списка x12.

Переменной x17 присваивается консеквент импликации x10. Проверяется, что каждое вхождение V переменной x16 в утверждение x17 имеет вид "значение(x16 X)", где X - переменная, причем V расположено внутри описателя "отображение" с варьируемой переменной X , а условие на эту варьируемую переменную имеет вид "принадлежит(X , x14)". Проверяется, что каждое вхождение переменной x14 в утверждение x17 имеет вид "принадлежит(Y , x14)", причем это вхождение задает условие на варьируемую переменную Y внешнего описателя "отображение".

Выбирается переменная x18, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x19 присваивается заменяемая часть теоремы, переменной x20 - результат подстановки в нее переменной x18 вместо x16. Переменной x21 присваивается результат добавления к списку x11 утверждений "эксемейства(x16 x18)" и x19. Затем создается импликация с антецедентами x21 и консеквентом x20. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

18. Перенесение определяемого понятия на семейство операций над семействами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{dAC} (\neg(\emptyset \in \text{Val}(d)) \ \& \ \text{set}_{ab}(a \in \text{Dom}(d) \ \& \ b \in d(a)) = \text{Dom}(A) \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ A - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(d) \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \& \ \text{незавсобытия}(A, C) \ \& \ \text{конечные}(\text{Val}(d)) \rightarrow \text{незавсобытия}(\lambda_a(\bigcap_{b, b \in d(a)} A(a, b), a \in \text{Dom}(d)), C))$$

из теоремы

$$\forall_{AC} (A - \text{функция} \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{незавсобытия}(A, C) \leftrightarrow \forall_x (x \subseteq \text{Dom}(A) \ \& \ x - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(x) \ \& \ \neg(x = \emptyset) \rightarrow \text{вероятность}(\bigcap_{y, y \in x} A(y), C) = \prod_{y, y \in x} \text{вероятность}(A(y), C))$$

Проверяется наличие характеристики с заголовком "определение". Переменной x10 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что она представляет собой кванторную импликацию. Переменной x11 присваивается вхождение консеквента импликации x10, представляющего собой равенство. Переменной x12 присваивается список антецедентов импликации x10, переменной x13 - ее связывающая приставка. Проверяется, что эта приставка состоит из единственной переменной x14. В нашем примере - переменной x . В списке x12 находится утверждение x15 вида "содержится(x14 область(F))", где F - некоторая переменная. Она присваивается переменной x16. В нашем примере x16 - переменная A . В списке x12 находится утверждение x17 вида "конечное(x14)". Переменной x18 присваивается список утверждений набора x12, отличных от x15, x17 и утверждения "множество(x14)". Проверяется, что если этот список непуст, то он состоит из единственного утверждения "не(равно(x14 пусто))".

Переменной x_{19} присваивается заменяемая часть консеквента теоремы. Проверяется, что ее параметры содержат все переменные связывающей приставки теоремы. Переменной x_{20} присваивается вхождение одной из частей равенства x_{11} , переменной x_{21} - вхождение другой части. В нашем примере x_{20} - вхождение левой части, x_{21} - правой. Проверяется, что подтерм x_{20} неоднобуквенный, и переменной x_{23} присваивается вхождение его неоднобуквенного корневого операнда. Переменной x_{24} присваивается заголовок этого операнда. В нашем примере операнд x_{23} имеет вид $\bigcap_{y,y \in x} A(y)$, x_{24} - символ "пересечение-всех". Справочник "развертка" определяет по x_{24} символ x_{25} той двуместной ассоциативно-коммутативной операции, обобщением которой на конечные семейства служит x_{24} . В нашем примере x_{25} - "пересечение".

Переменной x_{26} присваивается вхождение первого операнда вхождения x_{23} . Проверяется, что x_{26} - описатель "отображение". Переменной x_{27} присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что эта приставка одноэлементная, и переменной x_{28} присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная y . Переменной x_{29} присваивается вхождение последнего операнда описателя x_{26} (он определяет значение функции). В нашем примере x_{29} - вхождение подтерма " $A(y)$ ". Проверяется, что x_{29} имеет вид "значение(x_{16} x_{28})". Переменной x_{30} присваивается вхождение предпоследнего операнда описателя x_{26} (он определяет условия на варьируемую переменную). Проверяется, что x_{30} имеет вид "принадлежит(x_{28} x_{14})".

Переменной x_{31} присваивается заголовок подтерма x_{21} . В нашем примере - символ "произведенийвсех". Справочник "развертка" определяет по x_{31} символ x_{32} той двуместной ассоциативно-коммутативной операции, обобщением которой на конечные семейства служит x_{31} . В нашем примере x_{32} - "умножение".

Переменной x_{33} присваивается вхождение первого операнда вхождения x_{21} . Проверяется, что x_{33} - описатель "отображение". Переменной x_{34} присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что эта приставка одноэлементная, и переменной x_{35} присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная y . Переменной x_{36} присваивается вхождение предпоследнего операнда описателя x_{33} (он определяет условия на варьируемую переменную). Проверяется, что x_{36} имеет вид "принадлежит(x_{35} x_{14})". Переменной x_{37} присваивается последний операнд описателя x_{33} (он определяет значение функции). В нашем примере - "вероятность($A(y), C$)". Проверяется, что выражение x_{37} имеет заголовок x_{22} . Переменной x_{38} присваивается подтерм x_{20} . В нашем примере - "вероятность($\bigcap_{y,y \in x} A(y), C$)". Оператор "сравнтермов" Определяет вхождение x_{39} в терм x_{37} и вхождение x_{40} в терм x_{38} , такие, что термы x_{37} и x_{38} отличаются только внутриданных вхождений. В нашем примере x_{39} и x_{40} - первые операнды термов x_{37} и x_{38} . Проверяется, что x_{39} - вхождение выражения "значение(x_{16} x_{35})".

Проверяется, что термы x_{40} и x_{23} равны. Переменной x_{41} присваивается номер операнда x_{23} вхождения x_{20} . В нашем примере он равен 1. Переменной x_{42} присваивается набор из четырех переменных, не входящих в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b, c, d . Переменной x_{43} присваивается первая из этих переменных, переменной x_{44} - вторая, переменной x_{45} - третья, переменной

x46 - четвертая. Переменной x47 присваивается результат добавления к списку антецедентов исходной теоремы утверждений "равно(область(x16) класс(x43 x44 и(принадлежит(x43 x45) принадлежит(x44 значение(x46 x43))))))", "семействомножеств(x46)", "множество(x45)", "равно(область(x46)x45)".

Просматриваются утверждения x48 списка x12, отличные от x15. Переменной x49 присваивается результат подстановки в x48 выражения "значение(x46 x43)" вместо переменной x14. Затем к списку x47 добавляется утверждение "длялюбого(x43 если принадлежит(x43 x45) то x49)".

По окончании цикла просмотр списка x12 все переменные начиная с x48 снова оказываются не определены. К списку x47 добавляется утверждение x19. Переменной x48 присваивается выражение "отображение(x43 принадлежит(x43 x45) x24(отображение(x44 принадлежит(x44 значение(x46 x43)) значение(x16 набор(x43 x44))))))". Переменной x49 присваивается результат подстановки в утверждение x19 выражения x48 вместо переменной x16. Затем создается импликация с антецедентами x47 и консеквентом x49. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

19. Перенесение определяемого понятия на семейство операций над двумя наборами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abC} (\text{Dom}(a) = \text{Dom}(b) \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ a - \text{слово} \ \& \ b - \text{слово} \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \& \ \text{незавсобытия}(a; b, C) \rightarrow \text{незавсобытия}(\lambda_a(a(d) \cap b(d), d \in \text{Dom}(b)), C))$$

из теоремы

$$\forall_{AC} (A - \text{функция} \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{незавсобытия}(A, C) \leftrightarrow \forall_x (x \subseteq \text{Dom}(A) \ \& \ x - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(x) \ \& \ \neg(x = \emptyset) \rightarrow \text{вероятность}(\bigcap_{y, y \in x} A(y), C) = \prod_{y, y \in x} \text{вероятность}(A(y), C))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Проверяется наличие характеристики с заголовком "определение". Переменной x10 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что она представляет собой кванторную импликацию. Переменной x11 присваивается входение консеквента импликации x10, представляющего собой равенство. Переменной x12 присваивается список антецедентов импликации x10, переменной x13 - ее связывающая приставка. Проверяется, что эта приставка состоит из единственной переменной x14. В нашем примере - переменной x . В списке x12 находится утверждение x15 вида "содержится(x14 область(F))", где F - некоторая переменная. Она присваивается переменной x16. В нашем примере x16 - переменная A . В списке x12 находится утверждение x17 вида "конечное(x14)". Переменной x18 присваивается список утверждений набора x12, отличных от x15, x17 и утверждения "множество(x14)". Проверяется, что если этот список непуст, то он состоит из единственного утверждения "не(равно(x14 пусто))".

Переменной x19 присваивается заменяемая часть консеквента теоремы. Проверяется, что ее параметры содержат все переменные связывающей приставки

теоремы. Переменной x_{20} присваивается вхождение одной из частей равенства x_{11} , переменной x_{21} - вхождение другой части. В нашем примере x_{20} - вхождение левой части, x_{21} - правой. Проверяется, что подтерм x_{20} неоднобуквенный, и переменной x_{23} присваивается вхождение его неоднобуквенного корневого операнда. Переменной x_{24} присваивается заголовок этого операнда. В нашем примере операнд x_{23} имеет вид $\bigcap_{y,y \in x} A(y)$, x_{24} - символ "пересечение-всех". Справочник "развертка" определяет по x_{24} символ x_{25} той двуместной ассоциативно-коммутативной операции, обобщением которой на конечные семейства служит x_{24} . В нашем примере x_{25} - "пересечение".

Переменной x_{26} присваивается вхождение первого операнда вхождения x_{23} . Проверяется, что x_{26} - описатель "отображение". Переменной x_{27} присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что эта приставка одноэлементная, и переменной x_{28} присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная y . Переменной x_{29} присваивается вхождение последнего операнда описателя x_{26} (он определяет значение функции). В нашем примере x_{29} - вхождение подтерма " $A(y)$ ". Проверяется, что x_{29} имеет вид "значение(x_{16} x_{28})". Переменной x_{30} присваивается вхождение предпоследнего операнда описателя x_{26} (он определяет условия на варьируемую переменную). Проверяется, что x_{30} имеет вид "принадлежит(x_{28} x_{14})".

Переменной x_{31} присваивается заголовок подтерма x_{21} . В нашем примере - символ "произведение-всех". Справочник "развертка" определяет по x_{31} символ x_{32} той двуместной ассоциативно-коммутативной операции, обобщением которой на конечные семейства служит x_{31} . В нашем примере x_{32} - "умножение".

Переменной x_{33} присваивается вхождение первого операнда вхождения x_{21} . Проверяется, что x_{33} - описатель "отображение". Переменной x_{34} присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что эта приставка одноэлементная, и переменной x_{35} присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная y . Переменной x_{36} присваивается вхождение предпоследнего операнда описателя x_{33} (он определяет условия на варьируемую переменную). Проверяется, что x_{36} имеет вид "принадлежит(x_{35} x_{14})". Переменной x_{37} присваивается последний операнд описателя x_{33} (он определяет значение функции). В нашем примере - "вероятность($A(y), C$)". Проверяется, что выражение x_{37} имеет заголовок x_{22} . Переменной x_{38} присваивается подтерм x_{20} . В нашем примере - "вероятность($\bigcap_{y,y \in x} A(y), C$)". Оператор "сравнтермов" Определяет вхождение x_{39} в терм x_{37} и вхождение x_{40} в терм x_{38} , такие, что термы x_{37} и x_{38} отличаются только внутриданных вхождений. В нашем примере x_{39} и x_{40} - первые операнды термов x_{37} и x_{38} . Проверяется, что x_{39} - вхождение выражения "значение(x_{16} x_{35})".

Проверяется, что термы x_{40} и x_{23} равны. Переменной x_{41} присваивается номер операнда x_{23} вхождения x_{20} . В нашем примере он равен 1. Переменной x_{42} присваивается набор из четырех переменных, не входящих в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b, c, d . Переменной x_{43} присваивается первая из этих переменных, переменной x_{44} - вторая, переменной x_{45} - третья, переменной x_{46} - четвертая.

Дальше начинаются отличия. Переменной x47 присваивается терм "конкатенация(x43 x44)". В нашем примере - "a; b". Переменной x48 присваивается результат добавления к списку результатов подстановки терма x47 вместо переменной x16 в антецеденты исходной теоремы утверждений "равно(область(x43)x45)", "равно(область(x44)x45)", "слово(x43)", "слово(x44)", "множество(x45)". Переменной x49 присваивается результат подстановки в утверждение x19 выражения x47 вместо переменной x16. Список x48 пополняется утверждением x49. Переменной x50 присваивается выражение "отображение(x46 принадлежит(x46 x45) x25(значение(x43 x46) значение(x44 x46)))". Переменной x51 присваивается результат подстановки в утверждение x19 выражения x50 вместо переменной x16. Затем создается импликация с антецедентами x48 и консеквентом x51. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

20. Свертка отрицания квантора существования в элементарное утверждение и вывод импликации для отрицания заменяемого утверждения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(AB)) \rightarrow \neg(\text{разныестороны}(A, B, \text{прямая}(CD))))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \rightarrow \text{разныестороны}(A, B, \text{прямая}(CD)) \leftrightarrow \exists_E(E - \text{точка} \ \& \ E \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ E \in \text{прямая}(CD)))$$

Переменной x10 присваивается список антецедентов, x11 - заменяющая часть эквивалентности в консеквенте. Проверяется, что x11 - квантор существования. Переменной x12 присваивается заменяемая часть эквивалентности. Проверяется, что x12 - элементарное утверждение, не являющееся равенством. Переменной x13 присваивается отрицание утверждения x11. Решается задача на преобразование x14 с посылками x10 и условием x13. Цели ее - "упростить", "свертка". Ответ присваивается переменной x15. В нашем примере он имеет вид "непересек(прямая(CD), отрезок(AB))". Проверяется, что утверждение x15 элементарное. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x10 и утверждение x15, а консеквентом - отрицание утверждения x12. Эта импликация регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Извлечение из эквивалентности кванторной расшифровки эквивалентности, позволяющей свернуть квантор с помощью вспомогательного описателя.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abe}(\forall_f(a(f) \rightarrow e(f) - \text{число}) \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \forall_f(a(f) \rightarrow 0 \leq -b + e(f)) \leftrightarrow \text{нижняягрань}(b, \text{set}_d(\exists_f(d = e(f) \ \& \ a(f))))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{нижняягрань}(b, a) \leftrightarrow b - \text{число} \ \& \ \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$$

Переменной x_{10} присваивается заменяющая часть эквивалентности в консеквенте теоремы, переменной x_{11} - список ее конъюнктивных членов. Среди них выбирается кванторная импликация x_{12} . Переменной x_{13} присваивается остаток списка x_{11} . Переменной x_{14} присваивается список антецедентов теоремы. В нем рассматривается утверждение x_{15} вида "множество(X)", где X - переменная, имеющая единственное вхождение в терм x_{12} . Она присваивается переменной x_{16} . В нашем примере x_{16} - переменная a . Переменной x_{17} присваивается список антецедентов импликации x_{12} . В нем находится утверждение x_{18} вида "принадлежит(x_{19} x_{16})", где x_{19} - переменная, принадлежащая связывающей приставке импликации x_{12} .

Переменной x_{21} присваивается заменяемое утверждение теоремы. Проверяется, что оно элементарно и имеет единственное вхождение переменной x_{16} . Проверяется, что все утверждения списка x_{13} элементарны. Переменной x_{22} присваивается тройка переменных Y_1, Y_2, Y_3 , не входящих в исходную теорему. В нашем примере - переменные d, e, f . Переменной x_{23} присваивается выражение "класс(Y_1 существует(Y_3 и (значение(x_{16} Y_3) равно(Y_1 значение(Y_2 Y_3))))))". Переменной x_{24} присваивается результат подстановки в утверждение x_{21} выражения x_{23} вместо переменной x_{16} .

Переменной x_{25} присваивается список отличных от x_{18} элементов набора x_{17} . Проверяется, что элементы этого списка не содержат переменной x_{19} . Переменной x_{26} присваивается результат подстановки в консеквент импликации x_{12} утверждения "значение(Y_2, Y_3)" вместо переменной x_{19} . Этот результат упрощается в о.д.з. задачей на преобразование и переписывается переменной x_{26} . В нашем примере получаем " $0 \leq -b + e(f)$ ".

Переменной x_{27} присваивается кванторная импликация, связывающая приставка которой получается из списка x_{20} заменой переменной x_{19} на Y_3 ; антецеденты суть утверждения списка x_{25} и терм "значение(x_{16} Y_3)", а консеквентом служит утверждение x_{26} . В нашем примере x_{27} имеет вид " $\forall_f(a(f) \rightarrow 0 \leq -b + e(f))$ ". Переменной x_{28} присваивается список результатов подстановки выражения x_{23} вместо переменной x_{16} в отличные от x_{15} утверждения списков x_{14} и x_{13} . Переменной x_{29} присваивается результат обработки списка x_{28} оператором "нормантецеденты" относительно параметров термов x_{27} и x_{24} . Затем создается импликация с антецедентами x_{29} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{27} и x_{24} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Модифицирование параметрического описания для создания приема конечного перечисления значений неизвестной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{an}(a - \text{целое} \rightarrow a|n \leftrightarrow \exists_{mk}(n = mk \ \& \ a = m))$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(k - \text{целое} \ \& \ n = mk))$$

Переменной x_{10} присваивается список антецедентов, переменной x_{11} - заменяющая часть эквивалентности в консеквенте. Проверяется, что x_{11} - квантор

существования. Переменной x_{12} присваивается его связывающая приставка, переменной x_{13} - список конъюнктивных членов утверждения под квантором x_{11} . Переменной x_{14} присваивается элементарная заменяемая часть теоремы. В списке x_{13} выбирается утверждение x_{15} , параметры которого включают параметры утверждения x_{14} . В нашем примере - " $n = mk$ ". Проверяется, что x_{15} имеет единственный подтерм максимальной сложности, и переменной x_{17} присваивается его заголовок. В нашем примере - "умножение". Справочник поиска теорем "вычМн" находит по x_{17} протокол x_{18} вида "выч(A вход($x_1 \dots x_n$) выход($y_1 \dots y_m$) B)". Этот протокол означает, что существует процедура, перечисляющая значения выходных переменных y_1, \dots, y_m при заданных значениях входных переменных x_1, \dots, x_n , удовлетворяющие утверждению A . При этом B - список утверждений "тип(z, t)", уточняющих типы t константных значений входных и выходных переменных z . В нашем примере x_{18} имеет вид "выч(равно(x_1 умножение(x_2 x_3)) вход(x_1) выход(x_2 x_3) тип(x_1 целое) тип(x_2 целое) тип(x_3 целое))". Переменной x_{20} присваивается первый операнд протокола x_{18} , переменной x_{21} - список его параметров. Переменной x_{22} присваивается список всех операндов протокола x_{18} . В этом списке находится терм x_{23} с заголовком "вход" и терм x_{24} с заголовком "выход". Переменной x_{25} присваивается список параметров терма x_{23} , переменной x_{26} - список параметров терма x_{24} . Переменной x_{27} присваивается список содержащихся в x_{22} термов с заголовком "тип". Определяется подстановка S вместо переменных x_{21} , унифицирующая термы x_{15} и x_{20} .

Проверяется, что подстановка S подставляет вместо переменных x_{25} попарно различные переменные x_{29} , не входящие в список x_{12} . Проверяется также, что эта подстановка подставляет вместо переменных x_{26} попарно различные переменные x_{31} , отличные от переменных x_{29} . Переменной x_{32} присваивается объединение списка x_{10} со списком отличных от x_{15} утверждений x_{13} .

Просматриваются утверждения U списка x_{32} . Проверяется, что U имеет вид " $P(X)$ ", где P - название типа объектов, причем в списке x_{27} имеется терм "тип(Y, Q)", где Y - переменная, переводимая подстановкой S в X , а Q совпадает с P либо является названием подтипа типа P . Если хотя бы для одного утверждения из x_{32} это не выполнено, прием не применяется. Иначе выбирается переменная x_{33} списка x_{31} , не входящая в список x_{12} . В нашем примере - переменная m .

Выбирается переменная x_{34} , не входящая в исходную теорему. Переменной x_{35} присваивается результат замены в утверждении x_{14} переменной x_{33} на x_{34} . Переменной x_{36} присваивается утверждение "существует(x_{31} и(x_{15} равно(x_{34} x_3)))". В нашем примере - " $\exists_{mk}(n = mk \ \& \ a = m)$ ". Переменной x_{37} присваивается список результатов замены переменной x_{33} на x_{34} в содержащихся переменной x_{33} утверждениях списка x_{10} . Переменной x_{38} присваивается импликация с антецедентами x_{37} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{35} и x_{36} . Переменной x_{39} присваивается список утверждений набора x_{10} , содержащих переменные списка x_{29} , переменной x_{40} - терм "перечисление(x_{34} H второйтерм)", где H - конъюнкция утверждений x_{39} . В нашем примере x_{40} имеет вид "перечисление(a целое(n) второйтерм)". Затем импликация x_{38} регистрируется в списке вывода, снабженная единственной характеристикой x_{40} .

Использование дополнительной теоремы для преобразования заменяющей части

1. Попытка обращения в логическую константу квантора, входящего в заменяющую часть эквивалентности кванторной расшивки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{af}(f - \text{функция} \rightarrow \text{слой}(f, a) = \emptyset \leftrightarrow \neg(a \in \text{Val}(f)))$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(b - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \text{слой}(f, a) \subseteq b \leftrightarrow \forall_x(f(x) = a \ \& \ x \in \text{Dom}(f) \rightarrow x \in b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\neg(a \in \emptyset))$$

Переменной x_{10} присваивается входение заменяющей части эквивалентности. В ней выбирается входение x_{11} некоторого конъюнктивного члена, представляющего собой квантор. В нашем примере x_{11} совпадает с x_{10} . Если x_{11} - квантор общности, то либо выбирается входение x_{12} его антецедента, а переменной x_{13} присваивается 0, либо переменной x_{12} присваивается входение консеквента, а переменной x_{13} - 1. В случае квантора существования переменной x_{12} присваивается входения конъюнктивного члена под квантором существования, а переменной x_{13} - 0. В нашем примере x_{12} - входение консеквента $x \in b$, а x_{13} равно 1. Проверяется, что подтерм x_{12} является элементарным утверждением. Если заголовок x_{12} - символ "не", то переменной x_{14} присваивается входение первого операнда входения x_{12} , иначе x_{14} равно x_{12} . Переменной x_{15} присваивается символ по входению x_{14} . В нашем примере - символ "принадлежит". Проверяется, что x_{15} - логический символ, и справочник поиска теорем "пример" определяет по x_{15} указанную выше дополнительную теорему. В консеквенте дополнительной теоремы рассматривается входение x_{18} однобуквенного подтерма, представляющего собой некоторый логический символ x_{19} . В нашем примере - символ "пусто".

Выбирается переменная x_{20} , не входящая в дополнительную теорему. В нашем примере - переменная b . Переменной x_{21} присваивается консеквент дополнительной теоремы, в котором входение x_{18} заменено на переменную x_{20} . В нашем примере x_{21} имеет вид " $\neg(a \in b)$ ". Переменной x_{22} присваивается импликация, антецеденты которой суть антецеденты дополнительной теоремы и утверждение "равно(x_{20} x_{19})". Если утверждение x_{21} имеет вид "не(H)", то консеквентом импликации x_{22} служит утверждение "эквивалентно(H ложь)", иначе - утверждение "эквивалентно(x_{21} истина)". Если по входению x_{12} расположен символ "не", то переменной x_{23} присваивается входение первого операнда входения x_{12} , иначе - само входение x_{12} .

Оператор "тождвывод" определяет результат x_{24} преобразования входения x_{23} в исходную теорему при помощи теоремы x_{22} . Переменной x_{25} присваивается результат обработки теоремы x_{24} оператором "Нормтеорема", которому

разрешается использовать ранее выведенные в цикле вывода теоремы. Проверяется, что x25 - не константа "истина", причем либо вообще не имеет связанных переменных, либо является кванторной импликацией, консеквент которой не имеет связанных переменных. Затем x15 регистрируется в списке вывода.

2. Попытка использования упрощающей эквивалентности для фиксации связанной переменной квантора, входящего в заменяющую часть эквивалентности кванторной расшифровки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{be}(e - \text{число} \rightarrow \text{нижнягрань}(b, \{e\}) \leftrightarrow b - \text{число} \ \& \ b \leq e)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{нижнягрань}(b, a) \leftrightarrow b - \text{число} \ \& \ \forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a = b \leftrightarrow a \in \{b\})$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяющей части эквивалентности. В ней выбирается вхождение x11 некоторого конъюнктивного члена, представляющего собой квантор. В нашем примере x11 - вхождение квантора " $\forall_c(c \in a \rightarrow b \leq c)$ ". Если x11 - квантор общности, то выбирается вхождение x12 его антецедента. В случае квантора существования переменной x12 присваивается вхождение конъюнктивного члена под квантором существования. В нашем примере x12 - вхождение утверждения " $c \in a$ ". Проверяется, что x12 - вхождение элементарного утверждения. Переменной x14 присваивается заголовок утверждения x12. Справочник поиска теорем "упрощэкв" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x20 присваивается ее заменяющая часть. Проверяется, что она представляет собой равенство некоторой переменной не содержащему ее выражению. Оператор "тождвывод" определяет результат x24 преобразования вхождения x12 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Переменной x25 присваивается результат обработки теоремы x24 оператором "нормтеорема". Проверяется, что x25 - кванторная импликация, консеквент которой не имеет связанных переменных. Она регистрируется в списке вывода.

3. Попытка использовать транзитивность для получения эквивалентности кванторной свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abfy}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{убывает}(f, a) \ \& \ \text{наибольший}(y, a) \rightarrow \forall_x(x \in a \rightarrow b < f(x)) \leftrightarrow b < f(y))$$

из теоремы

$$\forall_{afg}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{убывает}(f, a) \leftrightarrow \forall_{xy}(x \in a \ \& \ y \in a \ \& \ 0 < y - x \rightarrow 0 < f(x) - f(y)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ a < b \ \& \ b < c \rightarrow a < c)$$

Переменной x10 присваивается аменяющая часть теоремы. Проверяется, что она является кванторной импликацией. Переменной x11 присваивается вхождение консеквента импликации x10. Проверяется, что этот консеквент имеет ровно два операнда. Переменной x12 присваивается его заголовок. В нашем примере - символ "меньше". Проверяется, что справочник поиска теорем "транзитоперанд" выдает по символу x12 хотя бы одну теорему. Переменной x13 присваивается консеквент импликации x10. Если утверждение x13 имеет в одной части логический символ, являющийся единицей корневой операции другой части, имеющей ровно два операнда, причем возможна перегруппировка одного из них в противоположную часть отношения, то такая перегруппировка делается. В нашем примере x13 приобретает вид " $f(y) < f(x)$ ".

Переменной x14 присваивается первый операнд отношения x13, переменной x15 - второй. В нашем примере x14 имеет вид " $f(y)$ ", x15 - вид " $f(x)$ ". Переменной x16 присваиваются параметры терма x14. В нашем примере - f, y . Находится подстановка S вместо переменных x16, переводящая терм x14 в x15. Проверяется, что она лишь переобозначает переменные, не отождествляя их. Проверяется, что подстановка S изменяет единственную переменную x20, переводя ее в переменную x21. В нашем примере x20 - y , x21 - x .

Переменной x22 присваивается связывающая приставка импликации x10. В нашем примере - x, y . Проверяется, что она содержит переменные x20, x21. Переменной x23 присваивается список antecedентов импликации x10. Переменной x24 присваивается подсписок списка x23, образованный утверждениями, содержащими x20 и не содержащими x21. Переменной x25 присваивается подсписок списка x23, образованный утверждениями, содержащими x21 и не содержащими x20. Переменной x26 присваивается конъюнкция утверждений x24. В нашем примере - " $y \in a$ ". Переменной x27 присваивается результат замены переменной x21 на x20 в конъюнкции утверждений x25. В нашем примере - " $y \in a$ ". Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" утверждений x26 и x27 совпадают.

Справочник поиска теорем "транзитоперанд" находит по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x28 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x28 имеет вид:

$$\forall_{bcd}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ b < c \ \& \ c < d \rightarrow b < d)$$

Переменной x33 присваивается список существенных antecedентов теоремы x28. Проверяется, что их число равно 2. В нашем примере x33 состоит из утверждений " $b < c$ " и " $c < d$ ". В списке x33 выбирается утверждение x34 с заголовком x12. Переменной x35 присваивается другой элемент списка x33. В нашем примере x34 - " $c < d$ ", x35 - " $b < c$ ". Переменной x36 присваивается консеквент теоремы x28. В нашем примере - " $b < d$ ". Переменной x37 присваивается заголовок утверждения x36. Проверяется, что x35 имеет тот же самый заголовок. Среди параметров утверждения x34 выбирается переменная x38, не входящая

в х36. В нашем примере - переменная c . Переменной х39 присваивается отличный от х38 параметр утверждения х34. В нашем примере - d . Переменной х40 присваивается параметр утверждения х35, не равный х38. В нашем примере - b . Переменной х41 присваивается результат удаления из списка х23 утверждений списков х24 и х25. Проверяется, что список х41 непуст. В нашем примере он состоит из утверждения " $0 < y - x$ ".

Рассматриваются два случая. В первом из них переменной х42 присваивается переменная х20, переменной х43 - утверждение х26, переменной х44 - утверждение "длялюбого(х21 если х25 то или(равно(х20 х21)и(х41)))". Во втором случае переменной х42 присваивается переменная х21, переменной х43 - конъюнкция утверждений х25, переменной х44 - утверждение "длялюбого(х20 если х24 то или(равно(х20 х21)и(х41)))". В нашем примере рассматривается первый случай, т.е. х42 - переменная y , х43 - утверждение " $y \in a$ ", х44 - утверждение " $\forall_x(x \in a \rightarrow y = x \vee 0 < y - x)$ ".

Переменной х45 присваивается список антецедентов исходной теоремы, переменной х46 - объединение списка х45 с конъюнктивными членами утверждения х43. Решается задача на преобразование с посылками х46 и условием х44. Цели задачи - "упростить" и "свертка". Ответ присваивается переменной х48. В нашем примере он имеет вид "наибольший(y, a)". Проверяется, что утверждение х48 не имеет связанных переменных.

Переменной х49 присваивается вхождение операнда консеквента х36 теоремы х28, равного х40, переменной х50 - вхождение равного х40 операнда утверждения х35. Проверяется, что номера этих операндов равны. В нашем случае оба операнда первые. Если переменная х39 - первый операнд утверждения х34, то проверяется, что х42 равно х21, иначе - что х42 равно х20.

Переменной х51 присваивается объединение списка х45, списка утверждений набора х32, имеющих единственный параметр х40, а также наборов конъюнктивных членов утверждений х43, х48 и заменяемого утверждения исходной теоремы. Если х42 равно х20, то переменной х52 присваивается переменная х21, иначе - переменная х20. Переменной х53 присваивается результат подстановки в утверждение х36 вместо переменной х39 выражения х15, если х42 равно х20, и выражения х14 в противном случае. Переменной х54 присваивается результат подстановки в утверждение х36 вместо переменной х39 выражения х14, если х42 равно х20, и выражения х15 в противном случае. Переменной х55 присваивается утверждение "эквивалентно(длялюбого(х52 если Q то х53)х54)", где Q - антецеденты импликации х44. Наконец, создается импликация с антецедентами х51 и консеквентом х55. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Попытка сильно упростить подвыражение под квантором существования заменяющей части и извлечь импликацию для проверочного оператора.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abA}(\text{Dom}(b) = A \ \& \ \{1, \dots, a\} = \text{Val}(b) \ \& \ b\text{-функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(b) \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow \text{перестановка}(\text{обрфункция}(b), A))$$

из теоремы

$$\forall_{fA}(A - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(A) \rightarrow \text{перестановка}(f, A) \leftrightarrow \exists_a(\text{Dom}(f) = \{1, \dots, a\} \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ 0 \leq a) \ \& \ A = \text{Val}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_f(f - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \rightarrow \text{Dom}(\text{обрфункция}(f)) = \text{Val}(f))$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяющей части эквивалентности в консеквенте. Переменной x11 присваивается вхождение конъюнктивного члена вхождения x10, представляющего собой квантор существования. Проверяется, что все остальные конъюнктивные члены заменяющей части суть элементарные утверждения. Переменной x12 присваивается связывающая приставка квантора x11. Внутри утверждения под квантором существования рассматривается вхождение x13 неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - вхождение подтерма "Dom(f)". Переменной x14 присваивается заголовок этого подтерма. Справочник поиска теорем "упрощстанд" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается заменяемая часть консеквента дополнительной теоремы. В нашем примере x19 имеет вид "Dom(обрфункция(f))". Проверяется, что все неоднобуквенные подтермы терма x19 неконстантные.

Оператор "тождвывод" определяет результат x20 преобразования вхождения x13 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Переменной x21 присваивается результат обработки теоремы x20 оператором "нормтеорема". В нашем примере x21 имеет вид:

$$\forall_{bA}(A - \text{set} \ \& \ b - \text{функция} \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(b) \ \& \ \text{конечное}(A) \rightarrow \text{перестановка}(\text{обрфункция}(b), A) \leftrightarrow \exists_a(\{1, \dots, a\} = \text{Val}(b) \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ 0 \leq a) \ \& \ \text{Dom}(b) = A)$$

Проверяется, что x21 - кванторная эквивалентность, у которой одна из частей элементарна, а вторая содержит квантор существования. Первая присваивается переменной x25, вторая - переменной x26. Переменной x27 присваивается объединение списка антецедентов теоремы x21 с набором конъюнктивных членов утверждения x26. Создается импликация с антецедентами x27 и консеквентом x25, которая обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "равны", блокирующей исключение равенств переменным в антецедентах. Результат присваивается переменной x28. Проверяется, что оценка сложности конъюнкции антецедентов теоремы x28 меньше оценки сложности ее консеквента. Затем теорема x28 регистрируется в списке вывода.

5. Перенесение конъюнктивных членов квантора существования в антецеденты и реализация самого сложного из них.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ce}(\neg(c = 0) \ \& \ e - \text{set} \ \& \ e \subseteq \mathbb{R} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \text{card}(e) = \text{card}(\text{set}_a(a/c \in e \ \& \ a - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \text{card}(a) = \text{card}(b) \leftrightarrow \exists_f(f - \text{функция} \ \& \text{Dom}(f) = a \ \& \ \text{Val}(f) = b \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{Aa}(A - \text{set} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ \neg(a = 0) \ \& \ A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{взаимнооднозначно}(\lambda_x(xa, x \in A)))$$

Переменной x10 присваивается список антецедентов, переменной x11 - заменяющий терм. Проверяется, что он представляет собой квантор существования. Переменной x12 присваивается заменяемый терм. Проверяется, что его оценка сложности меньше оценки сложности заменяющего. Переменной x13 присваивается список подтермов терма x11, имеющих максимальную сложность. В нашем примере это подтермы "Val(f)" и "взаимнооднозначно(f)". Переменной x14 присваивается список конъюнктивных членов заменяющего утверждения x11. Проверяется, что его пересечение со списком x13 одноэлементно, и x16 присваивается этот элемент. В нашем примере - утверждение "взаимнооднозначно(f)". Создается импликация x17, антецедентами которой служат антецеденты исходной теоремы и утверждения x14, а консеквентом - утверждение x12. Переменной x18 присваивается входение антецедента теоремы x17, равного x16.

Переменной x19 присваивается заголовок утверждения x16. В нашем примере - "взаимнооднозначно". Переменной x20 присваивается название раздела, к которому относится символ x19. В нашем примере - "функции". Просматриваются теоремы x24 раздела x20, консеквент которых имеет заголовок x19. В нашем примере x24 - указанная выше дополнительная теорема. Оператор "выводпосылки" определяет результат x25 последовательного применения теорем x17 и x24 при унификации антецедента x18 теоремы x17 с консеквентом теоремы x24. Переменной x26 присваивается результат обработки теоремы x25 оператором "нормтеорема". Проверяется, что он отличен от константы "истина", и среди его конъюнктивных членов выбирается теорема x27. В нашем примере x27 совпадает с x26. Проверяется, что либо x27 - константное утверждение, либо кванторная импликация с элементарными антецедентами. Затем x27 регистрируется в списке вывода.

6. Попытка варьирования консеквента заменяющей импликации и свертки этой импликации в утверждение, не имеющее квантора общности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(\neg(\emptyset \in \text{Val}(c)) \ \& \ \forall_f(f \in \text{Dom}(c) \rightarrow \text{огрснизу}(c(f))) \ \& \ c - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(c) \ \& \ \text{подмнож}(c, \mathbb{R}) \rightarrow \text{нижняягрань}(a, \bigcup(c)) \leftrightarrow \text{нижняягрань}(a, \text{set}_b(\exists_f(b = \text{inf}c(f) \ \& \ f \in \text{Dom}(c))))))$$

из теоремы

$$\forall_{be}(\bigcup(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{семействомножеств}(e) \rightarrow \text{нижняягрань}(b, \bigcup(e)) \leftrightarrow \forall_f(f \in \text{Dom}(e) \rightarrow \text{нижняягрань}(b, e(f))))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(\neg(c = \emptyset) \ \& \ c - \text{set} \ \& \ c \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{огрснизу}(c) \rightarrow b \leq \text{inf}(c) \leftrightarrow \text{нижняягрань}(b, c))$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяющей части эквивалентности в консеквенте теоремы. Проверяется, что x10 - квантор общности. Переменной x11 присваивается вхождение консеквента этого квантора, переменной x12 - сам этот консеквент. В нашем примере x12 имеет вид "нижняягрань(b, e(f))". Проверяется, что утверждение x12 элементарное. Проверяется, что x12 имеет единственный подтерм максимальной сложности, совпадающий с самим утверждением x12. Переменной x15 присваивается заменяемая часть исходной теоремы. В нашем примере - "нижняягрань(b, \bigcup(e))". Проверяется, что оценка сложности выражения x12 не меньше сложности оценки выражения x15.

Переменной x16 присваивается заголовок утверждения x12. В нашем примере - символ "нижняягрань". В разделе, к которому относится символ x16, находится теорема x20 с характеристикой "общнорм(...)", представляющей собой эквивалентность двух элементарных утверждений, одно из которых имеет заголовок x16. В нашем примере x20 - указанная выше дополнительная теорема. Оператор "тождвывод" определяет результат x25 преобразования вхождения x11 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Переменной x26 присваивается список antecedентов теоремы x25, переменной x28 - заменяющая часть консеквента теоремы x25. В нашем примере x28 имеет вид " $\forall_f(f \in \text{Dom}(\lambda_f(c(f), f \in \text{Dom}(c))) \rightarrow a \leq \text{inf}(f))$ ". Проверяется, что x28 содержит квантор общности.

Решается задача на описание x29 с посылками x26, имеющая единственное условие x28 и цели "полный", "прямойответ", "вспомописание", "редакция", "свертка". Ответ присваивается переменной x30. В нашем примере он имеет вид "нижняягрань(a, set_b(\exists_f(b = \text{inf}(f) \ \& \ f \in \text{Dom}(c))))". Проверяется, что x30 не содержит квантора общности. Создается импликация с теми же antecedентами, что у x25, консеквентом которой служит эквивалентность заменяемой части теоремы x25 и утверждения x30. Она обрабатывается операторами "нормтеорема" и "сокращаент", после чего регистрируется в списке вывода.

7. Попытка варьирования связанной переменной и обратной свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefh}(\neg(h = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d, e, f)) \leftrightarrow \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (ah, bh, ch)))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdef} (a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d, e, f)) \leftrightarrow \exists_{uv} (u - \text{число} \ \& \ v - \text{число} \ \& \ \neg(u^2 + v^2 = 0) \ \& \ au + dv = 0 \ \& \ bu + ev = 0 \ \& \ cu + fv = 0))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc} (a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a(bc) = (ab)c)$$

Переменной x_{10} присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_{11} - заменяющий терм. Проверяется, что x_{11} представляет собой квантор существования. Переменной x_{12} присваивается связывающая приставка квантора x_{11} , переменной x_{13} - список конъюнктивных членов утверждения под квантором x_{11} . Проверяется, что заменяемое утверждение x_{14} исходной теоремы элементарно. В списке x_{12} выбирается переменная x_{15} . В нашем примере - переменная u . Переменной x_{16} присваивается список параметров утверждения x_{11} . В нашем примере - a, b, c, d, e, f . Проверяется, что каждое утверждение списка x_{13} , содержащее переменную x_{15} , имеет ровно одно вхождение этой переменной. Переменной x_{17} присваивается список утверждений набора x_{13} , содержащих переменную x_{15} и хотя бы одну переменную списка x_{16} . В нашем примере x_{17} состоит из утверждений " $au + dv = 0$ ", " $bu + ev = 0$ ", " $cu + fv = 0$ ". Проверяется, что список x_{17} непуст.

Переменной x_{18} присваивается первый элемент списка x_{17} , переменной x_{19} - вхождение переменной x_{15} в утверждение x_{18} . Переменной x_{20} присваивается вхождение, непосредственным операндом которого служит x_{19} . В нашем примере - вхождение выражения au . Проверяется, что x_{20} имеет ровно два операнда, и переменной x_{22} присваивается вхождение операнда, отличное от x_{19} . Переменной x_{23} присваивается сам этот операнд. В нашем примере - переменная a . Проверяется, что x_{23} - переменная. Переменной x_{24} присваивается символ по вхождению x_{20} . В нашем примере - символ "умножение". Переменной x_{25} присваивается номер операнда x_{19} вхождения x_{20} , если x_{24} некоммутативно, иначе присваивается 1. В нашем примере x_{25} равно 1. Проверяется, что в каждом утверждении набора x_{17} переменная x_{15} является операндом операции x_{24} , причем другой операнд - некоторая переменная, и номер его, определяемый так же, как был определен номер x_{25} , совпадает с x_{25} . Переменной x_{26} присваивается список переменных - отличных от x_{15} операндов указанных операций x_{24} . В нашем примере x_{26} имеет вид " a, b, c ". Проверяется, что каждая переменная списка x_{26} входит в терм x_{11} однократно.

Справочник поиска теорем "вартеор" определяет по x_{24} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она не имеет существенных антецедентов. Переменной x_{29} присваивается результат переобозначения в дополнительной теореме переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{29} имеет вид:

$$\forall_{ghi}(g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \rightarrow g(hi) = (gh)i)$$

Переменной x_{31} присваивается вхождение той части равенства в консеквенте теоремы x_{29} , которая имеет заголовок x_{24} , переменной x_{32} - заголовок противоположной части. В нашем примере x_{31} - вхождение выражения $g(hi)$, x_{32} - выражения $(gh)i$. Переменной x_{33} присваивается вхождение того операнда вхождения x_{31} , которая представляет собой некоторую переменную x_{35} , переменной x_{34} - вхождение другого операнда. В нашем примере x_{35} - переменная g . Проверяется, что по вхождению x_{32} тоже расположен символ x_{24} . Переменной x_{36} присваивается вхождение того операнда x_{38} вхождения x_{32} , который содержит переменную x_{35} , переменной x_{37} - вхождение другого операнда. В нашем примере x_{38} имеет вид " gh ". Если x_{24} некоммутативно, то проверяется,

что номер операнда x_{33} вхождения x_{31} равен номеру операнда x_{36} вхождения x_{32} . Переменной x_{39} присваивается символ по вхождению x_{37} . В нашем примере - символ i . Проверяется, что x_{39} - переменная. Переменной x_{40} присваивается подтерм по вхождению x_{34} . В нашем примере - hi . Проверяется, что x_{40} содержит переменную x_{39} .

Переменной x_{41} присваивается список параметров терма x_{40} , отличных от переменной x_{39} . В нашем примере он состоит из переменной h . Переменной x_{42} присваивается набор результатов подстановки переменных x_{15} и x_{23} вместо x_{35} и x_{39} в antecedentes теоремы x_{29} . Этот набор разбивается на поднабор x_{43} утверждений, содержащих хотя бы одну из переменных x_{15} и x_{23} , и поднабор остальных утверждений. В нашем примере x_{43} состоит из утверждений " u - число", " a - число", x_{44} - из утверждения " h - число", Проверяется, что x_{43} включается в объединение списков x_{10} и x_{13} . Переменной x_{45} присваивается разность списков x_{13} и x_{17} . В этой разности выбирается утверждение x_{46} вида $Q(x_{15})$, где Q - название типа объектов. Переменной x_{48} присваивается объединение списков x_{10} и x_{44} , к которому добавляет утверждения x_{46} . Переменной x_{49} присваивается пара утверждений "равно(x_{38} x_{15})". " $Q(x_{35})$ ".

Решается задача на описание с посылками x_{48} и условиями x_{49} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "упростить", "неизвестные x_{35} ", "параметры x_{35} ". В нашем примере x_{48} состоит из утверждений " a - число", " b - число", " c - число", " d - число", " e - число", " f - число", " h - число", " e - число". Список x_{49} состоит из утверждений " $gh = u$ ", " g - число". Неизвестная - g .

Ответ задачи присваивается переменной x_{51} . В нашем примере он имеет вид " $\neg(h = 0) \vee h = 0 \ \& \ u = 0$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x_{52} присваивается такой дизъюнктивный член результата приведения утверждения x_{51} к виду д.н.ф., параметры которого содержатся в списке x_{41} . В нашем примере x_{52} - утверждение " $\neg(h = 0)$ ". Список x_{45} разбивается на подсписок x_{53} утверждений, содержащих x_{15} , и подсписок x_{54} остальных утверждений. Переменной x_{55} присваивается объединение списков x_{10} и x_{54} , к которому добавляются утверждения x_{46} и x_{52} .

Просматриваются отличные от x_{46} утверждения списка x_{53} . Определяются результаты подстановки переменной x_{15} вместо x_{35} в эти утверждения и в утверждение x_{38} . Проверяется, что в каждом случае удастся усмотреть эквивалентность данных результатов подстановки относительно посылок x_{55} .

Переменной x_{56} присваивается список результатов замены переменной x_{39} на различные переменные списка x_{26} в выражении x_{40} . В нашем примере - список " ha, hb, hc ". Переменной x_{57} присваивается результат подстановки выражений x_{56} вместо переменных x_{26} в утверждение x_{14} , переменной x_{58} - эквивалентность утверждения x_{14} и x_{57} . Затем создается импликация, antecedентами которой служат утверждения x_{10} и утверждение x_{52} , а консеквентом - утверждение x_{58} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

8. Попытка вывести эквивалентность для дизъюнктивной развертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cfij}(\text{Dom}(c) = \{1, \dots, j\} \ \& \ \text{Dom}(g) = \{1, \dots, j\} \ \& \ c\text{-функция} \ \& \ g\text{-функция} \ \& \ i\text{-натуральное} \ \& \ j\text{-натуральное} \rightarrow f \in \{; \lambda_h(g(h), h \in \{1, \dots, i\})\} \times \{; \lambda_e(c(e), e \in \{1, \dots, j\})\} \leftrightarrow \exists_{eh}(f = (g(h), c(e)) \ \& \ e \in \{1, \dots, j\} \ \& \ h \in \{1, \dots, i\}))$$

из теоремы

$$\forall_{bfgi}(\text{Dom}(g) = \{1, \dots, i\} \ \& \ b\text{-set} \ \& \ g\text{-функция} \ \& \ i\text{-натуральное} \rightarrow f \in \{; \lambda_h(g(h), h \in \{1, \dots, i\})\} \times b \leftrightarrow \exists dh(f = (g(h), d) \ \& \ d \in b \ \& \ h \in \{1, \dots, i\}))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{adf}(d\text{-функция} \ \& \ \text{Dom}(d) = \{1, \dots, f\} \ \& \ f\text{-натуральное} \rightarrow a \in \{; \lambda_e(d(e), e \in \{1, \dots, f\})\} \leftrightarrow \exists_e(e \in \{1, \dots, f\} \ \& \ a = d(e)))$$

Переменной x9 присваивается входение того операнда эквивалентности в консеквенте теоремы, который представляет собой квантор существования. Переменной x10 присваивается связывающая приставка этого квантора. Переменной x11 присваивается входение конъюнктивного члена утверждения подквантором x9, заголовок которого отличен от символа "не" и который не имеет вид принадлежности конечному отрезку целых чисел. Переменной x12 присваивается подтерм по входению x11. В нашем примере - " $d \in b$ ". Проверяется, что x12 - элементарное утверждение. Переменной x13 присваивается его заголовок. В нашем примере - символ "принадлежит". Справочник поиска теорем "развтеор" определяет по x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается входение той части эквивалентности в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок "существует". Оператор "тождвывод" определяет результат x19 преобразования входения x11 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этому оператору передаются опция (фикс x10), указывающая список x10 переменных, вместо которых подстановка на выполняется. Теорема x19 обрабатывается оператором "Нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Попытка вывода из подкванторных утверждений квантора существования следствий, не зависящих от переменных связывающей приставки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C \in \text{прямая}(AB)) \ \& \ D \in \text{фигура}(ABC) \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ D\text{-точка} \rightarrow \text{однасторона}(C, D, \text{прямая}(AB)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C \in \text{прямая}(AB)) \rightarrow D \in \text{фигура}(ABC) \leftrightarrow \exists_E(E \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ D \in \text{отрезок}(CE)))$$

Переменной x10 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x11 - заменяющее утверждение. Проверяется, что оно представляет собой квантор

существования. Переменной x_{12} присваивается связывающая приставка данного квантора, переменной x_{13} - список конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Проверяется, что заменяемое утверждение теоремы элементарно. Переменной x_{14} присваивается объединение списков x_{10} и x_{13} . Решается задача на исследование x_{15} , посылками которой служат утверждения x_{14} . Цели задачи - "теорвывод", "исключ x_{12} ". После решения в списке посылок задачи x_{15} выбирается утверждение x_{17} , не имеющее заголовка "актив", не содержащее переменных x_{12} и не входящее в список x_{14} . В нашем примере - утверждение "однасторона(C, D , прямая(AB))". Переменной x_{18} присваивается объединение списка x_{10} , списка сопровождающих по о.д.з. утверждений для терма x_{17} , а также заменяемой части теоремы.

Если утверждение x_{17} содержит переменные, отсутствовавшие в утверждениях набора x_{14} , то для каждой такой переменной X из комментария (исходныепосылки $X Q$) к посылкам задачи x_{15} извлекается конъюнкция Q тех утверждений, которые определяли исходные условия на переменную X , введенную в процессе решения задачи x_{15} . К списку x_{18} добавляются все конъюнктивные члены таких утверждений Q . В нашем примере список x_{18} не изменяется.

Создается импликация с антецедентами x_{18} и консеквентом x_{17} . Она обрабатывается операторами "полныепосылки" и "нормтеорема", после чего регистрируется в списке вывода.

2. Попытка усмотрения однозначности восстановления переменных кванторной приставки приставки по части конъюнктивных членов подкванторного утверждения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ E \in \text{прямая}(CD) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \rightarrow \text{прямая}(AE) \perp \text{прямая}(CD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \rightarrow \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \leftrightarrow \exists_E(E - \text{точка} \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{прямая}(AE) \perp \text{прямая}(CD)))$$

Переменной x_{10} присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_{11} - заменяющее утверждение. Проверяется, что оно представляет собой квантор существования. Переменной x_{12} присваивается связывающая приставка данного квантора, переменной x_{13} - список конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Переменной x_{14} присваивается список утверждений, сопровождающих по о.д.з. для утверждения под квантором x_{11} . В списке x_{13} выбирается утверждение x_{15} , не входящее в список x_{14} . В нашем примере - "прямая(AE) \perp прямая(CD)". Переменной x_{16} присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему и имеющих такую же длину, как список x_{12} . В нашем примере x_{16} состоит из единственной переменной a . Переменной x_{17} присваивается список отличных от x_{15} утверждений набора x_{13} . Переменной x_{18} присваивается список результатов замены переменных x_{12} на x_{16} в

утверждениях набора x17. Переменной x19 присваивается результат добавления к объединению списков x10, x13 и x18 дизъюнкции отрицаний равенств переменных списка x16 соответствующим переменным списка x12.

Решается задача на исследование x20 с посылками x19 и единственной целью "противоречие". Проверяется, что после решения в ее списке посылок имеется константа "ложь". Переменной x22 присваивается результат добавления к объединению списков x10 и x17 заменяемой части теоремы. Создается импликация с антецедентами x22 и консеквентом x15. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Попытка усмотрения однозначности определения переменной под квантором существования по дополнительным условиям: вывод импликации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \& \neg(C = D) \& \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD)) \& E \in \text{прямая}(AB) \& E \in \text{прямая}(CD) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \text{разныестороны}(A, B, \text{прямая}(CD)) \rightarrow E \in \text{отрезок}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \neg(C = D) \rightarrow \text{разныестороны}(A, B, \text{прямая}(CD)) \leftrightarrow \exists_E(E - \text{точка} \& E \in \text{отрезок}(AB) \& E \in \text{прямая}(CD)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \neg(C = D) \& \neg(A = B) \& E - \text{точка} \& F - \text{точка} \& E \in \text{прямая}(AB) \& F \in \text{прямая}(AB) \& E \in \text{прямая}(CD) \& F \in \text{прямая}(CD) \& \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD)) \rightarrow E = F)$$

Переменной x10 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x11 - заменяющее утверждение. Проверяется, что оно представляет собой квантор существования. Переменной x12 присваивается связывающая приставка данного квантора, переменной x13 - список конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Проверяется, что список x12 одноэлементный, и переменной x14 присваивается его элемент. В нашем примере - переменная E . Переменной x15 присваивается объединение списков x10 и x13. Решается задача на исследование с посылками x15, имеющая цели "идент" и "неизвестные x14". После решения в списке посылок этой задачи находится утверждение вида " $Q(x14)$ ", где Q - название типа объектов. В нашем примере - символ "точка". По символу Q справочник поиска теорем "равно" определяет указанную выше дополнительную теорему. Переменной x22 присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Переменной x24 присваивается переменная - левая часть равенства в консеквенте дополнительной теоремы, переменной x25 - переменная в правой части. В нашем примере x24 - переменная E , x25 - переменная F . Переменной x26 присваивается список всех утверждений набора x22, содержащих переменную x24. Переменной x27 присваивается список параметров утверждений x26. В нашем примере - A, B, C, D, E . Проверяется, что список переменных дополнительной теоремы включается в объединение списка x27 с переменной x25.

Процедура "подбор" определяет подстановку S вместо переменных x_{27} , переводящую утверждения x_{26} в некоторые посылки x_{29} задачи x_{16} . Переменной x_{30} присваивается список всех утверждений набора x_{22} , не содержащих переменных x_{24} и x_{25} . Переменной x_{31} присваивается разность списков x_{13} и x_{29} . В нашем примере она состоит из единственного утверждения " $E \in \text{отрезок}(AB)$ ". Проверяется, что список x_{31} непуст. Переменной x_{32} присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям набора x_{30} . Проверяется, что задача x_{16} не имеет таких комментариев (новпосылка R), что утверждение R не содержится в списке x_{32} . Напомним, что такие комментарии вводятся, если в процессе решения задачи добавлялись посылки R , не являющиеся следствиями исходных посылок. В нашем примере таких посылок не было.

Переменной x_{33} присваивается объединение списков x_{10} , x_{29} , x_{32} , к которому добавляется заменяемая часть исходной теоремы. Создается импликация с антецедентами x_{33} , консеквентом которой служит конъюнкция утверждений x_{31} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на описание для вывода следствий теоремы

1. Попытка получения явного параметрического описания для параметров одного из операндов определяемого двуместного отношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{mn}(\neg(n = 0) \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ m - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(\neg(k = 0) \ \& \ m = n/k \ \& \ k - \text{целое}))$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow m|n \leftrightarrow \exists_k(k - \text{целое} \ \& \ n = mk))$$

Проверяется, что теорема имеет характеристику "определение(...)", а текущая характеристика имеет вид "развертка(существует ...)". Переменной x_{10} присваивается заменяемое утверждение, x_{11} - набор его корневых операндов. Проверяется, что набор x_{11} двухэлементный, причем параметры первого операнда не пересекаются с параметрами второго. В списке x_{11} выбирается выражение x_{12} . В нашем примере - m . Переменной x_{13} присваивается список параметров терма x_{12} . Проверяется, что он непуст. Переменной x_{14} присваивается заменяющая часть теоремы - квантор существования. Переменной x_{15} присваивается связывающая приставка этого квантора, переменной x_{16} - список конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Проверяется, что в этом списке имеется равенство. Переменной x_{17} присваивается список антецедентов исходной теоремы.

Решается задача на описание x_{18} с посылками x_{17} и условиями x_{16} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{13} ", "упростить". Ответ присваивается переменной x_{19} . В нашем примере он имеет вид " $\neg(k = 0) \ \& \ m = n/k \ \& \ k - \text{целое} \ \vee \ k = 0 \ \& \ n = 0$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{20} присваивается результат преобразования утверждения x_{19} к виду д.н.ф. и последующей обработки оператором "нормлог". В

нашем примере x_{20} совпадает с x_{19} . Переменной x_{21} присваивается список дизъюнктивных членов утверждения x_{20} . В этом списке выбирается утверждение x_{22} , и переменной x_{23} присваивается список конъюнктивных членов данного утверждения. Проверяется, что для любой переменной списка x_{13} в наборе x_{23} имеется равенство с этой переменной в левой части.

Просматриваются списки конъюнктивных членов отличных от x_{22} элементов набора x_{21} . Для каждого такого списка формируется отрицание конъюнкции его элементов, параметры которых не пересекаются ни с x_{15} , ни с x_{13} . Все эти отрицания объединяются в список x_{24} . В нашем примере список x_{24} одноэлементный и состоит из утверждения " $\neg(n = 0)$ ". Переменной x_{25} присваивается результат обработки оператором "нормлог" конъюнкции утверждений x_{24} . В нашем примере он совпадает с элементом списка x_{24} . Проверяется, что x_{25} отлично от константы "ложь". Переменной x_{26} присваивается утверждение "существует(x_{15} x_{22})", переменной x_{27} - результат добавления к списку x_{17} утверждения x_{25} . Переменной x_{28} присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка x_{27} относительно параметров терма x_{10} . Переменной x_{30} присваивается результат обработки утверждения x_{26} относительно посылок x_{28} задачей на преобразование, имеющей цели "упростить" и "теорема". Затем создается импликация с антецедентами x_{28} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{10} и x_{30} . Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка вывести условие равенства двух объектов из кванторной эквивалентности с кванторной эквивалентностью в консеквенте.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bce f}(\{b, f\} = \{c, e\} \leftrightarrow b = c \ \& \ e = f \ \vee \ b = e \ \& \ c = f)$$

из теоремы

$$\forall_{bdf}(d - \text{set} \rightarrow d = \{b, f\} \leftrightarrow \forall_a(a = b \ \vee \ a = f \leftrightarrow a \in d))$$

Проверяется, что текущая характеристика имеет вид "развертка(длялюбого...)". Переменной x_{10} присваивается вхождение заменяемой части эквивалентности в консеквенте теоремы. Проверяется, что эта часть - равенство с переменной x_{13} в одной части и не содержащим этой переменной выражением x_{14} в другой части. Переменной x_{15} присваивается список параметров выражения x_{14} . В нашем примере x_{13} - d , x_{14} - $\{b, f\}$, x_{15} - список b, f . Проверяется, что список x_{15} не более чем двухэлементный.

Переменной x_{16} присваивается вхождение заменяющей части теоремы - некоторого квантора общности. Проверяется, что консеквентом данного квантора служит некоторая эквивалентность, причем переменной x_{18} присваивается список ее операндов. В этом списке выбирается утверждение x_{19} , содержащее переменную x_{13} , причем проверяется, что эта переменная имеет единственное вхождение в x_{19} . В нашем примере x_{17} имеет вид " $a = b \ \vee \ a = f \leftrightarrow a \in d$ ", x_{19} - вид " $a \in d$ ". Проверяется, что утверждение x_{19} не имеет переменных списка x_{15} . Переменной x_{21} присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему, длина которого равна длине списка x_{15} . В нашем примере -

переменные s, e . Переменной x_{22} присваивается элемент списка x_{18} , отличный от x_{19} . В нашем примере - " $a = b \vee a = f$ ". Переменной x_{23} присваивается результат подстановки переменных x_{21} вместо x_{15} в утверждение x_{22} . Переменной x_{24} присваивается пара утверждений "длялюбого(X если $x_{20} \ x_{22}$ то x_{23})", "длялюбого(X если $x_{20} \ x_{23}$ то x_{22})", где X - связывающая приставка импликации x_{16} .

Переменной x_{25} присваивается список антецедентов исходной теоремы, переменной x_{26} - список результата замены переменных x_{15} на x_{21} в утверждениях списка x_{25} . Переменной x_{27} присваивается объединение списков x_{25} и x_{26} . Решается задача на описание x_{28} с посылками x_{27} и условиями x_{24} . Цели задачи - "полный", "прямойответ", "попыткаспуска", "упростить", "неизвестные Y ", где Y - параметры утверждений x_{24} . Ответ присваивается переменной x_{29} . В нашем примере он имеет вид " $b = c \ \& \ e = f \ \vee \ e = b \ \& \ f = c$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и не содержит связанных переменных. Переменной x_{30} присваивается результат замены переменных x_{15} на x_{21} в выражении x_{14} . Переменной x_{31} присваивается эквивалентность равенства выражений x_{14} и x_{30} утверждению x_{29} . Создается импликация с антецедентами x_{27} и консеквентом x_{31} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на доказательство для вывода следствий теоремы

1. Извлечение эквивалентности с одним из членов подкванторного утверждения после доказательства однозначной определенности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ E \in \text{прямая}(CD) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \leftrightarrow \text{прямая}(AE) \perp \text{прямая}(CD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \rightarrow \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \leftrightarrow \exists_E(E - \text{точка} \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{прямая}(AE) \perp \text{прямая}(CD)))$$

Переменной x_{10} присваивается список антецедентов, переменной x_{11} - заменяющая часть эквивалентности в консеквенте теоремы. Проверяется, что она представляет собой квантор существования. Переменной x_{12} присваивается связывающая приставка квантора x_{11} , переменной x_{13} - список конъюнктивных членов утверждения под квантором. Проверяется, что заменяемая часть x_{14} консеквента теоремы элементарна. Проверяется, что связывающая приставка x_{12} одноэлементна, и переменной x_{15} присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная E .

Переменной x_{16} присваивается элемент списка x_{13} , имеющий не менее трех параметров. В нашем примере - " $\text{прямая}(AE) \perp \text{прямая}(CD)$ ". Переменной x_{17} присваивается набор отличных от x_{16} элементов списка x_{13} . Проверяется, что в нем не менее двух элементов, причем длина хотя бы одного из этих элементов

не менее 3. Выбирается переменная x18, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x19 присваивается список результатов замены переменной x15 на x18 в утверждениях набора x17. Переменной x20 присваивается объединение списков x10, x13 и x19. При помощи задачи на доказательство проверяется, что равенство переменных x15 и x18 - следствие утверждений x20.

Переменной x22 присваивается объединение списков x10, x17 и утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. конъюнкции утверждений x17. Создается импликация с антецедентами x22, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x14 и x16. Она обрабатывается оператором "норм-теорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование теоремы для варьирования дополнительной теоремы

1. Использование теоремы для варьирования антецедента дополнительной теоремы и исключения параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcB}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(c = B) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(ab) - \text{касательная к окружность}(cB) \rightarrow 0 \leq -l(cB) + l(ac))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \rightarrow \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \leftrightarrow \exists_E(E - \text{точка} \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{прямая}(AE) \perp \text{прямая}(CD)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \rightarrow 0 \leq l(AC) - l(CD))$$

Переменной x10 присваивается вхождение заменяющей части. Проверяется, что она представляет собой квантор существования. Проверяется, что связывающая приставка квантора x10 одноэлементная, и переменной x12 присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная E . Переменной x14 присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. Переменной x15 присваивается список всех утверждений набора x14, в которых переменная x14 встречается как корневой операнд некоторого выражения. Проверяется, что список x15 одноэлементный, и переменной x16 присваивается его элемент. В нашем примере x16 имеет вид " $\text{прямая}(AE) \perp \text{прямая}(CD)$ ". Проверяется, что имеющий максимальную сложность подтерм терма x16 единственный и совпадает с термом x16.

Переменной x18 присваивается заголовок утверждения x16. В нашем примере - символ "перпендикулярно". Определяется раздел x19, к которому относится символ x18. В нашем примере - "геометрия". В этом разделе находится теорема x23 с элементарным консеквентом, имеющая характеристику "числоценка" либо "числовойатом". Эта теорема должна иметь единственный антецедент с

заголовком x_{18} и не иметь антецедентов с заголовком "равно". В нашем примере x_{23} - указанная выше дополнительная теорема.

Переменной x_{24} присваивается список параметров утверждения x_{16} . Проверяется, что антецедент дополнительной теоремы, имеющий заголовок x_{18} , содержит все переменные этой теоремы, причем существует переобозначение без отождествлений переменных x_{24} , переводящее утверждение x_{16} в данный антецедент. Переменной x_{25} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{25} имеет вид:

$$\forall_{abcd}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \neg(c = d) \ \& \\ \neg(a = b) \ \& \ \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(cd) \ \& \ d \in \text{прямая}(ab) \rightarrow 0 \leq l(ac) - l(cd))$$

Переменной x_{26} присваивается вхождение антецедента теоремы x_{25} , имеющего заголовок x_{18} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{24} , переводящая утверждение x_{16} в этот антецедент. Переменной x_{29} присваивается переменная, в которую подстановка S переводит переменную x_{12} . В нашем примере - переменная d . Переменной x_{30} присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы, переменной x_{31} - список результатов применения этой же подстановки к отличным от x_{16} утверждениям списка x_{14} . Переменной x_{32} присваивается список утверждений набора x_{31} , параметры которых включаются в параметры антецедента x_{26} . В нашем примере он состоит из утверждений " d - точка" и " $d \in \text{прямая}(ab)$ ".

Переменной x_{33} присваивается список антецедентов теоремы x_{25} . Проверяется, что он включает список x_{32} . Переменной x_{34} присваивается объединение списков x_{30} и x_{31} . Определяются поднабор x_{35} набора x_{33} , образованный всеми содержащими переменную x_{29} утверждениями, и остаток x_{36} набора x_{33} . При помощи вспомогательных задач на доказательство проверяется, что каждое утверждение списка x_{35} , не входящее в список x_{32} и отличное от антецедента x_{26} , является следствием утверждений x_{34} .

Переменной x_{37} присваивается объединение списков x_{34} и x_{33} , переменной x_{38} - консеквент теоремы x_{25} . Переменной x_{39} присваивается список содержащих переменную x_{29} числовых атомов утверждения x_{38} . В нашем примере - единственный атом " $l(cd)$ ". Проверяется, что список x_{39} непуст. Проверяется, что каждое вхождение переменной x_{29} в утверждение x_{38} является корневым операндом некоторого числового атома списка x_{39} .

Переменной x_{40} присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему и теорему x_{25} , длина которого равна длине списка x_{39} . Переменной x_{41} присваивается список равенств переменных набора x_{40} соответствующим выражениям набора x_{39} . Переменной x_{42} присваивается объединение списков x_{37} , x_{41} и списка утверждений "число(X)" для всех переменных X набора x_{40} .

Решается задача на исследование x_{43} с посылками x_{42} и целями "известно", "исключ x_{29} ", "неизвестные Y ", где Y - все параметры посылок.

По окончании решения задачи x_{43} предпринимается просмотр переменных X списка x_{40} . Для каждой такой переменной среди посылок задач x_{43} находятся

равенства с переменной X в одной части и не содержащей переменной x 29 противоположной частью. Среди этих противоположных частей находится кратчайшее выражение T , определяется соответствующее переменной X списка x 40 выражение P списка x 39, и формируется пара (P, T) . Из указанных пар составляется набор x 45. Если хотя бы для одной переменной списка x 40 пары создать не удалось, применение приема отменяется.

В нашем примере x 45 состоит из единственной пары $(l(cd), l(cB))$. После заполнения списка x 45 находится результат x 46 замены всех вхождений в утверждение x 38 первых элементов пар набора x 45 на вторые элементы. Переменной x 47 присваивается результат применения подстановки S к заменяемой части исходной теоремы. Переменной x 48 присваивается объединение списков x 30 и x 36, к которому добавляется утверждение x 47. Затем создается импликация с антецедентами x 48 и консеквентом x 46. Она обрабатывается оператором "норм-теорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка индуктивного обобщения дополнительной теоремы с помощью обобщенной дистрибутивности для операции над семействами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdx} A(\neg(x = \emptyset) \ \& \ d - \text{set} \ \& \ x - \text{set} \ \& \ d \subseteq x \ \& \ x \subseteq \text{Dom}(A) \ \& \\ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(c) \ \& \ A - \text{функция} \ \& \ \text{конечное}(x) \ \& \ \text{верпространство}(c) \ \& \\ \text{незавсобытия}(A, c) \rightarrow \text{вероятность}(\bigcap_{y, y \in x} (\text{элементы}(c) \setminus A(y) \text{ при } y \in d, \\ \text{иначе } A(y)), c) = \prod_{y, \neg(y \in d), y \in x} \text{вероятность}(A(y), c) \times \\ \prod_{y, y \in d} (1 - \text{вероятность}(A(y), c)))$$

из теоремы

$$\forall_{AC} (A - \text{функция} \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \\ \text{незавсобытия}(A, C) \leftrightarrow \forall_x (x \subseteq \text{Dom}(A) \ \& \ x - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(x) \ \& \\ \neg(x = \emptyset) \rightarrow \text{вероятность}(\bigcap_{y, y \in x} A(y), C) = \prod_{y, y \in x} \text{вероятность}(A(y), C))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc} (a - \text{set} \ \& \ a \in \text{события}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}((b, a), c) \ \& \ b - \text{set} \ \& \ b \in \text{события}(c) \\ \ \& \ \text{верпространство}(c) \rightarrow \text{вероятность}(a \cap (\text{элементы}(c) \setminus b), c) = \\ \text{вероятность}(\text{элементы}(c) \setminus b, c) \text{вероятность}(a, c))$$

Проверяется наличие у теоремы характеристики "определение(...)". Переменной x 10 присваивается вхождение заменяющей части эквивалентности. Проверяется, что эта часть - квантор общности, и переменной x 11 присваивается вхождение консеквента квантора x 10. Проверяется, что x 11 - равенство. Переменной x 12 присваивается список антецедентов импликации x 10. Проверяется, что связывающая приставка квантора x 10 одноэлементна, и переменной x 14 присваивается этот элемент. В списке x 12 находится утверждение x 15 вида "содержится(x 14 область(x 16))", где x 16 - некоторая переменная. В нашем примере x 14 - переменная x , x 16 - переменная A . В списке x 12 находится утверждение x 17 вида "конечное(x 14)". Переменной x 18 присваивается результат удаления из списка x 12 утверждений x 15, x 17 и "множество(x 14)". Проверяется, что x 18 либо пусто, либо состоит из единственного утверждения "не(равно(x 14 пусто))".

Переменной x19 присваивается заменяемая часть исходной теоремы. Проверяется, что ее параметры содержат все переменные корневой кванторной приставки исходной теоремы. Переменной x20 присваивается вхождение одного операнда равенства x11, переменной x21 - вхождение другого операнда. Проверяется, что операнд x20 неоднобуквенный, и заголовок его присваивается переменной x22. В нашем примере x20 имеет вид:

вероятность($\bigcap_{y,y \in x} A(y), C$)

Переменной x23 присваивается вхождение неоднобуквенного операнда вхождения x20, переменной x24 - его заголовок. В нашем примере x23 - вхождение первого операнда, x24 - символ "пересечениевсех". Справочник "развертка" усматривает, что x24 - символ операции над конечным семейством, порожденной двуместной ассоциативной и коммутативной операцией x25. В нашем примере x25 - символ "пересечение".

Проверяется, что операндом x26 вхождения x23 служит описатель "отображение". Проверяется, что связывающая приставка этого описателя однобуквенная, и переменной x28 присваивается ее элемент. Переменной x29 присваивается вхождение последнего операнда описателя (он определяет значение функции). В нашем примере этот операнд имеет вид " $A(y)$ ". Проверяется, что x29 имеет вид "значение(x16 x28)". Переменной x30 присваивается вхождение предпоследнего операнда описателя x26 (он указывает условия на варьируемую переменную). Проверяется, что x30 - вхождение термина "принадлежит(x28 x14)".

Переменной x31 присваивается символ по вхождению x21. В нашем примере - символ "произведенийвсех". Справочник "развертка" усматривает, что x31 - символ операции над конечным семейством, порожденной двуместной ассоциативной и коммутативной операцией x32. В нашем примере x32 - символ "умножение". Проверяется, что операндом x33 вхождения x21 служит описатель "отображение". Проверяется, что связывающая приставка этого описателя однобуквенная, и переменной x35 присваивается ее элемент. Переменной x36 присваивается вхождение предпоследнего операнда описателя x33 (он указывает условия на варьируемую переменную). Проверяется, что x36 - вхождение термина "принадлежит(x35 x14)". Переменной x37 присваивается вхождение последнего операнда описателя x33 (он определяет значение функции). В нашем примере этот операнд имеет вид "вероятность($A(y), C$)". Проверяется, что заголовок выражения x37 равен x22. Переменной x38 присваивается подтерм по вхождению x20. Его вид указан выше.

Оператор "сравнтермов" находит в терминах x37 и x38 вхождения x39, x40 наименьших подтермов, в которых эти термы различаются. В нашем примере x39 - вхождение выражения $A(y)$, x40 - вхождение выражения $\bigcap_{y,y \in x} A(y)$. Проверяется, что x39 - вхождение термина "значение(x16 x35)", а подтермы x40 и x23 равны. Переменной x41 присваивается номер операнда x23 вхождения x20. В нашем примере этот номер равен 1.

Переменной x42 присваивается название раздела, к которому относится символ x22. В нашем примере - "теориявероятностей". В этом разделе находится теорема x46, в списке x47 antecedентов которой имеется утверждение x48

с тем же заголовком, что и x19. Переменной x49 присваивается список параметров утверждения x19, и находится подстановка S вместо переменных x49, переводящая утверждение x19 в x48. В нашем примере x46 - указанная выше дополнительная теорема, x19 имеет вид "незавсобытия(A, C)", а x48 - вид "незавсобытия($(b, a), c$)".

Переменной x51 присваивается выражение, в которое подстановка S переводит переменную x16. В нашем примере - выражение " (b, a) ". Проверяется, что выражение x51 имеет вид "набор(X_1, X_2)", где X_1, X_2 - различные переменные. Переменной x52 присваивается пара этих переменных. В нашем примере - b, a .

Переменной x53 присваивается вхождение консеквента дополнительной теоремы. Проверяется, что этот консеквент - равенство, одна из частей которого имеет заголовок x22. Переменной x54 присваивается вхождение этой части, переменной x55 - другой части. В нашем примере x54 - вхождение выражения "вероятность($a \cap (\text{элементы}(c) \setminus b), c$)". Переменной x56 присваивается вхождение операнда вхождения x54, имеющего номер x41. В нашем примере - первого операнда. Проверяется, что этот операнд имеет заголовок x25.

Проверяется, что число операндов вхождения x56 равно 2, причем одним из этих операндов служит переменная x59, входящая в список x52. Переменной x60 присваивается другой операнд. В нашем примере x59 - переменная a , x60 - выражение "элементы(c) \setminus b)". Проверяется, что терм x60 неоднобуквенный. Переменной x61 присваивается пересечение списка параметров терма x60 со списком x52. В нашем примере оно состоит из переменной b . Проверяется, что список x61 одноэлементный, и переменной x62 присваивается его элемент. Проверяется, что он отличен от переменной x59.

Проверяется, что по вхождению x55 расположен символ x32. В нашем примере x55 - вхождение выражения вероятность(элементы(c) \setminus b, c) вероятность(a, c), x32 - символ "умножение". Проверяется, что число операндов вхождения x55 равно 2, и переменной x63 присваивается набор этих операндов.

Переменной x64 присваивается набор результатов замены вхождения x56 в подтерм x54 на элементы списка x56. В нашем примере x64 состоит из выражений "вероятность(a, c)" и "вероятность(элементы(c) \setminus b, c)". Проверяется, что список x64 включается в список x63.

Переменной x65 присваивается результат переобозначения переменных кванторной импликации x10 на переменные, не входящие в дополнительную теорему. В нашем примере x65 совпадает с x10. Переменной x66 присваивается результат замены вхождения x10 в исходную теорему на утверждение x65. В нашем примере x66 и x2 совпадают. Переменной x67 присваивается результат подстановки в терм x66 вместо переменных списка x49, отличных от x16, соответствующих термов списка x50. В нашем примере вместо C подставляется c :

$$\forall_{Ac}(A - \text{функция} \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(c) \ \& \ \text{верпространство}(c) \rightarrow \\ \text{незавсобытия}(A, c) \leftrightarrow \forall_x(x \subseteq \text{Dom}(A) \ \& \ x - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(x) \ \& \ \neg(x = \emptyset) \rightarrow \\ \text{вероятность}(\bigcap_{y, y \in x} A(y), c) = \prod_{y, y \in x} \text{вероятность}(A(y), c))$$

Переменной x_{68} присваивается вхождение в теорему x_{67} , соответствующее вхождению x_{23} в исходную теорему. В нашем примере x_{68} является вхождением подтерма $\bigcap_{y,y \in x} A(y)$. Переменной x_{69} присваивается список утверждений набора x_{47} , содержащих переменную x_{59} и отличных от утверждения x_{48} . В нашем примере x_{69} состоит из двух утверждений - " $a - \text{set}$ " и " $a \in \text{события}(c)$ ". Проверяется, что переменная x_{62} не встречается среди параметров утверждений x_{69} . В нашем примере x_{62} - переменная b . Переменной x_{70} присваивается список результатов подстановки подтерма x_{68} вместо переменной x_{59} в утверждения набора x_{69} .

При помощи задачи на доказательство устанавливается, что конъюнкция утверждений x_{70} является следствием антецедентов теоремы x_{67} , а также антецедентов кванторной импликации, вхождение которой в теорему x_{67} соответствует вхождению импликации x_{10} в исходную теорему.

Переменной x_{72} присваивается список антецедентов теоремы x_{67} , содержащих переменную x_{16} . В этом списке находится утверждение x_{73} вида " $\text{содержится}(\text{значения}(x_{16})x_{74})$ ". В нашем примере x_{74} - выражение " $\text{события}(c)$ ". Проверяется, что все отличные от x_{73} утверждения списка x_{72} имеют заголовок " функция ".

При помощи задачи на доказательство устанавливается, что утверждение " $\text{принадлежит}(x_{60} x_{74})$ " является следствием утверждений x_{47} . Переменной x_{76} присваивается список утверждений списка x_{47} , не содержащих переменных x_{59} и x_{62} . В нашем примере - единственное утверждение " $\text{верпространство}(c)$ ". Проверяется, что список x_{76} включается в набор антецедентов теоремы x_{67} .

Переменной x_{77} присваивается заменяющая часть консеквента теоремы x_{67} . Проверяется, что эта часть - кванторная импликация, причем ее варьируемая переменная присваивается переменной x_{78} . В нашем примере - переменная x . Выбирается переменная x_{79} , не входящая в дополнительную теорему x_{46} . В нашем примере - переменная d . Переменной x_{80} присваивается объединение списка антецедентов импликации x_{77} с утверждениями " $\text{множество}(x_{79})$ " и " $\text{содержится}(x_{79} x_{78})$ ". Переменной x_{81} присваивается вхождение в теорему x_{67} , соответствующее вхождению x_{29} в исходную теорему, переменной x_{82} - подтерм по вхождению x_{81} . В нашем примере x_{82} имеет вид " $A(y)$ ".

Переменной x_{83} присваивается результат подстановки выражения x_{82} вместо переменной x_{62} в выражение x_{60} . В нашем примере - " $\text{элементы}(\text{события}(c) \setminus A(y))$ ". Переменной x_{84} присваивается переменная связывающей приставки описателя - операнда вхождения x_{68} . В нашем примере - переменная y . Переменной x_{85} присваивается выражение " $\text{вариант}(\text{принадлежит}(x_{84} x_{79})x_{83} x_{82})$ ". Переменной x_{86} присваивается вхождение в теорему x_{67} , соответствующее вхождению последнего операнда описателя x_{33} в исходную теорему. В нашем примере - вхождение подтерма " $\text{вероятность}(A(y), c)$ ". Переменной x_{87} присваивается вхождение операнда вхождения x_{86} , имеющего номер x_{41} . В нашем примере - первого операнда. Переменной x_{88} присваивается результат подстановки подтерма x_{87} вместо переменной x_{62} в выражение x_{60} . В нашем примере - " $\text{элементы}(\text{события}(c) \setminus A(y))$ ". Переменной x_{89} присваивается второй операнд вхождения x_{87} . В нашем примере - переменная y . Переменной x_{90} присваивается выражение " $\text{вариант}(\text{принадлежит}(x_{89} x_{79})x_{88} T)$ ", где T - подтерм x_{87} .

Переменной x91 присваивается результат замены вхождений x81 и x87 в теорему x67 на выражения x85 и x90. Переменной x92 присваивается вхождение консеквента теоремы x91. Этот консеквент - эквивалентсность, и переменной x93 присваивается вхождение той ее части, которая имеет заголовок "длялюбого". Переменной x94 присваивается вхождение другой части.

Переменной x95 присваивается объединение списка антецедентов теоремы x67 и списка x80, к которому добавляется подтерм x94. Создается импликация с антецедентами x95, консеквентом которой служит консеквент импликации x93. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" регистрируется в списке вывода.

3. Использование индуктивного обобщения дополнительной теоремы для варьирования определяемого понятия.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdA}(d - \text{set} \ \& \ d \subseteq \text{Dom}(A) \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(c) \ \& \ A - \text{функция} \ \& \ \text{верпространство}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}(A, c) \rightarrow \text{незавсобытия}(\lambda_y((\text{элеmsобытия}(c) \setminus A(y) \text{ при } y \in d, \text{ иначе } A(y)), y \in \text{Dom}(A)), c))$$

из теоремы

$$\forall_{AC}(A - \text{функция} \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{незавсобытия}(A, C) \leftrightarrow \forall_x(x \subseteq \text{Dom}(A) \ \& \ x - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(x) \ \& \ \neg(x = \emptyset) \rightarrow \text{вероятность}(\bigcap_{y,y \in x} A(y), C) = \prod_{y,y \in x} \text{вероятность}(A(y), C)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ a \in \text{события}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}((b, a), c) \ \& \ b - \text{set} \ \& \ b \in \text{события}(c) \ \& \ \text{верпространство}(c) \rightarrow \text{вероятность}(a \cap (\text{элеmsобытия}(c) \setminus b), c) = \text{вероятность}(\text{элеmsобытия}(c) \setminus b, c) \text{вероятность}(a, c))$$

Программа приема в точности воспроизводит программу предыдущего приема вплоть до момента определения вхождений x93 и x94. Далее начинаются отличия. Переменной x95 присваивается подтерм по вхождению x94. В нашем примере - "незавсобытия(A, c)". Переменной x96 присваивается объединение списка антецедентов теоремы x67 с утверждениями x95, "множество(x79)", "содержится(x79 область(x16))". Переменной x97 присваивается результат подстановки выражения "отображение(x84 принадлежит(x84 область(x16)) x85)" вместо переменной x16 в выражение x95. Создается импликация с антецедентами x96 и консеквентом x97. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.90 Характеристика "развтеор"

Характеристикой "развтеор(x1)" снабжаются кванторные импликации, выполняющие развязку переменной x1 своего консеквента.

Реализация антецедента

1. Последовательная развязка двух переменных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(e \in \{c, \dots, d\} \& a - \text{число} \& b - \text{целое} \& c - \text{целое} \& d - \text{целое} \& a \leq c \& d \leq b \rightarrow e \in \{a, \dots, b\})$$

из теоремы

$$\forall_{amnx}(x \in \{m, \dots, n\} \& a - \text{число} \& m - \text{целое} \& n - \text{целое} \& a \leq m \rightarrow x \in \{a, \dots, n\})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cmnx}(x \in \{m, \dots, n\} \& c - \text{число} \& m - \text{целое} \& n - \text{целое} \& n \leq c \rightarrow x \in \{m, \dots, c\})$$

Характеристика - "развтеор(a)". Переменной x_8 присваивается консеквент, переменной x_9 - переменная из текущей характеристики. В нашем примере - переменная a . В текущем списке вывода находится отличная от исходной теоремы теорема x_{12} с характеристикой x_{11} вида "развтеор(x_{13})". В нашем примере x_{12} - указанная выше дополнительная теорема, x_{13} - переменная c . Переменной x_{14} присваивается консеквент дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет ту же длину, что и x_8 . Переменной x_{15} присваивается список параметров терма x_8 . Определяется подстановка S вместо переменных x_{15} , переводящая терм x_8 в x_{14} . Проверяется, что она переводит переменную x_9 не в переменную x_{13} . В нашем примере переменная a переводится в переменную m . Рассматривается вхождение x_{17} антецедента x_{18} исходной теоремы, длина которого равна длине терма x_8 . Проверяется существование подстановки вместо переменных x_{15} , переводящей терм x_8 в терм x_{18} . Процедура "выводпосылки" определяет результат x_{19} последовательного применения исходной и дополнительной теорем путем унификации антецедента x_{17} исходной теоремы с консеквентом дополнительной. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.91 Характеристика "развязка"

Характеристикой "развязка(x_1)" снабжаются кванторные тождества, выносящие наружу операцию над семейством из-под сложного понятия. x_1 - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Отождествление области определения описателя "отображение" с областью определения его функциональной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{AC}(\neg(\text{Dom}(A) = \emptyset) \& \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \& A - \text{функция} \& \text{конечное}(\text{Dom}(A)) \& \text{верпространство}(C) \& \text{незавсобытия}(A, C) \rightarrow \text{вероятность}(\bigcap(A), C) = \prod_{y, y \in \text{Dom}(A)} \text{вероятность}(A(y), C))$$

из теоремы

$$\forall_{xAC}(\neg(x = \emptyset) \ \& \ x - \text{set} \ \& \ x \subseteq \text{Dom}(A) \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ A - \text{функция} \ \& \ \text{конечное}(x) \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \& \ \text{незавсобытия}(A, C) \rightarrow \text{вероятность}(\bigcap_{y,y \in x} A(y), C) = \prod_{y,y \in x} \text{вероятность}(A(y), C))$$

Характеристика - "развязка(второйтерм)". Переменной x8 присваивается входение консеквента теоремы. Переменной x10 присваивается входение заменяемой части. Внутри него рассматривается входение x11 символа "отображение". Переменной x12 присваивается связывающая приставка описателя x11. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x13 присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная y . Переменной x14 присваивается входение предпоследнего операнда описателя (он определяет условие на варьируемую переменную). Проверяется, что по входению x14 расположено утверждение вида "принадлежит(x13 x15)", где x15 - некоторая переменная. В нашем примере - переменная x . Проверяется, что x15 имеет единственное входение в заменяемую часть теоремы.

Переменной x16 присваивается входение последнего операнда описателя x11 (он определяет значения функции). Проверяется, что по входению x16 расположено выражение "значение(x17 x13)", где x17 - некоторая переменная. В нашем примере - переменная A . Переменной x18 присваивается результат замены в подтерме x8 входения x11 на переменную x17. В нашем примере он имеет вид:

$$\text{вероятность}(\bigcap(A), C) = \prod_{y,y \in x} \text{вероятность}(A(y), C)$$

Создается импликация, антецеденты которой суть антецеденты исходной теоремы и утверждение "равно(x15 область(x17))", а консеквентом служит утверждение x18. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Переход от произвольного конечного семейства к слову.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aAC}(\text{Dom}(A) = \{1, \dots, a\} \ \& \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ A - \text{функция} \ \& \ a - \text{натуральное} \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \& \ \text{незавсобытия}(A, C) \rightarrow \text{вероятность}(\bigcap(A), C) = \prod_{y=1}^a \text{вероятность}(A(y), C))$$

из теоремы

$$\forall_{AC}(\neg(\text{Dom}(A) = \emptyset) \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ A - \text{функция} \ \& \ \text{конечное}(\text{Dom}(A)) \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \& \ \text{незавсобытия}(A, C) \rightarrow \text{вероятность}(\bigcap(A), C) = \prod_{y,y \in \text{Dom}(A)} \text{вероятность}(A(y), C))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Переменной x11 присваивается консеквент теоремы. В нем выбирается входение x12 символа "отображение". Внутри последнего операнда описателя x12 рассматривается входение x13 подтерма вида "значение(x14 T)", где x14 - переменная, T - некоторое выражение. В нашем примере этот подтерм есть " $A(y)$ ", x14 - переменная A .

Переменной x_{15} присваивается вхождение предпоследнего операнда описателя x_{12} . Проверяется, что по вхождению x_{15} расположено утверждение "принадлежит(x_{18} область(x_{14}))", где x_{18} - некоторая переменная. В нашем примере - переменная y . В списке x_8 находится утверждение x_{17} вида "конечное(область(x_{14}))".

Выбирается переменная x_{19} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{20} присваивается результат вхождения x_{15} в терм x_{11} на утверждение "и(целое(x_{18}))меньшеилиравно(1 x_{18}) меньшеилиравно(x_{18} x_{19})". Переменной x_{21} присваивается результат добавления к списку x_8 утверждений "науральное(x_{19})", "равно(область(x_{14}) номера(1 x_{19}))". Затем создается импликация с антецедентами x_{21} и консеквентом x_{20} . Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.92 Характеристика "разделение"

Характеристикой "разделение(x_1)" снабжаются кванторные эквивалентности, позволяющие переносить в разные части двуместного отношения две переменные, ранее расположенные в одной части. x_1 - направление замены.

Обобщение теоремы

1. Усиление эквивалентности разделения: исключение отрицаний в заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 < a + b \leftrightarrow -b < a)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow b < a \leftrightarrow 0 < a - b)$$

Характеристика - "разделение(первыйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть эквивалентности в консеквенте теоремы. Проверяется, что она представляет собой элементарное утверждение. Среди параметров этого утверждения выбирается переменная x_{11} , имеющая в x_{10} единственное вхождение. В нашем примере - переменная b . Переменной x_{12} присваивается вхождение переменной x_{11} в терм x_{10} , переменной x_{13} - вхождение, непосредственным операндом которого является x_{12} . В нашем примере x_{13} - вхождение выражения $-b$. Проверяется, что x_{13} имеет единственный операнд, и переменной x_{14} присваивается символ по вхождению x_{13} . В нашем примере - символ "минус". Проверяется, что x_{14} - операция типа "отрицание", т.е. двукратное ее применение в о.д.з. возвращает исходное значение. Переменной x_{15} присваивается результат замены вхождения x_{13} в терм x_{10} на переменную x_{11} . В нашем примере - " $0 < a + b$ ". Переменной x_{16} присваивается результат подстановки в заменяющую часть теоремы подтерма x_{13} вместо переменной x_{11} . Переменной x_{17} присваивается список результатов подстановки подтерма x_{13} вместо переменной x_{11} в антецеденты исходной теоремы. Создается импликация с антецедентами x_{17} , консеквентом которой служит

эквивалентность утверждений $x15$ и $x16$. Эта импликация обрабатывается операторами "Полныепосылки" и "нормантецеденты", после чего регистрируется в списке вывода.

3.93 Характеристика "раздпарам"

Характеристикой "раздпарам($x1$)" снабжается кванторная эквивалентности, в заменяющей части которой расположено такое равенство $A = B$, что некоторые две переменные имеются в A , но отсутствуют в B , и наоборот, некоторые две переменные имеются в B , но отсутствуют в A . Заменяемая часть имеет вид равенства, содержащего все указанные переменные, причем обе части равенства неоднобуквенные. $x1$ - направление замены.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Извлечение из эквивалентности типа "раздпарам" кванторного тождества, позволяющего исключать неизвестные с помощью равенства, идентифицированного с антецедентом.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abdf}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ a.f = bd \rightarrow a/d = b/f)$$

из теоремы

$$\forall_{abdf}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow a.f = bd \leftrightarrow a/d = b/f)$$

Прием, основанный на выводимой теореме, преобразует содержащую неизвестные дробь a/d в дробь b/f , не содержащую неизвестных.

Переменной $x10$ присваивается список антецедентов, переменной $x11$ - результат добавления к $x10$ заменяемой части эквивалентности в консеквенте теоремы. Создается импликация с антецедентами $x11$, консеквентом которой служит заменяющая часть эквивалентности. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой (исключеизв N), где N - номер последнего антецедента.

3.94 Характеристика "реализация"

Характеристикой "реализация" снабжаются кванторные импликации, корневое отношение консеквента которых имеет наибольшую сложность среди всех ее подтермов.

Склейка теорем

1. Склейка двух теорем при помощи третьей теоремы, имеющей характеристику "общнорм".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{astKT}(T = [t, s] \ \& \ s - \text{число} \ \& \ t - \text{число} \ \& \ \text{неподв}(K, T) \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \ \& \ \text{мтело}(K) \rightarrow \text{вектор}(\text{Место}(a, t)\text{Место}(a, s)) = \text{длина}(T)\text{Скорость}(a, K, T))$$

из теоремы

$$\forall_{astKT}(s - \text{число} \ \& \ t - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \ \& \ \text{мтело}(K) \ \& \ T = [t, s] \ \& \ \text{неподв}(K, T) \rightarrow \text{однаправлены}(\text{Скорость}(a, K, T), \text{вектор}(\text{Место}(a, t)\text{Место}(a, s))))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{ABav}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{Вектор}(v) \ \& \ 0 \leq a \rightarrow \text{вектор}(AB) = av \leftrightarrow l(AB) = a\text{длина}(v) \ \& \ \text{однаправлены}(\text{вектор}(AB), v))$$

$$\forall_{astKT}(s - \text{число} \ \& \ t - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \ \& \ \text{мтело}(K) \ \& \ T = [t, s] \ \& \ \text{неподв}(K, T) \rightarrow l(\text{Место}(a, t)\text{Место}(a, s)) = \text{длина}(\text{Скорость}(a, K, T))\text{длина}(T))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов исходной теоремы, переменной x10 - заголовок консеквента, переменной x11 - консеквент. В нашем примере x10 - символ "однаправлены". Справочник поиска теорем "нормкн" определяет по x10 указанную выше первую дополнительную теорему. Переменной x14 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x14 имеет вид:

$$\forall_{debc}(b - \text{число} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ 0 \leq b \rightarrow \text{вектор}(de) = bc \leftrightarrow l(de) = b\text{длина}(c) \ \& \ \text{однаправлены}(\text{вектор}(de), c))$$

Проверяется, что параметры антецедентов исходной теоремы включаются в параметры утверждения x11. Переменной x15 присваивается входение той части эквивалентности в консеквенте теоремы x14, которая представляет собой конъюнкцию. Переменной x16 присваивается список конъюнктивных членов этой конъюнкции. Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x17 присваивается то утверждение списка x16, заголовок которого отличен от символа x10. В нашем примере - " $l(de) = b\text{длина}(c)$ ". Переменной x18 присваивается список параметров утверждения x17. Проверяется, что он состоит из всех переменных теоремы x14.

В списке вывода находится не помеченная символом "исключение" кванторная импликация x21, заголовок консеквента которой совпадает с заголовком утверждения x17, причем этот консеквент включает все переменные импликации. В нашем примере x21 - указанная выше вторая дополнительная теорема. Переменной x23 присваивается результат переобозначения переменных второй дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему и в теорему x14. В нашем примере x23 имеет вид:

$$\forall_{fghij}(g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(f) \ \& \ \text{Числотр}(j) \ \& \ \text{мтело}(i) \ \& \ j = [h, g] \ \& \ \text{неподв}(i, j) \rightarrow l(\text{Место}(f, h)\text{Место}(f, g)) = \text{длина}(\text{Скорость}(f, i, j))\text{длина}(j))$$

Переменной x_{24} присваивается консеквент теоремы x_{23} , переменной x_{25} - список параметров утверждений x_{24} и x_{17} . В списке x_{16} находится утверждение x_{26} с заголовком x_{10} . В нашем примере - "однонаправлены(вектор(de), c)". Определяется подстановка S вместо переменных x_{25} , унифицирующая терм x_{11} с термом x_{26} , а терм x_{24} - с термом x_{17} . Переменной x_{28} присваивается список обработанных оператором "станд" результатов применения подстановки S к утверждениям списка x_8 . Переменной x_{29} присваивается список обработанных оператором "станд" результатов применения подстановки S к antecedентам теоремы x_{23} . Проверяется, что списки x_{28} и x_{29} состоят из одних и тех же утверждений. Переменной x_{30} присваивается список обработанных оператором "станд" результатов применения подстановки S к antecedентам теоремы x_{14} .

При помощи задачи на доказательство проверяется, что конъюнкция утверждений x_{30} - следствие утверждений x_{28} . Переменной x_{32} присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте теоремы x_{14} , которая представляет собой равенство. Переменной x_{33} присваивается результат применения подстановки S к подтерму x_{32} . Затем создается импликация с antecedентами x_{28} и консеквентом x_{33} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Варьирование antecedентов

1. Попытка свести antecedент со многими параметрами к antecedентам с меньшим числом параметров.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(\neg(d = e) \ \& \ a \in \text{отрезок}(bc) \ \& \ c \in \text{прямая}(de) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \rightarrow \text{однасторона}(a, b, \text{прямая}(de)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(C = D) \ \& \ B \in \text{плоскость}(ACD) \ \& \ \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(AB)) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{однасторона}(A, B, \text{прямая}(CD)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abCD}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(a = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(\text{прямая}(bB) = \text{прямая}(CD)) \ \& \ a \in \text{отрезок}(bB) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD) \rightarrow \text{непересек}(\text{прямая}(CD), \text{отрезок}(ab)))$$

Переменной x_8 присваивается вхождение antecedента x_9 исходной теоремы, имеющего не менее 4 параметров. В нашем примере утверждение x_9 имеет вид "непересек(прямая(CD), отрезок(AB))". Проверяется, что заголовок x_{10} утверждения x_9 отличен от символа "не". В нашем примере x_{10} - символ "непересек". Проверяется, что число корневых операндов antecedента x_9 равно 2. Проверяется, что x_9 имеет единственный подтерм максимальной сложности, и переменной x_{12} присваивается заголовок этого подтерма. В нашем примере x_{12} - символ "отрезок". Переменной x_{13} присваивается название раздела, к которому относится символ x_{12} . В нашем примере - "геометрия". В разделе x_{13} рассматривается теорема, консеквент которой содержит символ x_{12} и

имеет своим заголовком символ x10. В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Проверяется, что среди антецедентов дополнительной теоремы нет равенств, а число параметров любого ее антецедента, не имеющего своим заголовком отрицание, меньше 4.

Оператор "выводпосылки" определяет результат x19 последовательного применения исходной и дополнительной теорем, при котором антецедент x8 исходной теоремы унифицируется с консеквентом дополнительной. Переменной x20 присваивается результат обработки теоремы x19 оператором "нормтеорема". Проверяется, что этот результат - кванторная импликация. Переменной x21 присваивается результат обработки ее оператором "исклант", отбрасывающим избыточные антецеденты. Если в исходную теорему входит символ "окружность", т.е. ситуация заведомо планиметрическая, то проверяется отсутствие в теореме x21 стереометрических понятий. Затем теорема x21 регистрируется в списке вывода.

3.95 Характеристика "родобъекта"

Характеристикой "родобъекта" снабжаются кванторные импликации, консеквент которых указывает тип значения выражения, отличного от переменной. Эта характеристика создается только приемами вывода теорем

Логические следствия теоремы

1. Подстановка нуля либо единицы для исключения внешней операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_x (x - \text{число} \rightarrow x - \text{комплексное})$$

из теоремы

$$\forall_{xy} (x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \rightarrow x + iy - \text{комплексное})$$

Переменной x8 присваивается входение консеквента, переменной x9 - список антецедентов. Переменной x10 присваивается символ по входению x8. В нашем примере - символ "комплексное". Переменной x11 присваивается корневой операнд консеквента. В нашем примере - " $x + iy$ ". Сложение и умножение здесь комплексные. Переменной x12 присваивается заголовок выражения x11. В нашем примере - "Плюс". Переменной x13 присваивается список типов значений выражений с заголовком x12. Проверяется, что x10 содержится в этом списке. Выбирается параметр x14 выражения x11. В нашем примере - y . Переменной x15 присваивается входение переменной x14 в терм x11. Переменной x16 присваивается входение в x11, непосредственным операндом которого служит x15. Переменной x17 присваивается символ по входению x16. В нашем примере - "Умножение". Переменной x19 присваивается ноль либо единица операции x17. В нашем примере - 0. Проверяется, что операция x16 имеет данные ноль либо единицу именно для операнда x15. Переменной x20 присваивается результат подстановки в терм x11 выражения x19 вместо переменной x14. В нашем

примере - " $x + i0$ ". Переменной x_{21} присваивается результат обработки выражения x_{20} оператором "упрощединица". В нашем примере получаем выражение x . Переменной x_{22} присваивается список результатов подстановки выражения x_{19} вместо переменной x_{14} в антецеденты x_9 . Переменной x_{23} присваивается результат обработки списка x_{22} оператором "нормантецеденты" от носительно параметров терма x_{21} . Переменной x_{24} присваивается импликация с антецедентами x_{23} и консеквентом " $x_{10}(x_{21})$ ". Далее рассматриваются два случая:

- (а) Заголовок выражения x_{21} - переменная. Тогда импликация x_{24} регистрируется в списке вывода.
- (б) Заголовок выражения x_{21} - логический символ x_{25} . Проверяется, что x_{10} принадлежит списку типов значений выражения с заголовком x_{25} . После этого импликация регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "родобъекта".

3.96 Характеристика "сборка"

Характеристикой "сборка(x_1)" снабжаются кванторные эквивалентности, используемые для сокращенной переформулировки утверждений. x_1 - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Эквивалентность для сборки, в заменяемой части которой находится дизъюнкция с равенством для переменной: извлечение примера.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ce}(c - \text{set} \rightarrow e \in c \cup \{e\})$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(c - \text{set} \rightarrow d = e \vee d \in c \leftrightarrow d \in c \cup \{e\})$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть эквивалентности. В нашем примере - левая. Проверяется, что ее заголовок - дизъюнкция. Переменной x_{11} присваивается входение операнда дизъюнкции, представляющего собой равенство некоторой переменной x_{14} не содержащему ее выражению x_{15} . В нашем примере x_{14} - переменная d , x_{15} - однобуквенное выражение e . Переменной x_{16} присваивается результат подстановки выражения x_{15} вместо переменной x_{14} в заменяющую часть эквивалентности. В нашем примере - " $e \in c \cup \{e\}$ ". Переменной x_{17} присваивается список результатов подстановки x_{15} вместо x_{14} в антецеденты теоремы. Создается импликация с антецедентами x_{17} и консеквентом x_{16} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Группировка в левых частях всех ненулевых членов для эквивалентности типа "сборка".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 < a + b \ \& \ 0 < b - a \leftrightarrow 0 < b - |a|)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a < b \ \& \ -a < b \leftrightarrow |a| < b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть эквивалентности, переменной x11 - заменяющая. Проверяется, что теорема не имеет характеристики с заголовком "или". Переменной x12 присваивается пара утверждений x10, x11. Затем для каждого элемента этой пары рассматриваются вхождения v двуместных предикатных символов P . Если P - равенство, то определяется тип значений соединяемых равенством выражений, и в качестве P далее берется этот тип. При помощи справочника "перегруппировка" определяется возможность перенесения всех "ненулевых" членов в левую часть, и там, где это возможно, такая перегруппировка делается. В нашем примере, после перегруппировок, первый элемент списка x12 приобретает вид " $a - b < 0 \ \& \ -a - b < 0$ ", второй - вид " $|a| - b < 0$ ". Проверяется, что для заменяемой части теоремы перегруппировки имели место, и переменной x13 присваивается эквивалентность, в которой каждая часть исходной эквивалентности теоремы заменена на результат перегруппировок, извлекаемый из набора x12. Создается импликация, антецеденты которой те же, что у исходной теоремы, а консеквентом служит утверждение x13. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Использование симметрии двух переменных в заменяемой части для получения эквивалентности, варьирующей заменяющую часть.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abB}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = B) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow B \in \text{прямая}(ab) \leftrightarrow b \in \text{прямая}(aB))$$

из теоремы

$$\forall_{abB}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = B) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(ab) = \text{прямая}(aB) \leftrightarrow B \in \text{прямая}(ab))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть эквивалентности, переменной x11 - заменяющая. Оператор "симметричные пары" присваивает переменной x12 набор лексикографически упорядоченных пар переменных термина x10, перестановка которых не изменяет этого термина (с точностью до изменения порядка операндов коммутативных операций). В списке x2 выбирается пара x13. В нашем примере - пара b, B . Переменной x14 присваивается список антецедентов теоремы. Переменной x15 присваивается выражение, образованное первой переменной пары x13, переменной x16 - выражение, образованное второй переменной этой пары. Оператор "симметрично" устанавливает, что термы x15 и x16 входят в утверждения набора x14 симметричным образом. Проверяется, что в заменяющую часть эти термы входят не симметричным образом. Переменной x17 присваивается результат переобозначения в заменяющей части x11 переменных пары x13 друг на друга. Затем создается импликация с антецедентами x14, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x11 и x17.

4. Вывод параметрического описания при переходе от переменной для набора длины 2 к явному выражению для пары.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow \exists_{cd}(f = (c, d) \ \& \ c \in a \ \& \ d \in b))$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово})$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть теоремы. Проверяется, что она является конъюнкцией, и переменной x11 присваивается список конъюнктивных членов. В этом списке находится утверждение вида "слово(x13)", где x13 - переменная. В нашем примере - переменная f . В списке x11 находится утверждение x14 вида "равно(длинанабора(x13)2)". Переменной x17 присваивается заменяющая часть теоремы. Проверяется, что она элементарна, причем глубина вхождения в нее переменной x13 равна 1.

Переменной x18 присваивается пара переменных, не входящих в исходную теорему. В нашем примере - переменные c, d . Переменной x19 присваивается утверждение вида "равно(x13 набор(x18))". В нашем примере - " $f = (c, d)$ ". Переменной x20 присваивается список утверждений набора x11, отличных от x12 и x14.

Для каждого утверждения списка x20 проверяется, что каждое вхождение в него переменной x13 имеет вид "значение(x13 1)" либо "значение(x13 2)". В первом случае это вхождение заменяется на первую переменную пары x18, во втором - на вторую. По завершении обработки списка x20 создается утверждение x21, полученное навешиванием квантора существования по переменным x18 на конъюнкцию утверждений x20 и утверждения x19. Далее создается импликация с теми же антецедентами, что у исходной теоремы, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x17 и x21. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Извлечение из эквивалентности сборки импликации для проверочного оператора без использования контрапозиции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ 0 < -l(AB) + l(BC) \rightarrow \angle(ACB) < \angle(BAC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ 0 < -l(AB) + l(BC) \leftrightarrow \angle(ACB) < \angle(BAC))$$

Характеристика - "сборка(первыйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемая часть эквивалентности, переменной x11 - заменяющая. Проверяется, что утверждения x10 и x11 элементарные. Переменной x12 присваивается список антецедентов теоремы. Рассматриваются

два случая. В первом из них переменной x_{13} присваивается утверждение x_{10} , а переменной x_{14} - 0. Во втором случае переменной x_{13} присваивается отрицание утверждения x_{10} , а переменной x_{14} - 1. В нашем примере рассматривается первый случай. Проверяется, что утверждение x_{13} допускает обработку проверочным оператором. Переменной x_{18} присваивается результат обработки процедурой "нормантецеденты" объединения списка x_{12} с утверждением x_{11} при x_{14} равным 0 и с отрицанием утверждения x_{11} в противном случае. Обработка ведется относительно параметров утверждения x_{13} . Проверяется, что среди утверждений x_{18} нет равенства переменной выражению, не содержащему этой переменной. Создается импликация x_{19} с антецедентами x_{18} и конквентом x_{13} . Проверяется, что существующие приемы проверочного оператора не усматривают, что x_{13} - следствие утверждений x_{18} . Затем импликация x_{19} регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительной теоремы для упрощения заменяемой части

1. Попытка упростить заменяемую часть эквивалентности при помощи стандартизирующей эквивалентности двух элементарных неповторных утверждений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acd}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow c \subseteq d \ \& \ a \in d \leftrightarrow c \cup \{a\} \subseteq d)$$

из теоремы

$$\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow b \cup c \subseteq e \leftrightarrow b \subseteq e \ \& \ c \subseteq e)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{be}(e - \text{set} \rightarrow \{b\} \subseteq e \leftrightarrow b \in e)$$

Характеристика - "сборка(первыйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяемое утверждение. Составляется список x_{11} всех входящих в x_{10} заголовков подутверждений. Переменной x_{12} присваивается список найденных справочником поиска теорем "упроцэкв" для символов списка x_{11} пар (теорема - набор ее характеристик).

Переменной x_{13} присваивается вхождение заменяемой части теоремы, переменной x_{14} - расположенное внутри x_{13} вхождение некоторого неоднобуквенного подутверждения. Переменной x_{15} присваивается заголовок этого подутверждения. В нашем примере x_{14} - вхождение подтерм " $b \subseteq e$ ", x_{15} - символ "содержится". В списке x_{17} выбирается некоторая пара x_{16} , причем переменной x_{17} присваивается теорема - первый элемент данной пары. В нашем примере x_{17} - указанная выше дополнительная теорема. Проверяется, что заменяющая часть эквивалентности в конквенте дополнительной теоремы содержит все параметры заменяемой.

Оператор "тождвывод" определяет результат x_{21} преобразования вхождения x_{14} в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Переменной x_{22}

присваивается результат последовательной обработки теоремы x21 операторами "Спускоперандов" и "демодификация". В нашем примере x22 имеет вид:

$$\forall_{acd}(\{a\} - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow \{a\} \cup c \subseteq d \leftrightarrow a \in d \ \& \ c \subseteq d)$$

Далее предпринимается упрощение теоремы x22. Переменной x25 присваивается список ее антецедентов. Переменной x29 присваивается результат обработки заменяющей части теоремы x22 (в нашем примере - левой части) относительно посылок x25 задачей на описание, имеющей цели "полный", "прямойответ", "редакция", "свертка". Переменной x31 присваивается результат обработки списка конъюнктивных членов заменяемой части теоремы x22 относительно посылок x25 задачей на описание, имеющей цели "полный", "прямойответ", "редакция". Проверяется, что если x31 - конъюнкция, то не содержит символа "или". Определяется результат R обработки оператором "нормантецеденты" списка x25 относительно параметров утверждений x29 и x31. Затем создается импликация с антецедентами R , консеквентом которой служит эквивалентность x31 и x29. Переменной x32 присваивается результат обработки этой импликации оператором "станд". Проверяется, что теорема x32 не имеет сдвоенных переменных. Такие переменные встречаются лишь вместе и под одной и той же ассоциативно-коммутативной операцией. Исключение могут составлять группы антецедентов, получающихся друг из друга "перестановкой" данных переменных. Проверяется, что если исходная теорема не содержала символа "или", то и теорема x32 его не содержит. Затем теорема x32 регистрируется в списке вывода.

2. Попытка использовать перестановочную эквивалентность, исключаящую часть символов операций.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow c + d \leq 0 \ \& \ 0 \leq c - d \leftrightarrow d + |c| \leq 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 \leq a + b \ \& \ 0 \leq b - a \leftrightarrow 0 \leq b - |a|)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 \leq -a - b \leftrightarrow a + b \leq 0)$$

Характеристика - "сборка(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части, переменной x11 - вхождение ее конъюнктивного члена. В нашем примере - члена " $0 \leq b - a$ ". Переменной x12 присваивается заголовок утверждения x11. В нашем примере - символ "меньшеилиравно". Переменной x13 присваивается подтерм x11. Переменной x14 присваивается список логических символов, входящих в x13. Повторения не исключаются. В нашем примере - "меньшеилиравно", "0", "плюс", "минус". Проверяется, что список x14 состоит не менее чем из двух элементов. Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она является эквивалентностью. Переменной x20 присваивается одна из частей эквивалентности, переменной x21

- другая. В нашем примере x20 - правая часть, x21 - левая. Переменным x22 и x23 присваиваются списки логических символов, встречающихся, соответственно, в x20 и x21. Повторения не исключаются. В нашем примере x22 состоит из символов "меньшеилиравно", "плюс", "0", а x23 - из символов "меньшеилиравно", "0", "плюс", "минус", "минус". Проверяется, что x22 - собственный подсписок списка x23 (с учетом повторений). Проверяется также, что список x14 включается в x23 (с учетом повторений). Обратно, каждый элемент списка x23 встречается в списке x14.

Переменной x24 присваивается символ направления замены от x21 к x20. Оператор "тождвывод" определяет результат x25 преобразования вхождения x11 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы, применяемой в направлении x24. Теорема x25 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Применение упрощающего тождества к заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow 0 \leq -b + |b|)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 \leq -b + |a| \leftrightarrow a + b \leq 0 \vee 0 \leq a - b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a - a = 0)$$

Характеристика - "сборка(первыйтерм)".

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Внутри него рассматривается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. Переменной x12 присваивается звголовок этого подтерма. В нашем примере x11 - вхождение подтерма "a + b", x12 - символ "плюс". Справочники поиска теорем "констнорм", "упрощстанд" определяют по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x17 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Попытка упростить заменяемую часть с помощью эквивалентности, соединяющей два элементарных утверждения в одно.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{mx}(x - \text{число} \ \& \ m - \text{целое} \rightarrow x \in \{m, \dots, m\} \leftrightarrow m = x \ \& \ x - \text{целое})$$

из теоремы

$$\forall_{mnx}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow x \in \{m, \dots, n\} \leftrightarrow x - \text{целое} \ \& \ 0 \leq x - m \ \& \ 0 \leq n - x)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 \leq a - b \ \& \ 0 \leq b - a \leftrightarrow a = b)$$

Характеристика - "сборка(первыйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемая часть эквивалентности. Проверяется, что она имеет не менее двух конъюнктивных членов, и переменной x11 присваивается набор этих членов. В списке x11 выбирается утверждение x12 с заголовком x13, отличным от символа "не". В нашем примере x12 имеет вид " $0 \leq x - m$ ". Справочник поиска теорем "соединение" определяет по x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x16 присваивается результат переобозначения в ней переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x16 совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x18 присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте теоремы x16, которая имеет заголовок "и", переменной x19 - вхождение другой части. Переменной x20 присваивается список конъюнктивных членов утверждения x18. Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x21 присваивается список заголовков утверждений x20. Проверяется, что он не содержит символа "не". В нашем примере x21 состоит из единственного символа "меньшеилиравно". Переменной x22 присваивается список утверждений набора x11, заголовок которых принадлежит списку x21. В нашем примере x22 состоит из утверждений " $0 \leq x - m$ " и " $0 \leq n - x$ ". Проверяется, что список x22 двухэлементный, и переменной x23 присваивается конъюнкция этих утверждений. Переменной x24 присваивается подтерм x18, переменной x25 - список параметров утверждений x23 и x24. Определяется подстановка S вместо переменных x25, унифицирующая термы x23 и x24.

Переменной x27 присваивается конъюнкция утверждений списка x11, не вошедших в список x22, а также подтерма x19. Переменной x28 присваивается результат применения подстановки S к утверждению x27, переменной x29 - результат применения этой же подстановки к заменяющему утверждению исходной теоремы. Переменной x30 присваивается эквивалентность утверждений x29 и x28. В нашем примере она имеет вид " $x \in \{m, \dots, m\} \leftrightarrow x - \text{целое} \ \& \ x = m$ ". Переменной x31 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и теоремы x16. Затем создается импликация с антецедентами x31 и консеквентом x30. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительной эквивалентности кванторной свертки после навешивания квантора, общности на обе части консеквента

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ c \subseteq a \times b \rightarrow \forall_f(f \in c \rightarrow d = f(1)) \leftrightarrow c \subseteq \{d\} \times b)$$

из теоремы

$$\forall_{abdf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ f \in a \times b \rightarrow d = f(1) \leftrightarrow f \in \{d\} \times b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow a \subseteq b \leftrightarrow \forall_c(c \in a \rightarrow c \in b))$$

Переменной x10 присваивается заменяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x11 присваивается заголовок утверждения, получаемого из x10 отбрасыванием корневого отрицания, если оно есть. В нашем примере - символ

"принадлежит". Переменной x_{12} присваивается список антецедентов. Справочник поиска теорем "консеквент" определяет по x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{15} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{15} имеет вид:

$$\forall_{ce}(c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow c \subseteq e \leftrightarrow \forall_g(g \in c \rightarrow g \in e))$$

Переменной x_{18} присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте теоремы x_{15} , которая имеет заголовок "длялюбого", переменной x_{19} присваивается другая часть эквивалентности. В нашем примере - " $c \subseteq e$ ". Проверяется, что утверждение x_{19} элементарно. Переменной x_{20} присваивается консеквент импликации x_{18} , переменной x_{21} - связывающая приставка этой импликации. В нашем примере x_{20} имеет вид " $g \in e$ ", x_{21} состоит из единственной переменной g . Переменной x_{22} присваивается список параметров утверждения x_{20} , переменной x_{23} - разность списков x_{22} и x_{21} . В нашем примере x_{23} состоит из переменной e . Переменной x_{24} присваивается список антецедентов импликации x_{18} . Проверяется, что они не содержат переменных списка x_{23} .

Определяется подстановка S вместо переменных x_{22} , унифицирующая утверждения x_{20} и x_{10} . Переменной x_{26} присваивается список заголовков термов, подставляемых подстановкой S вместо переменных списка x_{21} . Проверяется, что эти заголовки суть попарно различные переменные. В нашем примере - единственная переменная f . Переменной x_{27} присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям x_{24} . Переменной x_{28} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_{19} . В нашем примере - " $c \subseteq \{d\} \times b$ ".

Переменной x_{29} присваивается список утверждений набора x_{12} , содержащих переменную списка x_{26} . Переменной x_{30} присваивается остаток набора x_{12} . Для каждого утверждения A списка x_{29} составляется кванторная импликация "длялюбого(x_{26} если x_{27} то A)". Она преобразуется относительно посылок x_{30} задачей на преобразование с целями "упростить", "свертка". Если все такие результаты упрощений суть элементарные утверждения, то из них составляется список x_{31} . Иначе применение приема блокируется. В нашем примере x_{31} состоит из единственного утверждения " $c \subseteq a \times b$ ".

Переменной x_{32} присваивается заменяющая часть теоремы, переменной x_{33} - кванторная импликация "длялюбого(x_{26} если x_{27} то x_{32})". Переменной x_{35} присваивается объединение списков x_{30} , x_{31} и списка результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_{15} . Создается импликация с антецедентами x_{35} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{33} и x_{28} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Вывод импликации для развязки параметра консеквента

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cmnx}(x \in \{m, \dots, n\} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ n \leq c \rightarrow x \in \{m, \dots, c\})$$

из теоремы

$$\forall_{mnx}(m - \text{целое} \ \& \ n - \text{целое} \rightarrow x - \text{целое} \ \& \ m \leq x \ \& \ x \leq n \leftrightarrow x \in \{m, \dots, n\})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ a \leq b \ \& \ b \leq c \rightarrow a \leq c)$$

Характеристика - "сборка(второйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть эквивалентности. Проверяется, что она имеет не менее двух конъюнктивных членов, и переменной x_{11} присваивается набор этих членов. В списке x_{11} выбирается утверждение x_{12} с заголовком x_{13} , отличным от символа "не". В нашем примере x_{12} имеет вид " $x \leq n$ ", x_{13} - символ "меньшеилиравно". Проверяется, что x_{12} имеет ровно два корневых операнда, одним из которых служит переменная x_{17} , имеющая единственное вхождение в утверждение x_{10} . Переменной x_{15} присваивается вхождение операнда x_{17} , переменной x_{16} - вхождение другого операнда.

Справочник поиска теорем определяет по символу x_{13} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{20} присваивается результат переобозначения в ней переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{20} совпадает с x_{18} . Переменной x_{21} присваивается консеквент теоремы x_{20} . Проверяется, что утверждение x_{21} имеет заголовок x_{13} . Переменной x_{22} присваивается список antecedентов теоремы x_{20} , переменной x_{23} - список утверждений набора x_{22} , имеющих ровно два корневых операндов. Проверяется, что x_{23} состоит из двух элементов. В нашем примере - " $a \leq b$ " и " $b \leq c$ ". Переменной x_{24} присваивается элемент пары x_{23} , имеющий заголовок x_{13} , переменной x_{25} - другой элемент пары. В нашем примере x_{24} - первый элемент пары, x_{25} - второй. Переменной x_{27} присваивается вхождение корневого операнда утверждения x_{24} , представляющего собой некоторую переменную x_{28} , не входящую в утверждение x_{21} . В нашем примере x_{28} - переменная b . Переменной x_{26} присваивается вхождение другого корневого операнда утверждения x_{24} , который тоже представляет собой некоторую переменную x_{29} . В нашем примере x_{29} - переменная a .

Рассматривается вхождение x_{30} корневого операнда утверждения x_{21} , представляющего собой переменную x_{29} . Переменной x_{31} присваивается вхождение другого корневого операнда утверждения x_{21} . В нашем примере - операнда c . Проверяется, что номер операнда x_{26} утверждения x_{24} равен номеру операнда x_{30} утверждения x_{21} , а номер операнда x_{15} утверждения x_{12} равен номеру операнда x_{27} утверждения x_{24} . Проверяется, что x_{31} - вхождение некоторой переменной x_{32} . В нашем примере - переменной c .

Переменной x_{33} присваивается список результатов подстановки в antecedенты теоремы x_{20} , не вошедшие в список x_{23} , термов x_{17} и x_{16} вместо переменных x_{28} и x_{29} . Переменной x_{34} присваивается заменяющий терм исходной теоремы. Переменной x_{35} присваивается результат подстановки переменной x_{17} вместо x_{28} в утверждение x_{25} , переменной x_{36} - объединение списка antecedентов исходной теоремы, списка x_{33} и утверждений x_{34} , x_{35} . Переменной x_{37} присваивается результат подстановки переменной x_{32} вместо переменной x_{17} в утверждение x_{34} . Создается импликация с antecedентами x_{36} и консеквентом x_{37} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. В число характеристик включается элемент "развтеор(x_{32})".

3.97 Характеристика "свертка"

Характеристикой "свертка(x_1)" снабжаются кванторные тождества, обеспечивающие переход к сокращенной записи. x_1 - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Отождествление наиболее сложных подтермов заменяемой части для опрокидывания тождества свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bceij}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \rightarrow (b + i\sqrt{c})(e + j\sqrt{c}) = be + cij + (bj + ei)\sqrt{c})$$

из теоремы

$$\forall_{bcefgij}(f + g = 1 \ \& \ 0 < f \ \& \ 0 < g \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \rightarrow be + bjc^g + cij + eic^f = (b + ic^f)(e + jc^g))$$

Характеристика - "свертка(второй терм)".

Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. Переменной x12 присваивается список antecedентов. Переменной x13 присваивается список имеющих максимальную сложность подтермов выражения x10. Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x14 присваивается список имеющих максимальную сложность подтермов выражения x11. Проверяется, что он двухэлементный и имеет те же элементы, что список x13. Переменной x15 присваивается первый элемент списка x13, переменной x16 - второй. В нашем примере x15 - выражение " c^g ", x16 - " c^f ". Проверяется, что выражения x15, x16 имеют равные длины и одинаковые заголовки.

Переменной x17 присваивается параметр выражения x15, не входящий в x16. В нашем примере - переменная g . Усматривается, что x16 - результат подстановки в терм x15 некоторой переменной x19 вместо переменной x17. В нашем примере x19 - переменная f . Переменной x20 присваивается результат подстановки переменной x19 вместо x17 в выражение x10. В нашем примере он имеет вид " $be + bjc^f + cij + eic^f$ ". Переменной x21 присваивается список результатов подстановки переменной x19 вместо переменной x17 в утверждения списка x12. Переменной x22 присваивается результат обработки списка x21 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x20. В нашем примере список x22 состоит из утверждений " $f = 1/2$ ", " $b - \text{число}$ ", " $c - \text{число}$ ", " $e - \text{число}$ ", " $0 \leq c$ ". Решается задача на преобразование с antecedентами x22 и условием x20. Цели задачи - "упростить", "свертка", Ответ присваивается переменной x24. В нашем примере он имеет вид " $be + cij + (bj + ei)\sqrt{c}$ ". Переменной x25 присваивается результат подстановки переменной x19 вместо переменной x17 в выражение x11. Создается импликация с antecedентами x22, консеквентом которой служит равенство выражений x25 и x24. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Применение дополнительного тождества для упрощения заменяемого термина

1. Попытка опрокинуть тождество свертки путем сильного упрощения заменяемого термина (первый прием).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(\neg(e = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e(c + d/e) = d + ce)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow (a/b) \cdot (b/c) = a/c)$$

Характеристика - "свертка(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. Проверяется, что терм x11 неоднобуквенный. Просматриваются логические символы - заголовки неоднобуквенных подтермов выражения x10, и составляется список x12 пар (теорема - набор ее характеристик) для всех теорем, определяемых для данных символов справочниками поиска теорем "констант", "тожд", "Сокращение", "поглощается", "поглощает", "констцелое", "констдробь", "конствхожд", "сократимо", "исклтерм", "сокращмн". Проверяется, что исходная теорема не имеет характеристики "нормализация(...)" для направления замены, отличного от направления замены согласно текущей характеристике.

Переменной x13 присваивается вхождение заменяемо части теоремы. Внутри него выбирается вхождение x14 неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - подтерма "ab". Переменной x15 присваивается заголовок этого подтерма. В списке x12 выбирается такая пара x16, что консеквент x18 ее теоремы x17 имеет одним из своих операндов терм с заголовком x15. В нашем примере x17 - указанная выше дополнительная теорема. Оператор "тождвывод определяет результат x22 преобразования вхождения x14 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере x22 имеет вид:

$$\forall_{cdef}((e/f) - \text{число} \ \& \ (d/e) - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ \neg(e = 0) \rightarrow (d/f) + (e/f)c = (e/f) \cdot (d/e + c))$$

Переменной x23 присваивается результат обработки теоремы x22 операторами "Спускоперандов" и "демодификация". В нашем примере x23 совпадает с x22. Переменной x25 присваивается заменяемая часть консеквента теоремы x23, переменной x26 - заменяющая. В нашем примере x25 - левая часть, x26 - правая. Проверяется, что число параметров терма x26, имеющих в этом терме больше одного вхождения, меньше 2. Переменной x27 присваивается список антецедентов теоремы x23. Переменной x28 присваивается результат обработки выражения x25 относительно посылок x27 нормализаторами общей стандартизации. В нашем примере он имеет вид "d/f + (ce)/f". Проверяется, что обработка нормализаторами общей стандартизации относительно посылок x27 не изменяет ни одного из корневых операндов выражения x26. Проверяется, что ни одна из теорем списка x12 не упрощает выражение x26.

Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x29 присваивается выражение x28. Во втором случае проверяется, что теорема x17 не имеет существенных антецедентов, и переменной x29 присваивается результат обработки выражения x28 процедурой "свертка" относительно посылок x27.

При этом блокировки приемов временно снимаются. В нашем примере рассматривается второй случай, и x_{29} оказывается равно $(d + ce)/f$. Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" выражений x_{26} и x_{29} различаются. Переменной x_{30} присваивается результат обработки списка x_{27} оператором "нормантецеденты" относительно параметров термов x_{26} и x_{29} . Создается импликация с антецедентами x_{30} и консеквентом "равно(x_{26} x_{29})". Переменной x_{31} присваивается результат ее обработки оператором "Полныепосылки", а затем - оператором "Нормтеорема" с опцией "конст". В нашем примере x_{31} - результирующая теорема вывода. Вспомогательная задача на преобразование, используемая оператором "Нормтеорема", устраняет внешнюю фиктивную операцию деления в консеквенте $e(d/e + c)/f = (ce + d)/f$, заменяя его на $e(d/e + c) = ce + d$.

Проверяется, что о.д.з. теоремы x_{31} непротиворечиво, причем эта теорема не имеет "сдвоенных" переменных. Проверяется, что характеризатор сопровождает теорему x_{31} хотя бы одной из характеристик "норм(второйтерм)", "нормализация(второйтерм)", "сокращ(второйтерм)", "исклтерм(... второйтерм)". Проверяется, что x_{31} не подобна теоремам списка вывода или списка x_{12} и не получается из них переходом к "отрицаниям" переменных. Затем она регистрируется в списке вывода и сопровождается уже найденными характеристиками указанных выше типов, а также, если она была найдена, характеристикой "свертка(...)".

2. Попытка опрокинуть тождество свертки путем сильного упрощения заменяемого терма (второй прием).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(\neg(c - 1 = 0) \ \& \ \neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \log_c d = e / \log_d c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ \neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \log_a b / \log_a c = \log_c b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ae}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \log_a(a^e) = e)$$

Характеристика - "свертка(второйтерм)".

Почти вся программа приема совпадает с программой предыдущего приема. Отличия начинаются после того, как переменной x_{31} присвоена результирующая теорема, проверены непротиворечивость о.д.з. этой теоремы и отсутствие "сдвоенных" переменных.

Далее рассматривается случай, когда характеризатор не сопровождает теорему x_{31} ни одной из характеристик "норм(второйтерм)", "нормализация(второйтерм)", "сокращ(второйтерм)", "исклтерм(... второйтерм)", однако сопровождает ее характеристикой "группировки". Как и в предыдущем приеме, проверяется, что x_{31} не подобна теоремам списка вывода или списка x_{12} и не получается из них переходом к "отрицаниям" переменных. Затем она регистрируется

в списке вывода и сопровождается теми из полученных характеристизатором характеристик, заголовки которых принадлежат списку "перестановка", "норм", "нормализация", "группировки", "глубина". В нашем примере имеем характеристики "нормализация(первыйтерм)" и "группировки".

3. Использование нормализующего тождества типа свертки для варьирования тождества свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{defghi}(0 < d \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \rightarrow gd^{e+f} = hd^{e+i} = (gd^f + hd^i)d^e)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < a \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$$

Характеристика - "свертка(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяющее выражение, переменной x11 - заменяемое. Проверяется, что выражение x11 имеет не более одной небесповторной переменной. Внутри выражения x11 выбирается вхождение x12 неоднобуквенного подтерма с двумя корневыми операндами. В нашем примере - подтерма "ab". Переменной x13 присваивается заголовок этого подтерма. В нашем примере - "умножение". Проверяется, что x13 - ассоциативная и коммутативная операция. Переменной x14 присваивается вхождение корневого операнда вхождения x12, представляющего собой некоторую переменную x15. В нашем примере - переменную a. Проверяется, что любое вхождение переменной x15 в выражение x11 является операндом двуместного вхождения операции x13, причем число таких вхождений не менее двух. Переменной x16 присваивается список соответствующих вхождений операции x13. Переменной x17 присваивается список отличных от x15 операндов операций списка x16. Проверяется, что эти операнды суть попарно различные переменные. В нашем примере - переменные b, c.

Справочник поиска теорем "свертки" определяет по x13 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "нормализация(...)" и не имеет встречной характеристики "свертка(...)". Переменной x22 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{def}(d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 < d \rightarrow d^e d^f = d^{e+f})$$

Переменной x24 присваивается заменяемая часть теоремы x22, переменной x25 - заменяющая. Проверяется, что выражение x24 имеет ровно два корневых операнда, и переменной x26 присваивается список этих операндов. В нашем примере - выражения d^e и d^f . Переменной x27 присваивается один из элементов

списка x_{26} , переменной x_{28} - другой. Проверяется, что они различны. В нашем примере $x_{27} - d^e$, $x_{28} - d^f$. Переменной x_{29} присваивается список параметров выражения x_{28} , не входящих в x_{27} . Переменной x_{30} присваивается список антецедентов теоремы x_{22} .

Вводится накопитель x_{31} , иницируемый списком x_{30} . Переменной x_{32} присваивается объединенный список переменных исходной теоремы и теоремы x_{22} . Выбирается переменная x_{33} , не входящая в список x_{32} . В нашем примере - переменная g . Она добавляется к списку x_{30} . Вводится накопитель x_{34} , иницируемый парой переменных: переменной x_{15} и первой переменной списка x_{17} . В нашем примере - a, b . Вводится также накопитель x_{35} , иницируемой парой выражений: x_{27} и " $x_{13}(x_{33}, x_{28})$ ". В нашем примере - d^e, gd^f .

Просматриваются переменные X списка x_{17} , начиная со второй. Переменная X добавляется в список x_{34} . Выбирается список Y переменных, не входящих в список x_{32} , длина которого на единицу больше длины списка x_{29} . Переменные Y добавляются к списку x_{32} . Если список x_{29} непуст, то находится результат R подстановки вместо переменных x_{29} посоедних переменных списка Y в выражение x_{28} . Иначе в качестве R берется само выражение x_{28} . Далее формируется выражение T , полученное соединением операцией x_{13} первой переменной списка Y и выражения R . Оно заносится в накопитель x_{35} . Для каждого утверждения списка x_{30} , содержащего переменную списка x_{29} , определяется результат подстановки в него вместо переменных x_{29} последних переменных списка Y , и этот результат добавляется к накопителю x_{31} .

После указанного цикла в нашем примере список x_{31} состоит из утверждений " $d - \text{число}$ ", " $e - \text{число}$ ", " $f - \text{число}$ ", " $0 < d$ ", " $i - \text{число}$ ", список x_{32} - из переменных $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, список x_{34} - из переменных a, b, c , список x_{35} - из выражений d^e, gd^f, hd^i .

Переменной x_{36} присваивается результат подстановки в консеквент исходной теоремы выражений x_{35} вместо переменных x_{34} , переменной x_{37} - список антецедентов исходной теоремы, переменной x_{38} - список результатов подстановки выражений x_{35} вместо переменных x_{34} в утверждения списка x_{37} . К этому списку добавляются утверждения x_{31} . Затем создается импликация с антецедентами x_{38} и консекветом x_{36} . Она обрабатывается операторами "Полныепосылки" и "нормтеорема", после чего заносится в список вывода. Единственной ее характеристикой при этом оказывается текущая характеристика исходной теоремы.

4. Попытки варьирования отрицаний в тождестве неповторного типа для получения тождества общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow 1/b^{-a} = b^a)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow b^{-a} = 1/b^a)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)". Переменной x10 присваивается пара частей равенства в консеквенте теоремы. Проверяется, что списки параметров выражений этой пары совпадают, причем оба выражения неповторны. Рассматриваются два случая. В первом из них переменной x12 присваивается второе выражение пары x10, а переменной x13 - первое. Во втором случае переменной x12 присваивается первое выражение, а переменной x13 - второе. В нашем примере рассматривается первый случай. Предпринимается попытка усмотреть в x13 такие переменные X , которые встречаются только под одной операцией F типа "отрицание" (т.е. двукратное применение ее в о.д.з. не изменяет исходного значения). Эти переменные X заменяются в исходной теореме на $F(X)$, с учетом о.д.з. и необходимыми упрощениями. Фактически результаты R перечисляются, с рассмотрением всевозможных подмножеств переменных X указанного типа, причем отбираются только те из них, которые дают тождество общей стандартизации при замене от x12 к x13.

Переменной x14 присваивается список указанных результатов R , с отбрасыванием дублированных. В нашем примере x14 состоит из единственной теоремы, совпадающей с указанным выше результатом вывода.

Если выражение x13 имеет вид $F(T)$, где F - символ типа "отрицание", а заголовков выражения x12 отличен от F , то проверяется, что переход от $F(x12)$ к T является преобразованием общей стандартизации, и к списку x14 добавляется импликация, полученная из исходной заменой консеквента на " $F(x12) = T$ ". В нашем примере x14 не изменяется.

Далее импликации из x14 регистрируются в списке вывода. Они снабжаются характеристикой "нормализация(второйтерм)". Если исходная теорема имела характеристику "группировки", то она передается результирующей теореме.

5. Попытка навесить внешнюю операцию для устранения повторного вхождения переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(\neg(\cos c = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \sin b \operatorname{tg} c + \cos b = \cos(b - c) / \cos c)$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \cos(b - c) = \sin b \sin c + \cos b \cos c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abx}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \ \& \ \neg(\cos x = 0) \rightarrow (a \sin x + b \cos x) \cos x = a \operatorname{tg} x + b)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее, переменной x12 - список антецедентов. Проверяется, что выражение x10 имеет повторные вхождения переменных, а x11 - не имеет. Переменной x13 присваивается список подтермов выражения x10, имеющих максимальную сложность. Проверяется, что в нем не менее двух элеменов. В нашем примере

x13 состоит из выражений "sin b", "sin c", "cos b", "cos c". Выбирается заголовок x15 одного из термов списка x13. В нашем примере - "синус". Справочник поиска теорем "склейкалин" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается результат переобозначения переменных этой теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x18 имеет вид:

$$\forall_{ade}(a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \neg(\cos e = 0) \rightarrow (a \sin e + d \cos e) \cos e = a \operatorname{tg} e + d)$$

Переменной x20 присваивается вхождение левой части равенства в консеквенте теоремы x18. Переменной x21 присваивается вхождение того корневого операнда x23 вхождения x21, который имеет повторяющиеся вхождения переменных. Переменной x22 присваивается вхождение другого корневого операнда. В нашем примере x23 имеет вид "a sin e + d cos e". Проверяется, что заголовки выражений x23 и x10 одинаковы. Переменной x24 присваивается список параметров выражений x10 и x23.

Определяется подстановка S вместо переменных x24, унифицирующая выражения x10 и x23. Переменной x27 присваивается список заголовков имеющих максимальную сложность подтермов терма x23. В нашем примере - символы "синус", "косинус". Проверяется, что подстановка S переводит параметры терма x10 в такие термы, которые не содержат символов списка x27. В нашем примере эти параметры переводятся в себя.

Переменной x28 присваивается результат применения подстановки S к правой части равенства в консеквенте теоремы x18. Переменной x29 присваивается результат замены вхождения в левой части этого равенства вхождения x21 на выражение x11. В нашем примере x29 имеет вид "cos(b - c)/cos e". Переменной x30 присваивается результат применения подстановки S к выражению x29. Переменной x31 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и теоремы x18. Создается импликация с антецедентами x31, консеквентом которой служит равенство выражений x28 и x30. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

6. Попытка использовать тождество исключения переменной для вывода тождества, обеспечивающего упрощение с помощью вычисления над константными термами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acdefg}(0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ a = f - e \rightarrow cd^e + gd^f = (c + gd^a)d^e)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ace}(0 < a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow a^c a^{c-e} = a^e)$$

Характеристика - "свертка(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Внутри этого вхождения рассматривается вхождение x11 собственного неоднобуквенного подтерма. Переменной x12 присваивается заголовок этого подтерма. В нашем примере x11 имеет вид "ab", x12 - символ "умножение". Справочник поиска теорем "исклпараметр" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается заменяемая часть равенства в ее консеквенте. Проверяется, что она имеет не более 6 вхождений переменных. В нашем примере x17 имеет вид " $a^c a^{e-c}$ ".

Оператор "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере x18 имеет вид:

$$\forall_{cdefg}(g - \text{число} \ \& \ d^e - \text{число} \ \& \ d^{f-e}g - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < d \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \rightarrow \ d^f g + d^e c = d^e(d^{f-e}g + c))$$

Рассматривается список S_1 имеющих максимальную сложность подтермов заменяемой части теоремы x18 и список S_2 имеющих максимальную сложность подтермов заменяющей части. Направление замены x8 - то же, что для исходной теоремы. В нашем примере - "второйтерм". Проверяется, что в списке S_2 имеется выражение, декомпозируемое выражениями S_1 . В нашем примере - выражение d^{f-e} , декомпозируемое парой выражений d^f, d^e .

Переменной x19 присваивается результат обработки теоремы x18 оператором "нормтеорема". В нашем примере x19 имеет вид:

$$\forall_{cdefg}(0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \rightarrow \ cd^e + gd^f = (c + gd^{f-e})d^e)$$

Переменной x20 присваивается список характеристик, определяемых процедурой "характеризатор" для теоремы x19. Если в нем отсутствует характеристика вида "вычпрог(x8 ...)", то предпринимается попытка усмотреть в заменяющей части теоремы x19 разность двух переменных X, Y , выбрать новую переменную Z , и скорректировать теорему x19, добавив к ее антецедентам равенство $Z = X - Y$ в качестве последнего антецедента, а в заменяющей части консеквента заменив $X - Y$ на Z . После этого перепроверяется, что процедура "характеризатор" уже выдает характеристику вида "вычпрог(x8 ...)".

Предпринимается попытка усмотреть характеристику "Конст0" теоремы x19. Для этого рассматривается равенство в ее антецедентах, левой частью которого служит некоторая переменная X . Проверяется, что она встречается в имеющих максимальную сложность подтермах заменяющей части теоремы x19 и что имеющие максимальную сложность подтермы заменяемой части содержат единственную переменную Y , не входящую в такие подтермы заменяющей части. Тогда теорема x19 при регистрации в списке вывода сопровождается дополнительной характеристикой "Конст0(x8 $Y X$)". В нашем примере - характеристикой "Конст0(второйтерм $f a$)". Если характеристика "Конст0" указанным образом не усматривается, то теорема x19 просто регистрируется в списке вывода. Напомним что характеристика "Конст0(x1 x2 x3)" указывает на тождество

для уменьшения числа неконстантных операндов на предварительном этапе редактирования ответа задачи на вычисление. Здесь $x1$ - направление замены, $x2$ - устранимый неконстантный терм, $x3$ - заменяющий константный.

Применение дополнительного тождества для варьирования заменяемого терма

1. Попытка равноценной переформулировки заменяемой части тождества свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow (b - c)^2 = -2bc + b^2 + c^2)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \rightarrow (-a)^b = a^b)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Переменной $x10$ присваивается заменяемое выражение, переменной $x11$ - заменяющее. Проверяется, что $x10$ имеет потворные вхождения переменных, а $x11$ - не имеет. Процедура "вартеор" определяет по выражениям $x10$ и $x11$ список $x12$ пар (теорема - список характеристик), которые могут быть полезны для равноценных переформулировок выражений $x10$ и $x11$. Проверяется, что список $x12$ непуст. В нашем примере он насчитывает свыше двух десятков элементов. Переменной $x13$ присваивается вхождение заменяемой части равенства в консеквенте исходной теоремы. Внутри этого вхождения выбирается вхождение $x14$ неоднобуквенного подтерма, имеющего хотя бы одну более чем одноместную операцию. Переменной $x15$ присваивается заголовок этого подтерма. В нашем примере $x14$ - вхождение подтерма " a^2 ", $x15$ - символ "степень". В списке $x12$ выбирается пара, у которой одна из частей равенства в консеквенте ее теоремы имеет заголовок $x15$. Переменной $x19$ присваивается вхождение данной части. В нашем примере выбранная пара соответствует указанной выше дополнительной теореме. Проверяется, что если $x14$ не имеет константного операнда, то и $x19$ такого операнда не имеет.

Оператор "тождвывод" определяет результат $x22$ преобразования вхождения $x14$ при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{bc}((-c) - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 2 - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(2) - \text{even} \rightarrow (-c + b)^2 = c^2 + 2(-c)b + b^2)$$

Проверяется, что число переменных теоремы $x22$ не больше числа переменных исходной теоремы. Если заменяемая часть тождества $x22$ имеет своим заголовком символ типа "отрицания", то в качестве значения переменной $x23$ последовательно рассматриваются тождество $x22$ и тождество, полученное из $x22$ взятием отрицаний обеих частей. Иначе переменной $x23$ передается значение $x22$.

В нашем примере x_{23} совпадает с x_{22} . Переменной x_{24} присваивается результат обработки теоремы x_{23} оператором "Спускоперандов". В нашем примере x_{24} совпадает с x_{22} .

Переменной x_{26} присваивается заменяемая часть тождества x_{24} , переменной x_{27} - заменяющая. В нашем примере x_{26} - правая часть, x_{27} - левая. Если обе эти части имеют своим заголовком один и тот же ассоциативно- коммутативный символ, причем среди своих корневых операндов они имеют одну и ту же переменную, не входящую в прочие операнды, то прием блокируется.

Переменной x_{28} присваивается список antecedентов теоремы x_{24} . Переменной x_{27} переписывается результат обработки выражения x_{27} нормализаторами общей стандартизации относительно посылок x_{28} . В нашем примере x_{27} не изменяется.

Создается накопитель x_{29} таких вариаций заменяемой части x_{26} , в которых она устойчива к общей стандартизации. Прочие вариации не представляют интереса, так как к моменту свертки они в задаче наблюдаться не будут. При порождении вариаций сначала используются тождества списка x_{12} , отличные от дополнительной теоремы, а в конце предпринимается попытка обработать корневые операнды терма x_{26} нормализаторами общей стандартизации и проверить результат на устойчивость. В завершение цикла проверяется непустота списка x_{29} . В нашем примере список x_{29} одноэлементный и состоит из выражения " $c^2 - 2bc + b^2$ ".

Выбирается элемент x_{30} списка x_{29} . Проверяется, что тождества общей стандартизации списка x_{12} , а также исходная теорема не преобразуют выражение x_{30} . Проверяется, что число имеющих кратные вхождения переменных для выражения x_{30} не больше, чем для выражения x_{10} . Если выражение x_{30} имеет переменные, входящие только под операцией типа "отрицание", то предпринимается их инвертирование, одновременно с antecedентами и заменяющей частью теоремы x_{24} . Кроме того, если заголовком x_{30} служит операция типа "отрицание", то происходит одновременное инвертирование как выражения x_{30} , так и заменяющей части. Переменной x_{36} присваивается преобразованная версия выражения x_{30} , переменной x_{38} - преобразованная заменяющая часть, переменной x_{33} - преобразованный список antecedентов теоремы x_{24} . В нашем примере никаких изменений не происходит.

Переменной x_{39} присваивается равенство выражений x_{38} и x_{36} , с сохранением ориентации исходной теоремы. Переменной x_{40} присваивается результат обработки утверждений x_{33} оператором "нормантецеденты" относительно параметров равенства x_{39} . Создается импликация с antecedентами x_{40} и консеквентом x_{39} . Переменной x_{41} присваивается результат обработки ее операторами "полныепосылки" и "нормтеорема". Проверяется, что x_{41} - кванторная импликация без сдвоенных переменных, а число переменных ее корневой связывающей приставки не превосходит 3. Проверяется, что количество операций в заменяемой части теоремы x_{41} не слишком велико, после чего она регистрируется в списке вывода.

2. Попытка проварьировать заменяемую часть тождества свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \sin(b - c) = \sin b \cos c - \sin c \cos b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \sin(-a) = -\sin a)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Проверяется, что теорема не имеет характеристики с заголовком "нормализация", но имеет характеристику "группировки" либо "сокращ(. .)". Проверяется, что длина ее связывающей приставки не более 3. Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Внутри него выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма, и переменной x12 присваивается его заголовок. В нашем примере x11 - вхождение выражения $\sin a$, x12 - символ "синус". Справочники поиска теорем "Сокращение", "перестановки" определяют по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что дополнительная теорема имеет не более 3 переменных, а оценка сложности ее не превосходит оценки сложности исходной теоремы. Переменной x16 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте теоремы x13, которая имеет заголовок x12. Проверяется, что эта часть - заменяемая относительно характеристики "нормализация".

Переменной x18 присваивается результат преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{bc}((-c) - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \sin(-c + b) = (-\sin c) \cos b + \cos(-c) \sin b)$$

Переменной x19 присваивается результат обработки теоремы x18 операторами "Спускоперандов" и "демодификация". В нашем примере x19 совпадает с x18. Предпринимается разблокировка приемов, основанных на уже полученных в списке вывода теоремах. Затем переменной x20 присваивается результат обработки теоремы x19 операторами "Полныепосылки" и "нормтеорема". Проверяется, что x20 - кванторная импликация, у которой длина корневой связывающей приставки меньше увеличенной на 2 длины корневой связывающей приставки исходной теоремы. Если хотя бы одна из частей равенства в консеквенте теоремы x20 небесповторна, проверяются дополнительные ограничения на число переменных корневой связывающей приставки. Затем теорема x20 регистрируется в списке вывода.

3. Попытка применить к заменяемому выражению группировочное тождество, обеспечивающее возможность вычислений с константами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdefg}(c - \text{число} \ \& \ dc - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ 0 \leq d \ \& \ 0 \leq e \rightarrow cd^f + g(de)^f = (c + ge^f)d^f)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq b \rightarrow a^c b^c = (ab)^c)$$

Характеристика - "свертка(второйтерм)". Итоговая теорема будет применяться справа налево для перемножения десятичных констант d, e в основании степени.

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части тождества. Внутри него рассматривается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма вида $F(X, Y)$, где X, Y - переменные. Проверяется, что этот подтерм не встречается в заменяющей части. В нашем примере x11 - подтерм ab . Переменной x12 присваивается заголовок подтерма. В нашем примере - "умножение". Справочник поиска теорем "раздпарам" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему x13. Переменной x16 присваивается характеристика "свертка(N)" дополнительной теоремы. В нашем примере - "свертка(второйтерм)". Если x12 - символ ассоциативной и коммутативной операции, то выбирается переменная, не входящая в дополнительную теорему, и обе части равенства в ее консеквенте "домножаются" операцией x12 на эту переменную. В нашем примере x13 приобретает вид:

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq b \rightarrow da^c b^c = d(ab)^c)$$

Переменной x18 присваивается двухэлементный список параметров подтерма x11. Оператор "тождвывод" определяет результат x19 преобразования вхождения x11 при помощи теоремы x13. Оператору "тождвывод" передается опция (пересекаются $X \ Y$), обеспечивающая проверку того, что термы, унифицированные с переменными X, Y , имеют общую переменную. Переменной x20 присваивается результат обработки теоремы x19 оператором "Нормтеорема", которому передается опция "длина". Проверяется, что этот результат - кванторное тождество, заменяющая часть которого имеет ровно 2 корневых операнда. Затем теорема x20 регистрируется в списке вывода, причем проверяется, что характеристизатор создает для нее характеристики с заголовком "вычпрог", и сопровождается она только такими характеристиками.

Применение дополнительного тождества для упрощения заменяющего термина

1. Попытка превратить тождество свертки в тождество общей стандартизации за счет сильного упрощения заменяющего выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bde}(b - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(d, e) \rightarrow (b \setminus d) \cup (b \setminus e) = b)$$

из теоремы

$$\forall_{bcf}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow (b \setminus c) \cup (b \setminus f) = b \setminus (c \cap f))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{de}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(d, e) \rightarrow d \cap e = \emptyset)$$

Характеристика - "свертка(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяющая часть, переменной x11 - заменяемая. Переменной x12 присваивается список пар (теорема - ее характеристики), определяемых справочниками поиска теорем "констнорм", "тожд", "поглощается", "поглощает" по заголовкам неоднобуквенных подтермов терма x10. Проверяется, что список x12 непуст. В нашем примере он имеет 11 элементов.

Переменной x13 присваивается вхождение в теорему заменяющей части консеквента. Внутри x13 рассматривается вхождение x14 неоднобуквенного подтерма, имеющего более одного корневого операнда. Переменной x15 присваивается заголовок этого подтерма. В нашем примере x14 - вхождение подтерма " $c \cap f$ ", x15 - символ "пересечение". В списке x12 выбирается пара x16, переменной x17 присваивается ее теорема, и проверяется, что одна из частей равенства в консеквенте данной теоремы имеет заголовок x15. В нашем примере x17 - указанная выше дополнительная теорема.

Оператор "тождвывод" определяет результат x22 преобразования вхождения x14 при помощи дополнительной теоремы. Переменной x23 присваивается результат обработки теоремы x22 оператором "нормтеорема". Проверяется, что x23 - кванторное тождество. Переменной x24 присваивается его заменяемая часть. Проверяется, что число вхождений переменных в терм x24 не больше такого числа для терма x11. Если число переменных, имеющих в терме x24 более одного вхождения, больше 1, то проверяется, что общее число вхождений переменных в x24 не больше 5. Проверяется, что импликация x23 и дополнительная теорема не подобны. Затем x23 регистрируется в списке вывода, причем проверяется, что она получает характеристику "нормализация".

2. Попытка превратить тождество свертки в тождество общей стандартизации за счет перестановочного тождества общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acd}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow (a - d)^c(-1)^c = (d - a)^c)$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow b^c(-1)^c = (-b)^c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow -(a - b) = b - a)$$

Характеристика - "свертка(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается вхождение заменяющей части тождества. Внутри него рассматривается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. Переменной x12 присваивается заголовок этого подтерма. В нашем примере x11 - вхождение подтерма " $-b$ ", x12 - символ "минус". Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет не более двух переменных. Переменной x18

присваивается заменяемая часть дополнительной теоремы, определяемая ее характеристикой "нормализация(...)". Проверяется, что она имеет заголовок x12 и неповторна, а оценка ее сложности меньше оценки сложности консеквента исходной теоремы.

Оператор "тождвывод" определяет результат x19 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Разрешаются только характеристики с заголовками "нормализация" и "уменьшсложн".

3. Попытка перехода в заменяющем терме к более простому операнду сложной операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{defg}(\neg(f - 1 = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(g) - \text{even}) \ \& \ 0 < f \ \& \ 0 < de \ \& \ 0 < d^g \ \& \ 0 < e^g \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{rational} \rightarrow \\ g \log_f(de) = \log_f(d^g) + \log_f(e^g))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \rightarrow \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcf}(\neg(c - 1 = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < ab \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{rational} \rightarrow f \log_c(ab) = \log_c(a^f b^f))$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)". Заметим, что одновременно теорема имеет и характеристику "нормализация(второйтерм)". Это ничему не противоречит.

Переменной x10 присваивается вхождение заменяющей части тождества. Внутри него рассматривается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. Переменной x12 присваивается заголовок этого подтерма. В нашем примере x11 - вхождение подтерма " $\log_a(bc)$ ", x12 - символ "логарифм". Справочник поиска теорем "упрощимп" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику вида "сокращ(N)". Оператор "тождвывод" определяет результат x17 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Простейшие следствия определения через условное выражение

1. Перестановка альтернативных выражений при переходе к отрицанию условия.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow |b| = (b \text{ при } 0 < b, \text{ иначе } -b))$$

из теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow |b| = (-b \text{ при } b \leq 0, \text{ иначе } b))$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть. В ней рассматривается вхождение x_{11} символа "вариант". Переменной x_{12} присваивается отрицание первого операнда вхождения x_{11} . В нашем примере оно имеет вид " $\neg(b \leq 0)$ ". Проверяется, что утверждение x_{12} элементарно и имеет заголовок "не". Переменной x_{13} присваивается список antecedентов теоремы. Переменной x_{14} присваивается результат упрощения терма x_{12} относительно посылок x_{13} при помощи задачи на преобразование. В нашем примере - " $0 < b$ ". Проверяется, что x_{14} - элементарное утверждение, не имеющее заголовка "не". Переменной x_{16} присваивается выражение "вариант($x_{14} P Q$)", где Q - второй операнд вхождения x_{11} , P - последний операнд этого вхождения. Переменной x_{17} присваивается результат замены вхождения x_{11} в терме x_{10} на терм x_{16} . В нашем примере x_{11} - корневое вхождение, так что x_{17} совпадает с x_{16} . Переменной x_{18} присваивается заменяющая часть теоремы. Создается импликация с antecedентами x_{13} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{17} и x_{18} , причем сохраняется ориентация исходной теоремы. Эта импликация регистрируется в списке вывода.

2. Равенство условного выражения своей первой альтернативе.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = a \leftrightarrow 0 \leq a)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = (a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } -a))$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть. В ней рассматривается вхождение x_{11} символа "вариант". Проверяется, что оно корневое. Переменной x_{12} присваивается список параметров подтерма x_{11} . Проверяется, что он одноэлементный, и переменной x_{13} присваивается данный элемент. В нашем примере x_{13} - переменная a . Переменной x_{14} присваивается список antecedентов теоремы. Проверяется, что он непуст.

Решается задача на описание с посылками x_{14} , условием которой служит равенство второго и последнего операндов выхождения x_{11} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "одз", "неизвестные x_{13} ". В нашем примере условием задачи служит равенство " $a = -a$ ". Переменной x_{16} присваивается ответ задачи. В нашем примере он имеет вид " $a = 0$ ".

Переменной x_{17} присваивается дизъюнкция первого операнда вхождения x_{11} и утверждения x_{16} . Она упрощается относительно посылок x_{14} при помощи задачи на преобразование, и результат присваивается переменной x_{19} . В нашем примере - " $0 \leq a$ ". Переменной x_{20} присваивается результат обработки утверждения x_{19} оператором "нормили" относительно посылок x_{14} . В нашем

примере он совпадает с утверждением x19. Проверяется, что x20 - элементарное утверждение. Переменной x21 присваивается эквивалентность равенства заменяющей части теоремы второму операнду вхождения x11 и утверждения x20. Затем создается теорема с антецедентами x14 и консеквентом x21. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Равенство условного выражения своей второй альтернативе.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow -a = |a| \leftrightarrow a \leq 0)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = (a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } -a))$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Переменной x10 присваивается заменяемая часть. В ней рассматривается вхождение x11 символа "вариант". Проверяется, что оно корневое. Переменной x12 присваивается список параметров подтерма x11. Проверяется, что он одноэлементный, и переменной x13 присваивается данный элемент. В нашем примере x13 - переменная a . Переменной x14 присваивается список антецедентов теоремы. Проверяется, что он непуст.

Решается задача на описание с посылками x14, условием которой служит равенство второго и последнего операндов выхода x11. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "одз", "неизвестные x13". В нашем примере условием задачи служит равенство " $a = -a$ ". Переменной x16 присваивается ответ задачи. В нашем примере он имеет вид " $a = 0$ ".

Дальше начинаются небольшие отличия. Переменной x17 присваивается дизъюнкция отрицания первого операнда вхождения x11 и утверждения x16. Она упрощается относительно посылок x14 при помощи задачи на преобразование, и результат присваивается переменной x19. В нашем примере - " $a \leq 0$ ". Переменной x20 присваивается результат обработки утверждения x19 оператором "нормили" относительно посылок x14. В нашем примере он совпадает с утверждением x19. Проверяется, что x20 - элементарное утверждение. Переменной x21 присваивается эквивалентность равенства заменяющей части теоремы последнему операнду вхождения x11 и утверждения x20. Затем создается теорема с антецедентами x14 и консеквентом x21. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Вывод общего свойства альтернативных подвыражений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow 0 \leq |a|)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = (a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } -a))$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть. В ней рассматривается вхождение x_{11} символа "вариант". Проверяется, что оно корневое. Переменной x_{12} присваивается список параметров подтерма x_{11} . Проверяется, что он одноэлементный, и переменной x_{13} присваивается данный элемент. В нашем примере x_{13} - переменная a . Переменной x_{14} присваивается список antecedентов теоремы. Проверяется, что он непуст.

Выбирается переменная x_{15} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Вводится пустой накопитель x_{16} условий на значение условного выражения, обнаруживаемых для каждой из альтернативных ситуаций. Для его заполнения поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{17} присваивается первый операнд вхождения x_{11} , а переменной x_{18} - второй операнд. Во втором случае переменной x_{17} присваивается отрицание первого операнда вхождения x_{11} , а переменной x_{18} - последний операнд. В каждом из случаев решается задача на описание, посылки которой суть утверждения x_{14} , в единственное условие - равенство переменной x_{15} выражению x_{18} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "одз", "неизвестные x_{13} ". Ответ присваивается переменной x_{20} . Среди конъюнктивных членов ответа находится равенство переменной x_{13} некоторому выражению x_{22} . Переменной x_{23} присваивается результат подстановки в утверждение x_{17} выражения x_{22} вместо переменной x_{13} . Затем решается задача на исследование, посылками которой служат утверждения списка x_{14} и утверждение x_{23} . Единственная цель задачи - "неизвестные x_{15} ". После решения этой задачи из ее списка посылок извлекаются все содержащие переменную x_{15} утверждения, которые добавляются к списку x_{16} .

По завершении указанного цикла все переменные, начиная с x_{17} , снова оказываются не определены. В нашем примере x_{16} состоит из двух утверждений " $0 \leq b$ " и " $0 < b$ ". Переменной x_{17} присваивается какой-либо элемент списка x_{16} . В нашем примере - " $0 \leq b$ ".

Далее снова рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{18} присваивается первый операнд вхождения x_{11} , а переменной x_{19} - второй операнд. Во втором случае переменной x_{18} присваивается отрицание первого операнда вхождения x_{11} , а переменной x_{19} - последний операнд. Переменной x_{20} присваивается результат подстановки выражения x_{19} вместо переменной x_{15} в утверждение x_{17} , а затем при помощи задачи на доказательство проверяется, что x_{20} - следствие утверждений списка x_{14} и утверждения x_{18} . Если хотя бы в одном из случаев это не усматривается, то прием не применяется.

После указанных проверок все переменные начиная с x_{18} снова оказываются не определены. Переменной x_{18} присваивается результат подстановки в x_{17} заменяющего выражения исходной теоремы вместо переменной x_{15} . Создается импликация с antecedентами x_{14} и консеквентом x_{18} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Вывод эквивалентности свертки дизъюнкции из тождества для условного выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(0 < b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a = b \ \vee \ b = -a \leftrightarrow b = |a|)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = (a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } -a))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Переменной x10 присваивается заменяемая часть. В ней рассматривается вхождение x11 символа "вариант". Проверяется, что оно корневое. Переменной x12 присваивается список параметров подтерма x11. Проверяется, что он одноэлементный, и переменной x13 присваивается данный элемент. В нашем примере x13 - переменная a . Переменной x14 присваивается список antecedентов теоремы. Проверяется, что он непуст.

Выбирается переменная x15, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Вводится пустой накопитель x16 условий на значение условного выражения, обнаруживаемых для каждой из альтернативных ситуаций. Для его заполнения поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x17 присваивается первый операнд вхождения x11, а переменной x18 - второй операнд. Во втором случае переменной x17 присваивается отрицание первого операнда вхождения x11, а переменной x18 - последний операнд. В каждом из случаев решается задача на описание, посылки которой суть утверждения x14, в единственное условие - равенство переменной x15 выражению x18. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "одз", "неизвестные x13". Ответ присваивается переменной x20. Среди конъюнктивных членов ответа находится равенство переменной x13 некоторому выражению x22. Переменной x23 присваивается результат подстановки в утверждение x17 выражения x22 вместо переменной x13. Затем решается задача на исследование, посылками которой служат утверждения списка x14 и утверждение x23. Единственная цель задачи - "неизвестные x15". После решения этой задачи из ее списка посылок извлекаются все содержащие переменную x15 утверждения, которые добавляются к списку x16.

По завершении указанного цикла все переменные, начиная с x17, снова оказываются не определены. В нашем примере x16 состоит из утверждений " $0 \leq b$ ", " $0 < b$ ". Переменной x17 присваивается какой-либо элемент списка x16. В нашем примере - " $0 < b$ ".

Дальше начинаются отличия. Поочередно рассматриваются два случая, в первом из которых переменной x18 присваивается второй операнд вхождения x11, а во втором - последний операнд. В каждом из случаев проверяется, что равенство переменной x15 заменяющему выражению исходной теоремы является следствием утверждений списка x14 и равенства переменной x15 выражению x18.

По завершению цикла проверок все переменные начиная с x18 снова оказываются не определены. Переменной x18 присваивается результат добавления к

списку x_{14} утверждения x_{17} . Предпринимается попытка определить тип T значений альтернативных выражений - второго и последнего операндов вхождения x_{11} . Если она удалась, то к списку x_{18} добавляется утверждение " $T(x_{15})$ ". Иначе x_{18} остается без изменений.

Переменной x_{19} присваивается утверждение "эквивалентно(или(равно($x_{15} A$ равно($x_{15} B$)) равно($C x_{15}$)))". Здесь A, B - второй и последний операнды вхождения x_{11} , C - заменяющее выражение теоремы. Создается импликация с антецедентами x_{18} и консеквентом x_{19} . Она обрабатывается оператором "норм-теорема" и регистрируется в списке вывода.

6. Усмотрение случая равных альтернативных выражений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = 0 \leftrightarrow a = 0)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = (a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } -a))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть. В ней рассматривается вхождение x_{11} символа "вариант". Проверяется, что оно корневое. Переменной x_{12} присваивается список параметров подтерма x_{11} . Проверяется, что он одноэлементный, и переменной x_{13} присваивается данный элемент. В нашем примере x_{13} - переменная a . Переменной x_{14} присваивается список антецедентов теоремы. Проверяется, что он непуст.

Выбирается переменная x_{15} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Вводится пустой накопитель x_{16} условий на значение условного выражения, обнаруживаемых для каждой из альтернативных ситуаций. Для его заполнения поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{17} присваивается первый операнд вхождения x_{11} , а переменной x_{18} - второй операнд. Во втором случае переменной x_{17} присваивается отрицание первого операнда вхождения x_{11} , а переменной x_{18} - последний операнд. В каждом из случаев решается задача на описание, посылки которой суть утверждения x_{14} , в единственное условие - равенство переменной x_{15} выражению x_{18} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "одз", "неизвестные x_{13} ". Ответ присваивается переменной x_{20} . Среди конъюнктивных членов ответа находится равенство переменной x_{13} некоторому выражению x_{22} . Переменной x_{23} присваивается результат подстановки в утверждение x_{17} выражения x_{22} вместо переменной x_{13} . Затем решается задача на исследование, посылками которой служат утверждения списка x_{14} и утверждение x_{23} . Единственная цель задачи - "неизвестные x_{15} ". После решения этой задачи из ее списка посылок извлекаются все содержащие переменную x_{15} утверждения, которые добавляются к списку x_{16} .

По завершении указанного цикла все переменные, начиная с x_{17} , снова оказываются не определены. В нашем примере x_{16} состоит из утверждений " $0 \leq b$ ", " $0 < b$ ". Переменной x_{17} присваивается какой-либо элемент списка x_{16} . В нашем примере - " $0 \leq b$ ".

Дальше начинаются отличия. Поочередно рассматриваются два случая, в первом из которых переменной x_{18} присваивается второй операнд вхождения x_{11} , а во втором - последний операнд. В каждом из случаев проверяется, что равенство переменной x_{15} заменяющему выражению исходной теоремы является следствием утверждений списка x_{14} и равенства переменной x_{15} выражению x_{18} .

По завершению цикла проверок все переменные начиная с x_{18} снова оказываются не определенными. Переменной x_{18} присваивается результат добавления к списку x_{14} утверждения x_{17} . Предпринимается попытка определить тип T значений альтернативных выражений - второго и последнего операндов вхождения x_{11} . Если она удалась, то к списку x_{18} добавляется утверждение " $T(x_{15})$ ". Иначе x_{18} остается без изменений.

Дальше начинаются отличия. Переменной x_{19} присваивается результат добавления к списку x_{14} равенства заменяющего выражения теоремы переменной x_{15} . При помощи задачи на доказательство проверяется, что x_{17} - следствие утверждений x_{19} .

Решается задача на описание x_{21} , имеющая единственную посылку "истина" и единственное условие - равенство второго и последнего операндов вхождения x_{11} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{13} ". Ответ присваивается переменной x_{22} . В нашем примере он имеет вид " $a = 0$ ". Проверяется, что ответ представляет собой равенство переменной x_{13} некоторому выражению x_{23} . Переменной x_{24} присваивается результат подстановки выражения x_{23} вместо переменной x_{13} во второй операнд вхождения x_{11} . В нашем примере это константа 0. Переменной x_{26} присваивается результат упрощения задачей на преобразование выражения x_{24} относительно посылок x_{14} . Переменной x_{27} присваивается результат подстановки в утверждение x_{17} выражения x_{26} вместо переменной x_{15} . В нашем примере - " $0 \leq 0$ ". Переменной x_{28} присваивается утверждение "и(или(равно(x_{26} A) равно(x_{26} B)) x_{27})", где A, B - второй и последний операнды вхождения x_{11} . Переменной x_{30} присваивается результат упрощения утверждения x_{28} относительно посылок x_{14} задачей на преобразование. В нашем примере - " $a = 0$ ". Переменной x_{31} присваивается утверждение "эквивалентно(равно(C x_{26}) x_{30})", где C - заменяющее выражение исходной теоремы. Создается импликация с антецедентами x_{14} и консеквентом x_{31} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

7. Вывод эквивалентности свертки конъюнкции из тождества для условного выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ (a = b \ \vee \ b = -a) \ \& \ b \leq 0 \leftrightarrow b = -|a|)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow -|a| = (-a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } a))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть. В ней рассматривается вхождение x_{11} символа "вариант". Проверяется, что оно корневое. Переменной x_{12} присваивается список параметров подтерма x_{11} . Проверяется, что он одноэлементный, и переменной x_{13} присваивается данный элемент. В нашем примере x_{13} - переменная a . Переменной x_{14} присваивается список антецедентов теоремы. Проверяется, что он непуст.

Выбирается переменная x_{15} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Вводится пустой накопитель x_{16} условий на значение условного выражения, обнаруживаемых для каждой из альтернативных ситуаций. Для его заполнения поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{17} присваивается первый операнд вхождения x_{11} , а переменной x_{18} - второй операнд. Во втором случае переменной x_{17} присваивается отрицание первого операнда вхождения x_{11} , а переменной x_{18} - последний операнд. В каждом из случаев решается задача на описание, посылки которой суть утверждения x_{14} , в единственное условие - равенство переменной x_{15} выражению x_{18} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "одз", "неизвестные x_{13} ". Ответ присваивается переменной x_{20} . Среди конъюнктивных членов ответа находится равенство переменной x_{13} некоторому выражению x_{22} . Переменной x_{23} присваивается результат подстановки в утверждение x_{17} выражения x_{22} вместо переменной x_{13} . Затем решается задача на исследование, посылками которой служат утверждения списка x_{14} и утверждение x_{23} . Единственная цель задачи - "неизвестные x_{15} ". После решения этой задачи из ее списка посылок извлекаются все содержащие переменную x_{15} утверждения, которые добавляются к списку x_{16} .

По завершении указанного цикла все переменные, начиная с x_{17} , снова оказываются не определены. В нашем примере x_{16} состоит из утверждений " $b \leq 0$ ", " $b < 0$ ". Переменной x_{17} присваивается какой-либо элемент списка x_{16} . В нашем примере - " $b \leq 0$ ".

Дальше начинаются отличия. Поочередно рассматриваются два случая, в первом из которых переменной x_{18} присваивается второй операнд вхождения x_{11} , а во втором - последний операнд. В каждом из случаев проверяется, что равенство переменной x_{15} заменяющему выражению исходной теоремы является следствием утверждений списка x_{14} и равенства переменной x_{15} выражению x_{18} .

По завершению цикла проверок все переменные начиная с x_{18} снова оказываются не определены. Переменной x_{18} присваивается результат добавления к списку x_{14} утверждения x_{17} . Предпринимается попытка определить тип T значений альтернативных выражений - второго и последнего операндов вхождения x_{11} . Если она удалась, то к списку x_{18} добавляется утверждение " $T(x_{15})$ ". Иначе x_{18} остается без изменений.

Переменной x_{19} присваивается результат добавления к списку x_{14} равенства заменяющего выражения теоремы переменной x_{15} . При помощи задачи на доказательство проверяется, что x_{17} - следствие утверждений x_{19} . Переменной x_{21} присваивается утверждение "эквивалентно(и(или(равно(x_{15} A) равно(x_{15} A))

$B))x17)$ равно(C $x15)$ ". Здесь A, B - второй и последний операнды вхождения $x11$, C - заменяющее выражение теоремы. Переменной $x22$ присваивается список $x14$. Если указанный выше тип T был найден, то к списку $x22$ добавляется утверждение " $T(x15)$ ". Затем создается импликация с антецедентами $x22$ и консеквентом $x21$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

8. Дополнительный вывод эквивалентности свертки дизъюнкции из тождества для условного выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow b = a \ \& \ 0 \leq a \vee b = -a \ \& \ a \leq 0 \leftrightarrow |a| = b)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = (a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } -a))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема - до момента проверки того, что $x17$ является следствием утверждений $x19$ включительно. Отличие состоит лишь в том, что для нашего примера $x17$ имеет вид " $0 \leq b$ ".

Дальше начинаются отличия. Переменной $x21$ присваивается результат подстановки в утверждение $x17$ второго операнда вхождения $x11$ вместо переменной $x15$, переменной $x22$ - результат подстановки в $x17$ последнего операнда вхождения $x11$ вместо $x15$. В нашем примере $x21$ имеет вид " $0 \leq a$ ", $x22$ - вид " $0 \leq -a$ ". Переменной $x23$ присваивается пара результатов упрощения утверждений $x21$, $x22$ относительно посылок $x14$ задачами на преобразование. В нашем примере получаем утверждения " $0 \leq a$ " и " $a \leq 0$ ". Переменной $x24$ присваивается утверждение "эквивалентно(или(и(равно($x15$ A) P) и(равно($x15$ B) Q)) равно(C $x15)$)". Здесь A, B - второй и последний операнды вхождения $x11$, P и Q - первый и второй элементы пары $x23$, C - заменяющее выражение теоремы.

Переменной $x25$ присваивается список $x14$. Если удастся определить тип T значения выражений A, B , он пополняется утверждением " $T(x15)$ ". Затем создается импликация с антецедентами $x25$ и консеквентом $x24$. Она регистрируется в списке вывода.

9. Попытка проварьировать условие в условном выражении из заменяемой части тождества свертки, используя эквивалентность общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \rightarrow c|a| = (ac \text{ при } 0 < a \ \& \ 0 < c, \text{ иначе } -ac))$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \rightarrow c|b| = (-bc \text{ при } b < 0 \ \& \ 0 < c, \text{ иначе } bc))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow -a < 0 \leftrightarrow 0 < a)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяющее выражение, переменной x_{11} - заменяемое. Внутри заменяемой части рассматривается вхождение x_{12} символа "вариант". Проверяется, что подтерм x_{12} не имеет переменных, связанных внутри x_{11} кванторами либо описателями. Внутри первого операнда вхождения x_{12} рассматривается вхождение x_{13} неоднобуквенного подтерма. Переменной x_{14} присваивается его заголовок. В нашем примере x_{13} - вхождение утверждения $b < 0$, x_{14} - символ "меньше". Справочник поиска теорем "упрощэкв" определяет по x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что если заменяемая часть дополнительной теоремы имеет константный корневой операнд, то константный корневой операнд имеет и вхождение x_{13} . Затем оператор "тождвывод" определяет результат x_{19} преобразования вхождения x_{13} при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

10. Попытка унификации альтернативного выражения с подтермом заменяемой части упрощающего тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow -|a| = (-a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } a))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| = (a \text{ при } 0 \leq a, \text{ иначе } -a))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow - - b = b)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяющее выражение, переменной x_{11} - заменяемое. Внутри заменяемой части рассматривается вхождение x_{12} символа "вариант". Проверяется, что подтерм x_{12} не имеет переменных, связанных внутри x_{11} кванторами либо описателями. Проверяется, что x_{12} - корневой операнд равенства в консеквенте теоремы. Рассматриваются два случая. В первом случае переменной x_{13} присваивается вхождение второго операнда вхождения x_{12} , во втором - вхождение последнего операнда. В нашем примере рассматривается второй случай, т.е. x_{13} - вхождение выражения " $-a$ ". Переменной x_{14} присваивается символ по вхождению x_{13} . В нашем примере - "минус". Справочник поиска теорем "обращение" определяет по x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{15} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{15} имеет вид " $\forall_b(b - \text{число} \rightarrow - - b = b)$ ". Переменной x_{18} присваивается направление общей стандартизации для дополнительной теоремы. В нашем примере - "второйтерм". Переменной x_{20} присваивается вхождение консеквента теоремы x_{15} . Если x_{18} - символ "первыйтерм", то переменной x_{21} присваивается вхождение второго операнда равенства x_{20} , переменной x_{22} - вхождение первого. Иначе переменной x_{21} присваивается вхождение первого операнда, переменной x_{22} - второго. В нашем примере x_{21} - вхождение выражения " $- - b$ ".

Проверяется, что подтерм x_{21} неоднобуквенный. Строго внутри него находится вхождение символа x_{14} . В нашем примере - вхождение выражения " $-b$ ".

Переменной x_{24} присваивается подтерм x_{23} , переменной x_{25} - подтерм x_{13} . Переменной x_{26} присваивается список параметров термов x_{24} и x_{25} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{26} , унифицирующая термы x_{24} и x_{25} . Переменной x_{28} присваивается результат замены внутри подтерма x_{21} вхождения x_{23} на заменяющую часть исходной теоремы. В нашем примере - " $-|a|$ ". Переменной x_{29} присваивается результат применения к x_{28} подстановки S . В нашем примере он совпадает с x_{28} . Переменной x_{30} присваивается вхождение отличной от x_{13} альтернатива условного выражения x_{12} . В нашем примере - вхождения переменной a . Переменной x_{31} присваивается результат замены внутри подтерма x_{21} вхождения x_{21} на подтерм x_{30} . В нашем примере получаем " $-a$ ". Если x_{13} - второй операнд вхождения x_{12} , то переменной x_{32} присваивается выражение "вариант($P Q x_{31}$)", иначе - выражение "вариант($P x_{31} Q$)". Здесь P - первый операнд вхождения x_{12} , Q - подтерм x_{22} . В нашем примере x_{32} имеет вид " $(-a$ при $0 \leq a$, иначе $b)$ ".

Переменной x_{33} присваивается результат применения подстановки S к терму x_{32} . В нашем примере - " $(-a$ при $0 \leq a$, иначе $a)$ ". Переменной x_{34} присваивается равенство выражений x_{29} и x_{33} . Переменной x_{35} присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и теоремы x_{15} . Затем создается импликация с антецедентами x_{35} и консеквентом x_{34} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

11. Попытка проварьировать тождество свертки условного выражения путем применения к условию сокращающей эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \max(c + e, d + e) = e + \max(c, d))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \max(a, b) = (b \text{ при } a \leq b, \text{ иначе } a))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a \leq b \leftrightarrow a + c \leq b + c)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяющее выражение, переменной x_{11} - заменяемое. Внутри заменяемой части рассматривается вхождение символа "вариант". Проверяется, что подтерм x_{12} не имеет переменных, связанных внутри x_{11} кванторами либо описателями. Переменной x_{13} присваивается заголовок первого операнда вхождения x_{12} . В нашем примере - "меньшеилиравно".

Справочник поиска теорем "Сокращ" определяет по x_{13} указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x_{18} преобразования первого операнда вхождения x_{12} в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" при отключенной блокировке приемов, основанных на стартовой теореме ячейки вывода. Полученная теорема регистрируется в списке вывода.

12. Попытка навесить внешнюю операцию на условное выражение с константой для обобщения сверточного тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow -\text{asg}(b) = (a \text{ при } b < 0, \text{ иначе } -a))$$

из теоремы

$$\forall_b(\neg(b = 0) \ \& \ b - \text{число} \rightarrow -\text{sg}(b) = (1 \text{ при } b < 0, \text{ иначе } -1))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a \cdot 1 = a)$$

Переменной x10 присваивается заменяющее выражение, переменной x11 - заменяемое. Проверяется, что выражение x11 имеет заголовок "вариант", а выражение x10 элементарно. Рассматриваются два случая. В первом из них переменной x12 присваивается вхождение второго операнда терма x11, во втором - вхождение последнего операнда. В нашем примере x12 - вхождение символа 1. Проверяется, что терм x12 однобуквенный, и переменной x13 присваивается его заголовок. Справочник поиска теорем "симвмнож" определяет по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x16 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x16 совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x20 присваивается заменяемая часть теоремы x16. Проверяется, что ее заменяющая часть неконстантная. Переменной x21 присваивается вхождение того корневого операнда терма x21, который равен x13. Переменной x22 присваивается результат замены вхождения x21 на выражение x10. В нашем примере - " $a \cdot (-\text{sg}(b))$ ".

Переменной x23 присваивается результат замены вхождения x21 на второй операнд терма x11, переменной x24 - результат замены вхождения x21 на последний операнд терма x11. Переменной x25 присваивается выражение "вариант(P x23 x24)", где P - первый операнд терма x11. В нашем примере x25 имеет вид " $(a \cdot 1 \text{ при } b < 0, \text{ иначе } a \cdot (-1))$ ". Переменной x26 присваивается объединение списков antecedентов исходной теоремы и теоремы x16. К нему добавляются утверждения, необходимые для сопровождения выражений x23 и x24 по о.д.з. Создается импликация с antecedентами x26, консеквентом которой служит равенство выражений x22 и x25. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Обобщение тождества

1. Обобщение сверточного тождества путем ввода бесповторного дополнительного параметра операнда.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abce}(\neg(b = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow a/(bc) + e/c = (e + a/b)/c)$$

из теоремы

$$\forall_{ace}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \rightarrow \ a/c + e/c = (a + e)/c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ade}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \rightarrow \ d/(ae) = (d/e)/a)$$

Характеристика - "свертка(второйтерм)".

Программа приема практически дословно воспроизводит программу приема с тем же названием, рассматривавшегося ранее для другой характеристики. Для удобства чтения повторим ее.

Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. В заменяемой части рассматривается вхождение x12 двуместной операции. В нашем случае - вхождение дроби a/c . Переменной x13 присваивается символ по вхождению x12. Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "нормализация(N)". В нашем примере N - "первыйтерм". Переменной x19 присваивается заменяемое выражение дополнительной теоремы. Проверяется, что оно имеет заголовок x13. Рассматривается корневой операнд x20 выражения x19, представляющий собой двуместную операцию от переменных. В нашем случае - " d/e ". Проверяется, что эта операция имеет единицу по некоторому своему операнду. Переменной x22 присваивается первый операнд операции x20, переменной x23 - второй. Проверяется, что эти переменные различны. В нашем случае x22 - d , x23 - e . Находится корневой операнд выражения x19, представляющий собой переменную x25. В нашем случае - переменную a . Переменной x26 присваивается вхождение операнда операции x12, расположенного так же, как x20 в x19. В коммутативном случае берется любой операнд. Для нашего примера x26 - вхождение переменной a . Проверяется, что по вхождению x26 расположена переменная, и эта переменная присваивается переменной x27. Проверяется, что она имеет единственное вхождение в x10. Переменной x28 присваивается другой операнд операции x12. В нашем примере - c . Переменной x30 присваивается та из переменных x22, x23, по которой операция x20 имеет единицу, переменной x29 - другая из них. В нашем примере x29 - d , x30 - e . Переменной x31 присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет заголовок x13. Переменной x32 присваивается вхождение корневого операнда выражения x31, расположенного так же, как операнд x20 операции x19. В нашем примере x32 - вхождение переменной d . Проверяется, что по вхождению x32 расположена переменная x29. Переменной x33 присваивается вхождение корневого операнда выражения x31, отличное от x32. Проверяется, что этот операнд неоднобуквенный и его заголовком служит коммутативный символ x34. В нашем примере x33 имеет вид ae . Проверяется, что если терм x28 имеет заголовок x34, то у него отсутствует корневой операнд, являющийся бесповторной переменной. Выбирается новая переменная x35. В нашем примере - b . Переменной x36 присваивается результат соединения операцией x34 термов x35, x28. Переменной x37 присваивается результат замены вхождения x28 в терм x10 на терм x36. В нашем случае он имеет вид $a/(bc) + e/c$. Находится результат x38 подстановки в терм x20 переменных x27 и x35 вместо переменных x29 и x30. В нашем случае - a/b .

Переменной x_{39} присваивается результат подстановки терма x_{38} вместо переменной x_{27} в выражение x_{11} . В нашем примере - " $(a/b + e)/c$ ". Переменной x_{41} присваивается набор результатов подстановки в antecedentes дополнительной теоремы выражений x_{27} , x_{35} , x_{28} вместо переменных x_{29} , x_{30} , x_{25} . В нашем примере имеем набор утверждений " $\neg(c = 0)$ ", " $\neg(b = 0)$ ", " c - число", " a - число", " b - число". Переменной x_{42} присваивается объединение списка x_{41} с результатами подстановки в antecedentes исходной теоремы терма x_{38} вместо переменной x_{27} . Если x_{28} - не переменная и имеет своим заголовком символ, отличный от x_{34} , то находится результат x_{43} обработки терма x_{36} оператором "норм" относительно посылок x_{42} . Проверяется, что переменная x_{35} в терме x_{43} не является операндом ассоциативно-коммутативной операции, уже имеющей среди своих операндов и другую неповторную переменную. Затем формируется импликация с antecedентами x_{42} и равенством термов x_{39} , x_{37} в консеквенте. Она обрабатывается оператором "нормтеорема". Проверяется, что новая теорема имеет большую длину связывающей приставки, чем исходная, причем в ней отсутствуют "сдвоенные" переменные, допускающие замену на одну новую переменную. Выведенная теорема регистрируется в списке вывода с пометкой "обобщение".

2. Обобщение сверточного тождества путем ввода неповторного внешнего параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow ab/d + ac/e = a(b/d + c/e))$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(d = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow ac + ab/d = a(c + b/d))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e(a/b) = ae/b)$$

Характеристика - "свертка(второйтерм)".

Программа приема практически дословно воспроизводит программу приема с тем же названием, рассматривавшегося ранее для другой характеристики. Для удобства чтения повторим ее.

Переменной x_{10} присваивается заменяемый терм, переменной x_{11} - заменяющий. В заменяемом терме выбирается входение x_{12} двуместной операции x_{13} . В нашем случае - произведения " ac ". Справочник поиска теорем "перестановки" находит по символу x_{13} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "нормализация(N)". Переменной x_{19} присваивается заменяемый (в смысле направления N) терм дополнительной теоремы. В нашем случае - терм " $e \cdot (a/b)$ ". Проверяется, что он имеет заголовок x_{13} . Среди корневых операндов терма x_{19} выбирается такой операнд x_{20} , который представляет собой двуместную операцию от двух различных переменных x_{22} , x_{23} . В нашем случае - a/b . Проверяется, что эта операция имеет единицу по

одному из своих операндов. Проверяется также, что другой корневой операнд x_{24} терма x_{19} представляет собой переменную x_{25} . Среди операндов операции x_{12} выбирается тот, номер которого равен номеру операнда x_{24} (в случае коммутативной операции x_{13} - любой операнд). Проверяется, что этот операнд x_{26} - переменная x_{27} , имеющая единственное вхождение в заменяемый терм x_{10} . В нашем случае x_{27} - переменная c . Переменной x_{28} присваивается вхождение другого операнда операции x_{12} . В нашем случае - переменной a . Переменной x_{29} присваивается та из переменных x_{22} , x_{23} , по которой операция x_{20} не имеет единицы, переменной x_{30} - та, по которой она имеет единицу. Соответственно, в нашем случае x_{29} - a , x_{30} - b . Переменной x_{31} присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. Проверяется, что его заголовок отличен от символа x_{13} , причем число корневых операндов равно 2. Переменной x_{32} присваивается тот корневой операнд терма x_{31} , который представляет собой операцию x_{13} от двух переменных. В нашем случае это ae . Проверяется, что одна из переменных - x_{29} , причем в случае некоммутирующей x_{13} она расположена под тем же номером, что операнд x_{20} операции x_{19} . Другая переменная должна быть равна x_{25} . Переменной x_{35} присваивается оставшийся корневой операнд терма x_{31} . Проверяется, что он представляет собой переменную x_{30} . Переменной x_{36} присваивается заголовок терма x_{31} . В нашем случае - "дробь".

Далее предпринимается проверка избыточности нового параметра. В нашем случае - проверка того, что вхождение x_{12} не является числителем дроби, знаменателем которой служит переменная, не имеющая других вхождений в терм x_{10} .

После проверки избыточности выбирается не входящая в исходную теорему переменная x_{37} (в нашем случае - e). Формируется терм x_{38} , полученный соединением при помощи операции x_{36} подтерма x_{12} и новой переменной x_{37} . Номер операнда x_{37} - тот же, что номер операнда x_{35} в операции x_{31} . Для нашего примера имеем терм ac/e . Переменной x_{39} присваивается результат замены вхождения x_{12} в терм x_{10} на терм x_{38} . Получается терм $ac/e + ab/d$. Определяется результат x_{40} подстановки в подтерм x_{20} переменных x_{27} , x_{37} вместо переменных x_{29} , x_{30} . Получается терм c/e . Переменной x_{41} присваивается результат подстановки в терм x_{11} выражения x_{40} вместо переменной x_{27} . Получается терм $a(c/e + b/d)$. Переменной x_{43} присваивается набор результатов подстановки в antecedentes дополнительной теоремы переменных x_{27} , x_{37} и подтерма x_{28} вместо переменных x_{29} , x_{30} , x_{25} . Получаются утверждения " $\neg(e = 0)$ ", " c - число", " e - число", " a - число". Переменной x_{44} присваивается объединение списка x_{43} с результатами подстановки выражения x_{40} вместо переменной x_{27} в antecedentes исходной теоремы.

Далее выражение x_{39} обрабатывается нормализаторами общей стандартизации относительно посылок x_{44} , чтобы снова проверить избыточность нового параметра: он не должен оказаться операндом ассоциативно-коммутативной операции, имеющей другую неповторную переменную своим операндом.

Наконец, формируется импликация с antecedентами x_{44} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{41} и x_{39} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Обобщение сверточного тождества путем ввода повторного дополнительного параметра операнда.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdef}(\neg(d=0) \ \& \ \neg(e=0) \ \& \ \neg(f=0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow ab/(df) + ac/(ef) = a(b/d + c/e)/f)$$

из теоремы

$$\forall_{abcde}(\neg(d=0) \ \& \ \neg(e=0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow ab/d + ac/e = a(b/d + c/e))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ade}(\neg(a=0) \ \& \ \neg(e=0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d/(ae) = (d/e)/a)$$

Характеристика - "свертка(второйтерм)".

Программа приема практически дословно воспроизводит программу приема с тем же названием, рассматривавшегося ранее для другой характеристики. Для удобства чтения повторим ее.

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. В заменяемой части рассматривается вхождение x12 двуместной операции x13. В нашем примере - операции ef/b . Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x13 указанную выше первую дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается ее заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок x13. Рассматривается вхождение x20 корневого операнда терма x19, представляющее собой двуместную операцию от переменных x22 и x23. Находится единица E этой операции. В нашем примере x19 - " $(d/e)/a$ "; переменная x22 - d , переменная x23 - e . Проверяется, что другой корневой операнд терма x19 представляет собой переменную x25. В нашем примере - a . Проверяется, что исходная теорема не имеет antecedента с заголовком "равно".

Если символ x13 коммутативен, то переменной x26 присваивается произвольный корневой операнд операции x12, иначе - операнд, имеющий тот же номер, что и операнд x19 операции x20. В нашем примере x26 - вхождение терма ab . Переменной x27 присваивается символ по вхождению x26.

Проверяется, что x27 - символ коммутативной операции. Рассматривается вхождение x28 операнда операции x26, представляющее собой переменную x29, имеющую более одного вхождения в заменяемую часть x10. В наше случае - переменная a . Проверяется, что каждое вхождение переменной x29 в терм x10 является операндом операции x27, являющейся, в свою очередь, операндом операции x13, отличным от того, по которому эта операция имеет единицу E . Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x27 указанную выше вторую дополнительную теорему. Переменной x35 присваивается заменяемая часть этой теоремы. В нашем примере - $e \cdot (a/b)$. Проверяется, что она имеет заголовок x27. Переменной x36 присваивается заменяющая часть дополнительной теоремы. В нашем случае - ae/b . Проверяется, что она имеет заголовок x13. Проверяется, что число переменных терма x35 равно 3, число корневых операндов - 2. Переменной x37 присваивается неоднобуквенный

операнд терма x_{35} . Другой операнд - переменная x_{39} . В нашем примере - e . Проверяется, что число корневых операндов терма x_{36} равно 2. Переменной x_{40} присваивается вхождение того из них, который имеет заголовок x_{27} . В нашем примере - ae . Проверяется, что одним из операндов вхождения x_{40} служит переменная x_{39} , а другим - некоторая переменная, которая присваивается переменной x_{44} . В нашем примере - a . Операнд вхождения x_{36} , отличный от x_{40} , присваивается переменной x_{41} . Проверяется, что по вхождению x_{41} расположена переменная, которая присваивается переменной x_{45} . В нашем примере - b . Проверяется, что переменная x_{45} входит в подтерм x_{37} . Переменной x_{41} присваивается тот операнд вхождения x_{36} , по которому операция x_{13} имеет единицу. В нашем примере - операнд b . Переменной x_{47} присваивается вхождение операнда вхождения x_{12} , отличного от x_{26} . В нашем примере - знаменатель b . Переменной x_{48} присваивается та из переменных x_{23} , x_{22} - операндов терма x_{20} - по которой операция x_{13} не имеет единицы. В нашем примере - d .

Переменной x_{49} присваивается заменяющий терм первой дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет заголовок x_{13} . Переменной x_{50} присваивается тот корневой операнд терма x_{49} , который расположен так же, как операнд x_{20} операции x_{19} . В нашем примере - операнд d . Проверяется, что по вхождению x_{50} располагается переменная x_{48} . Переменной x_{51} присваивается другой корневой операнд терма x_{49} , переменной x_{52} - заголовок этого операнда. В нашем примере x_{51} - " ae ". Проверяется, что символ x_{52} коммутативен.

Проверяется избыточность ввода дополнительной переменной: если по вхождению x_{47} располагается операция x_{52} , имеющая своим операндом переменную, то проверяется, что эта переменная не располагается в заменяемом терме x_{10} так же, как будет расположена дополнительная переменная.

Выбирается переменная x_{53} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная f . Рассматриваются всевозможные вхождения v_1 в заменяемый терм x_{10} переменной x_{29} , и определяются вхождения v_2 , операндом которых служит v_1 , вхождения v_3 , операндом которых служит v_2 , и всевозможные отличные от v_2 вхождения v_4 операндов вхождения v_3 . Переменной x_{54} присваивается список вхождений v_4 . В нашем примере x_{54} - вхождения переменных d, e . Проверяется, что различные вхождения списка x_{54} не подчинены друг другу. Переменной x_{56} присваивается результат замены вхождений x_{54} подтермов t на термы " $x_{52}(x_{53}, t)$ ". В нашем примере - замены d на fd и e на fe . Переменной x_{57} присваивается результат замены в подтерме x_{37} переменных x_{44} и x_{45} на x_{29} и x_{53} . В нашем случае - " a/f ". Переменной x_{58} присваивается результат подстановки терма x_{57} вместо переменной x_{29} в терм x_{11} . В нашем примере - " $(a/f)(b/d + c/e)$ ". Проверяется, что antecedentes первой дополнительной теоремы включаются в список утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. выражения x_{19} , а antecedentes второй - утверждения x_{35} . Переменной x_{59} присваивается набор результатов подстановки терма x_{57} вместо переменной x_{29} в antecedentes исходной теоремы. Переменной x_{60} присваивается равенство выражений x_{58} и x_{56} , ориентированное так же, как в исходной теореме. Список x_{59} пополняется утверждениями, необходимыми для сопровождения по о.д.з. равенства x_{60} , и обрабатывается оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{60} . Затем создается импликация с antecedентами x_{59} и

консеквентом х60. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

4. Обобщение сверточного тождества путем ввода внешней двуместной операции над сложной одноместной операцией.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acd}(\neg(c = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(a) - \text{even}) \rightarrow \arcsin |cd^a| = -\arcsin(-c|d|^a)\text{sg}(c))$$

из теоремы

$$\forall_{cd}(\neg(c = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \arcsin |cd| = -\arcsin(-c|d|)\text{sg}(c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \rightarrow |a^b| = |a|^b)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Программа приема практически дословно воспроизводит программу приема с тем же названием, рассматривавшегося ранее для другой характеристики. Для удобства чтения повторим ее.

Переменной х10 присваивается заменяемая часть, переменной х11 - заменяющая. В нашем примере х10 - " $-\arcsin(-c|d|)\text{sg}(c)$ ". В терме х10 выбирается вхождение х12 одноместной операции х13. В нашем примере - " $|d|$ ". Проверяется, что ее первый операнд - переменная х14, имеющая в х10 единственное вхождение. Проверяется, что х12 не является операндом двуместной операции, другой операнд которой - переменная, неповторная в х10. Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по х13 указанную выше дополнительную теорему. По ее характеристике "сокращ" находится заменяемая часть х20 этой теоремы. В нашем примере - $|a^b|$. Проверяется, что ее заголовок - х13. Рассматривается корневой операнд х21 операции х20, и проверяется, что он представляет собой двуместную операцию от двух различных переменных х23 и х24. В нашем случае - a и b . Находится единица E операции х21. Переменной х25 присваивается заменяющая часть дополнительной теоремы. Проверяется, что она имеет ровно два корневых операнда. Проверяется, что корневая операция терма х25 имеет ту же единицу E , что и операция х21. Переменной х29 присваивается переменная, являющаяся корневым операндом терма х25. В нашем примере - " b ". Проверяется, что х29 совпадает с х23 либо с х24, причем именно с той из переменных х23, х24, по которой операция х21 имеет единицу. Проверяется, что х28 - тот корневой операнд, по которому корневая операция терма х25 имеет единицу.

Выбирается переменная х30, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - " a ". Переменной х31 присваивается пара переменных х23, х24. Если х29 равно х23, то переменной х32 присваивается пара переменных х30, х14, иначе - пара х14, х30. Определяется результат х33 замены в терме х25 переменных х31 на х32, а также результат х34 такой же замены в терме х20. В нашем примере х33 - " $|d|^a$ ", х34 - " $|d^a|$ ". Переменной х35 присваивается результат замены

подтерма x_{12} терма x_{10} на x_{33} , переменной x_{36} - результат подстановки корневого операнда терма x_{34} вместо переменной x_{14} в терм x_{11} . В нашем примере x_{35} имеет вид " $-\arcsin(-c|d|^a)\text{sg}(c)$ ", x_{36} - вид " $\arcsin|cd^a|$ ". Переменной x_{37} присваивается равенство выражений x_{35} и x_{36} , ориентация которого такая же, как в исходной теореме. Находится объединение результатов подстановки корневого операнда терма x_{34} вместо переменной x_{14} в антецеденты исходной теоремы с результатами переобозначения переменных x_{31} на x_{32} в антецедентах дополнительной теоремы. Переменной x_{41} присваивается результат обработки его оператором "нормантецеденты" относительно параметров равенства x_{37} . Затем создается импликация с антецедентами x_{42} и консеквентом x_{37} . Она обрабатывается оператором "полныепосылки" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

5. Обобщение тождества свертки путем применения к обеим его частям операции типа "возведения в степень" (справочник "свертки").

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq d+e \ \& \ 0 \leq d-e \rightarrow (d+e)^c(d-e)^c = (d^2 - e^2)^c)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a^2 - b^2 = (a - b)(a + b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq b \rightarrow a^{bc} = (ab)^c)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяющий терм, переменной x_{11} - заменяемый. Переменной x_{12} присваивается заголовок терма x_{11} . В нашем примере - "умножение". Проверяется, что число корневых операндов заменяемого терма равно 2, а число переменных теоремы меньше 5. Справочник поиска теорем "свертки" определяет по символу x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{18} присваивается вхождение ее заменяемого терма. В нашем случае - " $(ab)^c$ ". Проверяется, что число операндов вхождения x_{18} равно 2. Переменной x_{19} присваивается символ по вхождению x_{18} . В нашем случае - "степень". Определяется единица E операции x_{19} . Рассматривается операнд x_{21} вхождения x_{18} , имеющий заголовок x_{12} . В нашем примере - ab . Проверяется, что операция x_{18} имеет единицу по другому операнду x_{22} . Переменной x_{23} присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет заголовок x_{12} . Проверяется, что каждый корневой операнд A терма x_{23} имеет заголовок x_{19} , причем тот операнд терма A , по которому операция x_{19} имеет единицу, совпадает с переменной по вхождению x_{22} .

Процедура "тождвывод" определяет результат x_{24} преобразования вхождения x_{21} в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Он обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

6. Обобщение тождества свертки путем применения к обеим его частям операции типа "возведения в степень" (справочник "раздпарам").

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(\neg(\cos(d) = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow (\text{tg } d)^c = (\sin d)^c / (\cos d)^c)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \ \& \ \neg(\cos a = 0) \rightarrow \text{tg } a = \sin a / \cos a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow (a/b)^c = a^c/b^c)$$

Программ приема отличается от программы предыдущего приема лишь тем, что вместо справочника "свертки" используется справочник "раздпарам". Разделение этих программ позволяет уточнять предысторию вывода теоремы в стартовых фильтрах приемов вывода.

7. Обобщение тождества свертки путем домножения обеих частей на новую переменную и перемещения ее внутрь заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcfg}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(g = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \rightarrow f|c/g|^b/a = f|c|^b/(a|g|^b))$$

из теоремы

$$\forall_{cdef}(\neg(f = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow e|d/f|^c = e|d|^c/|f|^c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ade}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d/(ae) = (d/e)/a)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Программа приема практически дословно воспроизводит программу приема с тем же названием, рассматривавшегося ранее для другой характеристики. Для удобства чтения повторим ее.

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - ее заголовок. В нашем случае - "дробь". Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по x11 указанную выше дополнительную теорему. Характеристика "нормализация" указывает на заменяемую часть x17 дополнительной теоремы. В нашем случае - "(d/e)/a". Проверяется, что эта часть имеет одним из своих операндов переменную x20 (в нашем случае - a). Переменной x19 присваивается входение другого операнда, причем проверяется, что заголовком этого операнда служит символ x11. Переменной x21 присваивается заголовок термина

x17. В нашем случае - "дробь". Находится единица E операции x21, причем проверяется, что операция x17 имеет эту единицу для операнда x20. Переменной x23 присваивается заменяющая часть дополнительной теоремы. Переменной x24 присваивается вхождение того корневого операнда терма x23, заголовком x25 которого служит коммутативная операция. В нашем примере - "ae". Проверяется, что одним из операндов операции x24 служит переменная x20.

Проверяется избыточность ввода новой переменной: рассматривается вхождение корневого операнда терма x10, расположенного так же, как операнд x24 терма x23. Проверяется, что по этому вхождению не расположена неповторная в x10 переменная либо операция с заголовком x25, имеющая своим операндом неповторную в x10 переменную.

Далее оператор "тождвывод" находит результат x26 преобразования вхождения x19 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. В нашем примере имеем:

$$\forall_{abcf g}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(|g|^b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ f|c|^b - \text{число} \ \& \ |g|^b - \text{число} \ \& \ \neg(g = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \rightarrow f|c|^b/(a|g|^b) = f|c/b|^b/a)$$

Переменной x27 присваивается результат обработки импликации x26 оператором "Нормтеорема" с опцией "свертка". Проверяется, что консеквент теоремы x27 - равенство, причем если x10 неповторно, то и заменяемая часть теоремы x27 неповторна. Проверяется, что ни один из антецедентов теоремы x27 не имеет более 4 вхождений переменных. При необходимости ориентация равенства в теореме x27 изменяется так, чтобы она совпала с ориентацией равенства в исходной теореме. Затем теорема x27 регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

8. Обобщение тождества свертки путем исключения константных операндов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow 2 \sin(b - \pi/6) = \sqrt{3} \sin b - \cos b)$$

из теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow \sin(b - \pi/6) = (\sqrt{3} \sin b - \cos b)/2)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - вхождение ее корневой операции. Проверяется, что заменяемая часть необнбуквенная и имеет более одного корневого операнда. Переменной x12 присваивается список операндов вхождения x11. Переменной x13 присваивается подсписок списка x12, образованный выражениями, список параметров которых непуст. Если заголовок F выражения x10 - символ ассоциативной и коммутативной операции, то проверяется, что список x13 короче списка x12, причем переменной x14 присваивается результат соединения операций F элементов списка x13. В противном случае проверяется, что список x13 одноэлементный, и переменной

x_{14} присваивается его элемент. В нашем примере заголовок термина x_{10} - символ "дробь", так что имеет место второй случай, и x_{14} - выражение " $\sqrt{3} \sin b - \cos b$ ".

Переменной x_{15} присваивается заменяющая часть теоремы. Выбирается переменная x_{16} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{18} присваивается результат замены неконстантной составляющей корневых операндов выражения x_{10} на переменную x_{16} . В нашем примере имеем выражение $a/2$. Переменной x_{19} присваивается список antecedентов теоремы. Решается задача на описание с посылками x_{19} и единственным условием "равно($x_{18} x_{15}$)". Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "неизвестные x_{16} ", "одз". Ответ присваивается переменной x_{21} . В нашем примере он имеет вид " $a = 2 \sin(b - \pi/6)$ ". Среди конъюнктивных членов ответа x_{21} находится равенство с переменной x_{16} в левой части и некоторым выражением x_{23} в правой. Создается импликация с antecedентами x_{19} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{14} и x_{23} , ориентированное так же, как у исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

9. Попытка обобщения путем домножения обеих частей равенства на новую переменную и дистрибутивной развертки (для выведенной теоремы).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a \sin b + a \cos b = a\sqrt{2} \sin(b + \pi/4))$$

из теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow \sqrt{2} \sin(b + \pi/4) = \sin b + \cos b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Проверяется, что теорема не является стартовой теоремой ячейки вывода. Проверяется отсутствие характеристики "нормализация" для встречной замены. Переменной x_{10} присваивается заменяемое выражение, переменной x_{11} - его заголовок. В нашем примере - символ "плюс". Проверяется, что число корневых операндов выражения x_{10} равно 2, причем символ x_{11} - ассоциативный и коммутативный. Переменной x_{12} присваивается заменяющее выражение. Проверяется, что оно имеет ту же оценку сложности, что заменяемое.

Переменной x_{13} присваивается список корневых операндов выражения x_{10} . Проверяется, что оба они имеют равные оценки сложности. Проверяется, что заменяющее выражение неповторно, а заменяемое не неповторно. Справочник поиска теорем "раздпарам" определяет по x_{11} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{17} присваивается вхождение той части равенства в ее консеквенте, которая имеет заголовок x_{11} . Переменной x_{18} присваивается вхождение другой части. Переменной x_{19} присваивается символ по вхождению x_{18} . В нашем примере - "умножение". Проверяется, что этот символ ассоциативен и коммутативен.

Переменной x_{20} присваивается подтерм x_{17} . В нашем примере - " $ab+ac$ ". Переменной x_{21} присваивается список параметров терма x_{20} . Переменной x_{22} присваивается элемент списка x_{21} , имеющий более одного вхождения в терм x_{20} . В нашем примере это переменная a .

Переменной x_{23} присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Проверяется, что каждый из них имеет ровно один параметр. Переменной x_{24} присваивается список всех утверждений списка x_{23} , содержащих переменную x_{22} . В списке x_{21} выбирается переменная x_{25} , отличная от x_{22} . В нашем примере - переменная b . Переменной x_{26} присваивается список всех утверждений списка x_{23} , содержащих переменную x_{25} . Выбирается переменная x_{27} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{28} присваивается выражение, полученное соединением операцией x_{11} выражений, полученных соединением операцией x_{19} переменной x_{27} с первым и вторым выражениями пары x_{13} . В нашем примере x_{28} имеет вид " $a \sin b + a \cos b$ ". Переменной x_{29} присваивается результат соединения операцией x_{19} переменной x_{27} и выражения x_{12} . В нашем примере - " $a\sqrt{2} \sin(b + \pi/4)$ ".

Переменной x_{30} присваивается результат объединения списка антецедентов исходной теоремы, списка результатов подстановки переменной x_{27} вместо переменной x_{22} в утверждения списка x_{24} , списка результатов подстановки первого выражения пары x_{13} вместо переменной x_{25} в утверждения списка x_{26} , а также списка результатов подстановки второго выражения пары x_{13} вместо переменной x_{25} в утверждения списка x_{26} . Переменной x_{31} присваивается результат обработки оператором "нормтеорема" импликации с антецедентами x_{30} и консеквентом " $\text{равно}(x_{28} \ x_{29})$ ". Проверяется, что этот результат - кванторная импликация, причем переменная x_{27} не является сдвоенной в заменяемой части этой импликации. Затем x_{31} регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

10. Попытка обобщения путем домножения обеих частей равенства на новую переменную и дистрибутивной развертки (для исходной теоремы).

Прием совпадает с предыдущим, за тем исключением, что применяется только к стартовым теоремам ячеек вывода. Это требование позволяет ослабить ряд прочих ограничений на вывод, имевших место для предыдущего приема.

11. Попытка перейти к ослабленным отношениям в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(0 \leq e \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \max(ce, de) = e\max(c, d))$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(0 < e \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \max(ce, de) = e\max(c, d))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \rightarrow a \leq b)$$

Характеристика - "свертка(второйтерм)".

Переменной x_8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_9 - консеквент. Переменной x_{10} присваивается 0. Эта переменная играет роль индикатора изменения списка x_8 . Переменной x_{11} присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения утверждения x_9 по о.д.з.

Начинается цикл попыток изменения антецедентов списка x_8 . Переменной x_{12} присваивается вхождение в список x_8 текущего анализируемого антецедента. Рассматриваются лишь такие антецеденты x_{13} , которые суть элементарные утверждения, имеющие длину более 2 и не являющиеся следствиями прочих антецедентов, пополненных утверждениями x_{11} . В нашем примере x_{13} - антецедент " $0 < e$ ".

Переменной x_{14} присваивается заголовок утверждения x_{13} . Справочник поиска теорем "ослабление" определяет по x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{17} присваивается заголовок ее консеквента. Это - ослабленная версия заголовка утверждения x_{13} . В нашем примере x_{17} - символ "меньшеилиравно". Переменной x_{18} присваивается результат замены заголовка утверждения x_{13} на символ x_{17} . В нашем примере - " $0 \leq e$ ". Рассматривается список x_{19} , полученный добавлением к x_{11} результата замены в списке x_8 вхождения x_{12} на отрицание утверждения x_{13} , а также добавлением утверждения x_{18} . В нашем примере отрицание строгого неравенства и нестрогое неравенство эквивалентны равенству $e = 0$. Если при помощи задачи на доказательство удастся усмотреть, что x_9 - следствие утверждений x_{19} , причем посылки этой задачи непротиворечивы, то вхождение x_{12} в списке x_8 заменяется на утверждение x_{18} , а индикатор x_{10} устанавливается на 1.

По завершении просмотра списка x_8 проверяется, что x_{10} равно 1. Затем создается импликация с антецедентами x_8 и консеквентом x_9 , которая регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

Реализация антецедентов

1. Попытка реализации существенного антецедента тождества общей стандартизации путем подбора примера.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{целое} \rightarrow \text{дробнаячасть}(b) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{an}(a - \text{число} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ n \leq a \ \& \ a < n + 1 \rightarrow \text{дробнаячасть}(a) = a - n)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a \leq a)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается вхождение некоторого существенного антецедента теоремы. В нашем примере - антецедента " $n \leq a$ ". Если заголовок этого антецедента - символ "не", то переменной x_{11} присваивается вхождение его

первого операнда, иначе переменной x11 присваивается x10. Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. В нашем примере - "меньшеилиравно". Справочник поиска теорем "пример" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "выводпосылки" определяет результат x15 последовательного применения исходной и дополнительной теорем при унификации вхождения x10 с консеквентом дополнительной теоремы. В нашем примере x15 имеет вид

$$\forall_b(b - \text{число} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ b < b + 1 \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{дробнаячасть}(b) = b - b)$$

Переменной x16 присваивается результат последовательной обработки теоремы x15 операторами "Спускоперандов" и "демодификация". В нашем примере x16 совпадает с x15. Переменной x17 присваивается консеквент импликации x16. Проверяется, что он представляет собой равенство. Переменной x18 присваивается список антецедентов теоремы x16. Переменной x19 присваивается пара частей равенства x17, обработанных относительно посылок x18 нормализаторами общей стандартизации. В нашем примере - "дробнаячасть(b)" и 0. Проверяется, что термы пары x19 различны. Переменной x20 присваивается результат обработки списка x18 оператором "нормантецеденты" относительно параметров термов x19. Создается импликация с антецедентами x20, консеквентом которой служит равенство выражений пары x19. Эта импликация обрабатывается оператором "демодификация" и регистрируется в списке вывода.

Применение дополнительного тождества для упрощения заменяемого термина и последующее обобщение

1. Вывод из тождества свертки $f(a, b) = c$ тождества вида $f(g(a), g(b)) = g(c)$ и последующее обобщение типа "возведения в степень".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow |d + e|^c |d - e|^c = |d^2 - e^2|^c)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a^2 - b^2 = (a - b)(a + b))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq b \rightarrow a^c b^c = (ab)^c)$$

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow |a||b| = |ab|)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяющий терм, переменной x11 - заменяемый. Проверяется, что теорема не имеет характеристики с заголовком "нормализация". Переменной x12 присваивается заголовок выражения x11. В нашем примере - "умножение". Проверяется, что выражение x11 имеет ровно два корневых операнда, а число переменных исходной теоремы меньше 5. Справочник поиска теорем "свертки" определяет по x12 указанную выше первую дополнительную теорему. Проверяется наличие у этой теоремы характеристики

"нормализация(N)", а также хотя бы одной из характеристик "разбивает(N)", "дистрибразвертка(N)". В нашем примере N - "первыйтерм". Переменной x_{18} присваивается вхождение заменяемой части первой дополнительной теоремы относительно направления N . В нашем примере - вхождение выражения " $(ab)^c$ ". Переменной x_{19} присваивается символ по вхождению x_{18} . Проверяется что число операндов вхождения x_{18} равно 2. В нашем примере x_{19} - символ "степень". Проверяется, что x_{19} имеет единицу E по некоторому своему операнду. Переменной x_{21} присваивается вхождение того операнда вхождения x_{18} , который имеет заголовок x_{12} . В нашем примере - вхождение ab . Переменной x_{22} присваивается вхождение другого операнда - некоторой переменной X . Проверяется, что операция x_{19} имеет единицу E именно по операнду x_{22} .

Переменной x_{23} присваивается заменяющее выражение первой дополнительной теоремы. Проверяется, что оно имеет заголовок x_{12} . Проверяется, что каждый корневой операнд v выражения x_{23} имеет заголовок x_{19} , причем тот корневой операнд операнда v , который расположен так же, как операнд x_{22} вхождения x_{18} , равен X .

Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по x_{12} вторую дополнительную теорему. Проверяется, что эта теорема имеет характеристику "нормализация(M)". В нашем примере M - "второйтерм". Переменной x_{29} присваивается заменяющее выражение второй дополнительной теоремы, переменной x_{30} - заголовок этого выражения. В нашем примере x_{29} - выражение " $|ab|$ ", x_{30} - символ "модуль". Проверяется, что x_{29} имеет единственный корневой операнд w , причем заголовком этого операнда служит символ x_{12} . Проверяется, что число операндов вхождения w равно 2. Переменной x_{31} присваивается заменяемое выражение второй дополнительной теоремы. Проверяется, что число его корневых операндов равно 2, причем символ x_{30} является заголовком этих операндов.

Оператор "тождвывод" определяет результат x_{32} преобразования корневого операнда заменяющей части второй дополнительной теоремы при помощи исходной теоремы. В нашем примере получаем:

$$\forall_{cd}((c - d) - \text{число} \ \& \ (c + d) - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow |c - d| \cdot |c + d| = |c^2 - d^2|)$$

Переменной x_{34} присваивается вхождение той части равенства в консеквенте теоремы x_{32} , которая имеет заголовок x_{12} . В нашем примере - левой части. Оператор "тождвывод" определяет результат x_{37} преобразования вхождения x_{21} в первую дополнительную теорему при помощи теоремы x_{32} . Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование тождества для получения импликации, подбирающей корень уравнения

1. Попытка использовать оператор усмотрения повторяющихся подвыражений для получения импликации, подбирающей корень уравнения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c = a + b \rightarrow -3abc + c^3 = a^3 + b^3)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Переменной x10 присваивается равенство в консеквенте. Проверяется, что оно является элементарным утверждением, причем хотя бы одна из частей данного равенства небесповторна. Переменной x11 присваивается заголовок левой части равенства. В нашем примере - "степень". Определяется тип T значений выражений с заголовком x11. В нашем примере - "число". Справочник "повтор" определяет по x11 название x13 нормализатора выделения повторяющихся вхождений подвыражений типа T , содержащих неизвестные. В нашем примере - "повторчисло". Напомним, что этот нормализатор применялся для перехода к новым неизвестным при решении систем уравнений элементарной алгебры.

Переменной x14 присваивается результат применения нормализатора x13 к выражению x10 относительно антецедентов теоремы. В качестве неизвестных фигурируют все переменные связывающей приставки исходной теоремы. В нашем примере x14 имеет вид $-3ab(a + b) - a^3 - b^3 + (a + b)^3 = 0$. Выбирается переменная x15, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная c . Оператор "повтор" перечисляет выражения x16, имеющие более одного вхождения в терм x14, присваивая при этом переменной x17 результат замены в x14 всех вхождений выражения x16 на переменную x15. В нашем примере x16 - " $a + b$ ", x17 - " $-3abc - a^3 - b^3 + c^3$ ". Проверяется, что x17 имеет отличную от x15 переменную. Переменной x18 присваивается заголовок выражения x16. Определяется тип S значений выражений с заголовком x18. В нашем примере - "число". Переменной x21 присваивается результат добавления к списку антецедентов теоремы утверждения " $S(x15)$ ".

Решается задача на описание x22 с антецедентами x21 и единственным условием x17. Цели задачи - "полный", "прямойответ", "явное", "попыткаспуска", "неизвестные x15". Переменной x23 присваивается ответ задачи x22. В нашем примере он имеет вид $-3abc + c^3 = a^3 + b^3$. Проверяется, что x23 - равенство, причем переменная x15 имеет в нем более одного вхождения. Создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к антецедентам исходной теоремы равенства "равно(x15 x16)", а консеквентом служит утверждение x23. Она регистрируется в списке вывода. Заметим, что для получения из этой теоремы формулы Кардано далее выполняются лишь шаги обобщения. Основную роль играет переобозначение не содержащих неизвестных подвыражений ("коэффициентов") на новые переменные.

Применение тождества для упрощения заменяемой части дополнительной эквивалентности

1. Попытка использовать тождество свертки для варьирования разделяющей эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c(c - \text{число} \rightarrow \sin(2c) = 0 \leftrightarrow \sin c = 0 \vee \cos c = 0)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \sin(2a)/2 = \sin a \cos a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \& b - \text{число} \rightarrow ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0)$$

Характеристика - "свертка(второйтерм)".

Проверяется отсутствие характеристики с заголовком "нормализация". Переменной x10 присваивается заменяемое выражение. Проверяется, что оно имеет меньше 5 вхождений переменных. Переменной x11 присваивается заголовок выражения x10. Справочник поиска теорем "разделить" определяет по x11 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику с заголовком "и" либо "или". Переменной x17 присваивается вхождение заменяемой части дополнительной теоремы согласно данной характеристике. Внутри x17 выбирается вхождение x18 символа x11. Оператор "тождвывод" определяет результат x19 преобразования вхождения x18 при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "консеквент", после чего регистрируется в списке вывода.

Применение тождества для упрощения заменяемой части дополнительного тождества

1. Применение тождества свертки для упрощения неповторного фрагмента заменяемой части дополнительного тождества свертки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c(c - \text{число} \rightarrow (\sin c + \cos c)^2 = 1 + \sin(2c))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \sin(2a) = 2 \sin a \cos a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \& b - \text{число} \rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части, переменной x11 - символ по этому вхождению. Переменной x12 присваивается подтерм по вхождению x10. Проверяется, что он неповторный. Справочник поиска теорем "фрагм" определяет по символу x11 указанную выше дополнительную теорему. Находится ее характеристика "свертка(N)". Переменной x18 присваивается заменяемая часть равенства в консеквенте дополнительной теоремы согласно направлению N. Переменной x19 присваивается вхождение неповторного операнда x20 вхождения x18. В нашем примере x20 - "2ab". Проверяется, что

этот операнд включает все параметры подтерма x18. Внутри x19 выбирается вхождение x21 символа x11. Оператор "тождвывод" определяет результат x22 преобразования вхождения x21 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Отождествление переменных в теореме

1. Попытка получить тождество дистрибутивной развертки путем отождествления двух переменных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ace}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow a/c + e/c = (a + e)/c)$$

из теоремы

$$\forall_{abce}(\neg(b = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow (ac + be)/bc = a/b + e/c)$$

Характеристика - "свертка(второйтерм)". Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. Проверяется, что x11 неповторно и имеет ровно два корневых операнда, а x10 - неповторно. Рассматривается вхождение x12 такого корневого операнда терма x11, который представляет собой операцию x14 от двух переменных x17 и x18. В нашем примере x12 - вхождение слагаемого a/b , x14 - символ "дробь". Проверяется, что вхождение x13 другого корневого операнда терма x11 представляет собой операцию x19 от двух переменных x22 и x23. В нашем примере x13 - вхождение слагаемого e/c , x19 - символ "дробь".

Переменной x24 присваивается список antecedентов исходной теоремы. Проверяется, что он непуст. Переменной x25 присваивается результат подстановки переменной x22 вместо x17 в терм x10. В нашем примере - " $(ac + ce)/(cc)$ ". Переменной x26 присваивается список результатов подстановки переменной x22 вместо x17 в утверждения списка x24. При помощи задачи на преобразование определяется результат x28 упрощения выражения x25 относительно посылок x26. В нашем примере x28 имеет вид " $(a + e)/c$ ". Проверяется, что выражение x28 неповторно. Определяется результат x29 подстановки переменной x22 вместо x17 в терм x11. В нашем примере - " $a/c + e/c$ ". Затем создается импликация с antecedентами x26 и консеквентом "равно(x29 x28)". Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Замена переменных в теореме

1. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abe}(a - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(e) \ \& \ \text{Вектор}(b) \rightarrow a(e + b) = ae + ab)$$

из теоремы

$$\forall_{aceA}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ \text{Вектор}(e) \ \& \ a(e + \text{вектор}(Ac)) = ae + a\text{вектор}(Ac))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Программа приема почти дословно совпадает с программой приема такого же типа, ранее рассмотренной в связи с другой характеристикой. Для удобства чтения повторим ее.

Переменной x8 присваивается набор антецедентов. В консеквенте выбирается вхождение x10 атомарного подвыражения x11. В нашем примере - "вектор(Ac)". Переменной x12 присваивается список параметров этого подвыражения. Проверяется, что каждый элемент списка x12 встречается в консеквенте и существенных антецедентах только внутри подтерма, равного x11. Переменной x14 присваивается заголовок выражения x11, переменной x16 - тип его значения. В нашем случае - "Вектор". Справочник поиска теорем "парамописание" находит по x16 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере получаем:

$$\forall_b(\text{Вектор}(b) \leftrightarrow \exists_{df}(d - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ b = \text{вектор}(df)))$$

Переменной x20 присваивается вхождение консеквента импликации x19. Проверяется, что первый операнд этой эквивалентности имеет заголовок x16, а второй - квантор существования x21. Переменной x22 присваивается набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Проверяется, что первый операнд первого операнда эквивалентности - переменная; она присваивается переменной x23. В нашем случае это "b". Среди утверждений x23 находится равенство x24 переменной x23 терму x25, имеющему заголовок x14. Переменной x26 присваивается список параметров терма x25. В нашем примере x25 - "вектор(df)". Проверяется, что все переменные списка x26 принадлежат связывающей приставке квантора существования. Усматривается, что терм x11 является результатом применения некоторой подстановки S вместо переменных x26 в терм x25. Переменной x28 присваивается набор результатов применения этой подстановки ко всем отличным от x24 элементам набора x22. В нашем примере - пара утверждений "A - точка", "c - точка". Переменной x29 присваивается список всех таких антецедентов исходной теоремы, в которых имеется переменная списка x12, не расположенная внутри подтерма, равного x11. В нашем примере - пара утверждений "c - точка", "A - точка".

Переменной x30 присваивается конкатенация списка x8 с отброшенными утверждениями x29, и списка x28. В нашем примере результат состоит из тех же утверждений, что и список x8. Проверяется, что каждое утверждение списка x29 усматривается проверочными операторами из списка x30. Определяется результат K замены в консеквенте исходной теоремы всех вхождений подтерма x11 на переменную x23, а также результат M такой же замены во всех утверждениях списка x8, не вошедших в x29. Затем создается итоговая импликация,

антецеденты которой получены добавлением к M левой части эквивалентности x_{20} , а консеквент - K .

2. Попытка использовать параметрическое описание для объектов заданного типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_z (z - \text{комплексное} \rightarrow -z \text{сопряженное}(z) = -(|z|^2))$$

из теоремы

$$\forall_{bc} (b - \text{комплексное} \ \& \ c - \text{комплексное} \rightarrow -b^2 - c^2 = (b + ci)(-b + ci))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_z (z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy} (x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяемое выражение, переменной x_{11} - заменяющее. Переменной x_{12} присваивается список антецедентов. Переменной x_{13} присваивается список типов значений неоднобуквенных подвыражений выражения x_{10} . В нашем примере он состоит из символа "комплексное". В списке x_{13} выбирается элемент x_{14} , и справочник "парамописание" находит по нему указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{17} присваивается результат переобозначения в дополнительной теореме ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{17} совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x_{19} присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x_{14} . В нашем примере - "комплексное(z)". Переменной x_{20} присваивается вхождение другой части, заголовок которой - квантор существования. Проверяется, что теорема x_{17} не имеет антецедентов. Переменной x_{21} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования x_{20} . В этом списке находится равенство x_{22} переменной x_{23} выражению x_{24} . В нашем примере оно имеет вид " $z = x + iy$ ". Проверяется, что x_{23} - корневой операнд утверждения x_{19} . В выражении x_{10} находится вхождение x_{25} заголовка P выражения x_{24} . В нашем примере - " $b + ci$ ". Переменной x_{26} присваивается подтерм x_{25} , переменной x_{27} - список его параметров. Проверяется, что все переменные исходной теоремы встречаются в списке x_{27} .

Находится подстановка S вместо переменных x_{27} , переводящая выражение x_{26} в x_{24} . Проверяется, что она лишь переобозначает переменные. Переменной x_{29} присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям x_{12} . В нашем примере он состоит из утверждений " x - комплексное" и " y - комплексное".

При помощи задач на доказательство проверяется, что утверждения списка x_{29} суть следствия утверждений x_{21} .

Переменной x_{30} присваивается пара переменных X, Y , не входящих в теорему x_{17} . В нашем примере - a, b . Переменной x_{31} присваивается результат применения подстановки S к результату замены в терме x_{10} вхождения x_{25} на переменную x_{23} . В нашем примере - " $z(-x + iy)$ ". Переменной x_{32} присваивается

результат применения подстановки S к выражению x_{11} . В нашем примере - " $-x^2 - y^2$ ".

Решается задача на описание с посылками x_{21} и условиями "равно(X x_{31})", "равно(Y x_{32})". Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "неизвестные X Y ", "известно x_{23} ". В нашем примере посылки суть " x - число", " y - число", " $z = x + iy$ ". Условия суть " $a = z(-x + iy)$ ", " $b = -x^2 - y^2$ ". Неизвестные - a, b , известный параметр - z . Ответ задачи присваивается переменной x_{34} . В нашем примере он имеет вид " $b = -(\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2)$ & $a = -z \cdot \operatorname{сопряженное}(z)$ ".

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x_{35} присваивается список его конъюнктивных членов. В нем находится равенство x_{36} с переменной X в левой части и равенство x_{37} с переменной Y в левой части. Переменные x_{38} и x_{39} присваиваются правые части равенств x_{36} и x_{37} . Переменной x_{40} присваивается равенство выражений x_{38} и x_{39} . Определяется результат обработки оператором "нормтеорема" импликации с антецедентом x_{19} и консеквентом x_{40} , который регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Вывод условного тождества, использующего равенство в посылках для исключения неизвестных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ a/b = d \rightarrow a^c/b^c = d^c)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow (a/b)^c = a^c/b^c)$$

Характеристика - "свертка(первый терм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяемое выражение, переменной x_{11} - заменяющее. Переменной x_{12} присваивается список антецедентов. Проверяется, что выражение x_{11} неповторно. В нем выбирается вхождение x_{13} неоднобуквенного подтерма, имеющего ровно два корневых операнда. В нашем примере x_{13} - вхождение выражения a/b . Проверяется, что корневые операнды вхождения x_{13} - различные переменные x_{14} и x_{15} , имеющие единственное вхождение в выражении x_{10} . Переменной x_{16} присваивается вхождение переменной x_{14} в выражение x_{10} . проверяется, что список параметров любого надтерма вхождения x_{16} не совпадает с парой x_{14}, x_{15} .

Выбирается переменная x_{17} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная d . Переменной x_{18} присваивается результат замены вхождения x_{13} в терм x_{11} на переменную x_{17} . В нашем примере он имеет вид " d^c ". Переменной x_{19} присваивается результат добавления к списку x_{12} равенства подтерма x_{13} переменной x_{17} . Создается импликация с антецедентами x_{19} и консеквентом "равно(x_{10} x_{18})". Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "исключнеизв(N)", где N - номер последнего антецедента.

2. Использование тождества "склейлин" для получения тождества "склейкаоперандов".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abdf}(\neg(b = 0) \ \& \ \neg(\cos d = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \rightarrow (ab \cos d + f \sin d)/(b \cos d) = a + (f \operatorname{tg} d)/b)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(\cos b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \rightarrow (c \operatorname{tg} b)/a = c \sin b/(a \cos b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ace}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \rightarrow (e + ac)/c = a + e/c)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. Проверяется, что x10 не неповторно, а x11 неповторно, причем оценка сложности выражения x10 меньше оценки сложности выражения x11. Переменной x12 присваивается список подтермов выражения x10, имеющих максимальную сложность. В нашем примере - "sin b" и "cos b", Проверяется, что список x12 двухэлементный, причем каждый его элемент имеет единственное вхождение в x10. Переменной x13 присваивается заголовок выражения x10. В нашем примере - "дробь".

Проверяется отсутствие в списке вывода теоремы с характеристикой "свертка", обобщающей исходную теорему. Затем справочник поиска теорем "склейлин" находит по x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается вхождение заменяющей части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, переменной x20 - вхождение заменяемой. В нашем примере x19 - вхождение правой части, x20 - вхождение левой. Проверяется, что число операндов вхождения x20 равно 2. Переменной x22 присваивается вхождение того операнда вхождения x20, который представляет собой некоторую переменную x23. В нашем примере - переменную c. Внутри вхождения x19 находится вхождение x24 той же переменной x23. Переменной x25 присваивается то вхождение, непосредственным операндом которого является x24. В нашем примере это вхождение выражения e/c. Проверяется, что заголовок подтерма x25 равен x13.

Оператор "тождвывод" определяет результат x26 преобразования вхождения x25 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "склейкаоперандов".

3. Вывод теоремы приема, использующего пропорциональность из контекста для исключения неизвестных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ a^c e = b^c d \ \rightarrow (a/b)c = d/e)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \\ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow (a/b)^c = a^c/b^c)$$

Характеристика - "свертка(первыйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. Проверяется, что x10 имеет заголовок "дробь", причем список x12 максимально сложных подтермов выражения x10 состоит из двух элементов. В нашем примере - "a^c", "b^c". Переменной x13 присваивается список имеющих максимальную сложность подтермов выражения x11. Проверяется, что он одноэлементен. В нашем примере - состоит из выражения "(a/b)^c".

Переменной x14 присваивается список корневых операндов выражения x10. Проверяется, что список x12 включается в x14. Переменной x15 присваивается пара переменных X, Y, не входящих в исходную теорему. В нашем примере - d, e. Переменной x16 присваивается равенство произведения первого элемента пары x14 на переменную Y произведению второго элемента пары x14 на переменную X. Переменной x17 присваивается объединение списка antecedентов исходной теоремы с утверждениями "число(X)", "число(Y)", "не(равно(Y 0))" и с утверждением x16. Переменной x18 присваивается равенство выражения x11 выражению "дробь(X, Y)". Создается импликация с antecedентами x17 и консеквентом x18, которая регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "опрнеизв(N)", где N - номер последнего antecedента.

4. Вывод теоремы для варьирования стандартизируемого операнда.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 < d + e \ \& \ 0 \leq d - e \ \& \ a - \text{число} \ \& \\ a = -e^2 + d^2 \rightarrow (d - e)^c = a^c/(d + e)^c)$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq d + e \ \& \ 0 \leq d - e \rightarrow (d + e)^c(d - e)^c = \\ (-e^2 + d^2)^c)$$

Характеристика - "свертка(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. Переменной x12 присваивается список подтермов выражения x10, имеющих максимальную сложность. В нашем примере - "(d + e)^c" и "(d - e)^c". Проверяется, что список x12 двухэлементный. Переменной x13 присваивается список подтермов выражения x11, имеющих максимальную сложность. Проверяется, что он одноэлементный. Проверяется, что заголовки всех термов списков x12 и x13 равны одному и тому же символу x14. В нашем примере x14 - символ "степень". Справочник "операндномер" определяет по символу x14 такую тройку (i, A, B), что в выражениях с заголовком x14 целесообразен переход к одинаковым i-м корневым операндам. При этом A - выражение вида "f(x₁, ..., x_n)", где f - символ x14; B - конъюнкция фильтров, уточняющих контекст стандартизации операндов. Фильтры заданы в терминах переменных

x_1, \dots, x_n . В нашем примере $i = 1$, $A = a^b$, B - фильтр "и(тип(описать)условие не(известно(b)))". Переменной x_{17} присваивается вхождение i -го корневого операнда первого выражения списка x_{12} , переменной x_{18} - вхождение i -го корневого операнда второго выражения списка x_{12} . В нашем примере, соответственно, вхождения подтермы $d + e$ и $d - e$. Проверяется, что подтермы x_{17} и x_{18} различны и не являются переменными. Переменной x_{19} присваивается вхождение i -го корневого операнда выражения списка x_{13} . Проверяется, что подтерм x_{19} отличен от подтермов x_{17} и x_{18} .

Переменной x_{20} присваивается некоторое выражение пары x_{12} . В нашем примере - " $(d - e)^c$ ". Выбирается переменная x_{21} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Проверяется, что выражение x_{20} имеет единственное вхождение в терм x_{10} . Переменной x_{24} присваивается результат замены этого вхождения на переменную x_{21} . В нашем примере x_{24} имеет вид " $(d + e)^c a$ ".

Переменной x_{25} присваивается список антецедентов исходной теоремы. Решается задача на описание x_{26} с посылками x_{25} и условиями "равно(x_{24} x_{11})", " $T(x_{21})$ ", где T - тип значений выражений с заголовком x_{14} . В нашем примере - "число". Цели задачи x_{26} - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{21} ", "упростить". Ответ присваивается переменной x_{27} . В нашем примере он имеет вид:

$$(\neg(d + e = 0) \ \& \ a = (-e^2 + d^2)^c / (d + e)^c \ \vee \ d = -e) \ \& \ a - \text{число}$$

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x_{28} присваивается результат преобразования его к виду д.н.ф. Среди дизъюнктивных членов утверждения x_{28} выбирается утверждение x_{29} . В нашем примере - " $\neg(d + e = 0) \ \& \ a = (-e^2 + d^2)^c / (d + e)^c \ \& \ a - \text{число}$ ". Переменной x_{30} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{29} . Среди них находится равенство x_{31} с переменной x_{21} в левой части. Переменной x_{32} присваивается результат подстановки в x_{31} выражения x_{20} вместо переменной x_{21} . В нашем примере он имеет вид:

$$(d - e)^c = (-e^2 + d^2)^c / (d + e)^c$$

Переменной x_{33} присваивается подтерм x_{19} . В нашем примере - " $-e^2 + d^2$ ". Проверяется что выражение x_{33} имеет единственное вхождение x_{35} в терм x_{32} . Переменной x_{36} присваивается результат замены этого вхождения на переменную x_{21} . Переменной x_{37} присваивается объединение списка x_{25} с отличными от x_{31} элементами набора x_{30} . Переменной x_{38} присваивается результат обработки списка x_{37} оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x_{36} . Переменной x_{39} присваивается результат добавления к списку x_{38} равенства выражений x_{21} и x_{33} . Переменной x_{40} присваивается импликация с антецедентами x_{39} и консеквентом x_{36} . Переменной x_{41} присваивается элемент пары x_{12} , отличный от x_{20} , переменной x_{42} - терм "стандлогарифм(x_{20} x_{41} второйтерм)". В нашем примере он имеет вид "стандлогарифм($(d - e)^c$, $(d + e)^c$, второйтерм)". Теорема x_{40} регистрируется в списке вывода и сопровождается единственной характеристикой x_{42} .

3.98 Характеристика "свойства"

Характеристикой "свойства(x_1)" снабжаются простые импликации, выражающие свойства "сложного" объекта x_1 .

Логические следствия теоремы

1. Попытка кванторной расшифровки консеквента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ b \in a \rightarrow \text{inf}(a) \leq b)$$

из теоремы

$$\forall_a(\neg(a = \emptyset) \ \& \ a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \rightarrow \text{нижнягрань}(\text{inf}(a), a))$$

Характеристика - "свойства($\text{inf}(a)$)".

Переменной x_8 присваивается корневой операнд текущей характеристики, переменной x_9 - консеквент, переменной x_{10} - список антецедентов. Решается задача на описание с посылками x_{10} и единственным условием x_9 . Цели задачи - "прямойответ", "редакция", "развертка", "полный". Ответ присваивается переменной x_{12} . В нашем примере он имеет вид " $\forall_b(b \in a \rightarrow \text{inf}(a) \leq b)$ ". Переменной x_{13} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{12} . В этом списке выбирается простая импликация x_{14} . В нашем примере она совпадает с утверждением x_{12} . Переменной x_{15} присваивается консеквент импликации x_{14} . Проверяется, что он содержит подтерм x_8 . Переменной x_{16} присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" объединения списка x_{10} со списком антецедентов импликации x_{14} относительно параметров утверждения x_{15} . Затем создается импликация с антецедентами x_{16} и консеквентом x_{15} , которая регистрируется в списке вывода.

2. Расшифровка консеквента в дизъюнкцию, перенесение дизъюнктивного члена в антецеденты и исключение невырожденных числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C \in \text{прямая}(AB)) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow 0 < \angle(ABC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow 0 \leq \angle(ABC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a < b \vee a = b \leftrightarrow a \leq b)$$

Характеристика - "свойства($\angle(ABC)$)".

Переменной x_8 присваивается консеквент, переменной x_9 - список антецедентов. Переменной x_{10} присваивается заголовок консеквента. В нашем примере - "меньшеилиравно". Справочник поиска теорем "определение" находит по x_{10} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{13} присваивается результат переоборзначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{13} совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x_{14} присваивается вхождение консеквента теоремы x_{13} - некоторой эквивалентности. Переменной x_{15} присваивается вхождение той части эквивалентности, которая имеет заголовок x_{10} . Проверяется, что вхождение x_{16} другой части является вхождением дизъюнкции с двумя корневыми операндами.

Переменной x_{17} присваивается подтерм x_{15} , переменной x_{18} - список его параметров. В нашем примере x_{17} - утверждение " $a \leq b$ ". Проверяется, что список x_{18} включает все переменные теоремы x_{13} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{18} , унифицирующая термы x_{17} и x_8 . Переменной x_{20} присваивается набор дизъюнктивных членов дизъюнкции x_{16} . Определяется список x_{21} результатов применения к утверждениям x_{20} подстановки S . Переменной x_{22} присваивается объединение списка x_9 с набором результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_{13} .

В списке x_{21} выбирается элементарное утверждение x_{23} , не являющееся равенством. В нашем примере - утверждение " $0 < \angle(ABC)$ ". Переменной x_{24} присваивается другое утверждение пары x_{21} . В нашем примере - " $0 = \angle(ABC)$ ". Проверяется, что оно элементарное и содержит невырожденный числовой атом. Переменной x_{25} присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка x_{22} , к которому добавлено отрицание утверждения x_{24} . Обработка ведется относительно параметров утверждения x_{23} . Проверяется, что утверждения набора x_{25} не содержат невырожденных числовых атомов. Создается импликация с антецедентами x_{25} и консеквентом x_{23} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема", и конъюнктивные члены результата регистрируются в списке вывода.

3. Вывод импликации для усмотрения противоречия.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C \in \text{прямая}(AB)) \ \& \ D \in \text{отрезок}(CE) \ \& \\ E \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ A\text{—точка} \ \& \ B\text{—точка} \ \& \ C\text{—точка} \ \& \ \neg(D \in \text{фигура}(ABC)) \rightarrow \\ \text{ложь})$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C \in \text{прямая}(AB)) \ \& \ D \in \text{отрезок}(CE) \ \& \\ E \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ A\text{—точка} \ \& \ B\text{—точка} \ \& \ C\text{—точка} \rightarrow D \in \text{фигура}(ABC))$$

Характеристика - "свойства(фигура(набор(ABC)))".

Переменной x_8 присваивается консеквент, переменной x_9 - список антецедентов. Переменной x_{12} присваивается результат упрощения отрицания утверждения x_8 относительно посылок x_9 при помощи задаи на преобразование. В нашем

примере - " $D \in \text{фигура}(ABC)$ ". Переменной x_{13} присваивается результат добавления утверждения x_{12} к списку x_9 . Затем создается импликация с антецедентами x_{13} и консеквентом "ложь", которая регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "контроль".

4. Попытка усмотреть эквивалентность консеквента одному из антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow (b + c) - \text{rational} \leftrightarrow b - \text{rational})$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{rational} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow (b + c) - \text{rational})$$

Характеристика - "свойства($b + c$)". Переменной x_8 присваивается консеквент теоремы. Проверяется, что он неповторный. Переменной x_9 присваивается список антецедентов, переменной x_{10} - заголовок консеквента. Переменной x_{11} присваивается список антецедентов, имеющих заголовок x_{10} . Проверяется, что все эти антецеденты имеют вид $P(X)$, где P - одноместный предикатный символ, X - переменная. Переменной x_{12} присваивается список параметров утверждений набора x_{11} . Проверяется, что он совпадает со списком параметров утверждения x_8 . В списке x_{12} выбирается переменная x_{13} . В нашем примере - переменная b . Выбирается переменная x_{14} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{15} присваивается список антецедентов, не вошедших в список x_{11} . Переменной x_{16} присваивается подсписок списка x_{15} , образованный утверждениями, содержащими переменную x_{13} . В нашем примере список x_{16} пуст. Переменной x_{17} присваивается набор не вошедших в список x_{16} утверждений списка x_{15} , к которому добавляются не содержащие x_{13} утверждения списка x_{11} , а также утверждение " $x_{10}(x_{14})$ ". В нашем примере - "рациональное(a)". Рассматривается корневой операнд консеквента T . Переменной x_{18} присваивается объединение списка x_{16} с утверждениями, необходимыми для сопровождения по о.д.з. выражения T , а также с равенством выражения T переменной x_{14} .

Решается задача на описание с посылками x_{17} и условиями x_{18} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "упростить", "или", "неизвестные x_{13} ". Ответ присваивается переменной x_{20} . В нашем примере он имеет вид " $b = a - c$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{21} присваивается набор дизъюнктивных членов результата приведения утверждения x_{20} к виду д.н.ф. В этом наборе выбирается утверждение x_{22} . В нашем примере оно совпадает с x_{20} . В списке x_{23} конъюнктивных членов утверждения x_{22} выбирается равенство x_{24} с переменной x_{13} в левой части. Переменной x_{25} присваивается остаток списка x_{23} после удаления из него равенства x_{24} . Проверяется, что среди утверждений x_{25} нет равенства, причем эти переменные не содержат переменной x_{14} .

Проверяется, что отрицание каждого отличного от x_{22} элемента списка x_{21} является следствием объединения утверждений x_{25} с утверждениями x_{17} . Рассматривается правая часть Q равенства x_{24} . Переменной x_{26} присваивается объединение списков x_{17} и x_{25} , и устанавливается, что утверждение " $x_{10}(Q)$ "

является следствием утверждений x26. В списке x11 выбирается утверждение x28, содержащее переменную x13. Переменной x29 присваивается объединение списка x25 со списком отличных от x28 элементов списка x9, а также с утверждениями, необходимыми для сопровождения термина Q по о.д.з. Переменной x30 присваивается эквивалентность утверждений x8 и x28. Переменной x31 присваивается результат обработки списка x29 оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x30. Затем создается импликация с антецедентами x31 и консеквентом x30, которая регистрируется в списке вывода.

5. Подстановка единицы вместо неповторной переменной консеквента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_m(m - \text{целое} \rightarrow m - \text{rational})$$

из теоремы

$$\forall_{mn}(n - \text{натуральное} \ \& \ m - \text{целое} \rightarrow (m/n) - \text{rational})$$

Характеристика - "свойства(m/n)".

Переменной x8 присваивается консеквент теоремы, переменной x9 - список антецедентов. Рассматривается вхождение x10 в утверждение x8 неоднобуквенного подтерма. Переменной x11 присваивается его заголовок. В нашем примере x10 - вхождение выражения m/n . Переменной x13 присваивается единица операции x11, переменной x14 - номер операнда, по которому имеется единица. В нашем примере, соответственно, x13 равно 1, а x14 - 2. Переменной x15 присваивается вхождение того операнда вхождения x10, по которому имеется единица x13. Проверяется, что по вхождению x15 расположена некоторая переменная x16, имеющая в терме x8 лишь одно вхождение. В нашем примере x16 - переменная n .

Переменной x17 присваивается список результатов подстановки единицы x13 вместо переменной x16 в утверждения списка x9, переменной x18 - результат такой же подстановки в утверждение x8. Переменной x19 присваивается результат обработки списка x17 оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x18. Переменной x20 присваивается результат упрощения утверждения x18 оператором "упрощединицы", выполняющим простейшие действия по устранению единиц. Проверяется, что утверждение x20 не содержится в списке x19. Затем создается импликация с антецедентами x19 и консеквентом x20. Она регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительного тождества для упрощения консеквента

1. Использование тождества из того же цикла вывода для упрощения самого сложного подвыражения консеквента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c(c - \text{число} \rightarrow c \leq |c|)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a \leq \max(a, b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_c(c - \text{число} \rightarrow \max(c, -c) = |c|)$$

Характеристика - "свойства($\max(a, b)$)".

Переменной x8 присваивается консеквент, переменной x9 - список его подтермов, имеющих максимальную сложность. В списке x9 выбирается терм x10. В нашем примере - " $\max(a, b)$ ". Переменной x11 присваивается заголовок терма x10. В списке вывода находит не помеченная символом "исключение" и отличная от исходной теоремы дополнительная теорема, имеющая характеристику "нормализация(N)". Проверяется, что эта теорема имеет характеристику "варьир($M \dots$)", у которой M не равно N . В нашем примере имеется характеристика "варьир(первыйтерм $|c| \max(c, -c)$)". Переменной x18 присваивается вхождение заменяемой части равенства в консеквенте дополнительной теоремы согласно направлению замены N . Проверяется, что она имеет заголовок x11. Переменной x19 присваивается вхождение терма x10 в исходную теорему, расположенное в консеквенте. Оператор "тождвывод" определяет результат x20 преобразования вхождения x19 при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Рассмотрение частных случаев выражений заданного типа для варьирования их свойства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{atABT}(\text{Отрезок}(A, B) = \text{Путь}(a, T) \ \& \ t \in T \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \rightarrow \text{Место}(a, t) \in \text{отрезок}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{atT}(t \in T \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \rightarrow \text{Место}(a, t) \in \text{точкипути}(\text{Путь}(a, T)))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{aT}(\text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \rightarrow \text{Путь}(a, T) = \text{ориенткрив}(\lambda_t(\text{Место}(a, t), t \in T)))$$

$$\forall_a(\text{оркрив}(a) \leftrightarrow \exists_f(f - \text{функция} \ \& \ \text{Числотр}(\text{Dom}(f)) \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \text{Точки} \ \& \ a = \text{ориенткрив}(f)))$$

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \text{точкипути}(\text{Отрезок}(A, B)) = \text{отрезок}(AB))$$

Характеристика - "свойства($\text{Путь}(a, T)$)".

Сразу заметим, что первые две дополнительные теоремы используются лишь для фильтрации ненужных срабатываний. Собственно для вывода следствия они не используются.

Переменной x8 присваивается консеквент, переменной x9 - список его подтермов, имеющих максимальную сложность. В списке x9 выбирается терм x10. В

нашем примере - "Путь(a, T)". Переменной x_{11} присваивается список антецедентов исходной теоремы. Проверяется, что x_{10} - атомарное выражение; при проверке используется список посылок x_{11} .

Переменной x_{12} присваивается вхождение терма x_{10} в терм x_8 , переменной x_{13} - вхождение, непосредственным операндом которого служит x_{12} . В нашем примере x_{13} - вхождение выражения "точкипути(Путь(a, T))". Проверяется, что число корневых операндов вхождения x_{13} равно 1. Переменной x_{14} присваивается заголовок терма x_{10} . В нашем примере - "Путь". Переменной x_{16} присваивается тип значения выражений с заголовком x_{14} . В нашем примере - "оркрив".

Справочник поиска теорем "определение" находит по символу x_{14} указанную выше первую дополнительную теорему. Переменной x_{19} присваивается вхождение ее консеквента. Переменной x_{20} присваивается вхождение той части равенства x_{19} , которая имеет заголовок x_{14} , переменной x_{21} - вхождение другой части. Переменной x_{22} присваивается символ по вхождению x_{21} . В нашем примере - "ориенткрив". Справочник поиска теорем "называть" определяет по x_{22} вторую дополнительную теорему. Фактически лишь проверяется ее существование.

Переменной x_{25} присваивается название раздела, к которому относится символ x_{16} . В нашем примере - "оркривые". В данном разделе находится третья дополнительная теорема, имеющая характеристику "нормализация(N)". Проверяется, что заголовок ее заменяемой части совпадает с символом по вхождению x_{13} . В нашем примере - "точкипути". Переменной x_{32} присваивается результат переобозначения переменных в третьей дополнительной теореме на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{32} совпадает с третьей дополнительной теоремой. Переменной x_{34} присваивается первый операнд заменяемой части теоремы x_{32} . В нашем примере - терм "Отрезок(A, B)". Переменной x_{35} присваивается равенство выражения x_{10} выражению x_{34} . Переменной x_{36} присваивается результат замены вхождения x_{13} в терме x_8 на заменяющую часть теоремы x_{32} . Затем создается импликация, антецеденты которой суть утверждения списка x_{11} , антецеденты теоремы x_{32} и равенство x_{35} . Консеквентом служит утверждение x_{36} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.99 Характеристика "связка"

Характеристикой "связка" снабжаются эквивалентности с квантором существования в левой части, которые можно использовать для исключения несущественных неизвестных.

Логические следствия теоремы

1. Группировка в левых частях всех ненулевых членов для эквивалентности типа "связка".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \exists_c(0 < a + c \ \& \ 0 < b - c \ \& \ c - \text{число}) \leftrightarrow 0 < a + b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \exists_c(c < b \ \& \ a < c \ \& \ c - \text{число}) \leftrightarrow a < b)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. Переменной x12 присваивается пара термов x10, x11. Предпринимается последовательный просмотр термов пары x12. Для текущего такого терма x14 выполняются всевозможные группировки ненулевых членов в левых частях всех двуместных отношений, допускающих перегруппировку членов из одной части в другую. По окончании обработки термов пары x12 проверяется, что ее первый элемент изменился. Тогда переменной x13 присваивается эквивалентность утверждений пары x12, с сохранением ориентации их в исходной теореме. Создается импликация с теми же антецедентами, что у исходной теоремы, и консеквентом x13. Переменной x14 присваивается результат обработки ее оператором "нормтеорема". Далее теорема x14 последовательно обрабатывается операторами "исключотр", "Полныепосылки" и "нормтеорема". Результат регистрируется в списке вывода.

2. Перенесение заменяющей части в антецеденты.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{AB}(\neg(B = \emptyset) \ \& \ A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \rightarrow \exists_f(\text{Отображение}(f, A, B)))$$

из теоремы

$$\forall_{AB}(B - \text{set} \rightarrow \exists_f(\text{Отображение}(f, A, B)) \leftrightarrow \neg(B = \emptyset) \ \& \ A - \text{set} \ \vee \ A = \emptyset)$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть с заголовком "существует", переменной x11 - заменяющая. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x12 и утверждение x11, а консеквент - x10. Она обрабатывается оператором "нормтеорема", после чего конъюнктивные члены результата регистрируются в списке вывода.

Обобщение теоремы

1. Обобщение эквивалентности типа "связка" путем ввода дополнительных параметров, учитывающих перегруппировку между частями двуместного отношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abde}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \exists_c(a < c + e \ \& \ c + d < b \ \& \ c - \text{число}) \leftrightarrow a + d < b + e)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \exists_c(c < b \ \& \ a < c \ \& \ c - \text{число}) \leftrightarrow a < b)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть с заголовком "существует", переменной x_{11} - связывающая приставка квантора существования. Проверяется, что она одноэлементна, и переменной x_{12} присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная s . Переменной x_{13} присваивается список параметров утверждения x_{10}

Вводятся пустые накопители x_{14} , x_{15} , x_{16} и x_{17} . Начинается цикл просмотра вхождений v переменной x_{12} в утверждение x_{10} , являющихся операндами некорневых вхождений w двуместных отношений, противоположный операнд X которых входит в список x_{13} . Рассматривается символ s по вхождению w . Если этот символ - равенство, то s заменяется на тип значений частей этого равенства. Справочник "перегруппировка" выдает по символу s тройку (A, B, C) , означающую, что возможна перегруппировка A -членов операндов отношения s с изменением знака B ; C - единица операции A . Выбирается переменная Y , не входящая в исходную теорему и в термы списка x_{17} , после чего в накопитель x_{14} заносится вхождение v , в накопитель x_{15} - выражение $A(Y, x_{12})$, в накопитель x_{16} - переменная Y , в накопитель x_{17} - выражение $A(X, B(Y))$. В нашем примере x_{14} состоит из пары вхождений переменной s , расположенных внутри подкванторного утверждения; x_{15} - выражения $d + c$ и $e + c$; x_{16} - переменные b, a ; x_{17} - выражения $b - d$ и $a - e$.

По окончании цикла проверяется, что накопитель x_{14} непуст. Переменной x_{18} присваивается результат замены вхождений x_{14} в терм x_{10} на выражения x_{15} . В нашем примере - " $\exists_e(d + c < b \ \& \ a < e + c \ \& \ c - \text{число})$ ". Переменной x_{20} присваивается результат подстановки выражений x_{17} вместо переменных x_{16} в заменяющую часть теоремы. В нашем примере - " $a - e < b - d$ ". Утверждение x_{20} обрабатывается при помощи справочника "перегруппировка" так, чтобы в нем оказались исключены "минусы". В нашем примере получается " $a + d < b + e$ ".

Переменной x_{22} присваивается список результатов подстановки выражений x_{17} вместо переменных x_{16} в антецеденты исходной теоремы. Создается импликация с антецедентами x_{22} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{18} и x_{20} . Исходная ориентация эквивалентности сохраняется. Данная импликация обрабатывается операторами "нормтеорема" и "Полныепосылки", после чего регистрируется в списке вывода.

2. Обобщение эквивалентности типа "связка" путем устранения отрицания над уникальной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \exists_e(d + ae + be^2 = 0 \ \& \ e - \text{число}) \leftrightarrow 0 \leq -4bd + a^2)$$

из теоремы

$$\forall_{abd}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \exists_e(ae + be^2 - d = 0 \ \& \ e - \text{число}) \leftrightarrow 0 \leq 4bd + a^2)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть с заголовком "существует", переменной x_{11} - заменяющая. Переменной x_{12} присваивается список параметров терма x_{10} . В этом списке выбирается переменная x_{13} , имеющая в x_{10}

единственное вхождение. В нашем примере - переменная d . Переменной x_{14} присваивается вхождение переменной x_{13} в x_{10} , переменной x_{15} - вхождение, операндом которого служит x_{14} . Проверяется, что число операндов вхождения x_{15} равно 1. Переменной x_{16} присваивается символ по вхождению x_{15} . В нашем примере - "минус". Справочник "отрицание" проверяет, что x_{16} - операция типа "отрицание", т.е. двукратное применение ее возвращает исходный результат. Переменной x_{17} присваивается выражение " $x_{16}(x_{13})$ ".

Переменной x_{19} присваивается список результатов подстановки выражения x_{17} вместо переменной x_{13} в antecedentes теоремы, переменной x_{20} - результат такой же подстановки в консеквент теоремы. Создается импликация с antecedентами x_{19} и консеквентом x_{20} . Она обрабатывается операторами "полныепосылки" и "нормтеорема", после чего регистрируется в списке вывода.

3. Обобщение эквивалентности типа "связка" путем устранения antecedента, имеющего вид отрицания равенства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \exists_e(c = d^e \ \& \ e - \text{число}) \leftrightarrow \neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \vee \ c = 1 \ \& \ d = 1)$$

из теоремы

$$\forall_{cd}(\neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \exists_e(c = d^e \ \& \ e - \text{число}) \leftrightarrow 0 < c)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть с заголовком "существует", переменной x_{11} - заменяющая. Переменной x_{12} присваивается список antecedентов теоремы. В нем находится утверждение x_{13} , представляющее собой отрицание некоторого равенства T . В нашем примере x_{13} имеет вид " $\neg(d - 1 = 0)$ ". Переменной x_{14} присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения утверждения x_{10} по о.д.з. Проверяется, что x_{13} не входит в x_{14} и не усматривается из x_{14} при помощи задачи на доказательство, решаемой до максимального уровня 4. Переменной x_{15} присваивается результат удаления из x_{12} утверждения x_{13} . Проверяется, что он непуст. Переменной x_{16} присваивается связывающая приставка квантора существования x_{10} , переменной x_{17} - результат добавления равенства T к списку конъюнктивных членов утверждения под квантором x_{10} .

Решается задача на описание x_{18} с посылками x_{15} и условиями x_{17} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{16} ", "параметры x_{16} ". Переменной x_{19} присваивается ответзадачи x_{18} . В нашем примере он имеет вид " $d = 1 \ \& \ c = 1$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и не содержит переменных списка x_{16} . Переменной x_{20} присваивается дизъюнкция утверждений " $\text{и}(x_{11} \ x_{13})$ " и x_{19} . Находится результат x_{22} упрощения этой дизъюнкции при помощи задачи на преобразование. Затем создается импликация с antecedентами x_{15} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждения x_{10} утверждению x_{22} . Она регистрируется в списке вывода.

Замена переменных в теореме

1. Использование явного параметрического описания рассматриваемых объектов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcK}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \exists_{BC}(\neg(B = C) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка}) \leftrightarrow \neg(a^2 + b^2 = 0))$$

из теоремы

$$\forall_{abcK}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \exists_P(\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ \text{Прямая}(P)) \leftrightarrow \neg(a^2 + b^2 = 0))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_A(\text{Прямая}(A) \leftrightarrow \exists_{BC}(B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A = \text{прямая}(BC)))$$

Переменной x9 присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте, которая имеет своим заголовком символ "существует". Переменной x11 присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. Среди них выбирается утверждение x12 вида $P(X)$, где X - переменная, входящая в связывающую приставку квантора x9. В нашем примере x12 имеет вид "Прямая(P)". Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по символу P указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она не имеет антецедентов. Переменной x17 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x17 совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x19 присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте теоремы x17, которая имеет заголовок x13. Переменной x21 присваивается переменная - корневой операнд вхождения x19. В нашем примере - переменная A .

Переменной x20 присваивается вхождение другой части эквивалентности в консеквенте дополнительной теоремы. Проверяется, что она представляет собой квантор существования. Переменной x22 присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором x20. Среди них выбирается равенство x23 переменной x21 некоторому выражению x26. В нашем примере - выражению "прямая(BC)".

Переменной x27 присваивается список результатов подстановки выражения x26 вместо переменной X в отличные от x12 утверждения списка x11. Переменной x28 присваивается конъюнкция утверждений списка x27 и отличных от x23 утверждений списка x22. Переменной x29 присваивается объединение списка отличных от X элементов связывающей приставки квантора x9 со связывающей приставкой квантора x20. Переменной x30 присваивается результат навешивания квантора существования по x29 на утверждение x28. Наконец, определяется результат замены вхождения x9 в исходную теорему на утверждение x30. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Допускается единственная характеристика "связка".

Применение дополнительной эквивалентности для варьирования заменяемой части

1. Варьирование параметра параметрического описания с помощью другого параметрического описания.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefK}(\neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(d, K) = (e, f) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \exists_h(\neg(d = h) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(dh), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ h - \text{точка}) \rightarrow c + ae + bf = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abcdefK}(\neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(d, K) = (e, f) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \exists_P(\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ d \in P \ \& \ \text{Прямая}(P)) \rightarrow c + ae + bf = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{AP}(A - \text{точка} \rightarrow \text{Прямая}(P) \ \& \ A \in P \leftrightarrow \exists_B(B - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ P = \text{прямая}(AB)))$$

Переменной x10 присваивается та часть эквивалентности в консеквенте, которая представляет собой квантор существования. Пусть Q - другая часть этой эквивалентности. Переменной x11 присваивается связывающая приставка этого квантора, переменной x12 - список конъюнктивных членов утверждения под квантором. Среди них выбирается утверждение x13. В нашем примере - "Прямая(P)". Проверяется, что это утверждение имеет единственный подтерм x15 максимальной сложности, и переменной x16 присваивается заголовок данного подтерма. В нашем примере - символ "Прямая". Справочник поиска теорем "смпарам" определяет по x16 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается результат переобзначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{gi}(g - \text{точка} \rightarrow \text{Прямая}(i) \ \& \ g \in i \leftrightarrow \exists_h(h - \text{точка} \ \& \ \neg(g = h) \ \& \ i = \text{прямая}(gh)))$$

Переменной x22 присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте теоремы x19, которая представляет собой квантор существования, переменной x21 - вхождение другой части. Переменной x23 присваивается список конъюнктивных членов утверждения x21, переменной x4 - список параметров утверждений x23. Проверяется, что x24 содержит параметры всех антецедентов теоремы x19. Оператор "подборзначений" определяет подстановку S вместо переменных x24, переводящую утверждения x23 в некоторый подсписок x26 списка x12 (допускаются перестановки операндов коммутативных операций и симметричных отношений).

Переменной x27 присваивается результат применения подстановки S к подтерму x22. В нашем примере - " $\exists_h(h - \text{точка} \ \& \ \neg(d = h) \ \& \ P = \text{прямая}(dh))$ ". Переменной x28 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x19. Переменной x29 присваивается связывающая приставка квантора x27, переменной x30 - список конъюнктивных членов утверждения под квантором x27. Среди них выбирается равенство x31, в одной части

которого располагается некоторая переменная x_{32} , а в другой части - некоторое выражение T . Проверяется, что x_{32} входит в список x_{11} и имеет единственное вхождение в терм x_{27} . В нашем примере x_{32} - переменная P . Переменной x_{33} присваивается список утверждений x_{12} , не вошедших в список x_{26} . Переменной x_{34} присваивается объединение списка результатов применения подстановки выражения T вместо переменной x_{32} в утверждения x_{33} со список отличных от x_{31} утверждения набора x_{30} . Переменной x_{35} присваивается результат навешивания на конъюнкцию утверждений x_{34} квантора существования по переменным x_{29} и отличным от x_{32} переменным списка x_{11} . Создается импликация, антецеденты которой суть антецеденты исходной теоремы утверждения x_{28} , а консеквент - эквивалентность утверждения x_{35} утверждению Q . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.100 Характеристика "связпарам"

Характеристикой "связпарам(N)" снабжаются эквивалентности, у которых заменяемая часть имеет связанные переменные, а заменяющая - не имеет. При этом сложность заменяющей части не больше сложности заменяемой. N - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Перенесение в антецеденты отрицаний всех дизъюнктивных членов заменяющей части, кроме одного.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{af}(a - \text{set} \ \& \ \neg(a = \emptyset) \rightarrow \text{семействомножеств}(\lambda_b(f, b \in a)) \leftrightarrow f - \text{set})$$

из теоремы

$$\forall_{af}(a - \text{set} \rightarrow \text{семействомножеств}(\lambda_b(f, b \in a)) \leftrightarrow a = \emptyset \ \vee \ f - \text{set})$$

Характеристика - "связпарам(второйтерм)".

Переменной x_9 присваивается список антецедентов, переменной x_{11} - вхождение заменяющей части эквивалентности в консеквенте теоремы. Проверяется, что эта часть - дизъюнкция. Переменной x_{12} присваивается список ее дизъюнктивных членов. Проверяется, что утверждения списка x_{12} элементарны. Выбирается утверждение x_{13} списка x_{12} . В нашем примере - " $f - \text{set}$ ". Переменной x_{14} присваивается остаток списка x_{12} . Проверяется, что в x_{14} отсутствует утверждение вида $P(X)$, где P - название типа объекта. Переменной x_{15} присваивается список отрицаний утверждений набора x_{14} . Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x_9 и x_{15} , а консеквентом - эквивалентность заменяемой части теоремы утверждению x_{13} . Она регистрируется в списке вывода.

3.101 Характеристика "семействоэлементов"

Характеристикой "семействоэлементов(N)" снабжаются тождества, преобразующие параметрическое описание класса в операцию над семейством. N - направление замены.

Использование дополнительной эквивалентности для упрощения заменяемой части

1. Попытка использовать перегруппировочную эквивалентность для варьирования тождества, преобразующего параметрическое описание класса в операцию над семейством.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(\neg(b = \text{пустоеслово}) \ \& \ b - \text{слово} \rightarrow \prod_{i=1}^{l(b)} \{b(i)\} = \{b\})$$

из теоремы

$$\forall_A(\text{семействомножеств}(A) \ \& \ A - \text{слово} \ \& \ \neg(A = \text{пустоеслово}) \rightarrow \prod_{i=1}^{l(A)} A(i) = \text{set}_x(x - \text{слово} \ \& \ l(x) = l(A) \ \& \ \forall_i(i \in \{1, \dots, l(A)\} \rightarrow x(i) \in A(i)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a = b \rightarrow a \in \{b\})$$

Характеристика - "семействоэлементов(первыйтерм)".

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части равенства в консеквенте теоремы. Внутри этого вхождения рассматривается вхождение x11 описателя "класс". Внутри описателя рассматривается вхождение x12 предикатного символа x13. В нашем примере x12 - вхождение подтерма " $x(i) \in A(i)$ ", x13 - символ "принадлежит". Справочник поиска теорем "упрощэkv" определяет по x13 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x18 преобразования вхождения x12 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.102 Характеристика "систкоорд"

Характеристикой "систкоорд" снабжаются тождества для определения координат объекта.

Логические следствия теоремы

1. Использование координат объекта для определения координат другого объекта, упоминаемого в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDEFK}(D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \neg(D = F) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ E \in \text{прямая}(AC) \ \& \ A \in \text{отрезок}(CE)$$

& прямая(DE) \parallel прямая(AB) & $F \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, B, F) & прямая(DF) \parallel прямая(AC) & коорд(D, K) = $(a, b) \rightarrow$ коорд(E, K) = $(0, b)$)

из теоремы

$\forall_{ABCDEFK}$ (D - точка & E - точка & F - точка & систкоорд(K) & $\neg(D = F)$ & $\neg(D = E)$ & $K = (A, B, C)$ & $E \in$ прямая(AC) & $A \in$ отрезок(CE) & прямая(DE) \parallel прямая(AB) & $F \in$ прямая(AB) & точкалуча(A, B, F) & прямая(DF) \parallel прямая(AC) \rightarrow коорд(D, K) = $(l(AF)/l(AB), -l(AE)/l(AC))$)

и дополнительной теоремы

\forall_{ABCDK} (систкоорд(K) & $K = (A, B, C)$ & $D \in$ прямая(AC) & $A \in$ отрезок(CD) \rightarrow коорд(D, K) = $(0, -l(AD)/l(AC))$)

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{11} - вхождение той части равенства в консеквенте, которая имеет заголовок "набор", переменной x_{10} - вхождение другой части. Переменной x_{12} присваивается подтерм x_{10} . В нашем примере - "коорд(D, K)". Переменной x_{13} присваивается набор операндов вхождения x_{11} . В списке вывода рассматривается отличная от исходной теоремы теорема с характеристикой "систкоорд". В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x_{17} присваивается список ее антецедентов. Проверяется, что он короче списка x_8 . Переменной x_{18} присваивается список параметров утверждений x_{17} . Процедура "подбор" определяет подстановку S вместо переменных x_{18} , переводящую утверждения x_{17} в некоторое подмножество x_{20} утверждений x_8 (с точностью до изменения порядка операндов в коммутативных операциях и симметричных отношениях).

Переменной x_{21} присваивается результат применения подстановки S к консеквенту дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид "коорд(E, K) = $(0, -l(AE)/l(AC))$ ". Переменной x_{23} присваивается вхождение той части равенства x_{21} , которая имеет заголовок "набор"; переменной x_{22} - вхождение другой части. Переменной x_{24} присваивается список операндов вхождения x_{23} . Проверяется, что список параметров выражений x_{24} непуст. Переменной x_{25} присваивается подтерм x_{22} . Проверяется, что он отличен от x_{12} .

Выбирается список x_{26} не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x_{13} . В нашем примере - переменные a, b . Выбирается список x_{27} отличных от x_{26} и не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x_{24} . В нашем примере - переменные c, d . Переменной x_{28} присваивается объединение списка x_8 с равенствами переменных x_{26} соответствующим выражениям списка x_{13} . Переменной x_{29} присваивается список равенств переменных x_{27} соответствующим выражениям списка x_{24} .

Решается задача на описание x_{30} с посылками x_{28} и условиями x_{29} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямоответ", "упростить", "неизвестные x_{27} ", "известно x_{26} ". Ответ присваивается переменной x_{31} . В нашем примере он имеет вид " $d = b$ & $c = 0$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{32} присваивается список его конъюнктивных членов. Проверяется, что все они суть равенства с переменными списка x_{27} в левой части. Переменной

x33 присваивается список правых частей данных равенств, упорядоченных соответственно порядку переменных списка x27. Переменной x34 присваивается равенство выражения x12 выражению вида "набор(x26)". Переменной x25 присваивается результат применения подстановки S к выражению x25. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x8 и утверждение x34. Консеквентом является равенство выражения x35 выражению вида "набор(x33)". Эта импликация регистрируется в списке вывода.

2. Усмотрение тождества для численных параметров координаты.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdghjrK}(\text{коорд}(a, K) = (h, j, r) \ \& \ g - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \ \text{коорд}(ga, K) = (b, c, d) \rightarrow b = gh)$$

из теоремы

$$\forall_{aghjrK}(\text{коорд}(a, K) = (h, j, r) \ \& \ g - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(a) \rightarrow \text{коорд}(ga, K) = (gh, gj, gr))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x11 - вхождение той части равенства в консеквенте, которая имеет заголовок "набор", переменной x10 - вхождение другой части равенства. Переменной x12 присваивается список операндов вхождения x11. Проверяется, что список параметров выражений x12 непуст. Выбирается некоторая позиция x13 списка x12, и переменной x14 присваивается выражение с этой позиции. В нашем примере - выражение gh . Переменной x15 присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x12. В нашем примере - список b, c, d . Переменной x16 присваивается результат замены вхождения x11 в консеквент теоремы на терм "набор(x15)". В нашем примере x16 имеет вид "коорд(ga, K) = (b, c, d)". Переменной x17 присваивается позиция списка x15, соответствующая позиции x13 списка x12. В нашем примере - первая позиция списка x15. Переменной x18 присваивается равенство переменной, расположенной на позиции x17, выражению x14. В нашем примере - равенство " $b = gh$ ". Проверяется, что терм x14 не имеет невырожденных числовых атомов. Затем создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x8 и утверждение x16. Консеквентом служит равенство x18. Эта импликация обрабатывается оператором "исклант", предпринимающим попытку отбросить избыточные антецеденты. Результат регистрируется в списке вывода.

3. Варьирование точки, координаты которой вычисляются в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdeABCDK}(\neg(c = D) \ \& \ \neg(c \in \text{прямая}(AB)) \ \& \ \neg(c \in \text{прямая}(AC)) \ \& \ \neg(D \in \text{прямая}(AB)) \ \& \ \neg(D \in \text{прямая}(AC)) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ \text{коорд}(c, K) = (d, e) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \ \& \ c\text{-точка} \ \& \ D\text{-точка} \ \& \ \text{прямая}(cD) \parallel \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow b = e)$$

из теоремы

$$\forall_{abABCDEK}(\neg(D \in \text{прямая}(AB)) \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \text{систкоорд}(K) \& \neg(D = E) \& K = (A, B, C) \& E \in \text{прямая}(AC) \& \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(DE) \& \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow \text{коорд}(E, K) = (0, b))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов исходной теоремы. Переменной x11 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте, которая имеет заголовок "набор", переменной x10 - вхождение другой части. Переменной x12 присваивается подтерм x10. Переменной x13 присваивается список операндов вхождения x11, переменной x14 - список тех переменных, которые суть заголовки однобуквенных термов из x13. В нашем примере x14 состоит из переменной b . Проверяется, что список x14 короче списка x13. Переменной x15 присваивается переменная, являющаяся первым операндом вхождения x10. В нашем примере - переменная E . Переменной x16 присваивается второй операнд вхождения x10. В нашем примере - K .

В списке x8 находится равенство x17, у которого правая часть имеет заголовок "набор". В нашем примере - " $\text{коорд}(D, K) = (a, b)$ ". Переменной x18 присваивается список корневых операндов правой части равенства. Проверяется, что они суть различные переменные, причем длины списков x13 и x18 совпадают. Проверяется, что список x14 включается в список x18. Переменной x19 присваивается левая часть равенства x17. Проверяется, что второй операнд этой части равен x16, а первым операндом служит некоторая переменная x20, отличная от x15. В нашем примере x20 - переменная D . Переменной x21 присваивается результат присоединения переменной x20 перед началом списка x18. В нашем примере - D, a, b . Составляется список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x21, и переменной x22 присваивается набор однобуквенных термов, образованных этими переменными. В нашем примере - термы c, d, e . Переменной x23 присваивается список результатов подстановки термов x22 вместо переменных x21 в те антецеденты x8, которые имеют параметр из x21. Переменной x24 присваивается конъюнкция равенств переменных списка x14 тем выражениям списка x22, которые соответствуют им согласно списку x21. В нашем примере - единственное равенство $b = e$. Переменной x25 присваивается объединение списков x8 и x23. Переменной x26 присваивается список равенств списка x25, у которых в правой части расположен символ "набор". В нашем примере он состоит из равенств " $\text{коорд}(D, K) = (a, b)$ " и " $\text{коорд}(c, K) = (d, e)$ ".

Переменной x25 переприсваивается результат удаления утверждений x26 и добавления утверждения " $\text{не}(\text{равно}(x20 T))$ ", где T - первый элемент списка x22. В нашем примере - утверждения " $\neg(D = c)$ ".

Решается задача на исследование с посылками x25. Цели задачи - (исключ x15), "известно", "неизвестные X ", "антецеденты". Здесь X - все параметры посылок. После решения составляется список x29 всех посылок, не имеющих заголовка "актив". Проверяется, что переменная x15 не входит в параметры этих посылок. Переменной x30 присваивается объединение списков x29 и x26. Затем создается импликация с антецедентами x30 и консеквентом x24. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Использование координатного набора для вывода соотношения с невырожденными числовыми атомами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, D) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow l(AD) = al(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, D) \rightarrow \text{коорд}(D, K) = (l(AD)/l(AB), 0))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов исходной теоремы. Переменной x11 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте, которая имеет заголовок "набор", переменной x10 - вхождение другой части. Переменной x12 присваивается список операндов вхождения x11. Проверяется, что список их параметров непуст. Рассматривается позиция x13 списка x12; переменной x14 присваивается выражение на этой позиции. В нашем примере x13 - первая позиция, x14 - выражение " $l(AD)/l(AB)$ ". Переменной x15 присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x12. В нашем примере - список a, b . Переменной x16 присваивается результат замены вхождения x11 в консеквент теоремы на терм "набор(x15)". В нашем примере он имеет вид " $\text{коорд}(D, K) = (a, b)$ ". Рассматривается переменная X списка x15, расположенная на позиции, соответствующей позиции x13 списка x12. В нашем примере - переменная a . Переменной x18 присваивается равенство этой переменной выражению x14. Проверяется, что x14 содержит хотя бы один невырожденный числовой атом. Переменной x19 присваивается результат добавления к списку x8 равенства x16. Решается задача на преобразование с посылками x19 и условием x18. Цели задачи - "упростить", "числкоэфф", "нормтеорема", "редуцирование". Ответ присваивается переменной x21. В нашем примере он имеет вид " $l(AD) = al(AB)$ ". Создается импликация с антецедентами x19 и консеквентом x21. Она регистрируется в списке вывода.

Склейка двух теорем

1. Склейка двух теорем, отличающихся альтернативными антецедентами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{efghAK}(\text{коорд}(\text{вектор}(Ag), K) = (f, h) \ \& \ e - \text{число} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(e \cdot \text{вектор}(Ag), K) = (ef, eh))$$

из теоремы

$$\forall_{efghAK}(\text{коорд}(\text{вектор}(Ag), K) = (f, h) \ \& \ e - \text{число} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ 0 \leq e \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(e \cdot \text{вектор}(Ag), K) = (ef, eh))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{efghAK}(\text{коорд}(\text{вектор}(Ag), K) = (f, h) \ \& \ e - \text{число} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ e \leq 0 \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(e \cdot \text{вектор}(Ag), K) = (ef, eh))$$

Переменной x_9 присваивается консеквент теоремы, переменной x_{10} - список ее антецедентов. В списке вывода находится дополнительная теорема x_{12} , отличная от текущей, у которой набор антецедентов x_{14} , консеквент x_{15} и связывающая приставка x_{17} имеют такую же длину, как у текущей теоремы. В нашем случае эта теорема указана выше.

Переменной x_{18} присваивается консеквент исходной теоремы, переменной x_{19} - консеквент дополнительной. Переменной x_{20} присваивается список параметров термов x_{18} и x_{19} . Усматривается подстановка S вместо переменных x_{20} , переводящая каждое из утверждений x_{18} , x_{19} в другое. Переменной x_{22} присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям x_{14} , переменной x_{23} - пересечение списков x_{22} и x_{10} . Проверяется, что оно непусто. Переменным x_{24} и x_{25} присваиваются результаты исключения из списков x_{22} и x_{10} утверждений списка x_{23} . Проверяется, что оба они одноэлементные, и переменной x_{26} присваивается дизъюнкция их элементов. В нашем примере - " $e \leq 0 \vee 0 \leq e$ ". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x_{26} - следствие утверждений x_{23} . Исходная и дополнительная теоремы помечаются символом "исключение", а в списке вывода регистрируется в качестве обобщения исходной теоремы импликация с антецедентами x_{23} и консеквентом x_9 .

2. Определение координат объекта по координатам его проекций.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDEFK} (D - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \neg(D = F) \ \& \\ K = (A, B, C) \ \& \ F \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{прямая}(AC) \ \parallel \ \text{прямая}(DF) \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ \neg(D = E) \ \& \ E \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{прямая}(AB) \ \parallel \ \text{прямая}(DE) \ \& \\ \text{коорд}(F, K) = (a, 0) \ \& \ \text{коорд}(E, K) = (0, b) \rightarrow \text{коорд}(D, K) = (a, b))$$

из теоремы

$$\forall_{abABCDFK} (D - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \neg(D = F) \ \& \\ K = (A, B, C) \ \& \ F \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{прямая}(AC) \ \parallel \ \text{прямая}(DF) \ \& \\ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow \text{коорд}(F, K) = (a, 0))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abABCDEK} (D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \\ K = (A, B, C) \ \& \ E \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{прямая}(AB) \ \parallel \ \text{прямая}(DE) \ \& \\ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow \text{коорд}(E, K) = (0, b))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_{11} - вхождение той части равенства в консеквенте, которая имеет заголовок "набор", переменной x_{12} - другая часть равенства. В списке x_8 находится равенство x_{13} , заголовком левой части которого служит название x_{14} каких-либо координат. В нашем примере x_{13} - равенство " $\text{коорд}(D, K) = (a, b)$ ", x_{14} - символ "коорд". Проверяется, что левая часть равенства x_{13} имеет заголовок "набор", и переменной x_{16} присваивается список операндов этого набора. Проверяется, что все они суть однобуквенные термы, образованные различными переменными. Переменной x_{17} присваивается список этих переменных. В нашем примере - a, b .

Переменной x_{18} присваивается список операндов набора x_{11} . В нашем примере - $a, 0$. Проверяется, что те из этих операндов, которые неконстантные, суть однобуквенные термы, образованные переменными. Переменной x_{19} присваивается список параметров термов x_{18} . В нашем примере x_{19} состоит из переменной a . Проверяется, что список x_{19} включается в список x_{17} , а список x_{17} - не включается в список x_{19} . Переменной x_{20} присваивается список параметров выражения x_{12} , не входящих в левую часть равенства x_{13} . В нашем примере x_{20} состоит из переменной F . Проверяется, что список x_{20} одноэлементный. Переменной x_{21} присваивается список утверждений набора x_8 , не содержащих переменной списка x_{20} . В нашем примере он состоит из утверждений " D - точка", "систкоорд(K)", " $K = (A, B, C)$ ", "коорд(D, K) = (a, b)".

Переменной x_{22} присваивается набор, в который заносится единственный элемент - исходная теорема. Для заполнения его дополнительными теоремами начинается цикл просмотра не помеченных символом "исключение" и отличных от исходной теорем x_{25} списка вывода, имеющих характеристику "систкоорд". Переменной x_{26} присваивается список антецедентов теоремы x_{25} . Проверяется, что в него включается список x_{21} . Переменной x_{27} присваивается правая часть равенства в консеквенте теоремы x_{25} . Она должна быть термом с заголовком "набор". Проверяется, что параметры выражения x_{27} не включают всего списка x_{17} , но сами включаются в список x_{17} . Проверяется, что список x_{19} не включается в список параметров выражения x_{27} . Переменной x_{28} присваивается список операндов набора x_{27} . Проверяется, что те из них, которые неконстантные, суть однобуквенные термы, образованные переменными. Переменной x_{29} присваивается список параметров левой части равенства в консеквенте теоремы x_{25} , не являющихся параметрами левой части равенства x_{13} . Проверяется, что список x_{29} одноэлементный, причем его элемент не входит в переменные теорем списка x_{22} . Затем теорема x_{25} заносится в накопитель x_{22} , а переменные x_{27} присоединяются к списку x_{19} .

По окончании цикла заполнения накопителя x_{22} все переменные начиная с x_{23} снова оказываются не определены. Проверяется, что список x_{22} неоднородный. В нашем примере он содержит, кроме исходной теоремы, также указанную выше дополнительную теорему.

Переменной x_{23} присваивается результат удаления из списка x_{22} исходной теоремы. Переменной x_{24} присваивается набор списков параметров правых частей равенств в консеквентах теорем списка x_{23} . Проверяется, что все эти списки одноэлементы, различны и содержат в совокупности все переменные набора x_{17} . Переменной x_{25} присваивается результат удаления из набора x_8 равенства x_{13} . Для каждой теоремы списка x_{23} к набору x_{25} присоединяются все отличные от x_{13} антецеденты этой теоремы. Кроме того, к списку x_{25} добавляются консеквенты всех теорем списка x_{22} . Затем создается импликация с антецедентами x_{25} и консеквентом x_{13} . Она регистрируется в списке вывода.

3. Склейка двух теорем с альтернативными антецедентами, приводящая к условному выражению.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdABCDK}(\neg(A = D) \& K = (A, B, C) \& \text{коорд}(D, K) = (c, d) \& D - \text{точка} \& \text{прямокоорд}(K) \rightarrow \text{полкоорд}(D, K) = (\sqrt{c^2 + d^2}, (-\arccos(c/\sqrt{c^2 + d^2})) \text{ при } d \leq 0, \text{ иначе } \arccos(c/\sqrt{c^2 + d^2})))$$

из теоремы

$$\forall_{cdABCDK}(\neg(A = D) \& K = (A, B, C) \& \text{коорд}(D, K) = (c, d) \& D - \text{точка} \& d \leq 0 \& \text{прямокоорд}(K) \rightarrow \text{полкоорд}(D, K) = (\sqrt{c^2 + d^2}, -\arccos(c/\sqrt{c^2 + d^2})))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cdABCDK}(\neg(A = D) \& K = (A, B, C) \& \text{коорд}(D, K) = (c, d) \& D - \text{точка} \& 0 \leq d \& \text{прямокоорд}(K) \rightarrow \text{полкоорд}(D, K) = (\sqrt{c^2 + d^2}, \arccos(c/\sqrt{c^2 + d^2})))$$

Переменной x8 присваивается список antecedентов теоремы, переменной x11 - вхождение той части равенства в консеквенте, которая имеет заголовок "набор", переменной x12 - другая часть равенства. В нашем примере x12 имеет вид "полкоорд(D, K)". Проверяется, что подтерм x11 не содержит невырожденных числовых атомов. В списке вывода находится не помечанная символом "исключение" и отличная от исходной теоремы теорема x14, имеющая характеристику "систкоорд". В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x16 присваивается список antecedентов дополнительной теоремы. Проверяется, то его длина равна длине списка x8. Переменной x17 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x17 имеет вид:

$$\forall_{abefghi}(\neg(e = h) \& i = (e, f, g) \& \text{коорд}(h, i) = (a, b) \& h - \text{точка} \& 0 \leq b \& \text{прямокоорд}(i) \rightarrow \text{полкоорд}(h, i) = (\sqrt{a^2 + b^2}, \arccos(a/\sqrt{a^2 + b^2})))$$

Переменной x16 переприсваивается список antecedентов теоремы x17. Переменной x20 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте теоремы x17, которая имеет заголовок "набор", переменной x21 - другая часть равенства. В нашем примере - "полкоорд(h, i)". Проверяется, что числа операндов выхождений x11 и x20 равны, причем подтерм x20 не имеет невырожденных числовых атомов. Проверяется, что длины выражений x12 и x21 равны. Переменной x22 присваивается список параметров выражения x21. Усматривается подстановка S вместо переменных x22, переводящая выражением x21 в x12. Проверяется, что эта подстановка выполняет переобозначение переменных без их отождествлений. Переменной x16 переприсваивается список обработанных оператором "станд" результатов применения подстановки S к утверждениям набора x16. В нашем примере x16 приобретает вид " $\neg(e = D)$ ", " $K = (e, f, g)$ ", " $(a, b) = \text{коорд}(D, K)$ ", " $D - \text{точка}$ ", " $0 \leq b$ ", " $\text{прямокоорд}(K)$ ".

Переменной x24 присваивается список переменных теоремы x17, переменной x25 - список обработанных оператором "станд" утверждений набора x8. Переменной x26 присваивается результат исключения из списка x25 утверждений x16, переменной x27 - результат исключения из списка x16 утверждений x25. В нашем примере x26 состоит из утверждений " $\neg(A = D)$ ", " $K = (a, b, c)$ ", " $(c, d) = \text{коорд}(D, K)$ ", " $d \leq 0$ ", x27 - из утверждений " $\neg(e = D)$ ", " $K = (e, f, g)$ ", " $(a, b) = \text{коорд}(D, K)$ ", " $0 \leq b$ ",

Далее начинается цикл попыток сближения списков x_{26} и x_{27} . Просматриваются утверждения x_{28} списка x_{27} . В терме x_{28} выбирается такой логический символ x_{29} , который входит в единственное утверждение x_{31} списка x_{26} . Проверяется, что длины утверждений x_{31} и x_{28} равны. Переменной x_{32} присваивается пересечение списка параметров термина x_{28} со списком x_{24} . Если список x_{32} непуст, причем усматривается подстановка S' вместо переменных x_{32} , переводящая x_{28} в x_{31} , то список x_{22} пополняется списком x_{32} , а подстановка S доопределяется на переменных x_{32} значениями подстановки S' . Переменной x_{34} присваивается список обработанных оператором "станд" результатов применения подстановки S' к утверждениям набора x_{27} . Утверждения x_{34} исключаются из списка x_{26} , а переменной x_{27} переприваивается результат удаления из списка x_{34} утверждений x_{25} . Если в результате возникли одноэлементные списки x_{26} и x_{27} , то цикл обрывается. Иначе, по исчерпанию возможностей, предпринимается отказ от применения приема.

По завершении указанного цикла все переменные, начиная с x_{28} , снова оказываются не определены. В нашем примере x_{26} состоит из единственного утверждения $d \leq 0$, x_{27} - из утверждения $0 \leq d$. Переменной x_{28} присваивается разность списков x_{25} и x_{26} , переменной x_{29} - дизъюнкция утверждений списков x_{26} и x_{27} . При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x_{29} - следствие посылок x_{28} . Переменной x_{31} присваивается результат применения подстановки S к подтерму x_{20} , переменной x_{32} - подтерм x_{11} . В нашем примере x_{31} имеет вид " $(\sqrt{c^2 + d^2}, \arccos(c/\sqrt{c^2 + d^2}))$ ", x_{32} - вид " $(\sqrt{c^2 + d^2}, -\arccos(c/\sqrt{c^2 + d^2}))$ ". Оператор "сравнтермов" определяет вхождения x_{33} и x_{34} наименьших подтермов термов x_{31} и x_{32} , в которых они отличаются. В нашем примере это вторые корневые операнды. Переменной x_{35} присваивается результат замены вхождения x_{33} в терм x_{31} на условное выражение, условием которого служит утверждение списка x_{26} , а альтернативными выражениями - подтермы x_{34} и x_{33} . Затем создается импликация с антецедентами x_{28} , консеквенном которой служит равенство выражений x_{12} и x_{35} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. При этом исходная и дополнительная теоремы сопровождаются пометками "исключение".

4. Склейка двух теорем, отличающихся склеиваемыми антецедентами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcAK} (\text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{крд}(A, K, 1) = a \ \& \ \text{крд}(A, K, 2) = b \ \& \ \text{крд}(A, K, 3) = c \ \& \ \text{геом}(A) \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (a, b, c))$$

из теоремы

$$\forall_{abcAK} (\text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Вектор}(A) \ \& \ \text{крд}(A, K, 1) = a \ \& \ \text{крд}(A, K, 2) = b \ \& \ \text{крд}(A, K, 3) = c \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (a, b, c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcAK} (\text{Трехмерн}(K) \ \& \ A \text{ — точка} \ \& \ \text{крд}(A, K, 1) = a \ \& \ \text{крд}(A, K, 2) = b \ \& \ \text{крд}(A, K, 3) = c \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (a, b, c))$$

Здесь утверждение "геом(A)" означает, что A - точка либо вектор трехмерного пространства.

Переменной x_9 присваивается консеквент, переменной x_{10} - список антецедентов. В списке вывода находится не помеченная символом "исключение" и отличная от исходной теоремы теорема x_{12} с характеристикой "систкоорд". Переменной x_{13} присваивается список ее антецедентов. Проверяется, что его длина равна длине списка x_{10} . Переменной x_{14} присваивается консеквент теоремы x_{12} . Проверяется, что он совпадает с x_9 . Переменной x_{15} присваивается пересечение списков x_{10} и x_{13} . Проверяется, что оно непусто. Переменным x_{16} и x_{17} присваиваются разность списка x_{10} и x_{15} , а также разность списка x_{13} и x_{15} . Проверяется, что эти разности одноэлементны. Переменной x_{18} присваивается дизъюнкция элементов списков x_{16} и x_{17} . Она обрабатывается оператором "нормили" относительно посылок x_{15} . Результат присваивается переменной x_{19} . В нашем примере получаем "геом(A)". Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x_{15} и утверждение x_{19} . Косеquentом является утверждение x_9 . Эта импликация регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. Исходная и дополнительная теоремы помечаются символом "исключение".

Обобщение теоремы

1. Исключение избыточного параметра антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDEK}(\neg(d \in \text{прямая}(AB)) \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \text{систкоорд}(K) \& \neg(D = E) \& K = (A, B, C) \& E \in \text{прямая}(AC) \& \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(DE) \& \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow \text{коорд}(E, K) = (0, b))$$

из теоремы

$$\forall_{abABCDEFK}(D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& F - \text{точка} \& \text{систкоорд}(K) \& \neg(D = F) \& \neg(D = E) \& K = (A, B, C) \& E \in \text{прямая}(AC) \& F \in \text{прямая}(AB) \& \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AB) \& \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AC) \& \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow \text{коорд}(E, K) = (0, b))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_{11} - вхождение той части равенства в консеквенте, которая имеет заголовок "набор", переменной x_{12} - другая часть равенства. В нашем примере x_{12} имеет вид "коорд(E, K)". В списке x_8 находится равенство x_{13} , заголовком x_{14} левой части которого служит название каких-либо координат. В нашем примере x_{13} - равенство "коорд(D, K) = (a, b)", x_{14} - символ "коорд". Переменной x_{15} присваивается список параметров консеквента и равенства x_{13} . Просматриваются равенства списка x_8 ; если в одной из частей такого равенства располагается переменная списка x_{15} , то список x_{15} пополняется всеми параметрами данного равенства. Эта процедура повторяется, пока возможно. В результате x_{15} становится состоящим из переменных a, b, D, E, K, A, B, C . Переменной x_{16} присваивается список параметров антецедентов x_8 , не вошедших в список x_{15} . В нашем примере он состоит из единственной переменной F . Переменной x_{18} присваивается результат удаления из списка x_8 равенства x_{13} . Выбирается переменная

x17 списка x16. В нашем примере - F . Решается задача на исследование x19, посылками которой служат утверждения x18. Цели задачи - (исключ x17), "известно", "антецеденты", (неизвестные X), где X - все параметры посылок x18. После решения составляется список x21 всех не имеющих заголовка "актив" посылок задачи x19, к которому добавляется утверждение x13. Проверяется, что переменная x17 не встречается в утверждениях списка x21. Затем создается импликация с антецедентами x21 и тем же консеквентом, что у исходной теоремы. Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. Исходная теорема помечается символом "исключение".

2. Удаление избыточного отрицания в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDEK} (D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \\ K = (A, B, C) \ \& \ E \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(DE) \ \& \\ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow \text{коорд}(E, K) = (0, b))$$

из теоремы

$$\forall_{abABCDEK} (\neg(D \in \text{прямая}(AB)) \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \\ \neg(D = E) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ E \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(DE) \ \& \\ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow \text{коорд}(E, K) = (0, b))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - консеквент, переменной x11 - список утверждений, необходимых для сопровождения консеквента по о.д.з. В списке x8 находится утверждение x12 с заголовком "не", не принадлежащее списку x11 и не используемое для сопровождения по о.д.з. прочих антецедентов. Переменной x13 присваивается отрицание утверждения x12, переменной x14 - результат замены в списке x8 утверждения x12 на x13. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x10 - следствие утверждений x14. Предварительно разблокируются приемы, основанные на уже имеющихся в списке вывода теоремах. Создается импликация, полученная из исходной теоремы отбрасыванием антецедента x12. Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. При этом исходная теорема помечается символом "исключение".

3. Развязка антецедентов по переменной для текущего объекта.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdefghijABCDK} (\neg(c = f) \ \& \ \neg(c = D) \ \& \ \neg(g = h) \ \& \ \neg(h = D) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \\ \text{коорд}(c, K) = (d, e) \ \& \ \text{коорд}(h, K) = (i, j) \ \& \ D \in \text{прямая}(cf) \ \& \ D \in \text{прямая}(gh) \\ \& \ c - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(cf) \parallel \\ \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{прямая}(gh) \parallel \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(D, K) = \\ (i, e))$$

из теоремы

$$\forall_{cdefghijABCDK} (\neg(c = f) \ \& \ \neg(c = D) \ \& \ \neg(h = D) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ \text{коорд}(c, K) = \\ (d, e) \ \& \ \text{коорд}(h, K) = (i, j) \ \& \ D \in \text{прямая}(cf) \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \&$$

h -точка & D -точка & прямая(cf) || прямая(AB) & прямая(hD) || прямая(AC)
& систкоорд(K) \rightarrow коорд(D, K) = (i, e)

и дополнительной теоремы

$\forall_{ABC}(A$ - точка & B - точка & C - точка & $\neg(A = B)$ & $\neg(B = C)$ &
 $A \in$ прямая(BC) \rightarrow прямая(AB) = прямая(BC))

Переменной x_8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_{11} - вхождение той части равенства в консеквенте, которая имеет заголовок "набор", переменной x_{12} - другая часть равенства. В нашем примере x_{12} имеет вид "коорд(D, K)". Проверяется, что число корневых операндов выражения x_{12} равно 2. Переменной x_{13} присваивается переменная - первый операнд выражения x_{12} . В нашем примере - D . В списке x_8 выбирается утверждение x_{14} и рассматривается вхождение x_{15} переменной x_{13} в это утверждение. В нашем примере x_{14} имеет вид "прямая(hD) || прямая(AC)". Переменной x_{16} присваивается вхождение, непосредственным операндом которого служит x_{15} , переменной x_{17} - символ по вхождению x_{16} . В нашем примере x_{17} - символ "прямая". Справочник поиска теорем "вартеор" определяет по x_{17} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{20} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{20} имеет вид:

$\forall_{abg}(a$ - точка & b - точка & g - точка & $\neg(a = b)$ & $\neg(b = g)$ & $a \in$ прямая(bg) \rightarrow
прямая(ab) = прямая(bg))

Переменной x_{22} присваивается левая часть равенства в консеквенте теоремы x_{20} , переменной x_{23} - список ее параметров. В нашем примере x_{22} - выражение "прямая(ab)". Переменной x_{24} присваивается подтерм x_{16} , переменной x_{25} - правая часть равенства в консеквенте теоремы x_{20} . В нашем примере x_{24} имеет вид "прямая(hD)". Усматривается подстановка S вместо переменных x_{23} , переводящая выражение x_{22} в выражение x_{24} . В списке x_{23} выбирается переменная x_{27} , не входящая в выражение x_{25} . В нашем примере - переменная a . Проверяется, что в списке x_{26} на позиции, соответствующей позиции переменной x_{27} в списке x_{23} , расположена переменная x_{13} . Переменной x_{28} присваивается результат применения подстановки S к выражению x_{25} . В нашем примере x_{28} имеет вид "прямая(hg)". Переменной x_{29} присваивается объединение списка результатов замены всех вхождений выражения x_{24} в антецеденты x_8 на выражение x_{28} со списком результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_{20} . Затем создается импликация с антецедентами x_{29} и тем же консеквентом, что у исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Импликация для одновременного ввода нового объекта и определения его координат.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{cdefghijABCDK}(\neg(c = f)$ & $\neg(g = h)$ & $K = (A, B, C)$ & коорд(c, K) = (d, e) &
коорд(h, K) = (i, j) & c -точка & f -точка & g -точка & h -точка & прямая(cf) ||

прямая(AB) & прямая(gh) \parallel прямая(AC) & систкоорд(K) $\rightarrow D \in$ прямая(cf) &
 $D \in$ прямая(gh) & D – точка & коорд(D, K) = (i, e)

из теоремы

$\forall_{cdefghijABCDK}(\neg(c = f) \& \neg(g = h) \& K = (A, B, C) \& \text{коорд}(c, K) = (d, e) \&$
 $\text{коорд}(h, K) = (i, j) \& D \in \text{прямая}(cf) \& D \in \text{прямая}(gh) \& c$ – точка &
 f – точка & g – точка & h – точка & D – точка & прямая(cf) \parallel прямая(AB) &
 прямая(gh) \parallel прямая(AC) & систкоорд(K) \rightarrow коорд(D, K) = (i, e)

Переменной x_8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_{11} - вхождение той части равенства в консеквенте, которая имеет заголовок "набор", переменной x_{12} - другая часть равенства. В нашем примере x_{12} имеет вид "коорд(D, K)". Переменной x_{13} присваивается переменная - первый операнд выражения x_{12} . В нашем примере - D . Переменной x_{14} присваивается список всех содержащих переменную x_{13} утверждений списка x_8 . Проверяется, что все вхождения переменной x_{13} в эти утверждения суть операнды предикатных символов. Переменной x_{15} присваивается результат удаления из x_8 утверждений x_{14} . Проверяется, что список x_{15} непуст и что утверждение "существует(x_{13} и(x_{14}))" - следствие утверждений x_{15} . Затем создается импликация с антецедентами x_{15} , консеквентом которой служит конъюнкция утверждений x_{14} и консеквента исходной теоремы. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "коордвывода".

2. Ввод вспомогательного обозначения для объекта, координаты которого определяются приемом вывода.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{abceglmK}(\text{коорд}(c, K) = (l, m) \& \text{коорд}(a, K) = (e, g) \& \text{систкоорд}(K) \&$
 Вектор(c) & Вектор(a) & $b = c + a \rightarrow \text{коорд}(b, K) = (e + l, g + m)$)

из теоремы

$\forall_{aceglmK}(\text{коорд}(c, K) = (l, m) \& \text{коорд}(a, K) = (e, g) \& \text{систкоорд}(K) \&$
 Вектор(c) & Вектор(a) $\rightarrow \text{коорд}(c + a, K) = (e + l, g + m)$)

Переменной x_8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_{11} - вхождение той части равенства в консеквенте, которая имеет заголовок "набор", переменной x_{12} - другая часть равенства. В нашем примере x_{12} имеет вид "коорд($c + a, K$)". Переменной x_{13} присваивается первый операнд выражения x_{12} . В нашем примере- " $c + a$ ". Проверяется, что он неоднобуквенный и не содержит неоднобуквенных атомарных подвыражений.

Переменной x_{14} присваивается некоторый параметр терма x_{13} . В нашем примере - переменная a . В списке x_8 выбирается равенство x_{15} , содержащее переменную x_{14} . В нашем примере x_{15} имеет вид "коорд(a, K) = (e, g)". Переменной x_{17} присваивается вхождение той части равенства, которая имеет заголовок "набор", переменной x_{16} - вхождение другой части. Проверяется, что по вхождению x_{16} расположено название каких-либо координат, причем первым операндом вхождения x_{16} служит переменная x_{14} .

Выбирается переменная x19, не входящая в исходную теорему. Переменной x20 присваивается результат добавления к списку x8 равенства переменной x19 выражению x13. Переменной x21 присваивается результат замены в консеквенте теоремы первого операнда подтерма x12 на переменную x19. Затем создается импликация с антецедентами x20 и консеквентом x21. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "равнозначны".

3. Вывод эквивалентности для явного задания объекта через координаты в задаче на преобразование, имеющей цель "класс".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{abcdepCK} (\neg(e + p = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \\ & e - \text{число} \ \& \ p - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Двумерн}(K) \rightarrow e \cdot l(C \ \text{тчкоорд}(K, (a, b))) \\ & = p \cdot l(C \ \text{тчкоорд}(K, (c, d))) \ \& \ C \in \text{отрезок}(\text{тчкоорд}(K, (a, b)) \ \text{тчкоорд}(K, (c, d))) \\ & \leftrightarrow C = \text{тчкоорд}(K, ((ae + cp)/(e + p), (be + dp)/(e + p))) \end{aligned}$$

из теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{abcdepABCK} (\text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \ \& \ C \in \text{отрезок}(AB) \ \& \\ & p - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ el(AC) = \\ & pl(BC) \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \neg(e + p = 0) \rightarrow \text{коорд}(C, K) = ((ae + cp)/(e + p), \\ & (be + dp)/(e + p))) \end{aligned}$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abK} (\text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Двумерн}(K) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{коорд}(\text{тчкоорд}(K, (a, b)), K) = (a, b))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x11 - вхождение той части равенства в консеквенте, которая имеет заголовок "набор", переменной x12 - другая часть равенства. В нашем примере x12 имеет вид "коорд(C, K)". Переменной x13 присваивается переменная - первый операнд выражения x12. В нашем примере - C. Переменной x14 присваивается подтерм x11. Проверяется, что он не содержит невырожденных числовых атомов. Переменной x15 присваивается список равенств в антецедентах, у которых в левой части расположено обозначение каких-либо координат. В нашем примере - равенства "коорд(A, K) = (a, b)" и "коорд(B, K) = (c, d)". Проверяется, что переменная x13 в этих равенствах не встречается. Переменной x16 присваивается список заголовков первых операндов левых частей равенств x15. Проверяется, что они суть попарно различные переменные. В нашем примере - переменные A, B. Переменной x17 присваивается список извлекаемых из x8 указателей на тип значений переменных x16. В нашем примере - "A - точка", "B - точка". Проверяется, что все такие указатели удалось извлечь. Переменной x18 присваивается извлекаемый из x8 указатель на тип значения переменной x13. В нашем примере - "C - точка". Переменной x19 присваивается заголовок утверждения x18. В нашем примере - "точка". Справочник поиска теорем "тчкоорд" определяет по заголовку R терма x12 (в нашем примере - "коорд") указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что заголовок левой части равенства в консеквенте дополнительной теоремы равен R. Переменной

x23 присваивается первый операнд этой левой части. В нашем примере - выражение "тчкоорд($K, (a, b)$)". Проверяется, что x19 входит в список типов значений выражений с тем же заголовком, что у x23. Проверяется также, что все утверждения списка x17 имеют заголовок x19. Проверяется, что заголовки левых частей равенств x15 такие же, как у выражения x12.

Переменной x25 присваивается результат исключения из списка x8 утверждений x15. Переменной x26 присваивается список тех утверждений набор x25, которые содержат переменную x13. В нашем примере - " $C \in \text{отрезок}(AB)$ ", " C – точка", " $el(AC) = pl(BC)$ ". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что утверждение "существует(x13 и(x26)) следствие утверждений x25. Переменной x29 присваивается результат удаления из списка x25 утверждений x26, переменной x30 - конъюнкция отличных от x18 утверждений списка x26. Переменной x31 присваивается список переменных исходной теоремы.

Переменной x32 присваивается консеквент исходной теоремы. Реализуется цикл, в котором сначала переменной x37 присваиваются равенства списка x15, а переменной x38 - соответствующая переменная списка x16 (т.е. объект, координату которого выражает равенство x37); в конце цикла переменной x37 присваивается равенство x32, а переменной x38 - переменная x13. Для текущих значений x37, x38 переменной x39 присваивается результат переобозначения переменных теоремы x20 на переменные, не входящие в список x31. Сразу же список x31 пополняется всеми переменными теоремы x39. Переменной x40 присваивается список антецедентов теоремы x39, переменной x41 - ее консеквент. Переменной x42 присваивается результат добавления к параметрам утверждения x41 переменной x38. Затем находится подстановка S вместо переменных x42, унифицирующая равенства x37 и x41. Эта подстановка применяется ко всем утверждениям списка x29. Переменной x44 присваивается список результатов ее применения к утверждениям x40. Затем x44 добавляется к измененному списку x29. Если x38 отлично от x13 (т.е. имеет место не последний рассматриваемый в цикле случай), то к x30 применяется подстановка S . Если же x38 равно x13, то цикл завершается. При этом все переменные вплоть до x44 по-прежнему определены. Переменной x45 присваивается терм, в который подстановка S переводит переменную x13. В нашем примере - "тчкоорд($K, ((ae+cp)/(e+p), (be+dp)/(e+p))$)". Переменной x46 присваивается равенство переменной x13 выражению x45, переменной x47 - эквивалентность утверждений x30 и x46. Затем создается импликация с антецедентами x29 и консеквентом x47. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Единственная сопровождающая данную теорему характеристика - "опредкоорд(второйтерм)".

Использование задачи на описание для получения новой теоремы

1. Выражение координат объекта в системе координат текущего типа через его координаты в системе другого типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDK} (\neg(A = D) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ \text{полкоорд}(D, K) = (a, b) \ \& \ D \text{ – точка} \ \& \ \text{однасторона}(C, D, \text{прямая}(AB)) \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(D, K) = (a \cos b, a \sin b))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDK}(D - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ \text{однасторона}(C, D, \text{прямая}(AB)) \rightarrow \text{полкоорд}(D, K) = (l(AD), \angle(BAD)))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_{11} - вхождение той части равенства в консеквенте, которая имеет заголовок "набор", переменной x_{12} - другая часть равенства. В нашем примере x_{12} имеет вид "полкоорд(D, K)". Проверяется, что теорема имеет характеристику с заголовком "определение". Переменной x_{13} присваивается заголовок выражения x_{12} . Проверяется, что он представляет собой название координат. Проверяется, что корневые операнды выражения x_{12} суть переменные, и переменной x_{14} присваивается вторая из них. В нашем примере - K . В списке x_8 находится утверждение x_{15} вида " $P(x_{14})$ ". В нашем примере - "прямоорд(K)". Просматриваются всевозможные теоремы с характеристикой "определение(...)", относящиеся к разделу, содержащему символ P . В нашем примере - к разделу "системыкоординат". Если консеквент теоремы - равенство для каких-либо координат, отличных от x_{13} , причем число операндов определяющего набора равно числу операндов набора x_{11} , то название этих координат сохраняется в списке x_{16} . По окончании просмотра теорем в нашем примере x_{16} состоит из единственного символа "коорд".

Переменной x_{17} присваивается список операндов вхождения x_{11} . Выбирается список x_{18} не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x_{17} . В нашем примере - переменные a, b . Переменной x_{19} присваивается результат добавления к антецедентам x_8 равенств выражений x_{17} соответствующим переменным x_{18} . В нашем примере - равенств " $l(AD) = a$ ", " $\angle(BAD) = b$ ". Переменной x_{20} присваивается элемент списка x_{16} . В нашем примере - символ "коорд". Переменной x_{21} присваивается результат замены заголовка выражения x_{12} на x_{20} . В нашем примере - "коорд(D, K)". Переменной x_{22} присваивается список переменных, отличных от переменных исходной теоремы и от переменных x_{18} , длина которого равна длине списка x_{17} . В нашем примере - c, d . Переменной x_{23} присваивается равенство выражения x_{21} терму "набор(x_{22})". В нашем примере - "коорд(D, K) = (c, d)".

Решается задача на описание с посылками x_{19} и единственным условием x_{23} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{22} ", "известно x_{18} ". Ответ присваивается переменной x_{25} . В нашем примере он имеет вид " $d = a \sin b \ \& \ c = a \cos b$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x_{26} присваивается набор его конъюнктивных членов. Переменной x_{27} присваивается список правых частей равенств для переменных x_{22} , содержащихся в наборе x_{26} . Проверяется, что такие равенства имеются для всех переменных x_{22} . Переменной x_{28} присваивается равенство выражения x_{12} выражению "набор(x_{18})". В нашем примере - "полкоорд(D, K) = (a, b)". Переменной x_{29} присваивается результата добавления к списку x_8 утверждения x_{28} . Переменной x_{30} присваивается равенство выражения x_{21} выражению "набор(x_{27})". В нашем примере - "коорд(D, K) = ($a \cos b, a \sin b$)". Создается импликация с антецедентами x_{29} и консеквентом x_{30} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Выражение координат объекта в системе координат другого типа через его координаты в системе координат текущего типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdABCDK}(\neg(A = D) \& K = (A, B, C) \& \text{коорд}(D, K) = (c, d) \& D - \text{точка} \& d \leq 0 \& \text{прямоорд}(K) \rightarrow \text{полкоорд}(D, K) = (\sqrt{c^2 + d^2}, -\arccos(c/\sqrt{c^2 + d^2})))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDK}(\text{прямоорд}(K) \& D - \text{точка} \& \neg(A = D) \& K = (A, B, C) \& \text{разныестороны}(C, D, \text{прямая}(AB)) \rightarrow \text{полкоорд}(D, K) = (l(AD), -\angle(BAD)))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x11 - вхождение той части равенства в консеквенте, которая имеет заголовок "набор", переменной x12 - другая часть равенства. В нашем примере x12 имеет вид "полкоорд(D, K)". Проверяется, что теорема имеет характеристику с заголовком "определение". Переменной x13 присваивается заголовок выражения x12. Проверяется, что он представляет собой название координат. Проверяется, что корневые операнды выражения x12 суть переменные, и переменной x14 присваивается вторая из них. В нашем примере - K. В списке x8 находится утверждение x15 вида "P(x14)". В нашем примере - "прямоорд(K)". Просматриваются всевозможные теоремы с характеристикой "определение(...)", относящиеся к разделу, содержащему символ P. В нашем примере - к разделу "системыкоординат". Если консеквент теоремы - равенство для каких-либо координат, отличных от x13, причем число операндов определяющего набора равно числу операндов набора x11, то название этих координат сохраняется в списке x16. По окончании просмотра теорем в нашем примере x16 состоит из единственного символа "коорд".

Переменной x17 присваивается список операндов вхождения x11. Выбирается список x18 не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x17. В нашем примере - переменные a, b. Переменной x19 присваивается результат добавления к антецедентам x8 равенств выражений x17 соответствующим переменным x18. В нашем примере - равенств "l(AD) = a", "-∠(BAD) = b". Переменной x20 присваивается элемент списка x16. В нашем примере - символ "коорд". Переменной x21 присваивается результат замены заголовка выражения x12 на x20. В нашем примере - "коорд(D, K)". Переменной x22 присваивается список переменных, отличных от переменных исходной теоремы и от переменных x18, длина которого равна длине списка x17. В нашем примере - c, d. Переменной x23 присваивается равенство выражения x21 терму "набор(x22)". В нашем примере - "коорд(D, K) = (c, d)".

Дальше начинаются отличия. Переменной x24 присваивается результат добавления утверждения x23 к списку x8, переменной x25 - список равенств выражений x17 соответствующим переменным x18. Решается задача на описание с антецедентами x24 и условиями x25. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x18", "известно x22". Переменной x27 присваивается ответ на задачу. В нашем примере он имеет вид "b = -arccos(c/√(c² + d²)) & a =

$\sqrt{c^2 + d^2}$ ". Проверяется, что этот ответ отличен от символа "отказ", и переменной x28 присваивается список его конъюнктивных членов. Переменной x29 присваивается список правых частей равенств для переменных x18, содержащихся в наборе x28. Проверяется, что такие равенства имеются для всех переменных x18. Переменной x30 присваивается равенство выражения x12 выражению "набор(x29)". Затем создается импликация с антецедентами x24 и консеквентом x30. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Выражение координат операнда через координаты операции и других операндов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdegK}(\text{коорд}(a, K) = (e, g) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(c) \rightarrow \text{коорд}(a + c, K) = (b, d) \leftrightarrow \text{коорд}(c, K) = (b - e, d - g))$$

из теоремы

$$\forall_{aceglmK}(\text{коорд}(c, K) = (l, m) \ \& \ \text{коорд}(a, K) = (e, g) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ \text{Вектор}(a) \rightarrow \text{коорд}(c + a, K) = (e + l, g + m))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x11 - вхождение той части равенства в консеквенте, которая имеет заголовок "набор", переменной x12 - другая часть равенства. В нашем примере x12 имеет вид "коорд(c + a, K)". Проверяется, что первый операнд терма x12 неоднобуквенный, но не содержит неоднобуквенных атомарных подвыражений. Переменной x13 присваивается заголовок выражения x12. В нашем случае - "коорд". Проверяется, что он представляет собой название координат. В списке x8 рассматривается равенство x14, у которого одна из частей имеет заголовок "набор", а другая - заголовок x13. Вхождение первой из них присваивается переменной x16, а второй - переменной x15. Проверяется, что вторые операнды вхождений x15 и x12 одинаковы. В нашем примере x14 имеет вид "коорд(c, K) = (l, m)". Переменной x17 присваивается список операндов вхождения x16, переменной x18 - список операндов вхождения x11. В нашем примере x17 состоит из однобуквенных выражений l, m , список x18 - из выражений $e + l, g + m$. Проверяется, что их длины равны, причем список параметров выражений x17 включается в список параметров выражений x18. Переменной x19 присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x18. В нашем примере - b, d . Переменной x20 присваивается объединение списка переменных исходной теоремы с переменными x19. Переменной x21 присваивается список не входящих в x20 переменных, длина которого равна длине списка x17. В нашем примере - f, h .

Переменной x22 присваивается объединение отличных от x14 элементов списка x8 с равенствами выражений x18 соответствующим переменным x19. Переменной x23 присваивается список равенств выражений x17 соответствующим переменным x21. Переменной x24 присваивается список параметров выражений x18, не входящих в выражения x17. Решается задача на описание x25 с посылками x22 и условиями x23. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "одз", "неизвестные x21", "известно x24 x19". В нашем примере посылки суть

"коорд(a, K) = (e, g)", "систкоорд(K)", "Вектор(c)", "Вектор(a)", " $e + l = b$ ", " $g + m = d$ ". Условия - равенства $l = f, m = h$, неизвестные - f, h , известные параметры - e, g, b, d .

Ответ присваивается переменной x26. В нашем примере он имеет вид " $h = d - g \ \& \ f = b - e$ ". Переменной x27 присваивается список конъюнктивных членов ответа, переменной x28 - список правых частей равенств для переменных x21, содержащихся в наборе x27. Проверяется, что такие равенства имеются для всех переменных x21. Переменной x29 присваивается равенство подтерма x15 терму "набор(x28)", переменной x30 - равенство выражения x12 выражению "набор(x19)". Создается импликация, антецедентами которой служат отличные от x14 утверждения набора x8, а консеквентом - эквивалентность утверждений x30 и x29. Она обрабатывается операторами "Полныепосылки" и "нормтеорема". Результат регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "упрощплюсвект(второйтерм)".

Использование тождества для варьирования дополнительной теоремы

1. Использование тождества для преобразования других тождеств к системе координат нового типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdjklmnABK} (\neg(l = A) \ \& \ \neg(l = B) \ \& \ K = (l, m, n) \ \& \ \text{полкоорд}(A, K) = (c, d) \ \& \ \text{полкоорд}(B, K) = (j, k) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \rightarrow l(AB) = \sqrt{-2cj \cos(d - k) + c^2 + j^2})$$

из теоремы

$$\forall_{abABCDK} (\neg(A = D) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ \text{полкоорд}(D, K) = (a, b) \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(D, K) = (a \cos b, a \sin b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABabpqK} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (p, q) \rightarrow l(AB) = \sqrt{(a - p)^2 + (b - q)^2})$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x11 - вхождение той части равенства в консеквенте, которая имеет заголовок "набор", переменной x12 - другая часть равенства. В нашем примере x12 имеет вид "коорд(D, K)". Проверяется, что подтерм x11 не имеет невырожденных числовых атомов. Переменной x13 присваивается заголовок выражения x12. В нашем примере - "коорд". Проверяется, что он представляет собой название каких-либо координат. В списке x8 рассматривается равенство x14, у которого одна из частей имеет заголовок "набор", а другая - логический символ x17, являющийся отличным от x13 названием координат. Вхождение первой из них присваивается переменной x16, а второй - переменной x15. В нашем примере x14 имеет вид "полкоорд(D, K) = (a, b)", x17 - символ "полкоорд". Переменной x18 присваивается раздел, к которому относится символ x13. В нашем примере - "системыкоординат". В этом разделе выбирается теорема с характеристикой "числкоэфф". В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x24 присваивается список вхождений символа x13 в дополнительную

теорему. Проверяется, что каждое такое вхождение представляет собой одну из частей равенства, в другой части которого расположен терм "набор(...)" с тем же числом операндов, что у вхождения x11. Проверяется, что консеквент дополнительной теоремы содержит единственный невырожденный числовой атом. Переменной x25 присваивается набор перечисляемых без повторов подтермов для вхождений списка x24. В нашем примере их два - "коорд(A, K)" и "коорд(B, K)". Вводятся пустые накопители x27 и x28. Просматриваются выражения списка x25. Для каждого из них в накопитель x27 заносится результат переобозначения переменных исходной теоремы на переменные, не входящие в дополнительную теорему и ни в одну из ранее введенных теорем списка x27. Накопитель x28 заполняется теми частями равенств в консеквентах теорем списка x27, которые не имели заголовка "набор". В нашем примере x27 состоит из двух теорем:

$$\forall_{cdefghi}(\neg(e = h) \ \& \ i = (e, f, g) \ \& \ \text{полкоорд}(h, i) = (c, d) \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(i) \rightarrow \text{коорд}(h, i) = (c \cos d, c \sin d))$$

$$\forall_{jklmnr}(\neg(l = r) \ \& \ s = (l, m, n) \ \& \ \text{полкоорд}(r, s) = (j, k) \ \& \ r - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(s) \rightarrow \text{коорд}(r, s) = (j \cos k, j \sin k))$$

В списке x28 находятся выражения "коорд(h, i)", "коорд(r, s)". Переменной x29 присваивается список параметров выражений x28. Затем определяется подстановка S вместо переменных x29, унифицирующая одновременно каждое выражение списка x25 с соответствующим выражением списка x28. Переменной x31 присваивается список результатов применения подстановки S к тем частям равенств в консеквентах теорем списка x27, которые имеют заголовки "набор". В нашем примере имеем пару термов "(c cos d, c sin d)", "(j cos k, j sin k)". Переменной x32 присваивается результат замены в дополнительной теореме всех выражений списка x25 на соответствующие выражения набора x31. Переменной x33 присваивается объединение списка антецедентов теоремы x32 с результатами применения подстановки S к антецедентам теорем списка x27. Затем создается импликация с антецедентами x33, консеквент которой - тот же, что у теоремы x32. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Попытка анализа контекста теоремы для получения соотношения, не содержащего точки, координаты которой определяются теоремой.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcdefghijklmnp}(\neg(m = n) \ \& \ \neg(l \in \text{прямая}(mn)) \ \& \ \text{коорд}(l, p) = (b, d, e) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(mn), p) = \text{set}_{qrs}(q - \text{число} \ \& \ r - \text{число} \ \& \ s - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((h, i, j), (c + q, f + r, g + s))) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ l - \text{точка} \ \& \ m - \text{точка} \ \& \ n - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(p) \rightarrow (h(d + f) - i(b + c))^2 + (i(e + g) - j(d + f))^2 + (h(e + g) - j(b + c))^2 = (h^2 + i^2 + j^2)(\text{расстдопрямой}(l, \text{прямая}(mn)))^2)$$

из теоремы

$$\forall_{abcde, fghijklmnp, tu} (\neg(a = l) \ \& \ \neg(m = n) \ \& \ t = h(b + c) + i(d + f) + j(e + q) \ \& \\ u = h^2 + i^2 + j^2 \ \& \ \text{коорд}(l, p) = (b, d, e) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(mn), p) = \\ \text{set}_{qrs} (q - \text{число} \ \& \ r - \text{число} \ \& \ s - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((h, i, j), (c + q, f + r, \\ g + s))) \ \& \ a \in \text{прямая}(mn) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \\ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ l - \text{точка} \ \& \ m - \text{точка} \ \& \ n - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(al) \perp \\ \text{прямая}(mn) \ \& \ \text{прямкоорд}(p) \rightarrow \text{коорд}(a, p) = (-c + ht/u, -f + it/u, -g + jt/u))$$

Переменной x9 присваивается консеквент, переменной x10 - список антецедентов. Проверяется, что x9 - равенство, у которого в левой части расположено выражение с заголовком x11, представляющим собой название каких-либо координат. В нашем примере - "коорд". Переменной x12 присваивается первый операнд указанного выражения. В нашем примере - "a". Переменной x13 присваивается список параметров выражения x12. Проверяется, что он непуст. Переменной x14 присваивается результат добавления к списку x10 утверждения x9. Решается задача на исследование x15 с посылками x14. Цели ее - "известно", "неизвестные X", "исключ x13", "сокращ", "теорвывод". Здесь X - все параметры посылок. После решения задачи x15 в списке ее посылок находится равенство x17, не входящее в список x10 и не содержащее переменных списка x13. Проверяется, что это равенство не имеет связанных переменных, а его параметры включаются в список параметров утверждений x10. Проверяется, что x17 содержит невырожденный числовой атом. В нашем примере x17 имеет вид

$$\text{расстдопрямой}(l, \text{прямая}(mn)) = \frac{\text{расстдопрямой}(l, \text{прямая}(mn))}{\sqrt{(b + c - ht/b)^2 + (d + f - it/u)^2 + (e + g - jt/u)^2}}$$

Список x10 разбивается на подсписок x18 утверждений, содержащих переменную x13, и подсписок x19 остальных утверждений. Решается задача на описание x20 с посылками x19 и условиями x18. Цели задачи - "полный", "прямойответ", "попыткаспуска", "неизвестные x13", "параметры x13". Ответ присваивается переменной x21. В нашем примере он имеет вид " $\neg(l \in \text{прямая}(mn))$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и не содержит переменных x13. Затем создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x19 и конъюнктивные члены ответа x21, а консеквентом - утверждение x17. Она обрабатывается оператором "нормтеорема", и результат присваивается переменной x22. Переменной x23 присваивается список антецедентов теоремы x22, переменной x24 - ее консеквент. Переменной x25 присваивается результат обработки утверждения x24 относительно посылок x23 оператором "упрощалг", выполняющим алгебраические упрощения. В нашем примере такие упрощения приводят к исключению радикала и сложению особо громоздких дробных выражений, появляющихся в результате подстановки значения для переменной t. Затем создается импликация с антецедентами x23 и консеквентом x25, которая и регистрируется в списке вывода.

3.103 Характеристика "склейка"

Характеристикой "склейка(x, N)" снабжаются тождества, позволяющие перейти от выражения с несколькими вхождениями переменной x к выражению с одним вхождением этой переменной. N - направление замены.

Обобщение теоремы

1. Обобщение тождества склейки путем ввода извлекаемого параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefghi} (\neg(e = 0) \ \& \ \neg(g = 0) \ \& \ \neg(h = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \rightarrow a^{i+cd/(eh)} b^{cf/(gh)} = a^i (a^{d/e} b^{f/g})^{c/h})$$

из теоремы

$$\forall_{abcdefgh} (\neg(e = 0) \ \& \ \neg(g = 0) \ \& \ \neg(h = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq b \rightarrow a^{cd/(eh)} b^{cf/(gh)} = (a^{d/e} b^{f/g})^{c/h})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc} (a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < a \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$$

Характеристика - "склейка(с второйтерм)".

Переменной x8 присваивается переменная из текущей характеристики, переменной x9 - направление замены. Переменной x11 присваивается заменяемая часть, переменной x12 - заменяющая. В заменяемой части рассматривается вхождение x13 неоднобуквенного подтерма; переменной x14 присваивается символ по этому вхождению. В нашем примере x13 - вхождение подтерма " $a^{cd/(eh)}$ ", x14 - символ "степень". Справочник поиска теорем "извлечпарам" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "нормализация" либо "свертку", определяющие направление замены x18. В нашем примере - "второйтерм". Переменной x20 присваивается заменяемая часть консеквента дополнительной теоремы согласно направлению x18, переменной x21 - заменяющая. Проверяется, что заменяющая часть имеет заголовок x14. Переменной x22 присваивается вхождение того корневого операнда терма x21, который представляет собой некоторую переменную x24, переменной x23 - вхождение неоднобуквенного операнда. В нашем примере x24 - переменная a , x23 - вхождение подвыражения $b + c$. Переменным x27 и x28 присваиваются переменные - операнды вхождения x23. В нашем примере x27 - b , x28 - c . Определяется единица E операции x23. В нашем примере это 0. Переменной x30 присваивается та из переменных x27, x28, по которой операция x23 имеет единицу. В нашем примере выбрана переменная c . Переменной x31 присваивается оставшая переменная из пары x27, x28. В нашем примере - переменная b .

Переменной x32 присваивается заголовок выражения x20. В нашем примере - "умножение". Проверяется, что операция x32 ассоциативна и коммутативна, а число корневых операндов выражения x20 равно 2. Переменной x33 присваивается вхождение корневого операнда выражения x20, имеющего заголовок x14 и равного результату замены в терме x21 вхождения x23 на переменную x31. В нашем примере x33 - вхождение операнда a^b . Переменной x35 присваивается другой корневой операнд выражения x20. В нашем примере - " a^c ". Проверяется, что число операндов вхождения x13 равно 2.

Проверяется, что либо x_{13} - корневое вхождение в x_{11} , либо является корневым операндом терма x_{11} , а заголовок x_{11} - символ x_{32} . В обоих случаях переменной x_{36} присваивается символ x_{32} , а x_{37} - единица. Отдельно рассматривается возможность, когда x_{13} - вхождение корневого операнда, но заголовок терма x_{11} отличен от x_{32} . Тогда находится перестановочное тождество, позволяющее заключить x_{13} под операцию x_{32} , а переменной x_{36} присваивается заголовок заменяемой части перестановочного тождества. При этом переменной x_{37} присваивается номер вхождения переменной - корневого операнда заменяемой части. Например, может быть использовано тождество $a \cdot b/c = ab/c$, переводящее операнд под знак умножения. В нашем примере заголовок x_{11} равен x_{32} , так что имеет место первый случай, и x_{36} равно x_{32} , т.е. символу "умножение", а x_{37} равно 1.

Переменной x_{38} присваивается вхождение того операнда вхождения x_{13} , которое расположена так же, как вхождение операнда x_{22} терма x_{21} . В нашем примере x_{38} - вхождение операнда a . Переменной x_{39} присваивается вхождение другого операнда. В нашем примере - операнда $cd/(eh)$. Проверяется, что либо по вхождению x_{39} не расположен заголовок подтерма x_{23} , либо x_{39} не имеет своим операндом переменной, входящей в x_{11} однократно. Проверяется, что x_{38} не содержит переменных, выделенных характеристиками "склейка" к текущей теореме.

Выбирается переменной x_{40} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная i . Переменной x_{41} присваивается результат соединения операцией - заголовком выражения x_{23} - переменной x_{40} и подтерма x_{39} . Если данная операция некоммутативна, то операнды размещаются так, чтобы x_{40} располагалась на месте операнда x_{30} . В нашем примере x_{41} имеет вид " $cd/(eh) + i$ ". Переменной x_{42} присваивается результат замены вхождения x_{39} в терм x_{11} на терм x_{41} . Переменной x_{43} присваивается результат подстановки в выражение x_{35} подтерма x_{38} , переменной x_{40} и подтерма x_{39} вместо переменных x_{24} , x_{30} и x_{31} . В нашем примере получаем " a^i ". Переменной x_{44} присваивается результат соеденения операцией x_{36} выражений x_{43} и x_{12} , причем x_{43} размещается в качестве операнда с номером x_{37} . В нашем примере x_{44} имеет вид " $a^i(a^{d/ebf/g})^{c/h}$ ".

Переменной x_{45} присваивается равенство выражений x_{44} и x_{42} , причем части равенства ориентируются так, чтобы x_{42} , согласно направлению замены x_9 , оказалось заменяемой частью. Переменной x_{46} присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы со списком результатов подстановки подтерма x_{38} , переменной x_{40} и подтерма x_{39} вместо переменных x_{24} , x_{30} и x_{31} в антецеденты дополнительной теоремы. Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x_{46} и утверждения, необходимые для сопровождения терма x_{42} по о.д.з., а консеквентом служит x_{45} . Результат последовательной обработки ее операторами "полныепосылки" и "нормтеорема" присваивается переменной x_{47} . Проверяется, что x_{47} - кванторная импликация, причем для тех переменных, которые были выделены характеристикой "склейка" в исходной теореме, склейка по-прежнему имеет место. Затем x_{47} регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы, причем сопровождается она только характеристиками "склейка" исходной теоремы.

2. Обобщение тождества склейки путем домножения обеих частей на новую переменную и перемещения ее внутрь заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcf}(\neg(a = 0) \ \& \ 0 < \cos c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 \leq \sin c \rightarrow f(\operatorname{tg} c)^b/a = f(\sin c)^b/(a(\cos c)^b))$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(0 < \cos d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq \sin d \rightarrow e(\operatorname{tg} d)^c = e(\sin d)^c/(\cos d)^c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ade}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d/(ae) = (d/e)/a)$$

Характеристика - "склейка(*c* первый терм)".

Программа приема почти дословно совпадает с программой одного из ранее рассмотренных приемов. Для удобства чтения повторим ее.

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - ее заголовок. В нашем случае - "дробь". Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по x11 указанную выше дополнительную теорему. Характеристика "нормализация" указывает на заменяемую часть x17 дополнительной теоремы. В нашем случае - "(*d/e*)/*a*". Проверяется, что эта часть имеет одним из своих операндов переменную x20 (в нашем случае - *a*). Переменной x19 присваивается вхождение другого операнда, причем проверяется, что заголовком этого операнда служит символ x11. Переменной x21 присваивается заголовок терма x17. В нашем случае - "дробь". Находится единица *E* операции x21, причем проверяется, что операция x17 имеет эту единицу для операнда x20. Переменной x23 присваивается заменяющая часть дополнительной теоремы. Переменной x24 присваивается вхождение того корневого операнда терма x23, заголовком x25 которого служит коммутативная операция. В нашем примере - "*ae*". Проверяется, что одним из операндов операции x24 служит переменная x20.

Проверяется избыточность ввода новой переменной: рассматривается вхождение корневого операнда терма x10, расположенного так же, как операнд x24 терма x23. Проверяется, что по этому вхождению не расположена неповторная в x10 переменная либо операция с заголовком x25, имеющая своим операндом неповторную в x10 переменную.

Далее оператор "тождвывод" находит результат x26 преобразования вхождения x19 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. В нашем примере имеем:

$$\forall_{abcf}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg((\cos c)^b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ f(\sin c)^b - \text{число} \ \& \ (\cos c)^b - \text{число} \ \& \ 0 < \cos c \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 \leq \sin c \rightarrow f(\sin c)^b/(a(\cos c)^b) = f(\operatorname{tg} c)^b/a)$$

Переменной x27 присваивается результат обработки импликации x26 оператором "нормтеорема". Проверяется, что консеквент теоремы x27 - равенство, причем если x10 неповторно, то и заменяемая часть теоремы x27 неповторна. При необходимости ориентация равенства в теореме x27 изменяется так, чтобы она совпала с ориентацией равенства в исходной теореме. Затем теорема x27 регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

Использование дополнительной теоремы для упрощения заменяемой части

1. Попытка сильного упрощения заменяемой части с последующей сверткой в неповторное выражение.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(\neg(\cos b = 0) \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \operatorname{tg}(-b) = -\operatorname{tg} b)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \ \& \ \neg(\cos a = 0) \rightarrow \operatorname{tg} a = \sin a / \cos a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \sin(-a) = -\sin a)$$

Характеристика - "склейка(a первыйтерм)".

Переменной x8 присваивается переменная из текущей характеристики, переменной x9 - направление замены. В нашем примере, соответственно, a и "первыйтерм". Переменной x11 присваивается вхождение заменяемой части теоремы. Внутри него рассматривается вхождение x12 неоднобуквенного подтерма, и переменной x13 присваивается его заголовок. В нашем примере x12 - вхождение выражения " $\sin a$ ", x13 - символ "синус". Справочник поиска теорем "упрощимп" определяет по x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается направление замены, определяемое ее характеристикой "сокращ". В нашем примере - "второйтерм". Оператор "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x12 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_b((-b) - \text{число} \ \& \ \neg(\cos(-b) = 0) \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \operatorname{tg}(-b) = (-\sin b) / \cos(-b))$$

Переменной x20 присваивается вхождение заменяемой части равенства в консеквенте теоремы x18, согласно направлению замены x9. Переменной x21 присваивается подтерм по вхождению x20. В нашем примере этот подтерм имеет вид " $(-\sin b) / \cos(-b)$ ". Проверяется, что он имеет повторные вхождения переменных. Переменной x22 присваивается список antecedентов теоремы x18. При помощи задачи на преобразование с посылками x22 предпринимается упрощение выражения x21, и результат присваивается переменной x24. В нашем примере он имеет вид " $-\operatorname{tg} b$ ". Проверяется, что выражение x24 неповторно. Определяется результат замены в теореме x18 вхождения x20 на выражение x24. Этот результат обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому разрешается использовать уже имеющиеся в списке вывода теоремы. Затем он регистрируется в списке вывода.

Использование теоремы для варьирования дополнительной теоремы

1. Попытка воспользоваться тождеством склейки для преобразования фрагмента сокращающего тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(\neg(\cos d = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow (\cos d)^c (\text{tg } d)^c = (\sin d)^c)$$

из теоремы

$$\forall_{cd}(\neg(\cos d = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow (\text{tg } d)^c = (\sin d)^c / (\cos d)^c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow (a/b)b = a)$$

Характеристика - "склейка(c первый терм)".

Переменной x10 присваивается заменяемая часть равенства в консеквенте теоремы. В нашем примере - правая часть. Переменной x11 присваивается ее заголовок. В нашем примере - "дробь". Справочник поиска теорем "поглощается" находит по x11 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается вхождение заменяемой части этой теоремы. Внутри вхождения x17 рассматривается вхождение x18 символа x11. В нашем примере - вхождение подтерма " a/b ". Проверяется, что оценки сложности подтермов x17 и x18 совпадают. Оператор "тождвывод" определяет результат x19 преобразования вхождения x18 при помощи дополнительной теоремы. Переменной x20 присваивается результат обработки теоремы x19 оператором "нормтеорема". В нашем примере это указанная выше итоговая теорема. Перед ее регистрацией в списке вывода проверяется, что при отключенной блокировке приемов корневые операнды заменяемой части теоремы x20 не изменяются при попытках их упростить. Затем x20 регистрируется в списке вывода.

3.104 Характеристика "склейкаоперандов"

Характеристикой "склейкаоперандов" снабжаются тождества, позволяющие исключить повторные вхождения переменной в заменяемой части другого тождества путем применения к обеим его частям внешней операции.

Обобщение теоремы

1. Обобщение тождества "склейкаоперандов": выделение невырожденной группы операндов ассоциативно-коммутативной операции в небесповторной части и замена ее на новый параметр.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcdf}(\neg(b = 0) \ \& \ \neg(\cos d = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow (c \cos d + f \sin d) / (b \cos d) = c/b + f \text{tg } d/b)$$

из теоремы

$$\forall_{abdf}(\neg(b = 0) \ \& \ \neg(\cos d = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow (ab \cos d + f \sin d) / (b \cos d) = a + f \text{tg } d/b)$$

Переменной x_8 присваивается вхождение консеквента, представляющего собой равенство. Переменной x_{11} присваивается тот корневой операнд левой части равенства x_8 , который неповторен, переменной x_{12} - операнд, имеющий кратные вхождения переменных. В нашем примере $x_{11} - "b \cos d"$, $x_{12} - "ab \cos d + f \sin d"$. Выбирается параметр x_{13} выражения x_{12} , имеющий в нем единственное вхождение. В нашем примере - параметр a . Проверяется, что переменная x_{13} не входит в выражение x_{11} . Переменной x_{14} присваивается вхождение переменной x_{13} в терм x_{12} , переменной x_{15} - вхождение, непосредственным операндом которого является x_{14} . Переменной x_{16} присваивается символ по вхождению x_{15} . В нашем примере - "умножение". Проверяется, что символ x_{16} ассоциативен и коммутативен. Переменной x_{17} присваивается список всех параметров терма x_{12} , имеющие в нем единственное вхождение. В нашем примере - a, b, f . Переменной x_{18} присваивается список операндов вхождения x_{15} . Проверяется, что в нем не менее трех элементов. Переменной x_{19} присваивается список термов набора x_{18} , параметры которых включаются в список x_{17} . В нашем примере - a, b . Проверяется, что число элементов списка x_{19} не менее 2.

Выбирается переменная x_{20} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная c . Определяется тип t значений выражений с заголовком x_{16} . В нашем примере - "число". Переменной x_{22} присваивается набор, состоящий из равенства терма " $x_{16}(x_{19})$ " переменной x_{20} и утверждения " $t(x_{20})$ ". Переменной x_{23} присваивается набор антецедентов исходной теоремы. Он подразбивается на набор x_{24} утверждений, содержащих переменную x_{13} , и набор x_{25} остальных утверждений. Переменной x_{26} присваивается объединение наборов x_{22} и x_{24} .

Решается задача на описание с послыками x_{25} и условиями x_{26} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "неизвестные x_{13} ", "упростить". В нашем примере послыки суть " $\neg(b = 0)$ ", " $\neg(\cos d = 0)$ ", " b - число", " d - число", " f - число". Условия суть " $ab = c$ ", " c - число", " a - число". Неизвестная - a .

Ответ присваивается переменной x_{29} . В нашем примере он имеет вид " $a = c/b$ & c - число". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{30} присваивается набор конъюнктивных членов ответа. Проверяется, что среди них встречается равенство с переменной x_{13} в левой части. Затем создается импликация, антецеденты которой суть утверждения списков x_{23} и x_{30} , а консеквент тот же, что у исходной теоремы. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. Исходная теорема помечается символом "исключение".

2. Обобщение тождества "склеякоперандов": подстановка единицы вместо переменной, встречающейся только в неповторной части заменяемого терма.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdf} (\neg(\cos d = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow (c \cos d + f \sin d) / \cos d = c + f \operatorname{tg} d)$$

из теоремы

$$\forall_{bcd} (\neg(b = 0) \ \& \ \neg(\cos d = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow (c \cos d + f \sin d) / (b \cos d) = c/b + f \operatorname{tg} d/b)$$

Переменной x_8 присваивается вхождение консеквента, представляющего собой равенство. Переменной x_{11} присваивается тот корневой операнд левой части равенства x_8 , который неповторен, переменной x_{12} - операнд, имеющий кратные вхождения переменных. В нашем примере x_{11} - " $b \cos d$ ", x_{12} - " $c \cos d + f \sin d$ ". Выбирается параметр x_{13} выражения x_{11} , не входящий в выражение x_{12} . В нашем примере - параметр b . Переменной x_{14} присваивается вхождение переменной x_{13} в терм x_{11} , переменной x_{15} - вхождение, непосредственным операндом которого служит x_{14} . Переменной x_{16} присваивается символ по вхождению x_{15} . В нашем примере - "умножение". Проверяется, что операция x_{16} имеет некоторую единицу E для своего операнда x_{14} . В нашем примере - обычная единица. Создается импликация, антецеденты которой суть антецеденты исходной теоремы и равенство переменной x_{13} единице E . Она обрабатывается оператором "нормтеорема"/ и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. Исходная теорема помечается символом "исключение".

3.105 Характеристика "смнеизв"

Характеристикой "смнеизв($N \ i \ F$)" снабжаются тождества, упрощающие относительно неизвестных заданный корневой операнд преобразуемого выражения. N - направление замены, i - номер корневого операнда, F - конъюнкция фильтров, уточняющих контекст.

Обобщение теоремы

1. Обобщение тождества, устранивающего сложное подвыражение с неизвестными при навешивании внешней операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow (ba^{d/c})^c = b^c a^d)$$

из теоремы

$$\forall_{acd}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow (a^{d/c})^c = a^d)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^c b^c = (ab)^c)$$

Характеристика - "смнеизв(второйтерм 1 и(известно(c) не(известно(a)) натуральное(d)))".

Переменной x_8 присваивается первый операнд характеристики, переменной x_9 - второй. В нашем примере - символы "второйтерм" и "1". Переменной x_{10} присваивается вхождение консеквента теоремы, переменной x_{11} - заменяемая часть консеквента. Проверяется, что число корневых операндов заменяемой части равно 2. Переменной x_{12} присваивается заголовок выражения x_{11} . В нашем

примере - "степень". Справочник поиска теорем "дистрибразвертка" определяет по x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{17} присваивается направление ее замены относительно комментария "дистрибразвертка". В нашем примере - "первыйтерм". Переменной x_{18} присваивается заменяемая часть дополнительной теоремы. В нашем примере - " $(ab)^c$ ". Переменной x_{19} присваивается вхождение того корневого операнда терма x_{18} , который представляет собой некоторую переменную x_{21} . Проверяется, что по вхождению x_{20} другого корневого операнда располагается коммутативный и ассоциативный символ x_{22} . В нашем примере - "умножение". Переменной x_{23} присваивается переменная - первый операнд вхождения x_{20} , переменной x_{24} - переменная, являющаяся вторым операндом. В нашем примере - переменные a, b . Проверяется, что операция x_{22} имеет единицу. Если символ x_{12} не коммутативный, то проверяется, что номер операнда x_{20} терма x_{18} равен x_9 .

Переменной x_{25} присваивается вхождение корневого операнда терма x_{11} , имеющего номер x_9 . В нашем примере - вхождение выражения " $a^{d/c}$ ". Выбирается переменная x_{26} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Переменной x_{27} присваивается результат соединения операцией x_{22} этой переменной и подтерма x_{25} . В нашем примере - " $ba^{d/c}$ ". Переменной x_{28} присваивается результат замены вхождения x_{25} в терм x_{11} на выражение x_{27} . В нашем примере - " $(ba^{d/c})^c$ ". Переменной x_{29} присваивается тот корневой операнд терма x_{11} , номер которого отличен от x_9 . В нашем примере - c . Переменной x_{30} присваивается результат подстановки термов x_{29} , x_{26} и подтерма x_{25} вместо переменных x_{21} , x_{23} и x_{24} в заменяющую часть дополнительной теоремы. В нашем примере - " $b^c(a^{d/c})^c$ ". Переменной x_{31} присваивается вхождение выражения x_{11} в выражение x_{30} , переменной x_{32} - результат замены этого вхождения на заменяющую часть исходной теоремы. В нашем примере x_{32} имеет вид " $b^c a^d$ ". Переменной x_{33} присваивается равенство выражений x_{32} и x_{28} , с сохранением ориентации исходной теоремы.

Переменной x_{34} присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы со списком результатов подстановки в антецеденты дополнительной теоремы термов x_{29} , x_{26} и подтерма x_{25} вместо переменных x_{21} , x_{23} и x_{24} . Переменной x_{35} присваивается результат обработки списка x_{34} оператором "нормантецеденты" относительно параметров равенства x_{33} . Переменной x_{36} присваивается импликация с антецедентами x_{35} и консеквентом x_{33} . Оператор "неизвконтексты" составляет список наборов фильтров, уточняющих контекст фильтров F исходной характеристики и указывающих ситуации, когда терм x_{27} имеет большую сложность относительно указанных в F неизвестных, чем терм x_{32} . В нашем примере x_{37} состоит из единственного набора фильтров "известно(c)", "не(известно(a))", "натуральное(d)", "или(натуральное(c)известно(b))". Далее теорема x_{36} регистрируется в списке вывода, снабжаемая характеристиками, полученными из исходной характеристики заменой фильтров F на конъюнкции термов набора x_{37} . Она обобщает исходную теорему, которая помечается символом "исключение".

3.106 Характеристика "смпропорц"

Характеристикой "смпропорц($i A B$)" снабжаются теоремы, у которых i -й антецедент представляет собой соотношение пропорциональности для невырожденных числовых атомов A и B .

Логические следствия теоремы

1. Использование симметрии посылок для усмотрения альтернативного соотношения пропорциональности (первый прием).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abefABCDEF}(\neg(A = C) \& \neg(A = E) \& \neg(B = C) \& \neg(B = D) \& \neg(\text{прямая}(AC) = \text{прямая}(BC)) \& al(AF) = bl(DF) \& el(BF) = fl(EF) \& D \in \text{отрезок}(BC) \& E \in \text{отрезок}(AC) \& F \in \text{прямая}(AD) \& F \in \text{прямая}(BE) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& e - \text{число} \& f - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& F - \text{точка} \rightarrow (bf - ae)l(CD) = e(a + b)l(BD))$$

из теоремы

$$\forall_{abefABCDEF}(\neg(A = C) \& \neg(B = C) \& \neg(B = D) \& \neg(\text{прямая}(AC) = \text{прямая}(BC)) \& al(AF) = bl(DF) \& cl(BD) = dl(CD) \& D \in \text{отрезок}(BC) \& E \in \text{отрезок}(AC) \& F \in \text{прямая}(AD) \& F \in \text{прямая}(BE) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& d - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& F - \text{точка} \rightarrow bdl(CE) = (ac + ad)l(AE))$$

Характеристика - "смпропорц(5, $l(AF), l(DF)$)".

Переменной x_8 присваивается список антецедентов. Проверяется, что число характеристик теоремы с заголовком "пропорция" равно 1. Переменной x_9 присваивается список антецедентов, имеющих заголовок "равно". Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x_{11} присваивается список существенных антецедентов, не являющихся равенствами либо отрицаниями равенств. Проверяется, что он непуст, и переменной x_{12} присваивается конъюнкция утверждений x_{11} . Переменной x_{13} присваивается список переменных теоремы, переменной x_{14} - список не входящих в теорему переменных, длина которого равна длине списка x_{13} . В нашем примере x_{12} - утверждение " $D \in \text{отрезок}(BC) \& E \in \text{отрезок}(AC) \& F \in \text{прямая}(AD) \& F \in \text{прямая}(BE)$ ", x_{13} - список $abcdABCDEF$, x_{14} - список $efghijklmn$. Переменной x_{15} присваивается результат замены переменных x_{13} на x_{14} в утверждении x_{12} . В нашем примере - " $l \in \text{отрезок}(jk) \& m \in \text{отрезок}(ik) \& n \in \text{прямая}(il) \& n \in \text{прямая}(jm)$ ". Определяется подстановка S вместо переменных x_{14} , унифицирующая термы x_{15} и x_{12} . Проверяется, что эта подстановка переводит переменные x_{14} в однобуквенные термы x_{16} , образованные попарно различными переменными, причем список заголовков термов x_{16} , соответствующих переменным терма x_{12} , отличается от списка x_{13} . Иными словами, подстановка S выявляет симметрию утверждения x_{12} относительно перестановки каких-то переменных списка x_{13} . В нашем примере x_{16} образовано переменными $e, f, g, h, B, A, C, E, D, F$. Таким образом, поменялись местами переменные A, B , а также D, E .

Переменной x_{17} присваивается консеквент теоремы - некоторое равенство. Проматриваются равенства списка x_9 , а также равенство x_{17} . Проверяется, что они суть соотношения пропорциональности для невырожденных числовых атомов, и составляется список x_{18} пар (K, T) , где K - пара термов для коэффициентов пропорциональности, T - пара невырожденных числовых атомов, коэффициентами пропорциональности при которых служат выражения K . В нашем примере x_{18} состоит из пар $((a, b), (l(AF), l(DF)))$, $((c, d), (l(BD), l(CD)))$, $((bd, ac + ad), (l(CE), l(AE)))$. Проверяется, что все коэффициенты пропорциональности из x_{18} , соответствующие равенствам в антецедентах, суть переменные.

Переменной x_{19} присваивается копия списка x_{18} . В этой копии к каждому коэффициенту и каждому числовому атому применяется сначала подстановка переменных x_{14} вместо x_{13} , затем - подстановка S , и далее терм обрабатывается оператором "станд". В нашем примере x_{19} состоит из пар $((e, f), (l(BF), l(EF)))$, $((g, h), (l(AE), l(CE)))$, $((fh, eg + eh), (l(CD), l(BD)))$.

Переменной x_{20} присваивается последняя пара списка x_{18} , а переменной x_{21} - пара ее невырожденных числовых атомов. Аналогично, переменной x_{22} присваивается последняя пара списка x_{19} , а переменной x_{23} - пара ее невырожденных числовых атомов. В нашем примере x_{21} - $(l(CE), l(AE))$, x_{23} - $(l(CD), l(BD))$.

Находятся такие равноудаленные от своих начал позиции x_{24} и x_{25} списков x_{18} и x_{19} , соответствующие антецедентам, что пара x_{26} числовых атомов для позиции x_{24} включает пару x_{23} , а пара x_{27} числовых атомов для позиции x_{25} включает пару x_{21} . В нашем примере x_{24} и x_{25} - вторые позиции списков; x_{26} - пара $(l(BD), l(CD))$; x_{27} - $(l(AE), l(CE))$. Переменной x_{28} присваивается список переменных - коэффициентов для позиции x_{25} . В нашем примере - g, h . Рассматриваются атомы списка x_{27} , находятся их позиции в списке x_{21} , и составляется список x_{29} расположенных на таких же позициях коэффициентов пары x_{20} . В нашем примере x_{29} имеет вид $(ac + ad, bd)$. Переменной x_{30} присваивается список результатов подстановки выражений x_{29} вместо переменных x_{28} в коэффициенты пары x_{22} . В нашем примере x_{30} имеет вид $(f \cdot (bd), e(ac + ad) + e \cdot (bd))$.

Переменной x_{31} присваивается результат удаления из списка x_8 утверждений x_9 и x_{11} , переменной x_{32} - результат замены в утверждениях x_{31} переменных x_{13} на x_{14} . Переменной x_{33} присваивается объединение не вошедших в список x_9 утверждений x_8 с результатами последовательного применения к утверждениям x_{32} сначала подстановки S , а затем подстановки выражений x_{29} вместо переменных x_{28} . Переменной x_{34} присваивается результат обработки выражений списка x_{30} сначала нормализаторами общей стандартизации, а затем оператором "факторизация". Обработка ведется относительно посылок x_{33} . В нашем примере x_{34} состоит из выражений $bdf, e(ac + ad + bd)$. В списке x_{23} выбирается числовой атом x_{35} . В нашем примере - $l(CD)$. В списке x_{26} находится позиция, на которой расположен атом x_{35} , и переменной x_{36} присваивается список сомножителей коэффициента, расположенного на такой же позиции в наборе коэффициентов пары x_{24} . В нашем примере x_{36} состоит из единственного выражения d . Аналогично, в списке x_{23} находится позиция, на которой расположен атом x_{35} , и переменной x_{37} присваивается список сомножителей коэффициента, расположенного на такой же позиции в наборе x_{34} . В нашем

примере x37 состоит из выражений b, d, f . Проверяется, что список x36 включается в список x37. Переменной x38 присваивается элемент пары x23, отличный от x35. В нашем примере - $l(BD)$. В списке x26 находится позиция, на которой расположен атом x38, и переменной x39 присваивается список множителей коэффициента, расположенного на такой же позиции в наборе коэффициентов пары x24. В нашем примере x39 состоит из единственного выражения c . Переменной x40 присваивается произведение не вошедших в список x36 выражений списка x37 и выражений списка x39. В нашем примере - bfc . К списку x33 добавляется отрицание равенства выражения x38 нулю. Переменной x41 присваивается равенство выражения x40 выражению, расположенному в списке x34 на той же позиции, что и x38 в списке x23. В нашем примере x41 имеет вид " $bfc = e(ac + ad + bd)$ ".

Переменной x42 присваивается список переменных - коэффициентов для пары с позиции x24. В нашем примере - c, d . Оператор "усмпропорц" преобразует равенство x41 к виду соотношения пропорциональности для переменных списка x42; результат присваивается переменной x43. В нашем примере имеем " $c(bf - ae) = de(a + b)$ ". Переменной x45 присваиваются коэффициенты при переменных списка x42 в соотношении x43. В нашем примере - пара выражений " $bf - ae, e(a + b)$ ".

Переменной x46 присваивается равенство произведения первого выражения набора x45 на второй элемент пары x26 произведению второго выражения набора x45 на первый элемент набора x26. Переменной x47 присваивается список результатов последовательно применения к утверждениям списка x9 сначала подстановки переменных x14 вместо x13, а затем - подстановки S . Рассматривается позиция x48 списка x18, отличная от x24 и не являющаяся крайней справа позицией. Иными словами, эта позиция соответствует оставшемуся соотношению пропорциональности в антецедентах исходной теоремы. Переменной x49 присваивается само это соотношение пропорциональности. Переменной x50 присваивается соотношение списка x47, расположенное на позиции с тем же номером, что позиция x48 списка x18. В нашем примере - " $el(BF) = fl(EF)$ ". Переменной x51 присваивается результат добавления к списку x33 соотношений x49 и x50. Затем создается импликация с антецедентами x51 и консеквентом x46. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- Использование симметрии посылок для усмотрения альтернативного соотношения пропорциональности (второй прием).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{abcdABCDEF} (\neg(A = C) \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(A = F) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \\ & \neg(B = F) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AC) = \text{прямая}(BC)) \ \& \ al(AF) = bl(DF) \ \& \\ & cl(CE) = dl(AE) \ \& \ D \in \text{отрезок}(BC) \ \& \ E \in \text{отрезок}(AC) \ \& \ F \in \text{прямая}(AD) \\ & \ \& \ F \in \text{прямая}(BE) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \\ & A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \rightarrow \\ & a(c + d)l(EF) = (bd - ac)l(BF)) \end{aligned}$$

из теоремы

$$\forall_{abcdABCDEF}(\neg(A = C) \& \neg(A = F) \& \neg(B = C) \& \neg(B = D) \& \neg(\text{прямая}(AC) = \text{прямая}(BC)) \& al(AF) = bl(DF) \& cl(CE) = dl(AE) \& D \in \text{отрезок}(BC) \& E \in \text{отрезок}(AC) \& F \in \text{прямая}(AD) \& F \in \text{прямая}(BE) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& d - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& F - \text{точка} \rightarrow (bd - ac)(BD) = acl(CD))$$

Характеристика - "смпропорц(6, $l(AF)$, $l(DF)$)".

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема, но пример другой, и для удобства чтения повторим это начало.

Переменной x_8 присваивается список антецедентов. Проверяется, что число характеристик теоремы с заголовком "пропорция" равно 1. Переменной x_9 присваивается список антецедентов, имеющих заголовок "равно". Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x_{11} присваивается список существенных антецедентов, не являющихся равенствами либо отрицаниями равенств. Проверяется, что он непуст, и переменной x_{12} присваивается конъюнкция утверждений x_{11} . Переменной x_{13} присваивается список переменных теоремы, переменной x_{14} - список не входящих в теорему переменных, длина которого равна длине списка x_{13} . В нашем примере x_{12} - утверждение " $D \in \text{отрезок}(BC) \& E \in \text{отрезок}(AC) \& F \in \text{прямая}(AD) \& F \in \text{прямая}(BE)$ ", x_{13} - список $abcdABCDEF$, x_{14} - список $efghijklmn$. Переменной x_{15} присваивается результат замены переменных x_{13} на x_{14} в утверждении x_{12} . В нашем примере - " $l \in \text{отрезок}(jk) \& m \in \text{отрезок}(ik) \& n \in \text{прямая}(il) \& n \in \text{прямая}(jm)$ ". Определяется подстановка S вместо переменных x_{14} , унифицирующая термы x_{15} и x_{12} . Проверяется, что эта подстановка переводит переменные x_{14} в однобуквенные термы x_{16} , образованные попарно различными переменными, причем список заголовков термов x_{16} , соответствующих переменным терма x_{12} , отличается от списка x_{13} . Иными словами, подстановка S выявляет симметрию утверждения x_{12} относительно перестановки каких-то переменных списка x_{13} . В нашем примере x_{16} образовано переменными $e, f, g, h, B, A, C, E, D, F$. Таким образом, поменялись местами переменные A, B , а также D, E .

Переменной x_{17} присваивается консеквент теоремы - некоторое равенство. Проверяются равенства списка x_9 , а также равенство x_{17} . Проверяется, что они суть соотношения пропорциональности для невырожденных числовых атомов, и составляется список x_{18} пар (K, T) , где K - пара термов для коэффициентов пропорциональности, T - пара невырожденных числовых атомов, коэффициентами пропорциональности при которых служат выражения K . В нашем примере x_{18} состоит из пар $((a, b), (l(AF), l(DF))), ((c, d), (l(CE), l(AE))), ((bd - ac, ac), (l(BD), l(CD)))$. Проверяется, что все коэффициенты пропорциональности из x_{18} , соответствующие равенствам в антецедентах, суть переменные.

Переменной x_{19} присваивается копия списка x_{18} . В этой копии к каждому коэффициенту и каждому числовому атому применяется сначала подстановка переменных x_{14} вместо x_{13} , затем - подстановка S , и далее терм обрабатывается оператором "станд". В нашем примере x_{19} состоит из пар $((e, f), (l(BF), l(EF))), ((g, h), (l(CD), l(BD))), ((fh - eg, eg), (l(AE), l(CE)))$.

Переменной x_{20} присваивается последняя пара списка x_{18} , а переменной x_{21} - пара ее невырожденных числовых атомов. Аналогично, переменной x_{22} присва-

ивается последняя пара списка x_{19} , а переменной x_{23} - пара ее невырожденных числовых атомов. В нашем примере $x_{21} - (l(BD), l(CD))$, $x_{23} - (l(AE), l(CE))$.

Находятся такие равноудаленные от своих начал позиции x_{24} и x_{25} списков x_{18} и x_{19} , соответствующие антецедентам, что пара x_{26} числовых атомов для позиции x_{24} включает пару x_{23} , а пара x_{27} числовых атомов для позиции x_{25} включает пару x_{21} . В нашем примере x_{24} и x_{25} - вторые позиции списков; x_{26} - пара $(l(CE), l(AE))$; x_{27} - $(l(CD), l(BD))$. Переменной x_{28} присваивается список переменных - коэффициентов для позиции x_{25} . В нашем примере - g, h . Рассматриваются атомы списка x_{27} , находятся их позиции в списке x_{21} , и составляется список x_{29} расположенных на таких же позициях коэффициентов пары x_{20} . В нашем примере x_{29} имеет вид $(ac, bd - ac)$. Переменной x_{30} присваивается список результатов подстановки выражений x_{29} вместо переменных x_{28} в коэффициенты пары x_{22} . В нашем примере x_{30} имеет вид $(f \cdot (bd - ac) - e \cdot (ac)), e \cdot (ac)$.

Переменной x_{31} присваивается результат удаления из списка x_8 утверждений x_9 и x_{11} , переменной x_{32} - результат замены в утверждениях x_{31} переменных x_{13} на x_{14} . Переменной x_{33} присваивается объединение не вошедших в список x_9 утверждений x_8 с результатами последовательного применения к утверждениям x_{32} сначала подстановки S , а затем подстановки выражений x_{29} вместо переменных x_{28} . Переменной x_{34} присваивается результат обработки выражений списка x_{30} сначала нормализаторами общей стандартизации, а затем оператором "факторизация". Обработка ведется относительно посылок x_{33} . В нашем примере x_{34} состоит из выражений $f \cdot (bd - ac) - ace, ace$. В списке x_{23} выбирается числовой атом x_{35} . В нашем примере - $l(CE)$. В списке x_{26} находится позиция, на которой расположен атом x_{35} , и переменной x_{36} присваивается список сомножителей коэффициента, расположенного на такой же позиции в наборе коэффициентов пары x_{24} . В нашем примере x_{36} состоит из единственного выражения c . Аналогично, в списке x_{23} находится позиция, на которой расположен атом x_{35} , и переменной x_{37} присваивается список сомножителей коэффициента, расположенного на такой же позиции в наборе x_{34} . В нашем примере x_{37} состоит из выражений a, c, e, f . Проверяется, что список x_{36} включается в список x_{37} . Переменной x_{38} присваивается элемент пары x_{23} , отличный от x_{35} . В нашем примере - $l(AE)$. В списке x_{26} находится позиция, на которой расположен атом x_{38} , и переменной x_{39} присваивается список сомножителей коэффициента, расположенного на такой же позиции в наборе коэффициентов пары x_{24} . В нашем примере x_{39} состоит из единственного выражения d . Переменной x_{40} присваивается произведение не вошедших в список x_{36} выражений списка x_{37} и выражений списка x_{39} . В нашем примере - aed . К списку x_{33} добавляется отрицание равенства выражения x_{38} нулю. Переменной x_{41} присваивается равенство выражения x_{40} выражению, расположенному в списке x_{34} на той же позиции, что и x_{38} в списке x_{23} . В нашем примере x_{41} имеет вид " $aed = f(bd - ac) - ace$ ".

Дальше начинаются отличия. Переменной x_{42} присваивается позиция списка x_{18} , отличная от x_{24} и от крайней правой позиции; переменной x_{43} - соответствующая позиция в списке x_{19} . В нашем примере - первые позиции списков. Дальше поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{44} присваивается пара с позиции x_{42} , во втором - пара с позиции x_{43} . В нашем примере рассматривается первый случай. Переменной x_{45} присваиваются пе-

ременные - коэффициенты пропорциональности из пары x44. В нашем примере - e, f . Оператор "усмпропорц" преобразует равенство x41 к виду соотношения пропорциональности для переменных списка x45; результат присваивается переменной x46. В нашем примере имеем " $ea(c + d) = f(bd - ac)$ ". Переменной x48 присваиваются коэффициенты при переменных списка x45 в соотношении x46. В нашем примере - пара выражений " $a(c + d), bd - ac$ ".

Переменной x49 присваивается равенство произведения первого выражения набора x48 на второй элемент пары x44 произведению второго выражения набора x48 на первый элемент пары x44. Переменной x50 присваивается список результатов последовательно применения к утверждениям списка x9 сначала подстановки переменных x14 вместо x13, а затем - подстановки S . Если x44 - пара с позиции x42, то рассматривается список x50, иначе - список x9. Переменной x51 присваивается элемент этого списка, номер позиции которого равен номеру позиции x42 списка x18. В нашем примере - " $al(AF) = bl(DF)$ ". Переменной x52 присваивается соотношение списка x9, расположенное на позиции с тем же номером, что позиция x24 списка x18. В нашем примере - " $cl(CE) = dl(AE)$ ". Переменной x53 присваивается результат добавления к списку x33 соотношений x51 и x52. Затем создается импликация с антецедентами x53 и консеквентом x49. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Варьирование числовых атомов соотношения пропорциональности в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdepABCK}(\neg(A = B) \& \text{коорд}(A, K) = (a, b) \& \text{коорд}(B, K) = (c, d) \& C \in \text{отрезок}(AB) \& p - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{систкоорд}(K) \& el(AC) = pl(BC) \& e - \text{число} \& \neg(e + p = 0) \rightarrow \text{коорд}(C, K) = ((ae + cp)/(e + p), (be + dp)/(e + p)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCKabcdpq}(p - \text{число} \& q - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{систкоорд}(K) \& \text{коорд}(A, K) = (a, b) \& \text{коорд}(B, K) = (c, d) \& \text{точкалуча}(A, B, C) \& pl(AB) = ql(AC) \& \neg(q = 0) \rightarrow \text{коорд}(C, K) = (a + (c - a)p/q, b + (d - b)p/q)$$

Характеристика - "смпропорц(10, $l(AB), l(AC)$)".

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Проверяется наличие у теоремы характеристики "коорд" либо "систкоорд". Переменной x9 присваивается список всех характеристик теоремы, имеющих заголовок "смпропорц". В нашем примере такая характеристика единственная. Решается задача на исследование x10 с посылками x8 и целями "известно", "неизвестные X", "теорема". Здесь X - все параметры посылок. По окончании решения в списке посылок находится равенство x12, не входящее в x8 и содержащее ровно 3 невырожденных числовых атомов. Переменной x13 присваивается список этих атомов. В нашем

примере x_{12} имеет вид " $l(BC) = |-l(AB) + l(AC)|$ ", x_{13} - список $l(BC)$, $l(AB)$, $l(AC)$. Среди характеристик x_9 выбирается некоторая характеристика x_{14} . В нашем примере она совпадает с указанной выше исходной характеристикой. Переменной x_{15} присваивается пара, образованная вторым и последним операндами характеристики x_{14} . В нашем примере - $l(AB)$ и $l(AC)$. Проверяется, что список x_{15} включается в список x_{13} . Выбирается элемент x_{16} списка x_{13} , не входящий в x_{15} . В нашем примере - $l(BC)$. Переменной x_{17} присваивается тройка переменных X, Y, Z , не входящих в исходную теорему. В нашем примере - e, f, g . Выбирается элемент x_{18} списка x_{15} . В нашем примере - $l(AC)$. Переменной x_{19} присваивается результат добавления к списку x_8 равенства x_{12} , а также равенства переменной X выражению x_{16} и переменной Y выражению x_{18} . Переменной x_{20} присваивается элемент списка x_{15} , отличный от x_{18} . В нашем примере - $l(AB)$.

Решается задача на описание x_{21} с посылками x_{19} , единственным условием которой служит равенство переменной Z выражению x_{20} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные Z ", "известно $X Y$ ". В нашем примере посылки суть " p - число", " q - число", " A - точка", " B - точка", " C - точка", "систкоорд(K)", "коорд(A, K) = (a, b)", "коорд(B, K) = (a, b)", "точкалуча(A, B, C)", " $pl(AB) = ql(AC)$ ", " $\neg(a = 0)$ ", " $l(BC) = |-l(AB) + l(AC)|$ ", " $e = l(BC)$ ", " $f = l(AB)$ ". Неизвестная - g , известные параметры - e, f . Ответ присваивается переменной x_{22} . В нашем примере он имеет вид " e - число & ($\neg(e = 0)$) & $g = f - e$ & $0 \leq f - e \vee g = e + f$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ".

Переменной x_{23} присваивается результат подстановки выражений x_{16} , x_{18} и x_{20} вместо переменных X, Y, Z в утверждение x_{22} . Переменной x_{24} присваивается список дизъюнктивных членов результата приведения утверждения x_{23} к виду д.н.ф. В этом списке выбирается утверждение x_{25} . В нашем примере - " $l(BC) - \text{число} \& l(AB) = l(BC) + l(AC)$ ". Переменной x_{27} присваивается результат упрощения терма x_{25} вспомогательной задачей на преобразование относительно посылок задачи x_{10} . В нашем примере этот результат имеет вид " $C \in \text{отрезок}(AB)$ ".

Переменной x_{28} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{25} . В нем находится равенство x_{29} , в левой части которого расположено выражение x_{20} . Переменной x_{30} присваивается правая часть. В нашем примере - " $l(BC) + l(AC)$ ". Переменной x_{31} присваивается результат замены во всех утверждениях списка x_8 подтерма x_{20} на терм x_{30} . Переменной x_{32} присваивается объединение списка x_{31} со списком конъюнктивных членов выражения x_{27} . Создается импликация с антецедентами x_{32} , консеквент которой тот же, что у исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема", а после этого - оператором "упрощантецеденты", заменяющем в антецедентах подвыражения с уникальными переменными на вспомогательные переменные. Результат регистрируется в списке вывода.

2. Усиление антецедентов для перехода к соотношению пропорциональности в антецедентах между другими атомами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDE}(\neg(A = E) \& \neg(B = C) \& \neg(D = E) \& \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(DE)) \& al(AB) = bl(BD) \& B \in \text{отрезок}(AD) \& C \in \text{прямая}(AE) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(DE) \rightarrow (a + b)l(BC) = bl(DE))$$

из теоремы

$$\forall_{abABCDE}(a - \text{число} \& b - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \neg(A = E) \& \neg(B = C) \& \neg(D = E) \& \neg(A = D) \& B \in \text{прямая}(AD) \& \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC) \& C \in \text{прямая}(AE) \& \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(AD)) \& al(AB) = bl(AD) \rightarrow al(BC) = bl(DE))$$

Характеристика - "смпропорц(16, $l(AB)$, $l(AD)$)".

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Проверяется, что теорема имеет единственную характеристику с заголовком "пропорция". Переменной x9 присваивается список равенств в антецедентах. Проверяется, что он одноэлементный, и переменной x10 присваивается его элемент. В нашем примере - " $al(AB) = bl(AD)$ ". Переменной x11 присваивается список невырожденных числовых атомов равенства x10. Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x12 присваивается список параметров выражений x11. В нашем примере - A, B, D . Переменной x13 присваивается список сомножителей левой части равенства x10. Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x14 присваивается общий элемент списков x11 и x13. В нашем примере - " $l(AB)$ ". В списке x13 выбирается одноэлементный терм, образованный некоторой переменной x16. В нашем примере - переменной a . Переменной x17 присваивается список сомножителей правой части равенства x10. Проверяется, что он двухэлементный, и переменной x18 присваивается общий элемент списков x11 и x17. В нашем примере - выражение $l(AD)$. В списке x17 выбирается одноэлементный терм, образованный некоторой переменной x20. В нашем примере - переменной b . Проверяется, что переменные x16 и x20 различны, причем каждая из них имеет единственное вхождение в терме x10.

Переменной x21 присваивается список всех антецедентов, параметры которых включаются в список x12. Переменной x22 присваивается объединение списка x21 со всевозможными термами "актив(T)" для выражений T списка x11. Решается задача на исследование x23 с посылками x22 и целями "имп", "известно", "неизвестные X ", где X - все параметры посылок. В нашем примере посылки суть утверждения " A - точка", " B - точка", " D - точка", " $\neg(A = D)$ ", " $B \in \text{прямая}(AD)$ ", "актив($l(AB)$)", "актив($l(AD)$)". Цель "имп" указывает на вывод представляющих интерес дополнительных антецедентов теоремы. Такие антецеденты сохраняются в комментарии (имп $A_1 A_2$) к посылкам задачи на исследование, где A_1 - дополнительный антецедент, A_2 - следствие из него.

По окончании решения задачи x23 из комментариев к ее посылкам извлекается элемент x25 вида (имп $A_1 A_2$). В нашем примере A_1 - утверждение " $B \in \text{отрезок}(AD)$ ", A_2 - утверждение $l(AD) = l(AB) + l(BD)$. Проверяется, что параметры утверждений A_1, A_2 включаются в список x12. Переменной x26 присваивается A_1 , переменной x27 - результат обработки A_2 оператором "станд". Переменной x28 присваивается список невырожденных числовых атомов утверждения x27. Проверяется, что он трехэлементный и включает список x11. В

списке x28 выбирается выражение x29, не входящее в список x11. В нашем примере - $l(BD)$. Выбирается переменная x30, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - c . Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x31 присваивается выражение x14, во втором - x18. В нашем примере имеет место второй случай. Переменной x32 присваивается результат замены в утверждении x27 всех вхождений подтерма x31 на переменную x30. В нашем примере имеем " $l(AB) + l(BD) = c$ ". Переменной x33 присваивается пара, образованная утверждениями x32 и "число(x30)". Переменной x34 присваивается результат добавления к списку x21 утверждения x26.

Решается задача на описание x35 с посылками x34 и условиями x33. Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "равно", "неизвестные x30", "упростить". В нашем примере посылки суть " A – точка", " B – точка", " D – точка", " $\neg(A = D)$ ", " $B \in \text{прямая}(AD)$ ", " $B \in \text{отрезок}(AD)$ ", условия - " $l(AB) + l(BD) = c$ ", " c – число". Неизвестная - c . Ответ присваивается переменной x36. В нашем примере он имеет вид " $c = l(AB) + l(BD)$ ". Проверяется, что ответ - равенство с переменной x30 в левой части. Переменной x37 присваивается правая часть. Проверяется, что любой отличный от x31 числовой атом списка x28 имеет вхождение в терм x37, расположенное только внутри подтермов с заголовками "плюс", "умножение", "минус". Выбирается числовой атом x38 списка x11, отличный от x31. В нашем примере - $l(AB)$. Переменной x39 присваивается результат замены в терме x37 всех вхождений атома x38 на переменную x20, а атома x29 - на переменную x16. В нашем примере x39 имеет вид $b + a$. Переменной x40 присваивается пара (x20, x16), если x31 равно x14, и пара (x16, x20) в противном случае. Переменной x42 присваивается список результатов подстановки в утверждения x8, не входящие в список x9, термов x30 и x20 вместо переменных x40. Переменной x43 присваивается результат такой же подстановки в консеквент исходной теоремы. Переменной x44 присваивается объединение списка x42 с утверждениями x26, "число(x16)", "число(x20)", "равно(умножение(x16 x38) умножение(x20 x29))". Затем создается импликация с антецедентами x44 и консеквентом x43. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Усиление антецедентов для перехода к соотношению пропорциональности в консеквенте между другими атомами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDE}(\neg(A = D) \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AE)) \ \& \ al(DE) = bl(BC) \ \& \ C \in \text{прямая}(AE) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(BC) \parallel \text{прямая}(DE) \rightarrow bl(BD) = (a - b)l(AD))$$

из теоремы

$$\forall_{abABCDE}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ B \in \text{прямая}(AD) \ \& \ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC) \ \& \ C \in \text{прямая}(AE) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(AD)) \ \& \ al(DE) = bl(BC) \rightarrow al(AD) = bl(AB))$$

Программа приема, хотя и отличается от программы предыдущего приема, в большей своей части дословно ее воспроизводит.

Переменной x_8 присваивается список антецедентов. Проверяется, что теорема имеет единственную характеристику с заголовком "пропорция". Переменной x_9 присваивается список равенств в антецедентах. Проверяется, что он одноэлементный, и переменной x_{10} присваивается его элемент. В нашем примере - " $al(DE) = bl(BC)$ ". Переменной x_{11} присваивается равенство в консеквенте теоремы. Переменной x_{12} присваивается список невырожденных числовых атомов терма x_{11} . Проверяется, что он двухэлементный, и переменной x_{13} присваивается список его параметров. В нашем примере x_{12} состоит из выражений $l(AD)$, $l(AB)$, x_{13} - из переменных A, B, D . Переменной x_{14} присваивается список сомножителей левой части равенства x_{11} . Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x_{15} присваивается общий элементсписков x_{12} и x_{14} . В нашем примере - " $l(AD)$ ". В списке x_{14} выбирается одноэлементный терм, образованный некоторой переменной x_{17} . В нашем примере - переменной a . Переменной x_{18} присваивается список сомножителей правой части равенства x_{11} . Проверяется, что он двухэлементный, и переменной x_{19} присваивается общий элемент списков x_{12} и x_{18} . В нашем примере - выражение $l(AB)$. В списке x_{18} выбирается одноэлементный терм, образованный некоторой переменной x_{21} . В нашем примере - переменной b . Проверяется, что переменные x_{17} и x_{21} различны, причем каждая из них имеет единственное вхождение в терме x_{11} .

Переменной x_{22} присваивается список всех антецедентов, параметры которых включаются в список x_{13} . Переменной x_{23} присваивается объединение списка x_{22} со всевозможными термами "актив(T)" для выражений T списка x_{12} . Решается задача на исследование x_{24} с посылками x_{23} и целями "имп", "известно", "неизвестные X ", где X - все параметры посылок. В нашем примере посылки суть утверждения " A - точка", " B - точка", " D - точка", " $\neg(A = D)$ ", " $B \in \text{прямая}(AD)$ ", "актив($l(AD)$)", "актив($l(AB)$)". Цель "имп" указывает на вывод представляющих интерес дополнительных антецедентов теоремы. Такие антецеденты сохраняются в комментарии (имп $A_1 A_2$) к посылкам задачи на исследование, где A_1 - дополнительный антецедент, A_2 - следствие из него.

По окончании решения задачи x_{24} из комментариев к ее посылкам извлекается элемент x_{26} вида (имп $A_1 A_2$). В нашем примере A_1 - утверждение " $D \in \text{отрезок}(AB)$ ", A_2 - утверждение $l(AB) = l(AD) + l(DB)$. Проверяется, что параметры утверждений A_1, A_2 включаются в список x_{13} . Переменной x_{27} присваивается A_1 , переменной x_{28} - результат обработки A_2 оператором "станд". Переменной x_{29} присваивается список невырожденных числовых атомов утверждения x_{28} . Проверяется, что он трехэлементный и включает список x_{11} . В списке x_{29} выбирается выражение x_{30} , не входящее в список x_{12} . В нашем примере - $l(BD)$. Выбирается переменная x_{31} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - c . Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{32} присваивается выражение x_{15} , во втором - x_{19} . В нашем примере имеет место второй случай. Переменной x_{33} присваивается результат замены в утверждении x_{28} всех вхождений подтерма x_{32} на переменную x_{31} . В нашем примере имеем " $l(AD) + l(BD) = c$ ". Переменной x_{34} присваивается пара, образованная утверждениями x_{33} и "число(x_{31})". Переменной x_{35} присваивается результат добавления к списку x_{22} утверждения x_{27} .

Решается задача на описание x_{36} с посылками x_{35} и условиями x_{34} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "неизвестные x_{31} ", "упро-

стить". В нашем примере посылки суть "A – точка", "B – точка", "D – точка", " $\neg(A = D)$ ", "B ∈ прямая(AD)", "D ∈ отрезок(AB)", условия - " $l(AD) + (BD) = c$ ", "c – число". Неизвестная - c. Ответ присваивается переменной x37. В нашем примере он имеет вид " $c = l(AD) + l(BD)$ ". Проверяется, что ответ - равенство с переменной x31 в левой части. Переменной x38 присваивается правая часть. Проверяется, что любой отличный от x32 числовой атом списка x29 имеет вхождение в терм x38, расположенное только внутри подтермов с заголовками "плюс", "умножение", "минус". Переменной x39 присваивается результат замены в равенстве x11 всех вхождений атома x32 на выражение x38. В нашем примере x39 имеет вид $al(AD) = bl(AD) + l(BD)$. Переменной x40 присваивается разность между левой и правой частями равенства x39, переменной x14 - результат обработки этой разности оператором "стандплюс". Затем создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x8 и утверждение x27, а консеквентом - равенство выражения x41 нулю. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.107 Характеристика "смуравн"

Характеристикой "смуравн(N)" сопровождаются тождества, преобразующие обычное описание класса в параметрическое. N - направление замены.

Обобщение теоремы

1. Исключение операции типа "отрицание", если она встречается над всеми вхождениями заданной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdef}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (a + x, b + y, c + z))) = \text{set}_{xyz}(\exists_g(x = dg - a \ \& \ y = eg - b \ \& \ z = fg - c \ \& \ g - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdef}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (a + x, b + y, z - c))) = \text{set}_{xyz}(\exists_g(x = dg - a \ \& \ y = eg - b \ \& \ z = c + fg \ \& \ g - \text{число})))$$

Характеристика - "смуравн(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемая часть равенства в консеквенте. В ней выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма с единственным корневым операндом, которым является некоторая переменная x12. В нашем примере - вхождение выражения "-c". Проверяется, что переменная x12 входит в список параметров терма x10. Переменной x13 присваивается заголовок подтерма x11. В нашем примере - символ "минус". Справочник "отрицание" усматривает, что двукратное применение операции x13 не изменяет исходного

значения. Проверяется также, что каждое вхождение переменной x_{12} в терм x_{10} является операндом операции x_{13} .

Переменной x_{14} присваивается список antecedентов теоремы, переменной x_{15} - консеквент. Переменной x_{16} присваивается результат подстановки в терм x_{15} выражения " $x_{13}(x_{12})$ " вместо переменной x_{13} , переменной x_{17} - список результатов такой же подстановки в утверждения x_{14} . Создается импликация с antecedентами x_{17} и консеквентом x_{16} . Она последовательно обрабатывается операторами "полныепосылки" и "нормтеорема", после чего регистрируется в списке вывода.

3.108 Характеристика "сокращ"

Характеристикой "сокращ(N)" сопровождаются тождества, упрощающие выражение под корневой сложной операцией и не вводящие новых операций большей либо равной сложности. N - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Попытка унификации двух самых сложных подвыражений заменяющего терма.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow \sin(2b) = 2 \sin b \cos b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть, переменной x_{11} - список имеющих максимальную сложность ее подтермов. Проверяется, что список x_{11} одноэлементный. В нашем примере он состоит из выражения " $\sin(a + b)$ ". Переменной x_{12} присваивается заменяющая часть, переменной x_{13} - список ее подвыражений, имеющих максимальную сложность. Проверяется, что список x_{13} имеет не менее двух элементов. В нашем примере - " $\sin a, \cos a, \sin b, \cos b$ ". В списке x_{13} выбираются два различных выражений x_{14}, x_{15} с одинаковыми заголовками, причем проверяется, что терм x_{14} лексикографически предшествует терму x_{15} . В нашем примере $x_{14} - \sin a, x_{15} - \sin b$. Переменной x_{16} присваивается список параметров термов x_{14} и x_{15} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{16} , унифицирующая термы x_{14} и x_{15} . Переменной x_{18} присваивается список результатов применения подстановки S к antecedентам теоремы, переменной x_{19} - результат применения S к консеквенту. Создается импликация с antecedентами x_{18} и консеквентом x_{19} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Использование посылки, определяющей после перегруппировки равенство сокращаемых выражений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdf}(\neg(c = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ f - a = 0 \rightarrow db(f)/cb(a) = d/c)$$

из теоремы

$$\forall_{cdf}(\neg(c = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow df/(cf) = d/c)$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. Проверяется наличие у теоремы характеристики "нормализация(N)", где N - то же направление, что у характеристики "сокращ". Проверяется, что параметры выражения x11 включаются в параметры выражения x10. В списке параметров выражения x10 выбирается переменная x13, не являющаяся параметром выражения x11. В нашем примере - переменная f . Переменной x14 присваивается список ее вхождений в выражение x10. Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x15 присваивается список antecedентов теоремы. В нем выбирается утверждение x16 вида " $P(x13)$ ". В нашем примере - " $f - \text{число}$ ". Переменной x18 присваивается тройка (A, B, C) , определяемая справочником "перегруппировка" по символу P . В нашем примере - по символу "число". Эта тройка указывает, что возможна перегруппировка A - членов операндов равенства объектов типа P из одной части в другую с изменением знака B , причем C - единица операции A . В нашем примере x18 имеет вид (плюс минус 0).

Выбираются переменные X, Y , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b . Переменной x20 присваивается равенство " $A(x13, B(X)) = C$ ". В нашем примере - " $f - a = 0$ ". Переменной x21 присваивается список результатов замены во всех утверждениях набора x15, содержащих переменную x13 и имеющих длину 2, переменной x13 на переменную X . Переменной x23 присваивается результат замены в терме x10 первого вхождения списка x14 на выражение "значение($Y, x13$)", а второго - на "значение(Y, X)". Создается импликация, antecedенты которой суть все утверждения списка x15, не содержащие x13 либо имеющие длину больше двух, утверждения списка x21 и утверждение x20. Консеквентом является равенство выражений x23 и x11. Эта импликация регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "сравнтермов(Y)".

3. Попытка обработки заменяющего выражения нормализатором преобразования к заданным заголовкам.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \cos(2a) = (\cos a - \sin a)(\sin a + \cos a))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \cos(2a) = (\cos a)^2 - (\sin a)^2)$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. Переменной x12 присваивается заголовок выражения x11. Справочник

"заголовки" определяет список S названий таких нормализаторов приведения к заданным заголовкам, которые обычно применяются к выражениям с заголовком $x12$. В нашем примере $x12$ - символ "плюс", и S состоит из единственного названия "видумножение". В списке S выбирается элемент $x15$. Переменной $x16$ присваивается список антецедентов, и нормализатор $x15$ определяет результат $x17$ преобразования выражения $x11$ относительно посылок $x16$. В нашем примере - " $(\cos a - \sin a)(\sin a + \cos a)$ ". Проверяется, что $x17$ имеет вид успешного результата применения оператора $x15$. В нашем примере - что это выражение имеет один из заголовков "умножение", "степень", "дробь", с точностью до отбрасывания корневого символа "минус". Создается импликация с антецедентами $x16$ и консеквентом "равно($x10$ $x17$)". Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "нормзаголовок($x15$ второйтерм)".

4. Подстановка единицы в заменяющий терм для уменьшения его оценки по сравнению с заменяемым.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a/1 = a)$$

из теоремы

$$\forall_{abe}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \cdot (a/b) = ae/b)$$

Характеристика - "сокращ(первыйтерм)". Здесь роль наиболее сложной операции играет деление, и в левой части ее операнды проще.

Переменной $x10$ присваивается заменяемая часть, переменной $x11$ - заменяющая. В терме $x11$ рассматривается вхождение $x12$ неоднобуквенного подтерма с двумя корневыми операндами. В нашем примере - вхождение выражения " a/b ". Переменной $x13$ присваивается вхождение одного из этих корневых операндов, переменной $x15$ - символ по этому вхождению. Проверяется, что $x15$ - переменная, имеющая единственное вхождение в $x11$. В нашем примере $x15$ - переменная b . Переменной $x16$ присваивается заголовок подтерма $x12$. В нашем примере - "дробь". Справочник "единица" определяет, что операция $x16$ имеет единицу E для вхождения $x13$. Переменной $x18$ присваивается список антецедентов теоремы, переменной $x19$ - список результатов подстановки в эти антецеденты единицы E вместо переменной $x15$. Переменной $x20$ присваивается результат обработки набора $x19$ оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма $x10$. Переменной $x21$ присваивается результат подстановки единицы E вместо переменной $x15$ в выражение $x11$, переменной $x22$ - результат обработки выражения $x21$ относительно посылок $x20$ нормализаторами общей стандартизации. В нашем примере $x22$ - выражение ae . Переменной $x23$ присваивается результат подстановки единицы E вместо переменной $x15$ в выражение $x10$. В нашем примере - " $ae/1$ ". Проверяется, что оценка сложности выражения $x22$ меньше оценки сложности выражения $x23$. Затем создается импликация с антецедентами $x20$ и консеквентом "равно($x23$ $x22$)". Она обрабатывается оператором "нормтеорема". В нашем примере этот оператор устраняет сдвоенные переменные. Результат регистрируется в списке вывода.

5. Попытка рассмотреть мощности в равенстве для двух множеств и исключить описатель "класс" в заменяющем терме.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{слово} \rightarrow \text{card}(\text{слой}(\text{префикс}(b, a), b)) = 1 + \text{card}(\text{слой}(a, b)))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{слово} \rightarrow \text{слой}(\text{префикс}(b, a), b) = \{1\} \cup \text{set}_i(i - 1 \in \text{слой}(a, b) \ \& \ i - \text{число}))$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части, переменной x11 - заголовок этой части. Проверяется, что выражения с таким заголовком имеют своими значениями множества. Переменной x13 присваивается заменяющее выражение. Проверяется, что оно содержит символ "класс". Переменной x14 присваивается список antecedентов. При помощи вспомогательной задачи на преобразование определяется результат x15 упрощения выражения "мощность(x13)" относительно посылок x14. Проверяется, что этот результат не содержит символа "класс". Переменной x17 присваивается равенство мощности заменяемой части x10 выражению x15. Затем создается импликация с antecedентами x14 и консеквентом x17. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Обобщение теоремы

1. Обобщение тождества, упрощающего выражение под корневой сложной операцией, путем ввода неповторного дополнительного параметра операнда.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < cd \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \log_a(bd/c) = -\log_a(c/d) + \log_a b)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \rightarrow \log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bde}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow b/(d/e) = be/d)$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Программа приема практически дословно воспроизводит программу приема с тем же названием, рассматривавшегося ранее для другой характеристики. Для удобства чтения повторим ее.

Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. В заменяемой части рассматривается вхождение x12 двуместной операции. В нашем случае - вхождение дроби b/c. Переменной x13 присваивается символ по вхождению x12. Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "нормализация(N)". В нашем примере N -

"второйтерм". Переменной x_{19} присваивается заменяемое выражение дополнительной теоремы. Проверяется, что оно имеет заголовок x_{13} . Рассматривается корневой операнд x_{20} выражения x_{19} , представляющий собой двуместную операцию от переменных. В нашем случае - " d/e ". Проверяется, что эта операция имеет единицу по некоторому своему операнду. Переменной x_{22} присваивается первый операнд операции x_{20} , переменной x_{23} - второй. Проверяется, что эти переменные различны. В нашем случае $x_{22} - d$, $x_{23} - e$. Находится корневой операнд выражения x_{19} , представляющий собой переменную x_{25} . В нашем случае - переменную a . Переменной x_{26} присваивается вхождение операнда операции x_{12} , расположенного так же, как x_{20} в x_{19} . В коммутативном случае берется любой операнд. Для нашего примера x_{26} - вхождение переменной c . Проверяется, что по вхождению x_{26} расположена переменная, и эта переменная присваивается переменной x_{27} . Проверяется, что она имеет единственное вхождение в x_{10} . Переменной x_{28} присваивается другой операнд операции x_{12} . В нашем примере - b . Переменной x_{30} присваивается та из переменных x_{22} , x_{23} , по которой операция x_{20} имеет единицу, переменной x_{29} - другая из них. В нашем примере $x_{29} - d$, $x_{30} - e$. Переменной x_{31} присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет заголовок x_{13} . Переменной x_{32} присваивается вхождение корневого операнда выражения x_{31} , расположенного так же, как операнд x_{20} операции x_{19} . В нашем примере x_{32} - вхождение переменной d . Проверяется, что по вхождению x_{32} расположена переменная x_{29} . Переменной x_{33} присваивается вхождение корневого операнда выражения x_{31} , отличное от x_{32} . Проверяется, что этот операнд неоднобуквенный и его заголовком служит коммутативный символ x_{34} . В нашем примере x_{33} имеет вид be . Проверяется, что если терм x_{28} имеет заголовок x_{34} , то у него отсутствует корневой операнд, являющийся неповторной переменной. Выбирается новая переменная x_{35} . В нашем примере - d . Переменной x_{36} присваивается результат соединения операцией x_{34} термов x_{35} , x_{28} . Переменной x_{37} присваивается результат замены вхождения x_{28} в терм x_{10} на терм x_{36} . В нашем случае он имеет вид $\log_a(db/c)$. Находится результат x_{38} подстановки в терм x_{20} переменных x_{27} и x_{35} вместо переменных x_{29} и x_{30} . В нашем случае - c/d . Переменной x_{39} присваивается результат подстановки терма x_{38} вместо переменной x_{27} в выражение x_{11} . В нашем примере - " $\log_a b - \log_a(c/d)$ ". Переменной x_{41} присваивается набор результатов подстановки в antecedentes дополнительной теоремы выражений x_{27} , x_{35} , x_{28} вместо переменных x_{29} , x_{30} , x_{25} . В нашем примере имеем набор утверждений " $\neg(c = 0)$ ", " $\neg(d = 0)$ ", " $b - \text{число}$ ", " $c - \text{число}$ ", " $d - \text{число}$ ". Переменной x_{42} присваивается объединение списка x_{41} с результатами подстановки в antecedentes исходной теоремы терма x_{38} вместо переменной x_{27} . Если x_{28} - не переменная и имеет своим заголовком символ, отличный от x_{34} , то находится результат x_{43} обработки терма x_{36} оператором "норм" относительно посылки x_{42} . Проверяется, что переменная x_{35} в терме x_{43} не является операндом ассоциативно-коммутативной операции, уже имеющей среди своих операндов и другую неповторную переменную. Затем формируется импликация с antecedentes x_{42} и равенством термов x_{39} , x_{37} в консеквенте. Ориентация равенства та же, что в исходной теореме. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема". Проверяется, что новая теорема имеет большую длину связывающей приставки, чем исходная, причем в ней отсутствуют "двоенные" переменные, допускающие замену на одну новую переменную. Выведенная теорема регистрируется в списке вывода с пометкой

"обобщение".

2. Обобщение тождества, упрощающего выражение под корневой сложной операцией, путем ввода неповторного внешнего параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq ac \rightarrow |bc/a| = c|b/a|)$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \rightarrow |bc| = c|b|)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \cdot (a/b) = ae/b)$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Программа приема практически дословно воспроизводит программу приема с тем же названием, рассматривавшегося ранее для другой характеристики. Для удобства чтения повторим ее.

Переменной x10 присваивается заменяемый терм, переменной x11 - заменяющий. В заменяемом терме выбирается вхождение x12 двуместной операции x13. В нашем случае - произведения "bc". Справочник поиска теорем "перестановки" находит по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "нормализация(N)". Переменной x19 присваивается заменяемый (в смысле направления N) терм дополнительной теоремы. В нашем случае - терм "e · (a/b)". Проверяется, что он имеет заголовок x13. Среди корневых операндов терма x19 выбирается такой операнд x20, который представляет собой двуместную операцию от двух различных переменных x22, x23. В нашем случае - a/b. Проверяется, что эта операция имеет единицу по одному из своих операндов. Проверяется также, что другой корневой операнд x24 терма x19 представляет собой переменную x25. Среди операндов операции x12 выбирается тот, номер которого равен номеру операнда x24 (в случае коммутативной операции x13 - любой операнд). Проверяется, что этот операнд x26 - переменная x27, имеющая единственное вхождение в заменяемый терм x10. В нашем случае x27 - переменная c. Переменной x28 присваивается вхождение другого операнда операции x12. В нашем случае - переменной b. Переменной x29 присваивается та из переменных x22, x23, по которой операция x20 не имеет единицы, переменной x30 - та, по которой она имеет единицу. Соответственно, в нашем случае x29 - a, x30 - b. Переменной x31 присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. Проверяется, что его заголовок отличен от символа x13, причем число корневых операндов равно 2. Переменной x32 присваивается тот корневой операнд терма x31, который представляет собой операцию x13 от двух переменных. В нашем случае это ae. Проверяется, что одна из переменных - x29, причем в случае некоммутативного x13 она расположена под тем же номером, что операнд x20 операции x19. Другая переменная должна быть равна x25. Переменной x35 присваивается оставшийся корневой операнд терма x31. Проверяется, что он представляет собой переменную x30. Переменной x36 присваивается заголовок терма x31. В нашем случае - "дробь".

Далее предпринимается проверка избыточности нового параметра. В нашем случае - проверка того, что вхождение x_{12} не является числителем дроби, знаменателем которой служит переменная, не имеющая других вхождений в терм x_{10} .

После проверки избыточности выбирается не входящая в исходную теорему переменная x_{37} (в нашем случае - a). Формируется терм x_{38} , полученный соединением при помощи операции x_{36} подтерма x_{12} и новой переменной x_{37} . Номер операнда x_{37} - тот же, что номер операнда x_{35} в операции x_{31} . Для нашего примера имеем терм bc/a . Переменной x_{39} присваивается результат замены вхождения x_{12} в терм x_{10} на терм x_{38} . Получается терм $|bc/a|$. Определяется результат x_{40} подстановки в подтерм x_{20} переменных x_{27} , x_{37} вместо переменных x_{29} , x_{30} . Получается терм c/a . Переменной x_{41} присваивается результат подстановки в терм x_{11} выражения x_{40} вместо переменной x_{27} . Получается терм $(c/a) \cdot |b|$. Переменной x_{43} присваивается набор результатов подстановки в antecedentes дополнительной теоремы переменных x_{27} , x_{37} и подтерма x_{28} вместо переменных x_{29} , x_{30} , x_{25} . Получаются утверждения " $\neg(a = 0)$ ", " c - число", " a - число", " b - число". Переменной x_{44} присваивается объединение списка x_{43} с результатами подстановки выражения x_{40} вместо переменной x_{27} в antecedentes исходной теоремы.

Далее выражение x_{39} обрабатывается нормализаторами общей стандартизации относительно посылок x_{44} , чтобы снова проверить избыточность нового параметра: он не должен оказаться операндом ассоциативно-коммутативной операции, имеющей другую неповторную переменную своим операндом.

Наконец, формируется импликация с antecedentesми x_{44} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{41} и x_{39} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной в antecedентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bAB}(b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ b \leq 0 \rightarrow (-b) \cdot \text{вектор}(AB) = -(b \cdot \text{вектор}(AB)))$$

из теоремы

$$\forall_{bAB}(\neg(A = B) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ b \leq 0 \rightarrow (-b) \cdot \text{вектор}(AB) = -(b \cdot \text{вектор}(AB)))$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)". В правой части аргументы операции "умножвект" проще, чем в левой.

Прием уже встречался ранее в связи с другими характеристиками. Для удобства чтения повторим его описание. Среди antecedентов теоремы выбирается утверждение x_{10} вида " $\neg(x = t)$ ", где x - переменная, не встречающаяся в выражении t . Проверяется, что данное утверждение не является сопровождающим по о.д.з. для консеквента либо других antecedентов. Создается список x_{17} , полученный из набора antecedентов теоремы заменой утверждения x_{10}

на равенство $x = t$ и добавлением всех утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. отличных от x_{10} антецедентов. Предпринимается попытка доказать, что консеквент теоремы является следствием утверждений x_{17} . После этого создается результирующая теорема, полученная из исходной отбрасыванием антецедента x_{10} и добавлением утверждений, недостающих для сопровождения по о.д.з. остальных антецедентов.

4. Варьирование параметра для устранения операции типа "минус".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ade}(d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \leq 0 \ \& \ a - \text{число} \rightarrow \max(de, ad) = -d\max(-a, -e))$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \leq 0 \rightarrow \max(de, -cd) = -d\max(c, -e))$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть. Среди ее параметров выбирается переменная x_{11} , имеющая в x_{10} единственное вхождение. В нашем примере - переменная c . Переменной x_{12} присваивается вхождение переменной x_{11} в терм x_{10} , переменной x_{13} - вхождение, непосредственным операндом которого служит x_{12} . Переменной x_{14} присваивается символ по вхождению x_{13} . В нашем примере - "умножение". Проверяется, что операция x_{14} двуместная. Переменной x_{15} присваивается вхождение, операндом которого служит x_{13} . Проверяется, что число операндов вхождения x_{15} равно 1, и переменной x_{16} присваивается символ по вхождению x_{15} . В нашем примере - "минус". Справочник "заменазнака" определяет по символу x_{14} пару (A, i) , указывающую, что знак A перед операцией x_{14} может быть передан на ее i -й операнд. В нашем примере - пару ("минус", 1). Очевидно, в случае коммутативной операции величина i несущественна. Проверяется, что вхождение x_{13} обладает нужным для передачи внешнего знака номером. В нашем примере операция коммутативна, и номер игнорируется.

Переменной x_{21} присваивается выражение " $x_{16}(x_{11})$ ". В нашем примере - " $-c$ ". Переменной x_{22} присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_{24} - тип значений выражений с заголовком x_{16} . В нашем примере - "число". Выбирается переменная x_{25} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения x_{22} , а условиями - утверждения "равно($x_{25} \ x_{21}$)" и " $x_{24}(x_{25})$ ". Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{11} ". В нашем примере посылки суть " $c - \text{число}$ ", " $d - \text{число}$ ", " $e - \text{число}$ ", " $d \leq 0$ ", условия - " $a = -c$ " и " $a - \text{число}$ ". Неизвестная - c .

Ответ присваивается переменной x_{28} . В нашем примере он имеет вид " $c = -a \ \& \ a - \text{число}$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x_{29} присваивается список его конъюнктивных членов. В этом списке находится равенство x_{30} переменной x_{11} некоторому выражению x_{31} . В нашем примере x_{31} - выражение $-a$. Переменной x_{32} присваивается однобуквенное выражение, образованное переменной x_{25} . В нашем примере - " a ". Переменной

x34 присваивается результат подстановки в заменяющую часть теоремы выражения x31 вместо переменной x11, переменной x35 - результат подстановки в подтерм x13 выражения x32 вместо переменной x11. Переменной x36 присваивается результат замены вхождения x15 в терм x10 на терм x35. В нашем примере x34 имеет вид " $-d\max(-a, -e)$ ", x35 - вид " ad ", x36 - вид " $\max(de, ad)$ ".

Переменной x37 присваивается объединение списка результатов подстановки в утверждения списка x22 выражения x31 вместо переменной x11 со списком отличных от x30 утверждений набора x29. Выражение x34 упрощается относительно посылок x37 вспомогательной задачей на преобразование. Результат переприсваивается переменной x34. Утверждения x37 обрабатываются оператором "нормантецеденты" относительно параметров термов x34 и x36. Затем создается импликация с антецедентами x37, консеквентом которой служит равенство выражений x34 и x36. Сохраняется ориентация исходной теоремы. Эта импликация регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. Исходная теорема помечается символом "исключение".

Использование дополнительного тождества с условным выражением для варьирования теоремы

1. Варьирование тождества, упрощающего выражение под корневой сложной операцией, с помощью тождества свертки условного выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{xy}(\neg(y = 0) \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \rightarrow |xsg(y)| = |x|)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |-a| = |a|)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ \neg(y = 0) \rightarrow (x \text{ при } 0 < y, \text{ иначе } -x) = xsg(y))$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Проверяется, что теорема имеет характеристику "нормализация" с тем же направлением замены, что у характеристики "сокращ". Переменной x11 присваивается заменяемое выражение, переменной x12 - список его подтермов, имеющих максимальную сложность. Проверяется, что список x12 одноэлементный, и переменной x13 присваивается его элемент. Проверяется, что этот элемент - само заменяемое выражение.

Переменной x14 присваивается вхождение неоднобуквенного корневого операнда выражения x11, переменной x15 - заголовок этого операнда. В нашем примере - символ "минус". В нашем примере x14 - вхождение выражения " $-a$ ". Справочник поиска теорем "варианты" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в

исходную теорему. В нашем примере x18 совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x19 присваивается корневая связывающая приставка исходной теоремы, переменной x20 - корневая связывающая приставка теоремы x18. Переменной x21 присваивается объединение списков x19 и x20.

Переменной x23 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте теоремы x18, которая имеет заголовок "вариант", переменной x24 - вхождение другой части равенства. Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x25 присваивается вхождение второго операнда условного выражения x23, а переменной x26 - символ 1; во втором - переменной x25 присваивается вхождение последнего операнда, а переменной x26 - символ 2. В нашем примере рассматривается второй случай. Проверяется, что по вхождению x25 расположен символ x15. Переменной x27 присваивается подтерм x25. В нашем примере - " $-x$ ".

Определяется подстановка S вместо переменных x21, унифицирующая подтерм x14 с термом x27. Переменной x29 присваивается результат применения подстановки S к подтерму x24. В нашем примере он имеет вид " $xsg(y)$ ". Переменной x30 присваивается результат одновременной замены подтерма x14 терма x13 на терм x29 и применения подстановки S к остальной части терма x13. В нашем примере x30 имеет вид " $|xsg(y)|$ ". Переменной x31 присваивается результат применения подстановки S к заменяющей части исходной теоремы, переменной x32 - результат применения этой подстановки к той из альтернатив условного выражения x23, номер которой отличен от x26. Переменной x33 присваивается результат одновременной замены подтерма x14 терма x13 на терм x32 и применения подстановки S к остальной части терма x13. В нашем примере x33 имеет вид " $|x|$ ". Переменной x34 присваивается результат применения подстановки S к первому операнду условного выражения x23. В нашем примере x34 имеет вид " $0 < y$ ". Переменной x35 присваивается выражение "вариант(x34 x31 x33)" в случае $x26 = 1$ и выражение "вариант(x34 x33 x31)" в противном случае. В нашем примере x35 имеет вид " $|x|$ при $0 < y$, иначе $|x|$ ". Переменной x36 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и теоремы x18. Выражение x35 упрощается относительно посылок x36, и проверяется, что результат x38 не содержит символа "вариант". В нашем примере x38 имеет вид " $|x|$ ". Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x36, а также утверждения, необходимые для сопровождения терма x38 по о.д.з. Консеквентом является равенство выражений x30 и x38. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Индуктивное обобщение тждества

1. Ввод целочисленного параметра для обобщения тождества, в котором прибавление к аргументу константного терма равносильно навешиванию внешней односторонней операции типа "отрицание".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{число} \ \& \ a - \text{целое} \rightarrow \sin(b + a\pi) = (-1)^a \sin b)$$

из теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow \sin(b + \pi) = -\sin b)$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. В заменяемом рассматривается вхождение x12 суммы двух слагаемых. Переменной x13 присваивается вхождение того слагаемого, которое представляет собой некоторую переменную x15, имеющую единственное вхождение в x10. Переменной x16 присваивается другое слагаемое. Оно не имеет переменных. В нашем примере x15 - переменная b , x16 - выражение π . Переменной x17 присваивается результат замены вхождения x12 в терм x10 на переменную x15. В нашем примере получаем " $\sin b$ ". Переменной x18 присваивается заголовок выражения x11. Справочник "отрицание" усматривает, что двукратное применение операции x18 не изменяет исходного значения. В нашем примере x18 - символ "минус". Переменной x19 присваивается корневой операнд выражения x11. Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" выражений x17 и x19 равны. Выбирается переменная x20, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x21 присваивается список antecedентов исходной теоремы. Переменной x22 присваивается результат замены вхождения x14 в терм x10 на произведение выражений x20 и x16. Переменной x23 присваивается выражение "вариант(четное(x20) x19 x11)". Создается импликация, antecedентами которой служат утверждения списка x21 и утверждение "целое(x20)". Консеквентом является равенство выражений x22 и x23. Эта теорема обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Попытка получения тождества, выполняющего расшифровку с сокращением.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow -\sin b \cos c + \sin(b + c) = \sin c \cos b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a - a = 0)$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая. Проверяется, что выражение x10 неповторно. Переменной x12 присваивается заголовок выражения x11. В нашем примере - "плюс". Проверяется, что символ x12 ассоциативный и коммутативный. Справочник поиска теорем "констнорм" находит по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается вхождение заменяемой части равенства в

консеквенте дополнительной теоремы. Оператор "тождвывод" определяет результат x19 преобразования вхождения x18 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Оператору передается опция "модификатор", разрешающая вводить перед унификацией в обеих частях равенства дополнительной теоремы вспомогательное слагаемое - некоторую новую переменную. В нашем примере x19 имеет вид:

$$\forall_{bc}(\sin b \cos c - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \sin(b+c) - \sin b \cos c = 0 + \cos b \sin c)$$

Переменной x20 присваивается результат обработки теоремы x19 оператором "нормтеорема". Проверяется, что этот результат - кванторное тождество с неконстантными частями. Затем теорема x20 регистрируется в списке вывода.

2. Попытка получения импликации, выводящей следствие из двух утверждений, в котором применяется тождество свертки после группировки неизвестных подвыражений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefghijp}(a = ip \ \& \ d = jp \ \& \ b + a \sin g \cos h = c \ \& \ e + d \sin h \cos g = f \rightarrow bj + ei + ijp \sin(g+h) = cj + fi)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcdefpij}(a = pi \ \& \ d = pj \ \& \ ax + b = c \ \& \ dy + e = f \rightarrow pij(x+y) + bj + ei = cj + fi)$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)". Заметим, что выводимая теорема позволяет создать прием, группирующий уравнения с неизвестными g, h для получения уравнения с неизвестным синусом суммы.

Проверяется, что теорема не имеет характеристики с заголовком "нормализация". Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. Проверяется, что x10 неповторно. Переменной x12 присваивается заголовок выражения x11. В нашем примере - символ "плюс". Проверяется, что символ x12 ассоциативен и коммутативен. Переменной x13 присваивается набор корневых операндов выражения x11. Проверяется, что он двухэлементный, причем каждый элемент имеет не менее двух параметров. Справочник поиска теорем "группоид" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x16 присваивается результат замены переменных исходной теоремы на переменные, не входящие в дополнительную теорему. В нашем примере x16 имеет вид:

$$\forall_{gh}(g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \rightarrow \sin(g+h) = \sin g \cos h + \cos g \sin h)$$

Переменной x18 присваивается заменяющий терм теоремы x16, переменной x19 - список его корневых операндов. Переменной x20 присваивается характеристика "группоид(M, N, X, Y)" дополнительной теоремы. Здесь M, N - номера antecedентов, идентифицируемых с утверждениями, содержащими неизвестные X, Y . В нашем примере эта характеристика имеет вид "группоид(3,4,x,y)".

Переменной x23 присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Переменной x24 присваивается список результатов подстановки в утверждения x23 выражений x19 вместо переменных X, Y , причем эти результаты дополнительно обрабатываются нормализаторами общей стандартизации. Переменной x25 присваивается консеквент дополнительной теоремы. Переменной x26 присваивается вхождение в него переменной X . Переменной x27 присваивается вхождение, непосредственным операндом которого является x26. В нашем примере x27 - вхождение выражения " $x + y$ ". Проверяется, что по вхождению x27 расположен символ x12, причем число операндов вхождения x27 равно 2, а отличный от x26 операнд - переменная Y .

Переменной x29 присваивается результат замены вхождения x27 в терм x25 на заменяемое выражение теоремы x16. Создается импликация x30 с антецедентами x24, консеквентом которой служит результат обработки нормализаторами общей стандартизации утверждения x29. Она обрабатывается оператором "Нормкоэфф", которому в качестве второго аргумента передается пара (M, N) . Затем теорема x30 регистрируется в списке вывода и снабжается единственной характеристикой "Группоид(M, N)".

3. Обозначение самого сложного подвыражения заменяющего термина вспомогательной переменной, определяемой через равенство в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{число} \ \& \ \sin b = a \rightarrow \cos(2b) = -2a^2 + 1)$$

из теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow \cos(2b) = -2(\sin b)^2 + 1)$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Проверяется, что теорема не имеет характеристики с заголовком "нормализация". Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. Переменной x12 присваивается список подтермов термина x11, имеющих максимальную сложность. Проверяется, что этот список одноэлементный. Проверяется, что оценка сложности термина x11 больше 4 и равна оценке сложности термина x10. Переменной x14 присваивается элемент списка x12. В нашем примере - " $\sin b$ ". Если терм x10 имеет единственный подтерм T максимальной сложности, то проверяется, что число параметров термина x14 не меньше числа параметров термина T . Проверяется, что попытка упрощения термина x10 относительно антецедентов исходной теоремы не изменяет этого термина. Затем выбирается переменная x15, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x16 присваивается результат добавления к списку антецедентов равенства выражения x14 переменной x15. Переменной x18 присваивается результат замены всех вхождений термина x14 в выражение x11 на переменную x15. Создается импликация с антецедентами x16, консеквентом которой служит равенство выражений x10 и x18. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "опренизв(n)", где n - номер последнего антецедента (равенства x14 и x15).

4. Усмотрение теоремы приема, позволяющего заменить неизвестный подтерм с одноместной корневой операцией на известный с помощью равенства из посылок.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c = |a| \rightarrow |ab| \ c|b|)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow |a| \cdot |b| = |ab|)$$

Характеристика - "сокращ(первыйтерм)".

Проверяется, что теорема не имеет характеристики с заголовком "нормализация" для того же направления замены, что и характеристика "сокращ". Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. Проверяется, что выражения x10 и x11 неповторны. Переменной x12 присваивается список имеющих максимальную сложность подтермов терма x11. В нем выбирается выражение x13 длины 2. В нашем примере - " $|a|$ ". Переменной x14 присваивается переменная терма x13. В нашем примере - a . Выбирается переменная x15, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - c . Переменной x16 присваивается вхождение терма x13 в терм x11, переменной x17 - результат замены этого вхождения на переменную x15. Переменной x18 присваивается результат добавления к антецедентам исходной теоремы равенства переменной x15 выражению x13. Создается импликация с антецедентами x18, консеквентом которой служит равенство выражения x10 выражению x17. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "исключнеизв(n)", где n - номер ее последнего антецедента.

5. Получение тождества, использующего посылку для упрощения сложного неизвестного подвыражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ \sin a = b \rightarrow \sin(2a) = 2b \cos a)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \sin(2a) = 2 \sin a \cos a)$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. Проверяется, что оценки сложности этих выражений равны. Переменной x12 присваивается список имеющих максимальную сложность подтермов терма x11. Проверяется, что он имеет не менее 2 элементов. В этом списке выбирается выражение x13. В нашем примере - $\sin a$. Проверяется, что он содержит все параметры терма x10. Выбирается переменная x14, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Переменной x16 присваивается результат замены всех вхождений терма x13 в терм x11 на переменную x14. Создается импликация, антецеденты которой суть антецеденты исходной

теоремы и равенство выражения x13 переменной x14, а консеквент - равенство выражений x10 и x16. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "исключнеизв(n)", где n - номер последнего антецедента этой теоремы.

Использование дополнительного тождества для сильного упрощения заменяющего терма

1. Попытка обращения в константу одного из самых сложных подвыражений заменяющего терма.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bd}(0 < b \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow (1/b)^d = 1/b^d)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 < b \rightarrow (a/b)^c = a^c/b^c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow 1^a = 1)$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. Переменной x12 присваивается список подтермов выражения x10, имеющих максимальную сложность. Проверяется, что этот список одноэлементный, и переменной x13 присваивается его элемент. В нашем примере - "(a/b)^c". Переменной x14 присваивается заголовок выражения x13. В нашем примере - символ "степень". В заменяющей части теоремы находится вхождение x16 символа x14. В нашем примере - вхождение подтерма "a^c". Справочники поиска теорем "констнабор" и "констнорм" определяют по x14 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что ее заменяющая часть константная. Оператор "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождения x16 при помощи дополнительной теоремы. Он обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка варьирования сложных подвыражений заменяющей части для их склейки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow \cos(2b) = -2(\sin b)^2 + 1)$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \cos(2a) = (\cos a)^2 - (\sin a)^2)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow (\cos a)^2 = 1 - (\sin a)^2)$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяющее выражение, переменной x11 - список подтермов выражения x10, имеющих максимальную сложность. Проверяется, что этот список имеет не менее двух элементов, и переменной x12 присваивается некоторый его элемент. В нашем примере - $\cos a$. Переменной x13 присваивается заголовок выражения x12. В нашем примере - символ "косинус". Справочник поиска теорем "варпарам" определяет по x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, внутри которой имеет вхождение символа x13. В нашем примере - вхождение левой части. Переменной x19 присваивается символ по вхождению x17. В нашем примере - символ "степень". Внутри заменяющей части консеквента исходной теоремы рассматривается вхождение x20 символа x19. В нашем примере - вхождение подтерма $(\cos a)^2$. Оператор "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождений x20 при помощи дополнительной теоремы. Переменной x22 присваивается результат обработки теоремы x21 оператором "Нормтеорема", которому передается опция "варпарам". Проверяется, что x22 - кванторное тождество, имеющее в своей заменяющей части единственный подтерм максимальной сложности. Это тождество регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительного тождества для варьирования заменяемого терма

1. Попытка проварьировать заменяемую часть тождества с усиленным редуцированием.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(\neg(b = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow \sin(|b|^c) = \sin((-b)^c)\text{sg}((-b)^c))$$

из теоремы

$$\forall_{ac}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow \sin(|a|^c) = \sin(a^c)\text{sg}(a^c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |-a| = |a|)$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)". Результирующая теорема имеет характеристику "нормализация(первыйтерм)".

Проверяется, что исходная теорема не имеет характеристики с заголовком "нормализация" и что число переменных ее связывающей приставки не более 3. Внутри заменяемой части рассматривается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. Переменной x12 присваивается его заголовок. В нашем примере x11 - вхождение подтерма $|a|$, x12 - символ "модуль". Справочники поиска теорем "Сокращение", "перестановки" находят указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что среди ее антецедентов нет равенства, а число ее переменных не больше 3. Проверяется, что оценка сложности исходной теоремы не меньше оценки сложности дополнительной. Переменной x16 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая

имеет заголовок x12. В нашем примере - вхождение левой части. Проверяется, что дополнительная теорема имеет характеристику с заголовком "нормализация", и согласно этой характеристике x16 - вхождение заменяемой части. Оператор "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x11 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Переменной x19 присваивается результат обработки теоремы x18 операторами "Спускоперандов" и "демодемодификация". В нашем примере x19 совпадает с x18. Переменной x20 присваивается результат обработки теоремы x19 оператором "Полныепосылки", а затем - оператором "Нормтеорема". Последний оператор использует для упрощений все имеющиеся в списке вывода теоремы. Проверяется, что длина связывающей приставки теоремы x20 не более чем на единицу превосходит длину связывающей приставки исходной теоремы. Если эта длина равна 4, то дополнительно проверяется, что обе части равенства в консеквенте теоремы x20 бесповторны. Затем теорема x20 регистрируется в списке вывода.

2. Попытка проварьировать заменяемую часть тождества с обычным редуцированием.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ \neg(-1 + |b| = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \log_{|b|} |ab| = 1 + \log_{|b|} |a|)$$

из теоремы

$$\forall_{cd}(\neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \log_d(cd) = 1 + \log_d c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow |a||b| = |ab|)$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Начало программы приемы совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Проверяется, что исходная теорема не имеет характеристики с заголовком "нормализация" и что число переменных ее связывающей приставки не более 3. Внутри заменяемой части рассматривается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. Переменной x12 присваивается его заголовок. В нашем примере x11 - вхождение подтерма "cd", x12 - символ "умножение". Справочники поиска теорем "Сокращение", "перестановки" находят указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что среди ее антецедентов нет равенства, а число ее переменных не больше 3. Проверяется, что оценка сложности исходной теоремы не меньше оценки сложности дополнительной. Переменной x16 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x12. В нашем примере - вхождение левой части. Проверяется, что дополнительная теорема имеет характеристику с заголовком "нормализация", и согласно этой характеристике x16 - вхождение заменяемой части. Оператор "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x11 в

исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Переменной x19 присваивается результат обработки теоремы x18 операторами "Спускоперандов" и "демодификация". В нашем примере x19 совпадает с x18.

Дальше идет единственное отличие. Переменной x20 присваивается результат обработки теоремы x19 оператором "Полныепосылки", а затем - не оператором "Нормтеорема", а оператором "нормтеорема". Проверяется, что длина связывающей приставки теоремы x20 не более чем на единицу превосходит длину связывающей приставки исходной теоремы. Если эта длина равна 4, то дополнительно проверяется, что обе части равенства в консеквенте теоремы x20 неповторны. Затем теорема x20 регистрируется в списке вывода.

3. Попытка использовать определение, выражающее новое понятие через понятие, встречающееся в заменяемой части тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_x (\neg(\cos x = 0) \ \& \ x - \text{число} \ \& \ 0 \leq 2x + \pi \ \& \ 0 \leq -2x + \pi \rightarrow \\ \text{производная}(\lambda_c(\arcsin c, c \in [-1, 1]), \sin x) = 1/\cos x)$$

из теоремы

$$\forall_{abfpqx} (\neg(\text{производная}(f, x) = 0) \ \& \ \text{Dom}(f) = [a, b] \ \& \ a < b \ \& \ x \in [a, b] \ \& \\ f - \text{функция} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{непрерывно}(f, [a, b]) \ \& \ p - \text{boolean} \ \& \\ q - \text{boolean} \ \& \ \text{возрастает}(f, [a, b]) \ \& \ \text{дифференцируема}(f, x) \rightarrow \\ \text{производная}(\text{обрфункция}(f), f(x)) = 1/\text{производная}(f, x))$$

и дополнительной теоремы

$$\text{обрфункция}(\lambda_x(\sin x, x \in [-\pi/2, \pi/2])) = \lambda_x(\arcsin x, x \in [-1, 1])$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемая часть равенства, переменной x11 - список ее подтермов, имеющих максимальную оценку сложности. Проверяется, что этот список одноэлементный. Переменной x12 присваивается заменяющая часть равенства. Переменной x13 присваивается элемент списка x11. В нашем примере этот элемент - выражение "производная(обрфункция(f), f(x))". Внутри выражения x13 рассматривается некорневое вхождение x14 неоднобуквенного термина. В нашем примере - термина "обрфункция(f)". Проверяется, что это вхождение не имеет связанных внутри x13 переменных. Переменной x15 присваивается подтерм x14. Проверяется, что он элементарный. Справочник поиска теорем "опратом" определяет по заголовку термина x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x18 имеет вид:

$$\text{обрфункция}(\lambda_c(\sin c, c \in [-\pi/2, \pi/2])) = \lambda_c(\arcsin c, c \in [-1, 1])$$

Переменной x19 присваивается вхождение равенства в консеквенте теоремы x18. Переменной x20 присваивается вхождение той части равенства x19, которая имеет тот же заголовок, что и терм x15. Переменной x22 присваивается сама эта часть. В нашем примере она имеет вид "обрфункция($\lambda_c(\sin c, c \in$

$[-\pi/2, \pi/2])$ ". Переменной x21 присваивается вхождение другой части равенства. Переменной x23 присваивается список параметров термов x22 и x15. Определяется подстановка S вместо переменных x23, унифицирующая термы x15 и x22. Переменной x25 присваивается объединение списков антецедентов исходной теоремы и теоремы x18. Переменной x26 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям набора x25. Переменной x28 присваивается результат замены всех вхождений терма x15 в терм x10 на подтерм x21. В нашем примере x28 имеет вид "производная($\lambda_c(\arcsin c, c \in [-1, 1]), f(x)$)". Переменной x29 присваивается результат применения подстановки S к терму x28. Переменной x30 присваивается результат применения этой же подстановки к терму x12. Переменной x31 присваивается равенство выражений x29 и x30. Переменной x32 присваивается результат обработки списка x26 оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x31. Наконец, создается импликация с антецедентами x32 и консеквентом x31. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Вывод частных случаев из тождества для характеристики сложной функции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{af}(\neg(\cos f(a) = 0) \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \in \text{Dom}(f) \ \& \\ f - \text{функция} \ \& \ \text{дифференцируема}(f, a) \rightarrow \\ \text{производная}(\lambda_x(\text{tg } f(x), x \in \text{Dom}(f)), a) = \text{производная}(f, a)/(\cos f(a))^2)$$

из теоремы

$$\forall_{afg}(\text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \\ a \in \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ \text{дифференцируема}(f, a) \ \& \\ \text{дифференцируема}(g, f(a)) \rightarrow \text{производная}(\lambda_x(g(f(x)), x \in \text{Dom}(f)), a) = \\ \text{производная}(f, a)\text{производная}(g, f(a))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \ \& \ \neg(\cos a = 0) \rightarrow d \text{tg } a / da = 1/(\cos a)^2)$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. Переменной x12 присваивается список подтермов выражения x10, имеющих максимальную сложность. Проверяется, что этот список одноэлементный и состоит из выражения x10. Внутри выражения x10 рассматривается вхождение x13 символа "отображение". В нашем примере x13 - вхождение подтерма $\lambda_x(g(f(x)), x \in \text{Dom}(f))$. Переменной x14 присваивается вхождение последнего операнда вхождения x13 (он определяет значение функции). Проверяется, что x14 - вхождение символа "значение", а первым операндом его служит некоторая переменная x15. В нашем примере - переменная g .

Переменной x16 присваивается список антецедентов теоремы. Переменной x17 присваивается список имеющих максимальную сложность подтермов терма x11. В нем выбирается выражение x18, содержащее переменную x15 и не содержащее символа "отображение". В нашем примере x18 имеет вид "производная($g, f(a)$)". Переменной x19 присваивается заголовок выражения x18. В нашем примере -

символ "производная". Просматриваются теоремы раздела, к которому относится символ x19. В качестве дополнительной теоремы, указанной выше, отбирается теорема, имеющая характеристики с заголовками "нормализация", "описатель" и не имеющая характеристики "теоремаприема". Переменной x27 присваивается заменяемая часть дополнительной теоремы. В нашем примере - "d tg a/da". Проверяется, что выражение x27 имеет заголовок x19. Переменной x28 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x28 имеет вид:

$$\forall_b(b - \text{число} \ \& \ \neg(\cos b = 0) \rightarrow d \operatorname{tg} b/db = 1/(\cos b)^2)$$

Переменной x30 присваивается заменяемая часть теоремы x28, переменной x31 - список параметров термов x30 и x18. Определяется подстановка S вместо переменных x31, унифицирующая термы x30 и x18. Переменной x33 присваивается терм, в который данная подстановка переводит переменную x15. В нашем примере - " $\lambda_c(\operatorname{tg} c, c - \text{число})$ ". Проверяется, что этот терм не содержит символа "значение". Переменной x34 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и теоремы x28. Переменной x35 присваивается результат применения подстановки S к выражению x10, переменной x37 - результат замены всех вхождений в терм x11 выражения x18 на заменяющее выражение теоремы x28. В нашем примере x37 имеет вид "производная(f, a) · 1/(cos b)²". Переменной x38 присваивается результат применения подстановки S к выражению x37. Затем создается импликация с антецедентами x34, консеквентом которой служит равенство выражений x35 и x38. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "сокращ" и регистрируется в списке вывода.

5. Использование тождества "смнеизв".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdef}(\neg(e - \text{even}) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{натуральное} \ \& \ f - \text{целое} \rightarrow |c^f d^e| = |dc^{f/e}|^e)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \rightarrow |a^b| = |a|^b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{натуральное} \ \& \ \neg(c - \text{even}) \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow (ba^{d/c})^c = b^c a^d)$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Проверяется, что она имеет единственный корневой операнд, и переменной x11 присваивается вхождение этого операнда. Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. В нашем примере - символ "степень". Справочник поиска теорем "смнеизв" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x17 преобразования вхождения x11 в исходную

теорему при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Склейка двух теорем

1. Склейка двух тождеств, отличающихся альтернативными антецедентами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(\neg(a = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \sin(c|a|) = \sin(ac)\text{sg}(a))$$

из теоремы

$$\forall_{ac}(\neg(a = 0) \ \& \ 0 \leq c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \sin(c|a|) = \sin(ac)\text{sg}(a))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(\neg(a = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ b \leq 0 \rightarrow \sin(b|a|) = \sin(ab)\text{sg}(a))$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Переменной x9 присваивается консеквент теоремы, переменной x10 - список ее антецедентов. В списке вывода находится дополнительная теорема x12, отличная от текущей, у которой набор антецедентов x14, консеквент x15 и связывающая приставка x17 имеют такую же длину, как у текущей теоремы. В нашем случае эта теорема указана выше.

Проверяется, что все переменные связывающей приставки как исходной, так и дополнительной теорем суть параметры консеквентов этих теорем. Определяется подстановка S вместо переменных списка x17, переводящая терм x15 в терм x9. Переменной x21 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям списка x14, переменной x23 - разность списков x21 и x10. Проверяется, что список x23 одноэлементный, и переменной x24 присваивается его элемент. В нашем примере - утверждение " $c \leq 0$ ". Переменной x25 присваивается разность списков x10 и x21. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x26 присваивается этот элемент. В нашем примере - утверждение " $0 \leq c$ ". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что дизъюнкция утверждений x24 и x26 является следствием утверждений пересечения x28 списков x10 и x21. Создается импликация с антецедентами x28 и консеквентом x9. Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. При этом как исходная, так и дополнительная теоремы помечаются символом "исключение".

Замена переменных в теореме

1. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(b - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(a) \rightarrow (-b)a = -(ba))$$

из теоремы

$$\forall_{bAB}(b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \rightarrow \ (-b)\text{вектор}(AB) = -(b\text{вектор}(AB)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$$

Характеристика - "сокращ(второйтерм)".

Программа приема почти дословно совпадает с программой приема такого же типа, ранее рассмотренной в связи с другой характеристикой. Для удобства чтения повторим ее.

Переменной x_8 присваивается набор антецедентов. В консеквенте выбирается вхождение x_{10} атомарного подвыражения x_{11} . В нашем примере - "вектор(AB)". Переменной x_{12} присваивается список параметров этого подвыражения. Проверяется, что каждый элемент списка x_{12} встречается в консеквенте и существенных антецедентах только внутри подтерма, равного x_{11} . Переменной x_{14} присваивается заголовок выражения x_{11} , переменной x_{16} - тип его значения. В нашем случае - "Вектор". Справочник поиска теорем "парамописание" находит по x_{16} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{19} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере получаем:

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{cd}(c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(cd)))$$

Переменной x_{20} присваивается вхождение консеквента импликации x_{19} . Проверяется, что первый операнд этой эквивалентности имеет заголовок x_{16} , а второй - квантор существования x_{21} . Переменной x_{22} присваивается набор конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Проверяется, что первый операнд первого операнда эквивалентности - переменная; она присваивается переменной x_{23} . В нашем случае это " a ". Среди утверждений x_{23} находится равенство x_{24} переменной x_{23} терму x_{25} , имеющему заголовок x_{14} . Переменной x_{26} присваивается список параметров терма x_{25} . В нашем примере x_{25} - "вектор(cd)". Проверяется, что все переменные списка x_{26} принадлежат связывающей приставке квантора существования. Усматривается, что терм x_{11} является результатом применения некоторой подстановки S вместо переменных x_{26} в терм x_{25} . Переменной x_{28} присваивается набор результатов применения этой подстановки ко всем отличным от x_{24} элементам набора x_{22} . В нашем примере - пара утверждений " A - точка", " B - точка". Переменной x_{29} присваивается список всех таких антецедентов исходной теоремы, в которых имеется переменная списка x_{12} , не расположенная внутри подтерма, равного x_{11} . В нашем примере - пара утверждений " A - точка", " B - точка".

Переменной x_{30} присваивается конкатенация списка x_8 с отброшенными утверждениями x_{29} , и списка x_{28} . В нашем примере результат состоит из тех же утверждений, что и список x_8 . Проверяется, что каждое утверждение списка x_{29} усматривается проверочными операторами из списка x_{30} . Определяется результат K замены в консеквенте исходной теоремы всех вхождений подтерма x_{11} на переменную x_{23} , а также результат M такой же замены во всех утверждениях списка x_8 , не вошедших в x_{29} . Затем создается итоговая импликация, антецеденты которой получены добавлением к M левой части эквивалентности x_{20} , а консеквент - K .

Использование тождества для упрощения заменяемой части дополнительного тождества

1. Использование тождества для упрощения заменяемой части сокращающего тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(\neg(b = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ \neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < d \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(c) - \text{even} \ \& \ c - \text{rational} \rightarrow \log_d(b^c)/c = \log_d|b|)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ b - \text{rational} \rightarrow b \log_c|a| = \log_c(a^b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ae}(\neg(e = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow ae/e = a)$$

Характеристика - "сокращ(первыйтерм)".

Проверяется отсутствие антецедента, содержащего подвыражение с более чем одним параметром. Переменной x10 присваивается вхождение заменяющей части теоремы. Проверяется, что это вхождение имеет более одного корневого операнда. Переменной x11 присваивается символ по вхождению x10. В нашем примере - умножение. Справочник поиска теорем "сокращдробь" определяет по x11 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается вхождение заменяемой части дополнительной теоремы. Внутри вхождения x17 выбирается вхождение x18 символа x11. В нашем примере - вхождение выражения ae . Оператор "тождвывод" определяет результат x19 преобразования вхождения x18 при помощи исходной теоремы, применяемой в направлении, противоположном указанному в характеристике "сокращ". В нашем примере - применяемой в направлении "слева направо". Теорема x19 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. При этом допускается только характеристика "нормализация". В нашем примере - "нормализация(второйтерм)".

Создание протоколов

1. Усмотрение стандартизируемого операнда.

В качестве примера рассмотрим создание протокола

$$\text{"стандподст}(x1 \ \text{логарифм}(x1 \ x2) \ \text{истина})"$$

по теореме

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \rightarrow \log_a(bc) = \log_a b + \log_a c)$$

Характеристика "сокращ(второйтерм)".

Стандартизируемый операнд операции s - такой, что при решении задач "обычно" целесообразно для всех вхождений операции s добиваться равенства этих операндов. В нашем примере - равенства оснований логарифмов.

Переменной x_{10} присваивается заменяемое выражение. В нашем примере - " $\log_a(bc)$ ". Проверяется, что число его корневых операндов равно 2 и что его заголовок x_{11} - символ не коммутативный. В нашем примере x_{11} - символ "логарифм". Проверяется, что имеющий максимальную сложность подтерм терма x_{10} единственный и совпадает с x_{10} . Переменной x_{12} присваивается заменяющая часть равенства в консеквенте теоремы. Переменной x_{13} присваивается список подтермов терма x_{12} , имеющих максимальную сложность. Проверяется, что таких подтермов не менее двух и что каждый из них имеет заголовок x_{11} . Переменной x_{14} присваивается вхождение корневого операнда терма x_{10} , на котором расположена некоторая переменная x_{15} . В нашем примере - переменная a . Переменной x_{16} присваивается номер операнда x_{14} . В нашем примере - 1. Проверяется, что эта же переменная x_{15} является корневым операндом с номером x_{16} у всех выражений списка x_{13} . Проверяется отсутствие у исходной теоремы характеристики "нормализация(...)" направление которой отлично от направления характеристики "сокращ(...)". Переменной x_{17} присваивается название раздела, к которому относится символ x_{11} . В нашем примере - "элементарная алгебра". Если заголовок какого-либо отличного от переменной корневого операнда терма x_{10} относится к другому разделу, то x_{17} заменяется на наименьший подраздел, содержащий как x_{11} , так и данный заголовок. В нашем примере x_{17} не изменяется.

Предпринимается цикл просмотра теорем T раздела x_{17} , имеющих характеристику вида "сокращ(N)", у которых x_{11} - заголовок заменяемой части, максимально сложным подтермом заменяемой части служит она сама, а заменяющая часть имеет не менее двух подтермов Q максимальной сложности, заголовком каждого из которых служит x_{11} . Если заменяемая часть теоремы T имеет своим корневым операндом некоторую переменную X , которая является корневым операндом с таким же номером, но отличным от x_{16} , у каждого подтерма Q , причем теорема T имеет характеристику "нормализация(M)", где $M \neq N$, то создание протокола отменяется. В противном случае, по завершении просмотра, переменной x_{19} присваивается выражение " $x_{11}(\text{икс}(1)\text{икс}(2))$ ", где $\text{икс}(1)$, $\text{икс}(2)$ - переменные с номерами 1 и 2, т.е. " x_1 " и " x_2 ". Затем создается протокол "стандподст(икс(x_{16}) x_{19} истина)", который и регистрируется в списке вывода.

3.109 Характеристика "сокращгрупп"

Характеристикой "сокращгрупп(N)" сопровождаются тождества, выведенные для создания приема справочника поиска теорем "Сокращение". N - направление замены. Данный справочник позволяет находить кванторные тождества без существенных антецедентов, у которых заменяемый терм имеет вид " $f(B_1, B_2)$ ", где каждый из термов B_1, B_2 и заменяющий терм B неповторны, причем термы B_1 и B_2 имеют единственную общую переменную, и она не входит в B . Сюда же относятся тождества, у которых заменяющий терм - переменная, а заменяемый имеет более одной переменной. Текущий логический символ для поиска теоремы - f .

Варьирование антецедентов

1. Попытка ослабить антецедент.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < b \ \& \ b + c = 1 \rightarrow a^b a^c = a)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ b + c = 1 \rightarrow a^b a^c = a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \rightarrow a \leq b)$$

Характеристика - "сокращгрупп(второйтерм)".

Переменной x9 присваивается список антецедентов. В нем усматривается равенство x10. В нашем примере - " $b + c = 1$ ". Переменной x11 присваивается список параметров равенства x10. В спике x9 выбирается отличное от x10 утверждение x12, заголовок которого отличен от символа "не", а список параметров x13 одноэлементный и не пересекается со списком x11. Переменной x14 присваивается заголовок утверждения x12. В нашем примере x12 - утверждение " $0 < a$ ", x14 - символ "меньше". Справочник поиска теорем "ослабление" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается заголовок консеквента дополнительной теоремы. В нашем примере - "меньшеилиравно". Проверяется, что этот заголовок отличен от "не".

Переменной x18 присваивается список утверждений набора x9, параметры которых не пересекаются со списком x13. Переменной x19 присваивается результат добавления отрицания утверждения x12 и результата замены заголовка утверждения x12 на x17 к списку всех отличных от x12 утверждений набора x9, параметры которых пересекаются со списком x13. Решается задача на описание x20 с посылками x18 и условиями x19. Цели ее суть "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x13". В нашем примере посылки суть " $b - \text{число}$ ", " $c - \text{число}$ ", " $b + c = 1$ "; условия - " $\neg(0 < a)$ ", " $0 \leq a$ ", " $a - \text{число}$ ". Неизвестная - переменная a .

Ответ задачи x20 присваивается переменной x21. В нашем примере он имеет вид " $a = 0$ ". Проверяется, что x21 - равенство с переменной x22 в левой части; x22 - элемент списка x13. Переменной x23 присваивается правая часть равенства. Переменной x26 присваивается результат подстановки в заменяемую часть исходной теоремы выражения x23 вместо переменной x22. В нашем примере - " $9^b 0^c$ ". Переменной x27 присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения x26 по о.д.з. В нашем примере - " $0 < c$ ", " $c - \text{число}$ ", " $0 < b$ ", " $b - \text{число}$ ". Переменной x28 присваивается объединение списка x27 с отличными от x10 и x12 утверждениями набора x9, а также с результатом замены заголовка утверждения x12 на x17. Переменной x29 присваивается консеквент исходной теоремы, переменной x30 - результат обработки списка x28 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x29, к коорому добавлено утверждение x10. При помощи задачи на доказательство проверяется, что

x29 - следствие утверждений x30 и утверждения x21. Затем создается импликация с антецедентами x30 и консеквентом x29. Она регистрируется в списке вывода с той же характеристикой, что и исходная теорема.

3.110 Характеристика "сокращнеизв"

Характеристикой "сокращнеизв($x N$)" сопровождаются эквивалентности, заменяемая часть которых представляет собой дизъюнктивно-конъюнктивную конструкцию из элементарных утверждений, глубина вхождения к оторые переменной x (с отбрасыванием внешнего отрицания) равна 1; заменяющая часть - элементарное утверждение с единственным вхождением переменной x , глубина которого равна 1. N - указатель направления замены.

Использование эквивалентности для специального преобразования дополнительной теоремы

1. Попытка варьирования приема, декомпозирующего характеристику разности множеств.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы приема

$$\forall_{def}(\text{конечное}(\text{set}_{bg}(e(g) \subseteq b \ \& \ d(b, g))) \rightarrow \text{card}(\text{set}_{bg}(\neg(f(g) \subseteq b) \ \& \ e(g) \subseteq b \ \& \ d(b, g))) = -\text{card}(\text{set}_{bg}(e(g) \cup f(g) \subseteq b \ \& \ d(b, g))) + \text{card}(\text{set}_{bg}(e(g) \subseteq b \ \& \ d(b, g))))$$

из теоремы

$$\forall_{bef}(b - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \rightarrow e \cup f \subseteq b \leftrightarrow e \subseteq b \ \& \ f \subseteq b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(b) \ \& \ a \subseteq b \rightarrow \text{card}(b \setminus a) = \text{card}(b) - \text{card}(a))$$

Характеристика - "сокращнеизв(b первыйтерм)".

Переменной x8 присваивается переменная из текущей характеристики. В нашем примере - b . Переменной x11 присваивается заменяемая часть. Проверяется, что она представляет собой конъюнкцию, и переменной x12 присваивается список конъюнктивных членов. Проверяется, что этот список двухэлементный. Переменной x13 присваивается список антецедентов теоремы. Проверяется, что все они включаются в список утверждений, необходимых для сопровождения утверждения x11 по о.д.з. Переменной x14 присваивается одно из утверждений пары x12, переменной x15 - другое. В нашем примере x14 имеет вид " $e \subseteq b$ ", x15 - вид " $f \subseteq b$ ". Проверяется, что x14 не является равенством с переменной x8 в левой части.

Далее предпринимается проверка целесообразности применения приема. Переменной x16 присваивается конъюнкция утверждения x14 и отрицания утверждения x15. Список x13 подразбивается на подсписок x17 утверждений, содержащих переменную x8, и подсписок x19 остальных утверждений. Решается задача на описание x20, посылки которой суть утверждения x19, а условия - утверждения x17 и утверждение x16. Цели задачи - "полный", "явное",

"прямой ответ", "неизвестные x8", "упростить". В нашем примере посылки суть " $e - set$ " и " $f - set$ ". Условия - " $b - set$ " и " $e \subseteq b \ \& \ \neg(f \subseteq b)$ ". Неизвестная - b . Ответ задачи присваивается переменной x21. В нашем примере он имеет вид " $\neg(f \subseteq b) \ \& \ b - set \ \& \ e \subseteq b$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x22 присваивается список его конъюнктивных членов. Если в списке x22 нет содержащего переменную x8 утверждения с заголовком "не", либо имеется единственное содержащее x8 утверждение длины больше 2, то применение приема отменяется. Иначе, после отката, все значения переменных начиная с x16 снова оказываются не определены, и применение приема продолжается.

Справочник поиска теорем "числвыраз" определяет по символу x16 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x18 имеет вид:

$$\forall_{ac}(a - set \ \& \ c - set \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ a \subseteq c \rightarrow \text{card}(c \setminus a) = \text{card}(c) - \text{card}(a))$$

Переменной x20 присваивается список антецедентов теоремы x18, переменным x21 и x22 - вхождения частей равенства в консеквенте теоремы x18. В нашем примере x21 - вхождение левой части, x22 - вхождение правой части. Переменной x23 присваивается подтерм x21. В нашем примере x23 имеет вид " $\text{card}(c \setminus a)$ ". Проверяется, что x23 - числовой атом. Переменной x25 присваивается вхождение символа "разность" в терм x23. Проверяется, что операнды вхождения x25 суть переменные x26 и x27. В нашем примере - c и a . Выбираются переменные X, Y , не входящие в исходную теорему и в теорему x18. В нашем примере - переменные d и g . Переменной x29 присваивается список отличных от x8 параметров утверждения x11. В нашем примере - e, f .

Переменным x30, x31 и x32 присваиваются, соответственно, утверждения x14, x15 и заменяющая часть исходной теоремы. В нашем примере - " $e \subseteq b$ ", " $f \subseteq b$ " и " $e \cup f \subseteq b$ ".

Если список x29 непуст, то рассматривается список T выражений вида "значение(A, Y)", где A пробегает список x29. Затем в утверждения x30, x31 и x32 вместо переменных x29 подставляются выражения T . В нашем примере эти утверждения приобретают вид " $e(g) \subseteq b$ ", " $f(g) \subseteq b$ ", " $e(g) \cup f(g) \subseteq b$ ".

Переменной x33 присваивается выражение "класс(x8 Y и (x30 не(x31) $X(x8, Y)$))". В нашем примере - " $\text{set}_{bg}(e(g) \subseteq b \ \& \ \neg(f(g) \subseteq b) \ \& \ d(b, g))$ ". Переменной x34 присваивается выражение "класс(x8 Y и (x30 $X(x8, Y)$))". В нашем примере - " $\text{set}_{bg}(e(g) \subseteq b \ \& \ d(b, g))$ ". Переменной x35 присваивается выражение "класс(x8 Y и (x32 $X(x8, Y)$))". В нашем примере - " $\text{set}_{bg}(e(g) \cup f(g) \subseteq b \ \& \ d(b, g))$ ".

Переменной x37 присваивается результат замены в выражении x23 всех вхождений подтерма x25 на выражение x33, переменной x38 - равенство выражения x37 подтерму x22. Переменной x39 присваивается результат подстановки в равенство x38 выражений x34 и x35 вместо переменных x26 и x27. Переменной x40 присваивается список результатов такой же подстановки в утверждения набора x20. Переменной x41 присваивается результат обработки набора x40 оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x39. Наконец,

создается импликация с антецедентами x41 и консеквентом x39. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.111 Характеристика "спуск"

Характеристикой "спуск(P)" сопровождаются простые импликации, которые можно неизбыточным образом использовать в проверочном операторе с заголовком P , причем все ее антецеденты тоже обрабатываются проверочными операторами.

Логические следствия теоремы

1. Контрапозиция для получения импликации, используемой в проверочном операторе.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(b) \ \& \ \neg(\text{конечное}(a \cup b)) \rightarrow \neg(\text{конечное}(a)))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{конечное}(a \cup b))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x9 - ее консеквент. Проверяется, что теорема - стартовая в списке вывода. Выбирается элемент x10 списка x8, и переменной x11 присваивается его отрицание. Проверяется, что для усмотрения истинности утверждений вида x11 имеется проверочный оператор. Создается импликация, полученная из исходной заменой антецедента x10 на отрицание консеквента, а консеквента - на утверждение x11. Она регистрируется в списке вывода.

2. Группировка в левых частях всех ненулевых членов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(c < 0 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ a \leq 0 \rightarrow a + c < 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a \leq b \ \& \ c < d \rightarrow a + c < b + d)$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x9 - ее консеквент. При помощи справочника "перегруппировка" определяется возможность группировки в левых частях двуместных отношений всех "ненулевых" членов, и результат такой перегруппировки присваивается переменной x10. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a - b \leq 0 \ \& \ c - d < 0 \rightarrow a + c - b - d < 0)$$

Далее теорема x10 последовательно обрабатывается операторами "исключотр", "Полныепосылки" и "нормтеорема". оператор "исключотр" исключает минусы перед b, d , а далее оператор "нормтеорема" исключает сдвоенные переменные a, b и c, d . Результат регистрируется в списке вывода.

3. Группировка в левых частях всех ненулевых членов (усиленное редуцирование).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(0 < c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow 0 < a + c)$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a \leq b \ \& \ c < d \rightarrow a + c < b + d)$$

Программа приема совпадает с программой предыдущего приема вплоть до момента определения теоремы x10. Дальнейшие десвтия отличаются от предыдущего случая лишь терм, что перед обработкой теоремы x10 операторами "исключотр", "Полныепосылки" и "нортеорема" она обрабатывается оператором "нормтеорема. Это приводит к тому, что ненулевые члены переносятся в правые части неравенств.

4. Перегруппировка членов консеквента, имеющего нулевой операнд.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(0 < a - 1 \ \& \ 0 < c - b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow a^b - a^c < 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(0 < a - 1 \ \& \ 0 < c - b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow 0 < -a^b + a^c)$$

Проверяется, что число операндов консеквента равно 2, причем справочник "перегруппировка" допускает перегруппировку "ненулевых" членов в противоположную часть двуместного отношения с изменением их "знака". Проверяется, что одна из частей консеквента "нулевая", и все его ненулевые члены переносятся в эту часть. Результат регистрируется в списке вывода.

5. Идентификация невырожденного числового атома с помощью равенства в антецеденте.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(\text{card}(b) = a \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow a - \text{целое})$$

из теоремы

$$\forall_b(b - \text{set} \ \& \ \text{card}(b) - \text{число} \rightarrow \text{card}(b) - \text{целое})$$

Переменной x9 присваивается список корневых операндов консеквента, переменной x10 - список антецедентов. В консеквенте выбирается невырожденный числовой атом x11, входящий в список x9. В нашем примере - "card(b)". Проверяется, что x11 встречается в антецедентах. Выбирается переменная x12, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a. Переменной x13 присваивается список результатов замены в антецедентах выражения x11 на переменную x12, переменной x14 - результат такой же замены в консеквенте. Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения списка x13 и равенство выражения x11 переменной x12, а консеквент - x14. Она регистрируется в списке вывода.

6. Попытка контрапозиции теоремы приема, использующего идентификацию невырожденного числового атома с помощью равенства в антецеденте.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a < 0 \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow \neg(\text{card}(b) = a))$$

из теоремы

$$\forall_b(b - \text{set} \ \& \ \text{card}(b) - \text{число} \rightarrow 0 \leq \text{card}(b))$$

Переменной x9 присваивается список корневых операндов консеквента, переменной x10 - список антецедентов. Рассматривается невырожденный числовой атом x11 консеквента, входящий в список x9. В нашем примере - "card(b)". Проверяется, что существует антецедент, содержащий x11. Выбирается переменная x12, не входящая в теорему. В нашем примере - переменная a. Переменной x13 присваивается список результатов замены в антецедентах подтерма x11 на переменную x12. Переменной x14 присваивается результат такой же замены в консеквенте теоремы. В нашем примере x14 имеет вид "0 ≤ a". Переменной x17 присваивается результат упрощения отрицания утверждения x14 относительно посылок x13. В нашем примере - "a < 0". Проверяется, что x17 не имеет заголовка "не". Затем создается импликация, антецеденты которой суть утверждение x17 и утверждения списка x13, а консеквент - отрицание равенства выражения x11 переменной x12. Эта импликация регистрируется в списке вывода.

7. Попытка усмотрения самодвойственного перехода от антецедента к консеквенту.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow (-b) - \text{rational} \leftrightarrow b - \text{rational})$$

из теоремы

$$\forall_b(b - \text{rational} \rightarrow (-b) - \text{rational})$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается заголовок утверждения x9. В нашем примере - символ "рациональное". Проверяется, что этот заголовок отличен от "не". Среди антецедентов выбирается утверждение x11 с заголовком x10. В нашем примере - "b - rational". Оператор "сравнтермов" определяет вхождение x12 в терм x11 и вхождение x13 в терм x9, на которых термы x11 и x9 отличаются. В нашем примере - соответственно, вхождения выражений b и -b. Переменной x14 присваивается переменная по вхождению x12. В нашем примере - переменная b. Переменной x15 присваивается выражение по вхождению x13. Проверяется, что переменная x14 входит в x15. Проверяется, что параметры утверждения x11 содержат все переменные корневой связывающей приставки исходной теоремы. Переменной x16 присваивается результат переобозначения связанных переменных терма x15 на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x15 не имеет связанных переменных, так что x16 по-прежнему равно "-b". Переменной x17 присваивается результат удаления из списка x8 утверждения

x11. При помощи задачи на доказательство проверяется, что конъюнкция результатов подстановки выражения x16 вместо переменной x14 в утверждения x17 является следствием утверждений x17.

Переменной x19 присваивается результат подстановки выражения x16 вместо переменной x14 в утверждение x9. В нашем примере - "рациональное($-(-b)$)". Переменной x20 присваивается результат упрощения терма x19 относительно посылок x17 задачей на преобразования. В нашем примере - "рациональное(b)". Проверяется, что x20 совпадает с x11. Затем создается импликация, антецеденты которой суть утверждения списка x17 и утверждения, необходимые для сопровождения терма x9 по о.д.з., а консеквент - эквивалентность утверждений x9 и x11. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

8. Исключение условного выражения под описателем "отображение" путем перехода к конкатенации наборов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\text{Val}(a) \subseteq \text{события}(c) \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq \text{события}(c) \ \& \ a - \text{слово} \ \& \ b - \text{слово} \ \& \ \text{верпространство}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}(a; b, c) \rightarrow \text{незавсобытия}(\lambda_y(\text{элементы}(c) \setminus a(y), y \in \text{Dom}(a)); b, c))$$

из теоремы

$$\forall_{cdA}(d - \text{set} \ \& \ d \subseteq \text{Dom}(A) \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(c) \ \& \ A - \text{функция} \ \& \ \text{верпространство}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}(A, c) \rightarrow \text{незавсобытия}(\lambda_y((\text{элементы}(c) \setminus A(y) \text{ при } y \in d, \text{ иначе } A(y)), y \in \text{Dom}(A)), c))$$

Переменной x8 присваивается консеквент, переменной x9 - список антецедентов. В консеквенте рассматривается вхождение x10 символа "отображение". Переменной x11 присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она одноэлементна, и переменной x12 присваивается этот элемент. В нашем примере - переменная y . Переменной x13 присваивается вхождение предпоследнего операнда описателя x10. Этот операнд определяет условия на варьируемую переменную и в нашем примере имеет вид " $y \in \text{Dom}(A)$ ". Проверяется, что по вхождению x13 расположен символ "принадлежит", первым операндом которого служит переменная x12, а второй операнд имеет вид "область(x14)", где x14 - некоторая переменная. В нашем примере - переменная "A". Проверяется, что все вхождения переменной x14 в консеквент расположены внутри вхождения x10.

Внутри последнего операнда описателя x10 (этот операнд определяет значение отображения) рассматривается вхождение x15 символа "вариант". Переменной x16 присваивается вхождение первого операнда вхождения x15. Проверяется, что этот операнд - условие принадлежности с переменной x12 в левой части и некоторой переменной x17 в правой. В нашем примере x17 - переменная d . Проверяется, что каждый содержащий x17 антецедент имеет либо вид "множество(x17)", либо вид "содержится(x17 область(x14))".

Переменной x18 присваивается второй операнд условного выражения x15, переменной x19 - последний операнд. Они соответствуют первой и второй альтернативам. В нашем примере x18 имеет вид "элементы(c) \ A(y)", x19 - вид

" $A(y)$ ". Проверяется, что каждое вхождение переменной x_{14} в выражения x_{18} , x_{19} имеет вид "значение(x_{14} x_{12})".

Выбираются переменные x_{21} и x_{22} , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b . Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{23} присваивается выражение "конкатенация(x_{21} x_{22})", а переменной x_{24} - символ 0. Во втором случае переменной x_{23} присваивается выражение "конкатенация(x_{22} x_{21})", а переменной x_{24} - символ 1. В нашем примере имеет место первый случай. Переменной x_{25} присваивается результат подстановки переменной x_{21} вместо x_{14} в выражение x_{18} , переменной x_{26} - результат замены в описателе x_{10} вхождения x_{15} на выражение x_{25} и одновременной подстановки x_{21} вместо x_{14} в остальной части данного описателя. Аналогично, переменной x_{27} присваивается результат подстановки переменной x_{22} вместо x_{14} в выражение x_{19} , переменной x_{28} - результат замены в описателе x_{10} вхождения x_{15} на выражение x_{27} и одновременной подстановки x_{22} вместо x_{14} в остальной части данного описателя. В нашем примере x_{26} имеет вид " $\lambda_y(\text{элементы}(c) \setminus a(y), y \in \text{Dom}(a))$ ", x_{28} - вид " $\lambda_y(b(y), y \in \text{Dom}(b))$ ". Переменной x_{29} присваивается выражение "конкатенация(x_{26} x_{28})" при $x_{24} = 0$ и "конкатенация(x_{28} x_{26})" при $x_{24} = 1$. Переменной x_{30} присваивается результат замены вхождения x_{10} в терм x_8 на терм x_{29} . Переменной x_{31} присваивается список всех не содержащих переменной x_{17} утверждений набора x_9 . Переменной x_{32} присваивается результат добавления к списку результатов подстановки выражения x_{23} вместо переменной x_{14} в утверждения x_{31} утверждений "слово(x_{21})" и "слово(x_{22})". Наконец, создается импликация с антецедентами x_{32} и консеквентом x_{30} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Последовательное применение двух кванторных импликаций

1. Развязка по транзитивности операндов небесповторного консеквента простой импликации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bAB}(\neg(A = B) \& b - \text{set} \& \text{прямая}(AB) \subseteq b \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \rightarrow A \in b)$$

из теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& \neg(A = B) \rightarrow A \in \text{прямая}(AB))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \& b - \text{set} \& a \subseteq b \& c \in a \rightarrow c \in b)$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Проверяется, что он имеет повторные вхождения переменных. Переменной x_{10} присваивается заголовок консеквента, с отбрасыванием его корневого отрицания, если оно имеется. В нашем примере x_{10} - символ "принадлежит". Справочник поиска теорем "транзитоперанд" находит по x_{10} указанную выше дополнительную теорему. Рассматривается вхождение x_{13} антецедента дополнительной теоремы, имеющего (с точностью до отбрасывания корневого отрицания, если

оно есть) заголовок x10. В нашем примере x13 - вхождение антецедента $c \in a$. Оператор "выводпосылки" определяет результат x14 последовательного применения дополнительной и исходной теорем, возникающий при унификации антецедента x13 дополнительной теоремы с консеквентом исходной теоремы. Переменной x15 присваивается результат обработки утверждения x14 оператором "нормтеорема". Проверяется, что консеквент теоремы x15 неповторный, после чего эта теорема регистрируется в списке вывода.

2. Реализация единственного существенного антецедента дополнительной теоремы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(\neg(\text{конечное}(b)) \ \& \ a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(a \cap b) \rightarrow \neg(b \setminus a = \emptyset))$$

из теоремы

$$\forall_{ce}(\neg(\text{конечное}(e)) \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(c \cap e) \rightarrow \neg(\text{конечное}(e \setminus c)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_c(c - \text{set} \ \& \ \neg(\text{конечное}(c)) \rightarrow \neg(c = \emptyset))$$

Переменной x8 присваивается вхождение консеквента. Проверяется, что теорема имеет не более двух переменных. Если консеквент имеет вид отрицания, то переменной x9 присваивается вхождение операнда этого отрицания, иначе x9 совпадает с x8. Переменной x10 присваивается символ по вхождению x9, переменной x11 - раздел, к которому относится x10. В нашем примере x10 - символ "конечное", x11 - раздел "мощности". В качестве дополнительной теоремы выбирается теорема раздела x11, имеющая единственную переменную и характеристику "спуск(...)". Переменной x16 присваивается вхождение антецедента дополнительной теоремы, имеющего (с точностью до отбрасывания корневого отрицания) заголовок x10. В нашем примере x16 - вхождение антецедента " $\neg(\text{конечное}(c))$ ". Проверяется, что этот антецедент существенный. Оператор "выводпосылки" определяет результат x19 последовательного применения дополнительной и исходной теорем, возникающий при унификации антецедента x16 дополнительной теоремы с консеквентом x20 исходной теоремы. Переменной x21 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка антецедентов теоремы x19 относительно параметров ее консеквента. При помощи задачи на исследование проверяется непротиворечивость списка x21. Максимальные подвыражения консеквента теоремы x19 упрощаются относительно списка x21, после чего переменной x20 переприсваивается результат замены этих подвыражений на их упрощенные версии. В нашем примере x20, имеющее вид " $\neg(b \setminus a = \emptyset)$ ", не изменяется. Затем x20 обрабатывается нормализаторами общей стандартизации относительно посылок x21. Проверяется, что x20 не является элементом списка x21, после чего создается импликация с антецедентами x21 и консеквентом x20. Она регистрируется в списке вывода.

3. Развязка по транзитивности консеквента с антецедентом, если оба имеют одинаковый сложный заголовок.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{acd}(\text{включается}(a, c) \ \& \ \text{Val}(c) \subseteq \text{события}(d) \ \& \ c - \text{функция} \ \& \ \text{верпространство}(d) \ \& \ \text{незавсобытия}(c, d) \rightarrow \text{незавсобытия}(a, d))$

из теоремы

$\forall_{aAC}(a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \text{Dom}(A) \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ A - \text{функция} \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \& \ \text{незавсобытия}(A, C) \rightarrow \text{незавсобытия}(\text{сужение}(A, a), C))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{aAC}(\text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ A - \text{функция} \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \& \ \text{незавсобытия}(A, C) \ \& \ \text{эквсемейства}(a, A) \rightarrow \text{незавсобытия}(a, C))$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. В нашем примере - "незавсобытия(сужение(A, a), C)". Переменной x10 присваивается заголовок утверждения x9. Проверяется, что x10 отлично от символа "не". В списке x8 выбирается утверждение x11 с заголовком x10. В нашем примере - утверждение "незавсобытия(A, C)". Оператор "сравнтермов" определяет вхождения x12 и x13 в термы x11 и x9, на которых эти термы различаются. В нашем примере x12 - вхождение переменной A, x13 - вхождение выражения "сужение(A, a)". Переменной x14 присваивается символ по вхождению x12. Проверяется, что это переменная. Переменной x15 присваивается подтерм x13. Проверяется, что переменная x14 входит в терм x15.

Проверяется, что оценка сложности утверждения x9 больше 8 и что выражение x15 неоднобуквенное. Переменной x16 присваивается список имеющих максимальную сложность потермов терма x9. Проверяется, что этот список одноэлементный и состоит из утверждения x9. Проверяется, что выражение x15 не имеет связанных переменных. Справочник поиска теорем "транзитоперанд" определяет по x10 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается вхождение антецедента дополнительной теоремы, имеющего заголовок x10. Оператор "выводпосылки" определяет результат x20 последовательного применения дополнительной и исходной теорем, возникающий при унификации антецедента x19 дополнительной теоремы с консеквентом исходной теоремы. Находится результат обработки утверждения x20 оператором "нормтеорема" и оператором "упрощант". Этот результат регистрируется в списке вывода.

Реализация антецедентов

1. Попытка реализации антецедента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{acd}(c - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow \text{непересек}(a \cap d, c \setminus a))$

из теоремы

$\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ b \subseteq e \rightarrow \text{непересек}(b, c \setminus e))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow b \cap c \subseteq b)$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Переменной x_{12} присваивается вхождение некоторого существенного антецедента теоремы. В нашем примере - антецедента " $b \subseteq e$ ". Переменной x_{14} присваивается заголовок этого антецедента, с отбрасыванием корневого отрицания, если оно имеется. В нашем примере - символ "содержится". Справочник поиска теорем "пример" определяет по x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Оператор "выводпосылки" находит результат x_{17} последовательного применения дополнительной и исходной теорем, возникающий при унификации антецедента x_{12} исходной теоремы с консеквентом дополнительной теоремы. Находится результат x_{18} обработки утверждения x_{17} оператором "Спускоперандов". Проверяется, что консеквент x_{19} теоремы x_{18} - элементарное утверждение. В нашем примере x_{19} имеет вид "непересек($a \cap d, c \setminus a$)". Переменной x_{21} присваивается результат обработки списка антецедентов теоремы x_{18} оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{19} . Проверяется, что среди утверждений x_{21} нет равенства и что все параметры утверждений x_{21} входят в консеквент x_{19} . Корневые операнды утверждения x_{19} (при игнорировании корневого отрицания, если оно имеется) обрабатываются операторами общей стандартизации. В нашем примере ничего не изменяется. Проверяется, что проверочные операторы не усматривают истинность результирующей версии утверждения x_{19} из посылок x_{21} . Затем создается импликация с антецедентами x_{21} и консеквентом x_{19} , которая регистрируется в списке вывода.

2. Варьирование консеквента импликации, используемой для проверочного оператора, при помощи стандартизирующей эквивалентности двух элементарных неповторных утверждений либо перегруппировочной эквивалентности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ c \subseteq d \cup e \ \& \ \text{конечное}(e) \rightarrow \text{конечное}(c \setminus d))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \neg(\text{конечное}(b)) \rightarrow \neg(b \subseteq a))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bce}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \rightarrow b \subseteq c \cup e \leftrightarrow b \setminus c \subseteq e)$$

Переменной x_9 присваивается консеквент. Переменной x_{10} присваивается список предикатных символов, встречающихся в x_9 . В нашем примере - символы "не", "содержится". Переменной x_{11} присваивается список пар (теорема - набор ее характеристик), определяемых справочниками поиска теорем "упрощэkv", "перестановки" по символам списка x_{10} . В нашем примере находится три таких пары. Рассматривается вхождение x_{12} в консеквент теоремы логического символа x_{13} , входящего в x_{10} . В нашем примере - вхождение подвыражения " $b \subseteq a$ ". В списке x_{14} выбирается пара x_{14} , и в качестве дополнительной теоремы выбирается первый элемент этой пары. Переменной x_{16} присваивается вхождение консеквента дополнительной теоремы. Если дополнительная теорема имеет характеристику "группировки", то последовательно рассматриваются два случая: $x_{18} = \text{"первыйтерм"}$ и $x_{18} = \text{"второйтерм"}$. Иначе - проверяется,

что теорема имеет характеристику "общнорм(N)", и переменной $x18$ присваивается символ N . Оператор "тождвывод" определяет результат $x19$ преобразования вхождения $x12$ в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы, применяемой в направлении $x18$. Ввод дополнительных переменных при унификации блокируется. Переменной $x20$ присваивается результат последовательной обработки теоремы $x19$ операторами "Спускоперандов" и "демодемодификация". В нашем примере $x20$ имеет вид:

$$\forall_{cde}(e - \text{set} \ \& \ (c \setminus d) - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(e) \ \& \ \neg(\text{конечное}(c \setminus d)) \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \rightarrow \neg(c \subseteq d \cup e))$$

Переменной $x21$ присваивается список антецедентов результата обработки теоремы $x20$ оператором "Полныепосылки", переменной $x22$ - результат обработки консеквента теоремы $x20$ нормализаторами общей стандартизации относительно посылок $x21$. В нашем примере $x22$ имеет вид " $\neg(c \subseteq d \cup e)$ ". Проверяется, что утверждение $x22$ элементарно. Переменной $x23$ присваивается результат обработки списка $x21$ оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения $x22$. Все блокировки приемов на период этой обработки снимаются, а потом восстанавливаются. Проверяется, что все утверждения списка $x23$ элементарны, причем среди них нет равенства переменной не содержащему ее выражению.

Корневые операнды утверждения $x22$ (при игнорировании корневого отрицания, если оно имеется) обрабатываются операторами общей стандартизации. В нашем примере ничего не изменяется. Проверяется, что проверочные операторы не усматривают истинность результирующей версии утверждения $x22$ из посылок $x23$. Затем создается импликация с антецедентами $x23$ и консеквентом $x22$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Попытка варьирования операции над семейством в проверяемом утверждении.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdf}(\neg(\emptyset \in \text{Val}(d)) \ \& \ \text{set}_{ab}(a \in \text{Dom}(d) \ \& \ b \in d(a)) = \text{Dom}(f) \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \text{события}(c) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(d) \ \& \ \text{верпространство}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}(f, c) \ \& \ \text{конечные}(\text{Val}(d)) \ \rightarrow \text{незавсобытия}(\lambda_a(\bigcup_{b, b \in d(a)} f(a, b), a \in \text{Dom}(d)), c))$$

из теоремы

$$\forall_{dAC}(\neg(\emptyset \in \text{Val}(d)) \ \& \ \text{set}_{ab}(a \in \text{Dom}(d) \ \& \ b \in d(a)) = \text{Dom}(A) \ \& \ \text{Val}(A) \subseteq \text{события}(C) \ \& \ A - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(d) \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \& \ \text{незавсобытия}(A, C) \ \& \ \text{конечные}(\text{Val}(d)) \ \rightarrow \text{незавсобытия}(\lambda_a(\bigcap_{b, b \in d(a)} A(a, b), a \in \text{Dom}(D)), C))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cA}(\text{Val}(A) \subseteq \text{события}(c) \ \& \ A - \text{функция} \ \& \ \text{верпространство}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}(A, c) \ \rightarrow \text{незавсобытия}(\lambda_y(\text{элементы}(c) \setminus A(y), y \in \text{Dom}(A)), c))$$

Переменной x_8 присваивается вхождение консеквента, переменной x_9 - вхождение такого операнда консеквента, который имеет заголовок "отображение". Переменной x_{10} присваивается вхождение последнего операнда описателя x_9 (он определяет значение функции). В нашем примере x_{10} имеет вид " $\bigcap_{b, b \in d(a)} A(a, b)$ ". Проверяется, что вхождение x_{10} имеет единственный корневой операнд - описатель "отображение". Переменной x_{11} присваивается этот описатель. В нашем примере - " $\lambda_b(A(a, b), b \in d(a))$ ". Переменной x_{12} присваивается заголовок консеквента x_8 . В нашем примере - символ "незавсобытия". Переменной x_{13} присваивается вхождение антецедента теоремы, имеющего заголовок x_{12} . В нашем примере - антецедента "незавсобытия(A, C)". Переменной x_{15} присваивается вхождение того операнда вхождения x_{13} , номер которого равен номеру x_{14} операнда x_9 вхождения x_8 . В нашем примере x_{14} равно 1. Проверяется, что по вхождению x_{15} располагается некоторая переменная x_{16} , причем консеквент теоремы получается при замене вхождения x_{15} в антецедент x_{13} на выражение x_9 .

В списке вывода находится такая дополнительная теорема, консеквент которой имеет заголовок x_{12} , причем операнд x_{20} этого консеквента, имеющий номер x_{14} , представляет собой описатель "отображение". Переменной x_{21} присваивается последний операнд описателя x_{20} . В нашем примере он имеет вид "элементарное событие(c) \setminus $A(y)$ ". Проверяется, что выражение x_{21} не имеет связанных переменных. Оператор "выводимости" определяет результат x_{22} последовательного применения исходной и дополнительной теорем при унификации антецедента x_{13} исходной теоремы с консеквентом дополнительной теоремы. Переменной x_{23} присваивается результат обработки теоремы x_{22} оператором "нормальная теорема". Проверяется, что он не содержит заголовка подтерма x_{10} (в нашем примере - символа "пересечение всех"), после чего регистрируется в списке вывода.

4. Попытка варьирования заголовка общего члена семейства в проверяемом утверждении.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abg}(\text{Dom}(a) = \text{Dom}(b) \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq \text{события}(g) \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq \text{события}(g) \ \& \ a - \text{слово} \ \& \ b - \text{слово} \ \& \ \text{верпространство}(g) \ \& \ \text{незавсобытия}(b; a, g) \rightarrow \text{незавсобытия}(\lambda_d(a(d) \cup b(d), d \in \text{Dom}(b)), g))$$

из теоремы

$$\forall_{cef}(\text{Dom}(c) = \text{Dom}(e) \ \& \ \text{Val}(c) \subseteq \text{события}(f) \ \& \ \text{Val}(e) \subseteq \text{события}(f) \ \& \ c - \text{слово} \ \& \ e - \text{слово} \ \& \ \text{верпространство}(f) \ \& \ \text{незавсобытия}(c; e, f) \rightarrow \text{незавсобытия}(\lambda_d(e(d) \setminus c(d), d \in \text{Dom}(e)), f))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(\text{Val}(a) \subseteq \text{события}(c) \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq \text{события}(c) \ \& \ a - \text{слово} \ \& \ b - \text{слово} \ \& \ \text{верпространство}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}(b; a, c) \rightarrow \text{незавсобытия}(b; \lambda_y(\text{элементарное событие}(c) \setminus a(y), y \in \text{Dom}(a)), c))$$

Переменной x_8 присваивается вхождение консеквента, переменной x_9 - вхождение такого операнда консеквента, который имеет заголовок "отображение". Переменной x_{10} присваивается вхождение последнего операнда описателя x_9 (он

определяет значение функции). В нашем примере x_{10} имеет вид " $e(d) \setminus c(d)$ ". Переменной x_{11} присваивается заголовок консеквента. В нашем примере - символ "незавсобытия". Переменной x_{12} присваивается вхождение антецедента, имеющего заголовок x_{11} . В нашем примере - " $незавсобытия(c; e, f)$ ". Переменной x_{13} присваивается консеквент теоремы. Проверяется, что наиболее сложный подтерм у него единственный и совпадает с самим консеквентом. Переменной x_{15} присваивается подтерм x_{10} . Проверяется, что он элементарен, не имеет заголовка "значение" и не содержит символа "вариант". Переменной x_{16} присваивается заголовок выражения x_{15} . В нашем примере - символ "разность". Проверяется, что x_{15} имеет не менее двух различных подтермов с заголовком "значение".

В списке вывода находится такая дополнительная теорема, консеквент которой и хотя бы один антецедент имеют заголовок x_{11} . Переменной x_{20} присваивается консеквент дополнительной теоремы. Проверяется, что он не содержит символа "вариант" и не имеет вложенных описателей "отображение". Оператор "выводпосылки" определяет результат x_{21} последовательного применения исходной и дополнительной теорем при унификации антецедента x_{12} исходной теоремы с консеквентом дополнительной теоремы. Переменной x_{22} присваивается результат обработки теоремы x_{21} оператором "нормтеорема". Проверяется, консеквент теоремы x_{22} не содержит символа x_{16} . Затем эта теорема регистрируется в списке вывода.

Вывод следствия теоремы с помощью вспомогательной задачи

1. Попытка частичной свертки импликации, используемой в проверочном операторе.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \text{интервал}(AB) \subseteq \text{отрезок}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{aAB}(a \in \text{интервал}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow a \in \text{отрезок}(AB))$$

Проверяется, что консеквент теоремы - элементарное утверждение. Решается задача на преобразование, условием которой служит исходная теорема, а единственная посылка - константа "истина". Цели задачи - "упростить", "свертка", "редуцирование". Ответ присваивается переменной x_9 . В нашем примере это указанная выше результирующая теорема. Проверяется, что x_9 - кванторная импликация, корневая связывающая приставка которой короче корневой связывающей приставки исходной теоремы. Затем x_9 регистрируется в списке вывода.

2. Попытка получения эквивалентности для дизъюнктивной декомпозиции путем ослабления антецедента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ 0 \leq c \rightarrow 0 < a + c \leftrightarrow \neg(c = 0) \vee \neg(a = 0))$$

из теоремы

$$\forall_{ac}(0 < c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow 0 < a + c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \rightarrow a \leq b)$$

Переменной x9 присваивается список существенных антецедентов. В нашем примере он состоит из утверждений "0 < c" и "0 ≤ a". В списке x9 выбирается утверждение x10, имеющее единственный параметр x12. В нашем примере x10 - утверждение "0 < c", x12 - переменная c. Переменной x13 присваивается заголовок утверждения x10. В нашем примере - символ "меньше". Справочник поиска теорем "ослабление" определяет по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x16 присваивается заголовок ее консеквента. В нашем примере - символ "меньшеилиравно". Переменной x17 присваивается список антецедентов исходной теоремы, переменной x18 - результат удаления из списка x17 утверждения x10. Проверяется, что список x18 непуст. Переменной x19 присваивается пара, образованная результатом замены заголовка утверждения x10 на x16, а также отрицанием утверждения x10. Решается задача на описание x20 с посылками x18, условиями x19 и единственной целью "редакция". Ответ присваивается переменной x21. В нашем примере он имеет вид "c = 0". Проверяется, что утверждение x21 элементарно. Переменной x22 присваивается результат добавления этого утверждения к списку x18. Решается задача на описание x23 с посылками x22, единственным условием которой служит консеквент исходной теоремы. Единственная цель - "редакция". Ответ присваивается переменной x24. В нашем примере он имеет вид "¬(a = 0)". Проверяется, что список параметров утверждения x24 непуст и не пересекается со списком параметров утверждения x21. Проверяется, что список утверждений, определяющих о.д.з. терма x24, не содержит константы "ложь". Затем создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x18 и результат замены заголовка утверждения x10 на x16. Консеквент импликации - эквивалентность консеквента исходной теоремы дизъюнкции отрицания утверждения x21 и утверждения x24. Эта импликация регистрируется в списке вывода.

3. Попытка усмотреть эквивалентность из декомпозирующей импликации обратного вывода при помощи вспомогательной задачи на доказательство.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \text{конечное}(a \cup b) \leftrightarrow \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{конечное}(a \cup b))$$

Переменной x9 присваивается консеквент теоремы. Проверяется, что он бесповторный. Переменной x11 присваивается список антецедентов, переменной x12 - список существенных антецедентов. В нашем примере он состоит из утверждений "конечное(a)" и "конечное(b)". Проверяется, что утверждения x12 образуют декомпозицию утверждения x9 относительно его параметров. Переменной

x13 присваивается результат удаления из списка x11 утверждений x12 и добавления вместо них утверждения x9. При помощи задач на доказательство усматривается, что каждое утверждение списка x12 является следствием утверждений x13. Затем создается импликация антецеденты которой суть не вошедшие в список x12 антецеденты исходной теоремы, а консеквент - эквивалентность утверждения x9 конъюнкции утверждений x12. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Обобщение теоремы

1. Отбрасывание избыточного отрицания равенства переменной в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(0 < -l(AB) + l(AC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \neg(C \in \text{отрезок}(AB)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ 0 < -l(AB) + l(AC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \neg(C \in \text{отрезок}(AB)))$$

Программа приема совпадает с программой одного из рассмотренных ранее приемов. Для удобства чтения повторим ее.

Переменной x8 присваивается набор антецедентов теоремы, переменной x9 - ее консеквент. В списке x8 находится отрицание равенства x11, не используемое для сопровождения консеквента по о.д.з. В нашем случае x11 - утверждение " $\neg(A = B)$ ". Переменной x12 присваивается остаток списка x8. Проверяется, что утверждение x11 не используется для сопровождения по о.д.з. конъюнкции утверждений x12 и утверждения x10. Переменной x14 присваивается результат добавления к списку x12 равенства $A = B$ из термина x11. Решается задача на доказательство консеквента x9 из посылок x14. При ее решении разрешается вводить дополнительные посылки. В нашем примере их нет. Переменной x17 присваивается результат добавления к списку x12 таких дополнительных посылок, создается импликация с антецедентами x17 и консеквентом x9, и она регистрируется в списке вывода.

2. Ввод коэффициента для второго вхождения повторной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(\neg(c = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(d) \rightarrow \text{коллинеарны}(cd, ed))$$

из теоремы

$$\forall_{ay}(y - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(a) \rightarrow \text{коллинеарны}(a, ya))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(c) \rightarrow a(bc) = (ab)c)$$

Здесь имеется в виду умножение вектора на число - символ "умножвект". Исключение составляет произведение чисел a, b .

Переменной x_8 присваивается консеквент. Проверяется, что он небесповторный, и среди его параметров выбирается переменная x_{10} , имеющая ровно два вхождения. В нашем примере - переменная a . Проверяется, что все остальные параметры термина x_8 имеют в нем единственное вхождение. Переменной x_{11} присваивается вхождение в терм x_8 переменной x_{10} , переменной x_{12} - вхождение, операндом которого служит x_{10} . В нашем примере x_{12} - вхождение выражения " ya ". Проверяется, что число операндов вхождения x_{12} равно 2. Переменной x_{13} присваивается символ по вхождению x_{12} . В нашем примере - символ "умножвект". Переменной x_{14} присваивается вхождение операнда вхождения x_{14} , отличное от x_{11} . В нашем примере - вхождение переменной y . Проверяется, что операция x_{13} имеет единицу по вхождению x_{14} . Переменной x_{15} присваивается символ по вхождению x_{14} . Проверяется, что это переменная, отличная от x_{10} .

Переменной x_{16} присваивается вхождение в терм x_8 переменной x_{10} , отличное от x_{11} . Проверяется, что это вхождение не является операндом операции x_{13} . Справочник поиска теорем "включ" определяет по символу x_{13} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{19} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{19} имеет вид:

$$\forall_{bcd}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(d) \rightarrow b(cd) = (bc)d)$$

Переменной x_{20} присваивается пара переменных x_{15} и x_{10} . В нашем примере - y, a . Переменной x_{22} присваивается вхождение той части равенства в консеквенте теоремы x_{19} , которая имеет заголовок x_{13} , переменной x_{23} - вхождение другой части. В нашем примере x_{22} - левая часть. Переменной x_{24} присваивается подтерм x_{22} . В нашем примере - " $b(cd)$ ". Определяется подстановка S вместо переменных x_{20} , унифицирующая выражение x_{24} с подтермом x_{12} . Переменной x_{26} присваивается выражение, которое подстановка S подставляет вместо переменной x_{10} . В нашем примере - выражение cd . Проверяется, что выражение x_{26} имеет заголовок x_{13} . Проверяется, что по вхождению x_{23} расположен символ x_{13} , а число операндов этого вхождения равно 2. Переменной x_{27} присваивается вхождение того операнда вхождения x_{23} , который представляет собой некоторую переменную x_{29} , переменной x_{28} - вхождение другого операнда. В нашем примере x_{29} - переменная d . Проверяется, что x_{29} встречается в терме x_{26} , причем либо x_{13} коммутативно, либо номера операндов x_{11} и x_{27} равны. В нашем примере они равны 2.

Переменной x_{30} присваивается объединение списка результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы со списком антецедентов теоремы x_{19} . Проверяется, что подстановка S подставляет вместо переменной x_{15} некоторую переменную x_{31} . В нашем примере - переменную b . Набор x_{30} разбивается на поднабор x_{32} утверждений, содержащих переменную x_{31} , и непустой поднабор x_{33} остальных утверждений. Выбирается переменная x_{34} , не входящая в исходную теорему и в теорему x_{19} . В нашем примере - переменная e . Переменной x_{35} присваивается результат добавления к списку x_{32} равенства подтерма x_{28} выражению x_{34} . Решается задача на описание с посылками x_{33} и условиями x_{35} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{31} ", "параметры x_{31} ", "исключ". В нашем примере посылки

суть "Вектор(cd)", " c – число", "Вектор(d)"; условия - " b – число", " $bc = e$ ".
Неизвестная - b .

Ответ задачи присваивается переменной $x37$. В нашем примере он имеет вид " $\neg(c = 0) \vee c = 0 \ \& \ e = 0$ & e – число". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Определяется результат T замены вхождения $x28$ в терм $x23$ на переменную $x34$. В нашем примере он равен e . Переменной $x38$ присваивается результат замены вхождения $x12$ в терм $x8$ на T и одновременного применения подстановки S к остальным вхождениям переменных. В нашем примере $x38$ имеет вид "коллинеарны(cd, ed)". Переменной $x29$ присваивается дизъюнктивный член результата приведения к виду д.н.ф. В нашем примере $x39$ имеет вид " $\neg(c = 0) \ \& \ e$ – число". Переменной $x40$ присваивается набор конъюнктивных членов утверждения $x39$. Проверяется, что в этом наборе нет равенства. Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения $x33$ и конъюнктивные члены утверждения $x39$, а консеквент - утверждение $x38$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

3.112 Характеристика "станд"

Характеристикой "станд(P, N)" сопровождаются теоремы, которые могут быть использованы для упрощения выражений в стандартной форме P . N - направление замены.

Приемы этого раздела срабатывают только в циклах вывода тождеств стандартной формы, инициируемых протоколами "стандформа(...)".

Обобщение теоремы

1. Обобщение упрощающего тождества путем домножения всех членов корневой ассоциативно-коммутативной операции на дополнительный параметр.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \ \& \ c - \text{boolean} \rightarrow a \cdot c \vee b \cdot c \cdot \neg a = a \cdot c \vee b \cdot c)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \vee \neg a \cdot b = a \vee b)$$

Характеристика - "станд(станддн второйтерм)".

Переменной $x10$ присваивается заменяемое выражение, переменной $x11$ - его заголовок. В нашем примере - символ "дн". Справочник "стандформа" определяет по символу $x11$ название $x12$ стандартной формы с корневой операцией $x11$. В нашем примере - "станддн" (дизъюнктивная нормальная форма). Справочник "станддн" определяет по $x12$ пару $x13$, образованную корневой и внутренней ассоциативно-коммутативными операциями стандартной формы. В нашем примере - пару (дн, кн). Переменной $x14$ присваивается второй элемент пары. В нашем примере - "кн". Проверяется, что операция $x14$ имеет единицу. Переменной $x16$ присваивается набор корневых операндов выражения $x10$, переменной

x17 - набор наборов x14-членов выражений списка x16. В нашем примере x17 состоит из двух наборов. Первый - одноэлементный и состоит из выражения a . Второй состоит из выражений $\neg a$ и b . Переменной x18 присваивается пересечение всех наборов списка x17. В нашем примере оно пусто. Проверяется, что в x18 нет переменной, входящей однократно во все списки набора x17.

Выбирается переменная x19, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная c . Переменной x20 присваивается название нормализатора общей стандартизации выражений с заголовком x14. В нашем примере - "нормкн". Переменной x21 присваивается список результатов обработки оператором x20 выражений, получаемых из выражений набора x16 "домножением" операцией x14 на переменную x19. В нашем примере x21 состоит из выражений " $a \cdot c$ " и " $b \cdot c \cdot \neg a$ ". Аналогично, рассматривается список x22 результатов "домножения" x11- членов заменяющего выражения на x19, обработанных оператором x20. Определяются результаты x23 и x24 соединения операцией x11 выражений наборов x21 и x22. Создается импликация x29, консеквентом которой служит равенство выражений x23 и x24, а антецедентами - антецеденты исходной теоремы, пополненные утверждениями, необходимыми для сопровождения консеквента по о.д.з. Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

Использование дополнительного тождества для упрощения заменяемой части

1. Вывод упрощающего тождества в стандартной форме путем унификации заменяемых частей двух ранее найденных тождеств.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{boolean} \ \& \ d - \text{boolean} \rightarrow c \cdot d \vee \neg d = c \vee \neg d)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \vee a \cdot b = a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \cdot b \vee a \cdot \neg b = a)$$

Если текущий уровень сканирования равен 1, то проверяется, что число переменных исходной теоремы меньше 4, иначе - что оно меньше 5. В списке вывода выбирается дополнительная теорема (она может совпадать с исходной). Если текущий уровень сканирования равен 1 либо 2, то проверяется, что дополнительная теорема имеет не более двух переменных, иначе - не более 3. Проверяется, что исходная теорема имеет не меньше переменных, чем дополнительная. Среди характеристик дополнительной теоремы выбирается элемент x13 с заголовком "станд" либо "стандформа". В нашем примере - "станд(станддн второй-терм)". Переменной x16 присваивается вхождение заменяемой части дополнительной теоремы согласно характеристике x13. Переменной x17 присваивается

заголовок этой части. В нашем примере - символ "дн". Переменной x19 присваивается вхождение заменяемой части исходной теоремы. Внутри него рассматривается вхождение x20 символа x17. Оператор "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождения x20 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид " $\forall_{cd}((\neg d) - \text{boolean} \ \& \ c - \text{boolean} \ \& \ d - \text{boolean} \rightarrow c \vee \neg d = c \cdot d \vee \neg d)$ ". Переменной x22 присваивается результат последовательной обработки теоремы x21 операторами "Спускоперандов" и "демодификация". В нашем примере x21 не изменяется. Проверяется, что левая и правая части равенства в консеквенте теоремы x22 различны. Переменной x25 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" антецедентов теоремы, полученной из x22 применением оператора "Полныепосылки". В нашем примере он состоит из утверждений " $c - \text{boolean}$ " и " $d - \text{boolean}$ ". Переменным x27 и x28 присваиваются результаты упрощения левой и правой частей консеквента теоремы x22 при помощи тождеств, уже имеющихся в списке вывода, а также стартовых тождеств упрощения, найденных в базе теорем перед началом цикла вывода. В нашем примере эти части консеквента не изменяются. Проверяется, что более длинная часть содержит все переменные более короткой. Затем создается импликация x29 с антецедентами x25, консеквент которой - равенство более длинного из выражений x27, x28 более короткому. Проверяется, что среди антецедентов теоремы x29 нет равенства, совпадающего с консеквентом и нет утверждения с более чем 2 переменными. Затем x29 регистрируется в списке вывода.

3.113 Характеристика "Стандкомпл"

Характеристикой "Стандкомпл(N)" сопровождаются тождества, преобразующие выражение к виду стандартного представления объектов данного типа. N - направление замены.

Обобщение теоремы

1. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{nz}(z - \text{комплексное} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow z^n = (|z|^n \cos(n \cdot \arg(z)) + (|z|^n \sin(n \cdot \arg(z)))i)$$

из теоремы

$$\forall_{nz}(\neg(z = 0) \ \& \ z - \text{комплексное} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow z^n = (|z|^n \cos(n \cdot \arg(z)) + (|z|^n \sin(n \cdot \arg(z)))i)$$

Характеристика - "Стандкомпл(второйтерм)".

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Среди них выбирается утверждение x9, имеющее вид отрицания равенства R некоторой переменной x12 выражению x13, не содержащему переменных. В нашем примере - $\neg(z = 0)$. Проверяется, что x9 не используется для сопровождения по о.д.з. остальных

антецедентов. Переменной x15 присваивается список отличных от x9 утверждений набора x8, пополненный утверждениями, необходимыми для сопровождения их по о.д.з. Переменной x16 присваивается результат добавления равенства R к списку x15. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что консеквент теоремы - следствие утверждений x16. Создается импликация с антецедентами x15 и тем же консеквентом, что у исходной теоремы. Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

Использование задачи на описание для получения новой теоремы

1. Попытка решить уравнение для стандартного представления значения операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abn}(a - \text{комплексное} \ \& \ b - \text{комплексное} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow b = a^n \leftrightarrow \exists_m(a = (|b|)^{1/n} \cos(2m\pi/n + \arg(b)/n) + (|b|)^{1/n} \sin(2m\pi/n + \arg(b)/n)i))$$

из теоремы

$$\forall_{an}(a - \text{комплексное} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow a^n = (|a|)^n(\cos(n \cdot \arg(a)) + i \sin(n \cdot \arg(a))))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_z(z - \text{комплексное} \leftrightarrow \exists_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z = x + iy))$$

Характеристика - "Стандкомпл(второйтерм)".

Переменной x9 присваивается список антецедентов, переменной x11 - заменяемая часть консеквента, переменной x12 - заголовок этой части. В нашем примере - символ "Степень". Определяется тип x14 значений операции x12. В нашем примере - символ "комплексное". Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Среди антецедентов находится утверждение x17 с заголовком x14, корневым операндом которого служит некоторая переменная x18, входящая в терм x11. В нашем примере - переменная a . Переменной x19 присваивается переменная, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Переменной x20 присваивается список всех антецедентов исходной теоремы, содержащих переменную x18. Переменной x21 присваивается результат добавления к списку остальных антецедентов утверждения "x14(x19)". Переменной x22 присваивается результат добавления к списку x20 равенства заменяющей части исходной теоремы переменной x19. Решается задача на описание с посылками x21 и условиями x22. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x18", "упростить". В нашем примере посылки суть " n - натуральное", " b - комплексное". Условия - " a - комплексное", " $(|a|)^n(\cos(n \cdot \arg(a)) + i \sin(n \cdot \arg(a))) = b$ ". Неизвестная - a .

Ответ присваивается переменной x24. Проверяется, что он отличен от символа "отказ". Переменной x25 присваивается результат добавления к списку x9 утверждения "x14(x19)". Создается импликация с антецедентами x25, консеквентом которой служит эквивалентность равенства выражений x11 и x19

утверждению x24. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "неизвпарам(x18 второйтерм)".

3.114 Характеристика "стандлогарифм"

Характеристикой "стандлогарифм(A, B, N)" сопровождаются тождества для варьирования стандартизируемого операнда. A, B - выражения для исходной и новой версии этого операнда, N - направление замены.

Использование дополнительного тождества для упрощения заменяющей части

1. Попытка уменьшить число термов со стандартизируемым операндом в заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(\neg(c - 1 = 0) \ \& \ \neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow 1/\log_d c = \log_c d)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ \neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \log_a b / \log_a c = \log_c b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \rightarrow \log_a a = 1)$$

Характеристика - "стандлогарифм(c a первыйтерм)".

Переменной x12 присваивается заменяющая часть равенства в консеквенте. Переменной x13 присваивается список подтермо терма x12, имеющих максимальную сложность. Проверяется, что он имеет не менее двух элементов. В списке x13 выбирается выражение x14. В нашем примере - " $\log_a b$ ". Переменной x16 присваивается расположенное в заменяющей части исходной теоремы вхождение терма x14. Справочник поиска теорем "констнорм" определяет по заголовку терма x14 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x21 преобразования вхождения x16 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Создание квазипротоколов

1. Обращение к нормализатору приведения к заданному заголовку для стандартизируемого операнда.

В качестве примера рассмотрим создание квазипротокола

$$\forall_{abcde}(d = b + c \ \& \ \neg(e(b + c) - 1 = 0) \ \& \ 0 < e(b + c) \rightarrow \log_{(b+c)e} a = \log_{de} a)$$

по теореме

$$\forall_{abc}(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ \neg(c - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \log_a b / \log_a c = \log_c b)$$

и дополнительной теореме

$$\forall_{abcde}(d = b + c \ \& \ 0 < (b + c)e \rightarrow \log_a((b + c)e) = \log_a(de))$$

Квазипротокол обращается к вспомогательной процедуре для разложения на множители суммы $b + c$ - основания логарифма. Стартовой теоремой служит тождество для изменения основания логарифма, дополнительной - другой квазипротокол, созданный для разложения на множители суммы под логарифмом.

Характеристика - "стандлогарифм(c a первыйтерм)".

Переменной x8 присваивается первая переменная из характеристики, переменной x9 - вторая. В нашем примере, соответственно, переменные c, a . Переменной x12 присваивается заменяемое выражение, переменной x13 - его заголовок. В нашем примере - символ "логарифм". Проверяется, что корневые операнды выражения x12 суть различные переменные, причем этих операндов ровно два. Переменной x17 присваивается номер того корневого операнда выражения x12, который равен x8. В нашем примере x17 равно 1.

Переменной x18 присваивается заменяющее выражение теоремы. Переменной x19 присваивается некоторое вхождение в него символа x13, переменной x20 - подтерм x19. В нашем примере x20 имеет вид " $\log_a c$ ". Проверяется, что переменная x8 входит в терм x20. Переменной x21 присваивается вхождение операнда вхождения x19, равного x8. Переменной x22 присваивается номер этого операнда. В нашем примере - 2. Проверяется, что x17 не равно x22. Это дает подсказку, что для преобразования операндов выражений с заголовком x13, имеющих номер x22, может быть полезным преобразование операндов такого вида выражений с номером x17. В качестве дополнительной теоремы выбирается теорема раздела символа x13, которая имеет характеристику "стандравно", причем заголовок левой части ее консеквента равен x13. Переменной x30 присваивается вхождение неоднобуквенного операнда левой части консеквента дополнительной теоремы, номер которого равен x22. В нашем примере - операнда " $(b + c)e$ ". Переменной x31 присваивается выражение " $x13(A, B)$ ", где A, B - соответственно, второй и первый операнды левой части консеквента. В нашем примере x31 имеет вид " $\log_{(b+c)e} a$ ". Переменной x33 присваивается выражение " $x13(C, D)$ ", где C, D - второй и правый операнды правой части консеквента. В нашем примере - $\log_c(de)a$. Переменной x34 присваивается равенство выражений x31 и x33. Переменной x36 присваивается одноэлементный набор, образованный равенством из списка антецедентов дополнительной теоремы. Он пополняется всеми утверждениями, необходимыми для сопровождения по о.д.з. выражения x31 и имеющими не менее двух параметров. Затем создается импликация с антецедентами x36 и консеквентом x34, которая регистрируется в списке вывода. Она сопровождается всеми характеристиками дополнительной теоремы и только ими.

3.115 Характеристика "стандменьше"

Характеристикой "стандменьше(i)" сопровождаются кванторные импликации, используемые для усмотрения истинности консеквента путем идентификации одного антецедента с посылкой и обработки другого проверочным оператором. i - номер антецедента, обрабатываемого проверочным оператором.

Варьирование антецедентов дополнительной теоремы

1. Попытка ослабления консеквента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(e < c \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e - d \rightarrow \neg(d = c))$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(e < c \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e - d \rightarrow d < c)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \rightarrow \neg(a = b))$$

Характеристика - "стандменьше(5)".

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - заголовок консеквента. В нашем примере - символ "меньше". Справочник поиска теорем "ослабление" определяет по x9 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x12 присваивается список ее антецедентов, переменной x13 - элемент этого списка, имеющий заголовок x9. В нашем примере - утверждение " $a < b$ ". Переменной x14 присваивается список параметров утверждения x13. Проверяется, что он включает все переменные дополнительной теоремы. Определяется подстановка S вместо переменных x14, переводящая утверждение x13 в консеквент исходной теоремы. Переменной x16 присваивается список результатов применения подстановки S к отличным от x13 утверждениям списка x12, переменной x17 - результат применения этой подстановки к консеквенту дополнительной теоремы. Проверяется, что список x16 включается в список x8. Затем создается импликация с антецедентами x8 и консеквентом x17. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "стандменьше(...)", взятой у исходной теоремы.

3.116 Характеристика "стандформа"

Характеристикой "стандформа(P, N)" сопровождаются тождества для приведения выражений к виду стандартной формы P . N - направление замены.

Использование дополнительной тождества для упрощения заменяемой части

Прием этого раздела срабатывает только в циклах вывода тождеств стандартной формы, иницируемых протоколами "стандформа(...)".

1. Вывод упрощающего тождества в стандартной форме путем унификации заменяемых частей двух ранее найденных тождеств.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(d, e) \rightarrow d \setminus (a \cup e) = d \setminus a)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow (b \setminus c) \setminus a = b \setminus (a \cup c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, b) \rightarrow a \setminus b = a)$$

Характеристика - "стандформа(стандобъединение второйтерм)".

Программа приема почти дословно воспроизводит программу одного из приведенных выше приемов. Для удобства чтения повторим ее. Если текущий уровень сканирования равен 1, то проверяется, что число переменных исходной теоремы меньше 4, иначе - что оно меньше 5. В списке вывода выбирается дополнительная теорема (она может совпадать с исходной). Если текущий уровень сканирования равен 1 либо 2, то проверяется, что дополнительная теорема имеет не более двух переменных, иначе - не более 3. Проверяется, что исходная теорема имеет не меньше переменных, чем дополнительная. Среди характеристик дополнительной теоремы выбирается элемент x13 с заголовком "станд" либо "стандформа". В нашем примере - "станд(стандобъединение второйтерм)". Переменной x16 присваивается входжение заменяемой части дополнительной теоремы согласно характеристике x13. Переменной x17 присваивается заголовок этой части. В нашем примере - символ "разность". Переменной x19 присваивается входжение заменяемой части исходной теоремы. Внутри него рассматривается входжение x20 символа x17. Оператор "тождвывод" определяет результат x21 преобразования входжения x20 при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере он имеет вид " $\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(d, e) \rightarrow d \setminus a = d \setminus (a \cup e))$ ".

Переменной x22 присваивается результат последовательной обработки теоремы x21 операторами "Спускоперандов" и "демодификация". В нашем примере x21 не изменяется. Проверяется, что левая и правая части равенства в консеквенте теоремы x22 различны. Переменной x25 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" антецедентов теоремы, полученной из x22 применением оператора "Полныепосылки". Переменным x27 и x28 присваиваются результаты упрощения левой и правой частей консеквента теоремы x22 при помощи тождеств, уже имеющихся в списке вывода, а также стартовых тождеств упрощения, найденных в базе теорем перед началом цикла вывода. В нашем

примере эти части консеквента не изменяются. Проверяется, что более длинная часть содержит все переменные более короткой. Затем создается импликация x_{29} с антецедентами x_{25} , консеквент которой - равенство более длинного из выражений x_{27} , x_{28} более короткому. Проверяется, что среди антецедентов теоремы x_{29} нет равенства, совпадающего с консеквентом и нет утверждения с более чем 2 переменными. Затем x_{29} регистрируется в списке вывода.

3.117 Характеристика "существант"

Характеристикой "существант)" сопровождаются кванторные импликации, некоторый антецедент которых - квантор общности с квантором существования в консеквенте.

Логические следствия теоремы

1. Усиление антецедента: переход от "длялюбого существует" к "существует длялюбого".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{anA}(\forall_b(b \in \{1, \dots, n\} \rightarrow A(b, a) = 0) \& a \in \{1, \dots, n\} \& \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \rightarrow \det(A) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{nA}(\forall_p(\text{перестановка}(p, \{1, \dots, n\}) \rightarrow \exists_a(A(p(a), a) = 0 \& a \in \{1, \dots, n\})) \& \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \rightarrow \det(A) = 0)$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов. В нем обнаруживается кванторная импликация x_9 , заголовком консеквента которой служит символ "существует". Переменной x_{10} присваивается вхождение консеквента импликации x_9 . Переменной x_{11} присваивается связывающая приставка импликации x_9 , переменной x_{12} - список ее антецедентов. Проверяется, что он непуст. Переменной x_{13} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования x_{10} . Этот список разбивается на подсписок x_{14} утверждений, содержащих переменные набора x_{11} , и подсписок x_{15} остальных утверждений. Переменной x_{16} присваивается кванторная импликация со связывающей приставкой x_{11} и антецедентами x_{12} . Ее консеквентом служит конъюнкция утверждений x_{14} . Переменной x_{17} присваивается объединение отличных от x_9 утверждений набора x_8 и списка x_{15} . Утверждение x_{16} упрощается относительно посылок x_{17} вспомогательной задачей на преобразование, и результат присваивается переменной x_{18} . В нашем примере x_{16} имеет вид " $\forall_p(\text{перестановка}(p, \{1, \dots, n\}) \rightarrow A(p(a), a) = 0)$ ", x_{18} - вид " $\forall_b(b \in \{1, \dots, n\} \leftarrow A(b, a) = 0)$ ". Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x_{17} и x_{18} , а консеквент - тот же, что у исходной теоремы. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Вывод следствий с помощью задач на описание

1. Варьирование связанной переменной под квантором существования.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{nA}(\forall_p(\text{перестановка}(p, \{1, \dots, n\}) \rightarrow \exists_a(A(p(a), a) = 0 \ \& \ a \in \{1, \dots, n\})) \ \& \ \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \rightarrow \det(A) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{nA}(\forall_p(\text{перестановка}(p, \{1, \dots, n\}) \rightarrow \exists_i(A(i, p(i)) = 0 \ \& \ i - \text{натуральное} \ \& \ i \leq n)) \ \& \ \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \rightarrow \det(A) = 0)$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. В нем обнаруживается кванторная импликация x9, заголовком консеквента которой служит символ "существует". Переменной x10 присваивается вхождение консеквента импликации x9. Переменной x11 присваивается связывающая приставка импликации x9, переменной x12 - связывающая приставка квантора существования x10. Проверяется, что x12 состоит из единственной переменной x13. В нашем примере - переменной i . Переменной x14 присваивается утверждение под квантором существования. В нем выделяется некоторое вхождение x15 переменной x13, после чего находится отличное от x15 вхождение x16, внутри которого расположено x15. Переменной x17 присваивается подтерм x16. Проверяется, что x13 имеет в x17 единственное вхождение, причем в x17 входит переменная списка x11. В нашем примере x17 имеет вид " $p(i)$ ". Переменной x18 присваивается заголовок терма x17. В нашем примере - символ "значение". Проверяется, что x18 не является предикатным символом.

Выбирается переменная x19, не входящая в исходную теорему. Переменной x20 присваивается объединение списка отличных от x9 утверждений набора x8 с антецедентами импликации x9. Проверяется, что список x20 непуст. Переменной x21 присваивается результат добавления к списку конъюнктивных членов утверждения x14 равенства выражений x17 и x19. Решается задача на описание x22, посылками которой служат утверждения x20, а условиями - утверждения x21. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x13". В нашем примере посылки суть " $\text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n)$ ", " $\text{перестановка}(p, \{1, \dots, n\})$ ". Условия суть " $A(i, p(i)) = 0$ ", " $i - \text{натуральное}$ ", " $i \leq n$ ", " $p(i) = a$ ". Неизвестная - i . Ответ задачи x22 присваивается переменной x23. В нашем примере он имеет вид " $a \in \{1, \dots, n\} \ \& \ A(\text{прообр}(p, a), a) = 0 \ \& \ i = \text{прообр}(p, a)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x24 присваивается список конъюнктивных членов утверждения x23. В нем выбирается равенство x25 с переменной x13 в левой части. Переменной x26 присваивается результат удаления равенства x25 из списка x24, переменной x27 - результат навешивания квантора существования по x19 на конъюнкцию утверждений x26. Переменной x28 присваивается результат замены консеквента x10 импликации x9 на утверждение x27. В нашем примере он имеет вид

$$\forall_p(\text{перестановка}(p, \{1, \dots, n\}) \rightarrow \exists_a(a \in \{1, \dots, n\} \ \& \ A(\text{прообр}(p, a), a) = 0))$$

Создается импликация, антецеденты которой получены заменой утверждения x9 на x28, а консеквент - тот же, что у исходной теоремы. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.118 Характеристика "тождфунк"

Характеристикой "тождфунк" сопровождаются теоремы, у которых имеется антецедент - равенство, содержащее функциональные переменные, причем каждая такая переменная f входит в него только как "значение($f \dots$)".

Варьирование антецедентов

1. Попытка развязки равенства в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abhi}(\forall_c(c \in (a, b) \rightarrow \neg(\text{производная}(i, c) = 0)) \& \forall_c(c \in (a, b) \rightarrow \text{дифференцируема}(h, c)) \& \forall_c(c \in (a, b) \rightarrow \text{дифференцируема}(i, c)) \& \text{Dom}(h) = \text{Dom}(i) \& a < b \& \text{Dom}(i) \subseteq \mathbb{R} \& [a, b] \subseteq \text{Dom}(i) \& \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Val}(i) \subseteq \mathbb{R} \& h - \text{функция} \& i - \text{функция} \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& \text{непрерывно}(h, [a, b]) \& \text{непрерывно}(i, [a, b]) \rightarrow \exists_c(\text{производная}(h, c)/\text{производная}(i, c) = (h(a) - h(b))/(i(a) - i(b)) \& c \in (a, b)))$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(\forall_c(c \in (a, b) \rightarrow \text{дифференцируема}(h, c)) \& f(a) = f(b) \& a < b \& [a, b] \subseteq \text{Dom}(f) \& \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \& f - \text{функция} \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& \text{непрерывно}(f, [a, b]) \rightarrow \exists_c(\text{производная}(f, c) = 0) \& c \in (a, b))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{aeg}(\text{Dom}(e) = \text{Dom}(g) \& \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \& a \in \text{Dom}(g) \& e - \text{функция} \& g - \text{функция} \& \text{дифференцируема}(e, a) \& \text{дифференцируема}(g, a) \rightarrow \text{производная}(\lambda_c(e(c) + g(c), c \in \text{Dom}(g)), a) = \text{производная}(e, a) + \text{производная}(g, a))$$

$$\forall_{abg}(\text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \& a \in \text{Dom}(g) \& g - \text{функция} \& b - \text{число} \& \text{дифференцируема}(g, a) \rightarrow \text{производная}(\lambda_c(bg(c), c \in \text{Dom}(g)), a) = b \cdot \text{производная}(g, a))$$

Прием пытается вывести теорему Лагранжа из теоремы Ролля, подбирая подходящую функцию f . Идея вывода состоит в рассмотрении таких операций над функциями, для которых производная просто выражается через производные операндов, причем возникает дополнительный численный параметр, подбор которого реализует равенство $f(a) = f(b)$ в антецеденте.

Переменной x_8 присваивается вхождение антецедента, представляющего собой равенство, внутри которого выделяется вхождение x_9 символа "значение". Переменной x_{10} присваивается первый операнд вхождения x_9 - некоторая переменная. В нашем примере x_8 - антецедент $f(a) = f(b)$, x_{10} - переменная f . Переменной x_{12} присваивается консеквент теоремы. В нем находится вхождение x_{13} переменной x_{10} . Переменной x_{14} присваивается вхождение, операндом которого служит x_{13} , после чего переменной x_{15} присваивается символ по вхождению x_{14} . В нашем примере x_{14} - вхождение терма "производная(f, c)", x_{15} - символ "производная". Переменной x_{16} присваивается список подтермов терма

x12, имеющих максимальную сложность. Проверяется, что в этом списке имеется выражение с заголовком x15. Просматриваются теоремы раздела, к которому относится символ x15. В качестве первой дополнительной теоремы выбирается теорема с характеристикой "сокращ(N)", у которой заменяемая часть равенства в консеквенте имеет заголовок x15. Переменной x25 присваивается вхождение этой заменяемой части, переменной x26 - вхождение ее операнда, имеющего заголовок "отображение". В нашем примере x26 - вхождение подтерма " $\lambda_c(e(c) + g(c), c \in \text{Dom}(g))$ ". Переменной x27 присваивается вхождение последнего операнда описателя x26 (он определяет значение функции). Проверяется, что x27 имеет ровно два операнда, заголовком которых служит символ "значение", причем первые операнды термов "значение" суть различные переменные x28 и x29, а вторые - одна и та же переменная x30. В нашем примере x28 и x29 - переменные e, g ; x30 - переменная c . Переменной x31 присваивается заменяющая часть первой дополнительной теоремы. Проверяется, что каждая из переменных x28 и x29 имеет единственное вхождение в терм x31.

В консеквенте исходной теоремы выбирается вхождение x32 подтерма, равного подтерму x14. Затем оператор "тождвывод" определяет результат x33 преобразования вхождения x32 при помощи первой дополнительной теоремы. Переменной x34 присваивается результат обработки теоремы x33 оператором "Нормтеорема", которому передается опция "предвквадр". Комментарий "предвквадр" блокирует преобразование конъюнкции двух кванторных импликаций, отличающихся только антецедентами, в одну кванторную импликацию. В нашем примере x34 имеет вид:

$$\begin{aligned} & \forall_{abh} (\forall_c (c \in (a, b) \rightarrow \text{дифференцируема}(g, c)) \ \& \ \forall_c (c \in (a, b) \rightarrow \text{дифференцируема}(h, c)) \ \& \ g(a) + h(a) = g(b) + h(b) \ \& \ \text{Dom}(g) = \text{Dom}(h) \ \& \ a < b \ \& \\ & \text{Dom}(h) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ [a, b] \subseteq \text{Dom}(h) \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \\ & h - \text{функция} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{непрерывно}(g, [a, b]) \ \& \ \text{непрерывно}(h, [a, b]) \\ & \rightarrow \exists_c (\text{производная}(g, c) + \text{производная}(h, c) = 0 \ \& \ c \in (a, b))) \end{aligned}$$

Вместо одной функциональной переменной f здесь появились две функциональные переменные g, h . Чтобы исключить равенство в антецедентах, теперь нужно воспользоваться каким-либо тождеством, выносящим нефункциональный параметр из-под описателя "отображение", и далее разрешить указанное равенство относительно данного параметра. Это реализуется следующим образом.

Рассматривается вхождение x35 антецедента теоремы x34, представляющего собой равенство. В нашем примере - вхождение антецедента " $g(a) + h(a) = g(b) + h(b)$ ". Внутри вхождения x35 выбирается вхождение x36 символа "значение", первым операндом которого служит некоторая переменная x37. В нашем примере x36 - вхождение терма $g(a)$, x37 - переменная g . Переменной x39 присваивается консеквент теоремы x34. В нем находится вхождение x40 переменной x37, и переменной x41 присваивается вхождение символа x15, операндом которого служит вхождение x40. В нашем примере x41 - вхождение подтерма "производная(g, c)". Переменной x43 присваивается список подтермов терма x39, имеющих максимальную сложность, и проверяется, что среди них имеется подтерм с заголовком x15. Просматривается раздел, к которому относится символ x15, и в качестве второй дополнительной теоремы выбирается теорема

с характеристикой "сокращ(M)", у которой заголовок заменяемой части равенства в консеквенте равен $x15$. Переменной $x52$ присваивается вхождение другой части этого равенства. Проверяется, что она представляет собой описатель "отображение". Переменной $x53$ присваивается вхождение последнего операнда описателя (он задает значение функции). В нашем примере описатель имеет вид " $\lambda_c(bg(c), c \in \text{Dom}(g))$ ", $x53$ - вхождение подтерма " $bg(c)$ ". Проверяется, что вхождение $x53$ имеет ровно два операнда, одним из которых служит некоторая переменная $x56$, а другой операнд $x55$ имеет заголовок "значение". В нашем примере $x56$ - переменная b . Внутри консеквента теоремы $x34$ выбирается вхождение $x57$ подтерма $x41$. Затем оператор "тождвывод" определяет результат $x58$ преобразования вхождения $x57$ в теорему $x34$ при помощи второй дополнительной теоремы. Переменной $x59$ присваивается результат преобразования теоремы $x58$ оператором "Нормтеорема", которому передается опция "предвквадр". В нашем примере $x59$ имеет вид:

$$\forall_{abehi}(\forall_c(c \in (a, b) \rightarrow \text{дифференцируема}(h, c)) \& \forall_c(c \in (a, b) \rightarrow \text{дифференцируема}(i, c)) \& ei(a) + h(a) = ei(b) + h(b) \& \text{Dom}(h) = \text{Dom}(i) \& a < b \& \text{Dom}(i) \subseteq \mathbb{R} \& [a, b] \subseteq \text{Dom}(i) \& \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Val}(i) \subseteq \mathbb{R} \& h - \text{функция} \& i - \text{функция} \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& e - \text{число} \& \text{непрерывно}(h, [a, b]) \& \text{непрерывно}(i, [a, b]) \rightarrow \exists_c(e \cdot \text{производная}(i, c) + \text{производная}(h, c) = 0 \& c \in (a, b)))$$

Теперь для исключения равенства в антецедентах его можно разрешить относительно параметра e .

Переменной $x60$ присваивается список антецедентов теоремы $x59$. В нем рассматривается равенство $x6$, содержащее символ "значение". Среди параметров данного равенства выбирается переменная $x62$. В нашем примере $x61$ имеет вид " $e \cdot i(a) + h(a) = e \cdot i(b) + h(b)$ ", $x62$ - переменная e . Проверяется, что ни одно вхождение переменной $x62$ в терм $x61$ не расположено в подтерме с заголовком "значение". Список $x60$ разбивается на подсписок $x63$ утверждений, содержащих переменную $x62$, и подсписок $x64$ остальных утверждений. Решается задача на описание с посылками $x64$ и условиями $x63$. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные $x62$ ", "равно". Ответ присваивается переменной $x66$. В нашем примере он имеет вид " $\neg(-i(a) + i(b) = 0) \& e = (h(a) - h(b)) / (i(b) - i(a)) \& (h(a) - h(b)) / (i(b) - i(a)) - \text{число} \vee h(a) - h(b) = 0 \& i(b) - i(a) = 0 \& e - \text{число}$ ".

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной $x67$ присваивается дизъюнктивный член результата приведения утверждения $x66$ к виду д.н.ф. В нашем примере - первый дизъюнктивный член приведенной выше дизъюнкции. Переменной $x68$ присваивается набор конъюнктивных членов утверждения $x67$. В нем выбирается равенство $x69$ с переменной $x62$ в левой части. Переменной $x70$ присваивается правая часть равенства.

Переменной $x71$ присваивается объединение списка $x64$ с набором результатов подстановки выражения $x70$ вместо переменной $x62$ в отличные от $x69$ элементы списка $x68$. Переменной $x72$ присваивается результат подстановки выражения $x70$ вместо переменной $x62$ в консеквент теоремы $x59$. Затем создается импликация с антецедентами $x71$ и консеквентом $x72$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.119 Характеристика "транзитоперанд"

Характеристикой "транзитоперанд" сопровождаются теоремы, имеющие вид обобщенной транзитивности: два неповторных существенных антецедента и неповторный консеквент, каждый не более чем с 2 переменными; переменные консеквента - симметрическая разность множеств переменных антецедентов.

Логические следствия теоремы

1. Вывод из обобщенной транзитивности эквивалентности для дизъюнктивного объединения двух утверждений, разрешенных относительно неизвестной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы:

$$\forall_{cde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d \leq e \ \& \ d < c \leftrightarrow d \leq e \ \& \ 0 < c - e \vee \neg(0 < c - e) \ \& \ d < c)$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(e < c \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \leq e \rightarrow d < c)$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x10 - список существенных антецедентов. Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x11 присваивается результат удаления из списка x9 утверждений x10. Проверяется, что список x11 непуст. Переменной x12 присваивается консеквент теоремы. В списке x10 выбирается утверждение x13. В нашем примере - утверждение " $d \leq e$ ". Переменной x14 присваивается пересечение списков параметров утверждений x12 и x13. Проверяется, что оно одноэлементно, и переменной x15 присваивается этот элемент. В нашем примере - переменная d . Переменной x16 присваивается элемент списка x10, отличный от x13. В нашем примере - " $e < c$ ". Переменной x17 присваивается результат добавления к списку x11 утверждения x12 и отрицания утверждения x16. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x13 - следствие утверждений x17. Переменной x20 присваивается результат упрощения утверждения x16 относительно посылок x11 при помощи задачи на преобразование. В нашем примере он имеет вид " $0 < c - e$ ". Создается импликация с антецедентами x11, консеквентом которой служит эквивалентность конъюнкции утверждений x13 и x12 дизъюнкции двух утверждений - конъюнкции x13 и x20, а также конъюнкции отрицания утверждения x20 и утверждения x12. Эта импликация регистрируется в списке вывода.

2. Импликация типа обобщенной транзитивности, у которой отрицание консеквента преобразуется в утверждение без заголовка "не", причем существенные антецеденты не имеют заголовка "не": предпринимается контрапозиция антецедента с консеквентом, и полученная теорема используется для усмотрения ложности подутверждения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ a < b \ \& \ 0 \leq a - c \rightarrow \neg(b < c))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ a < b \ \& \ b < c \rightarrow a < c)$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов, переменной x10 - консеквент. Проверяется, что он не имеет заголовка "не", и переменной x11 присваивается его отрицание. Переменной x12 присваивается список существенных антецедентов. Проверяется, что он двухэлементный и его элементы не имеют заголовка "не". Переменной x13 присваивается результат удаления из списка x9 утверждений x12. Переменной x15 присваивается результат упрощения утверждения x11 относительно посылок x13 при помощи задачи на преобразование. В нашем примере x15 имеет вид " $0 \leq a - c$ ". Проверяется, что x15 не имеет заголовка "не". В списке x12 выбирается элемент x16. В нашем примере - утверждение " $b < c$ ". Создается импликация x17, антецеденты которой суть утверждения списка x13, отличные от x16 утверждения списка x12 и утверждение x15. Консеквентом является отрицание утверждения x16. Импликация x17 регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "отрл(n)", где n - номер ее антецедента, входящего в список x12. Она включается в результирующий список вывода, но следствия из нее не выводятся.

3. Группировка всех ненулевых членов в одной части одного из антецедентов, который будет обрабатываться проверочным оператором.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ade}(0 < d - a \ \& \ a - mbox \ \& \ d - mbox \ \& \ e - mbox \ \& \ d \leq e \rightarrow a < e)$$

из теоремы

$$\forall_{ade}(a < d \ \& \ a - mbox \ \& \ d - mbox \ \& \ e - mbox \ \& \ d \leq e \rightarrow a < e)$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов, переменной x10 - консеквент. Проверяется, что консеквент неповторный. Проверяется, что теореме имеет ровно два существенных антецедента, и переменной x12 присваивается один из них. В нашем примере - " $a < d$ ". Переменной x13 присваивается заголовок утверждения x12. Справочник "перегруппировка" определяет по x13 тройку (A, B, C) , такую, что возможна перегруппировка A - членов операндов отношения x13 из одной части в другую с изменением знака B , причем C - единица операции A . В нашем случае эта тройка имеет вид (плюс, минус, 0).

Проверяется, что левая часть утверждения x12 отлична от C . Переменной x17 присваивается существенный антецедент теоремы, отличный от x11. В нашем примере - " $d \leq e$ ". Проверяется, что x17 неповторно и имеет единственную общую переменную с консеквентом x10. Проверяется, что параметры утверждения x12 включаются в параметры утверждений x10 и x17. Переменной x20 присваивается результат перегруппировки всех ненулевых членов утверждения x12 в правой части. В нашем примере он имеет вид " $0 < d - a$ ". Переменной x22 присваивается результат замены в списке антецедентов x9 утверждения x12 на x20. Создается импликация с антецедентами x22, консеквент которой такой же, как у исходной теоремы. Переменной x23 присваивается результат обработки ее оператором "нормтеорема". Он регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "стандменьше(n)", где n - номер антецедента, равного x20.

4. Вывод эквивалентности, отбрасывающей избыточный дизъюнктивный член с неизвестной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ d \subseteq e \rightarrow a \subseteq d \ \vee \ a \subseteq e \leftrightarrow a \subseteq e)$$

из теоремы

$$\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ a \subseteq d \ \& \ d \subseteq e \rightarrow a \subseteq e)$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x10 - список существенных антецедентов. Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x11 присваивается результат удаления из списка x9 утверждений x10. В списке x10 выбирается утверждение x12. В нашем примере - " $d \subseteq e$ ". Переменной x13 присваивается консеквент теоремы, переменной x14 - эквивалентность дизъюнкции утверждений x12 и x13 утверждению x13. Переменной x15 присваивается результат удаления из списка x9 утверждения x12. Переменной x16 присваивается результат обработки списка x15 оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x14. Затем создается импликация с антецедентами x16 и консеквентом x14. Она регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Вывод теоремы для усмотрения истинности отношения с помощью пакетного синтезатора.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(e < 0 \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d - c \leq e \rightarrow d < c)$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(e < c \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d \leq e \rightarrow d < c)$$

Переменной x8 присваивается консеквент, переменной x9 - его заголовок. В нашем примере - символ "меньше". Справочник "перегруппировка" определяет по x13 тройку (A, B, C) , такую, что возможна перегруппировка A - членов операндов отношения x13 из одной части в другую с изменением знака B , причем C - единица операции A . В нашем случае эта тройка имеет вид (плюс, минус, 0). Проверяется, что консеквент не имеет операнда C . Переменной x12 присваивается список антецедентов. Переменной x15 присваивается пара (P, Q) корневых операндов консеквента. Рассматриваются два случая. В первом из них переменной x16 присваивается утверждение " $x9(C, A(Q, B(P)))$ ", во втором - утверждение " $x9(A(P, B(Q)), C)$ ". В нашем примере имеет место второй случай. Переменной x17 присваивается список параметров консеквента. Определяется перестановка S вместо переменных x17, переводящая утверждение x8 в x16. Переменной x19 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам x12. При этом антецеденты с заголовком "число" оставляются без изменений. Переменной x20 присваивается импликация с антецедентами x19 и консеквентом x8. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "оценкаперем(n)", где n - номер антеаедента, имеющего ровно три параметра. В нашем примере - номер последнего антецедента.

2. Разделение переменной в одном из антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acde}(0 < c - e \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ a \leq d + e \rightarrow 0 < c + d - a)$$

из теоремы

$$\forall_{cde}(0 < c - e \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq d + e \rightarrow 0 < c + d)$$

Переменной x_9 присваивается список антецедентов, переменной x_{10} - консеквент. Проверяется, что он не имеет заголовка "не". Находится характеристика "легковидеть(D, n)" исходной теоремы. В нашем примере - "легковидеть(усмменьше 1)". Переменной x_{12} присваивается заголовок консеквента. В нашем примере - символ "меньше". Справочник "перегруппировка" определяет по x_{12} тройку (A, B, C) , такую, что возможна перегруппировка A - членов операндов отношения x_{13} из одной части в другую с изменением знака B , причем C - единица операции A . В нашем случае эта тройка имеет вид (плюс, минус, 0).

Переменной x_{15} присваивается список существенных антецедентов. Проверяется, что он двухэлементный. Проверяется, что консеквент и каждый из антецедентов списка x_{15} имеет одним из своих операндов константу C . Переменной x_{16} присваивается вхождение того операнда консеквента, который равен C , переменной x_{17} - вхождение другого операнда. Проверяется, что он имеет заголовок A . В нашем примере x_{17} - вхождение подтерма " $c + d$ ". Проверяется, что оба операнда вхождения x_{17} суть переменные. Переменной x_{19} присваивается вхождение одного из операндов вхождения x_{17} , переменной x_{20} - переменная на этом вхождении. В нашем примере x_{20} - переменная d . Выбирается переменная x_{21} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a .

В списке x_{15} выбирается утверждение x_{23} , содержащее переменную x_{20} . В нашем примере - утверждение " $0 \leq d + e$ ". Переменной x_{24} присваивается вхождение операнда утверждения x_{23} , равного C , переменной x_{25} - вхождение другого операнда. Проверяется, что заголовок подтерма x_{25} равен A . Переменной x_{26} присваивается вхождение операнда вхождения x_{25} , равного x_{20} . Проверяется, что другим операндом вхождения x_{25} служит некоторая переменная x_{28} . В нашем примере - переменная e . Переменной x_{29} присваивается результат замены вхождения x_{24} в терм x_{23} на переменную x_{21} , переменной x_{30} - результат замены вхождения x_{19} в терм x_{10} на выражение " $A(x_{20}, B(x_{21}))$ ". В нашем примере x_{29} имеет вид " $a \leq d + e$ ", x_{30} - вид " $0 < c + (d - a)$ ".

Переменной x_{32} присваивается результат замены в списке x_9 утверждения x_{23} на утверждение x_{29} . Создается импликация с антецедентами x_{32} и консеквентом x_{30} . Она обрабатывается операторами "полныепосылки" и "нормтеорема", после чего регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "легковидеть(D, m)". Здесь m - номер антецедента x_{29} . Предварительно проверяется, что характеристизатор выдает такую характеристику.

3.120 Характеристика "тригаргумент"

Характеристикой "тригаргумент(N)" сопровождаются тождества, преобразующие терм с двумя операциями от переменных, представляющих собой унифицируемые аргументы, в терм, имеющий два новых выражения с унифицируемыми аргументами, отличающимися от исходных. N - направление замены.

Использование дополнительного тождества для варьирования заменяемой части

1. Попытка проварьировать заменяемую часть тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow -\sin c + \sin b = 2 \sin((b - c)/2) \cos((b + c)/2))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \sin a + \sin b = 2 \sin((a + b)/2) \cos((a - b)/2))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \sin(-a) = -\sin a)$$

Характеристика - "тригаргумент(второйтерм)". Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Внутри него рассматривается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма. Переменной x12 присваивается его заголовок. В нашем примере x11 - вхождение подтерма "sin a". Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет не более трех переменных. Переменной x16 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x12. Проверяется существование характеристики дополнительной теоремы, имеющей заголовок "сокращ" либо "нормализация", относительно которой x16 - заменяемая часть. Оператор "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x11 при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается операторами "нормтеорема" и "теорсвертка", после чего регистрируется в списке вывода. Ему передается только характеристика с заголовком "тригаргумент".

3.121 Характеристика "уменьшение"

Характеристикой "уменьшение(N)" сопровождаются эквивалентности, исключаящие символы с наибольшей оценкой сложности. N - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Вывод тождества общей стандартизации из эквивалентности для равенства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{af}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{непересек}(a, \text{Val}(f)) \rightarrow \text{прообраз}(f, a) = \emptyset)$$

из теоремы

$$\forall_{af}(a - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \text{прообраз}(f, a) = \emptyset \leftrightarrow \text{непересек}(a, \text{Val}(f)))$$

Характеристика - "уменьшение(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемое утверждение. Проверяется, что оно представляет собой элементарное утверждение с заголовком "равно". Переменной x11 присваивается список конъюнктивных членов заменяющего утверждения. Проверяется, что все они суть элементарные утверждения. Создается импликация, антецеденты которой суть антецеденты исходной теоремы и утверждения x11, а консеквентом служит x10. Она регистрируется в списке вывода, причем допускаются только характеристики с заголовком "нормализация".

2. Попытка развертки и свертки заменяющего утверждения для получения эквивалентности альтернативной кванторной расшифровки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(a - \text{set} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ \neg(a = \emptyset) \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow c = \inf(a) \leftrightarrow c - \text{число} \ \& \ \text{нижнягрань}(c, a) \ \& \ \forall_e(c < e \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \exists_d(d < e \ \& \ d \in a)))$$

из теоремы

$$\forall_{ac}(a - \text{set} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ \neg(a = \emptyset) \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow c = \inf(a) \leftrightarrow \text{наибольший}(c, \text{set}_b(\text{нижнягрань}(b, a))))$$

Характеристика - "уменьшение(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемое утверждение. Проверяется, что оно представляет собой элементарное утверждение с заголовком "равно". Переменной x11 присваивается заменяющее утверждение. Проверяется, что оно не содержит кванторов. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Решается задача на описание с посылками x12 и единственным условием x11. Цели задачи - "полный", "прямойответ", "редакция", "развертка". Ответ присваивается переменной x14. В нашем примере он имеет вид:

$$c - \text{число} \ \& \ \forall_d(d \in a \rightarrow c \leq d) \ \& \ \forall_e(c < e \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \exists_d(d < e \ \& \ d \in a))$$

Переменной x15 присваивается список конъюнктивных членов утверждения x14. Затем решается задача на описание с посылками x12 и условиями x15. Цели задачи - "полный", "прямойответ", "редакция", "теорема", "свертка". Ответ присваивается переменной x17. Проверяется, что x17 содержит квантор. Затем создается импликация с антецедентами x12, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x10 и x17. Она регистрируется в списке вывода.

3. Извлечение подслучая эквивалентности, у которой в заменяющей части расположена альтернатива.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{однаправлены}(\text{вектор}(AB)),$$

вектор(CD) $\leftrightarrow A \in \text{отрезок}(BC) \ \& \ \text{точкалуча}(C, D, B) \ \vee \ C \in \text{отрезок}(AD) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, D)$

из теоремы

$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ D\text{-точка} \ \rightarrow \ \text{однаправлены}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD)) \ \leftrightarrow \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD)) \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{односторона}(B, D, \text{прямая}(AC)) \ \vee \ (A \in \text{отрезок}(BC) \ \& \ \text{точкалуча}(C, D, B) \ \vee \ C \in \text{отрезок}(AD) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, D)) \ \& \ \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD))$

Характеристика - "уменьшение(второйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяющая часть. Проверяется, что она имеет заголовок "или". Переменной x_{11} присваивается список дизъюнктивных членов этой части. Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x_{12} присваивается список конъюнктивных членов первого утверждения списка x_{11} , переменной x_{13} - второго. Переменной x_{14} присваивается список таких элементарных утверждений списка x_{12} , что их отрицание входит в список x_{13} . В нашем примере список x_{14} состоит из единственного утверждения " $\neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD))$ ". Проверяется, что список x_{14} непуст. Переменной x_{15} присваивается список антецедентов теоремы. Рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{16} присваивается список x_{14} , а переменной x_{17} - конъюнкция не вошедших в x_{14} утверждений списка x_{12} . Во втором случае переменной x_{16} присваивается список отрицаний утверждений набора x_{14} , а переменной x_{17} - конъюнкция не вошедших в x_{16} утверждений списка x_{13} . В нашем примере рассматривается второй случай. Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения списков x_{15} и x_{16} , а консеквент - эквивалентность заменяемой части теоремы утверждению x_{17} . Она обрабатывается оператором "норм-теорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Попытка разрешения заменяющей части относительно переменной - операнда самой сложной операции неповторной заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \rightarrow \ b < |a| \ \leftrightarrow \ a < -b \ \vee \ b < a)$

из теоремы

$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \rightarrow \ b < |a| \ \leftrightarrow \ b < a \ \vee \ b < -a)$

Характеристика - "уменьшение(второйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяемое утверждение, Переменной x_{11} - заменяющее. Проверяется, что утверждение x_{11} имеет заголовок "или". Переменной x_{12} присваивается список антецедентов теоремы. Проверяется, что x_{10} неповторно и имеет единственный подтерм x_{14} максимальной сложности. В нашем примере x_{14} - выражение $|a|$. Рассматривается операнд x_{16} выражения, представляющий собой переменную. В нашем примере - переменная a . Проверяется, что глубина вхождения переменной x_{16} в утверждение x_{10} больше 1. Переменной x_{17} присваивается список минимальных утверждений, из которых

x11 построено при помощи логических связок "и", "или", "не", "эквивалентно". В нашем примере x17 состоит из двух утверждений " $b < a$ " и " $a < b$ ". Проверяется, что в списке x17 имеет утверждение, глубина вхождения переменной x16 в которое больше 1. Список x12 разбивается на подсписок x18 утверждений, содержащих переменную x16, и подсписок x19 остальных утверждений. Решается задача на описание, посылки которой суть утверждения x19, а условия - утверждения x18 и утверждение x11. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x16". Ответ присваивается переменной x22. В нашем примере он имеет вид " $a < -b \ \& \ a - \text{число} \vee b < a \ \& \ a - \text{число}$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x23 присваивается результат удаления утверждений x12 из списка конъюнктивных членов утверждения x22. Затем создается импликация с антецедентами x12, консеквентом которой служит эквивалентность утверждения x10 конъюнкции утверждений x23. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "глуб(x16 второйтерм)".

5. Перенесение в антецеденты всех альтернативных подутверждений дизъюнкции, кроме одного.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(0 < b - a \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 \leq -b + |a| \leftrightarrow a + b \leq 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 \leq -b + |a| \leftrightarrow a + b \leq 0 \vee 0 \leq a - b)$$

Характеристика - "уменьшение(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемое утверждение, Переменной x11 - заменяющее. Проверяется, что утверждение x11 имеет заголовок "или". Переменной x12 присваивается список антецедентов теоремы. Переменной x13 присваивается список дизъюнктивных членов утверждения x11. В нем выбирается утверждение x14. В нашем примере - " $a + b \leq 0$ ". Переменной x15 присваивается список остальных утверждений набора x13. Переменной x16 присваивается список отрицаний утверждений x15, переменной x17 - результат добавления утверждений списка x16 к списку x12. Переменной x18 присваивается эквивалентность утверждений x10 и x14. Переменной x19 присваивается результат обработки списка x17 оператором "нормантецеденты" относительно параметры утверждений x18. Затем создается импликация с антецедентами x19 и консеквентом x18. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Обобщение теоремы

1. Попытка объединить эквивалентность исключения сложного понятия с сокращением.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abdfhi}(\neg(d = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ \neg(i = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \rightarrow ah/(di) = bh/(fi) \leftrightarrow h = 0 \vee af = bd)$$

из теоремы

$$\forall_{abdf}(\neg(d=0) \ \& \ \neg(f=0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow af = bd \leftrightarrow a/d = b/f)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow a = e \vee b = 0 \leftrightarrow ab = be)$$

Характеристика - "уменьшение(первыйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяющее утверждение. Внутри него выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма; переменной x12 присваивается его заголовок. В нашем примере x11 - вхождение выражения "af", x12 - символ "умножение". Справочник поиска теорем "сокращтеор" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику x16 с заголовком "или" либо "и". Далее предпринимается переобозначение переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему, и результат присваивается переменной x13. В нашем примере x13 имеет вид:

$$\forall_{ceg}(c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \rightarrow c = g \vee e = 0 \leftrightarrow ce = eg)$$

Переменной x19 присваивается заменяемая часть теоремы x13. В нашем примере - правая часть. Переменной x20 присваивается заменяющая часть теоремы x13, переменной x21 - список ее антецедентов. Переменной x22 присваивается список операндов заменяющей части. Проверяется, что он двухэлементный. В нашем примере x22 состоит из утверждений $c = g$ и $e = 0$. Переменной x23 присваивается элемент списка x22, имеющий единственный параметр x25. В нашем примере x23 имеет вид " $e = 0$ ", x25 - переменная e . Переменной x26 присваивается другой элемент списка x22, переменной x27 - список его параметров. Проверяется, что список x27 имеет не менее двух элементов и что переменная x25 имеет более одного вхождения в утверждение x19. Проверяется, что каждая переменная списка x27 имеет единственное вхождение в утверждение x19. Переменной x28 присваивается список всех вхождений в утверждение x19, операндом которых является переменная x25. Проверяется, что на всех вхождениях списка x28 расположена одна и та же ассоциативная и коммутативная двуместная операция x29. В нашем примере - операция "умножение". Определяется единица E операции x29. Переменной x31 присваивается результат подстановки в утверждение x19 единицы E вместо переменной x25, а переменной x32 - результат обработки терма x31 относительно посылок x21 операторами общей стандартизации. В нашем примере x32 имеет вид " $c = g$ ". Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" термов x32 и x26 совпадают. Переменной x33 присваивается список переменных - отличных от переменной x25 операндов вхождений набора x28. В нашем примере - список c, g . Переменной x34 присваивается список параметров утверждения x26.

Определяется подстановка S вместо переменных x34, унифицирующая утверждения x26 и x10. В нашем примере - $c = g$ и $af = bd$. Переменной x36 присваивается выражение, подставляемое подстановкой S вместо первой переменной

пары $x33$, переменной $x37$ - вместо второй переменной этой пары. В нашем примере $x36$ имеет вид af , $x37$ - вид bd . Проверяется, что оба выражения $x36$ и $x37$ имеют заголовок $x29$.

Создаются накопители $x38$, $x39$ и $x40$. Первый из них иницируется парой пустых слов, два других - пустыми словами. Переменной $x41$ присваивается заменяемое утверждение исходной теоремы, переменной $x42$ - список переменных исходной теоремы и теоремы $x13$.

Далее начинается цикл заполнения накопителей. Просматриваются вхождения $x43$ корневых операндов терма $x36$, а также вхождения $x45$ корневых операндов терма $x37$. Переменной $x44$ присваивается переменная по вхождению $x43$, а переменной $x46$ - переменная по вхождению $x45$. Проверяется, что среди максимальных подвыражений утверждения $x41$ не существует такого, которого одновременно содержит переменные $x44$ и $x46$. Проверяется, что первый набор накопителя $x38$ не содержит ни одной из переменных $x44$ и $x46$. Выбирается переменная $x47$, не входящая в список $x42$. Она сразу же заносится в список $x42$. В первый набор накопителя $x38$ добавляются переменные $x44$ и $x46$, а во второй набор - термы " $x29(x47, x44)$ " и " $x29(x47, x46)$ ". Переменной $x48$ присваивается результат подстановки переменной $x47$ вместо переменной $x25$ в утверждение $x23$, после чего этот результат добавляется к накопителю $x39$. Переменной $x49$ присваивается список результатов подстановки переменной $x47$ вместо переменной $x25$ во все утверждения списка $x21$, которые содержат только переменную $x25$. Утверждения этого списка добавляются к накопителю $x40$.

По завершении цикла все переменные, начиная с $x42$, снова становятся не определены. В нашем примере первый набор накопителя $x38$ состоит из переменных a, b, f, d , второй набор - из выражений ha, hb, if, id . Накопитель $x39$ состоит из утверждений " $h = 0$ ", " $i = 0$ ", накопитель $x40$ - из утверждений " h - число", " i - число".

Переменной $x42$ присваивается результат подстановки термов второго набора пары $x38$ вместо переменных первого набора в утверждение $x41$. В нашем примере получается " $ha/(id) = hb/(if)$ ". Переменной $x44$ присваивается эквивалентность результата обработки утверждения $x42$ оператором "Спускоперандов" результату соединения заголовком характеристики $x16$ (т.е. конъюнкцией либо дизъюнкцией) списка утверждений $x39$, пополненного утверждением $x10$. Переменной $x45$ присваивается объединение списка $x40$ со списком результатов применения подстановки второго набора накопителя $x38$ вместо первого к antecedентам исходной теоремы. Наконец, создается импликация с antecedентами $x45$ и консеквентом $x44$. Она обрабатывается операторами "полныепосылки" и "нормтеорема", после чего регистрируется в списке вывода. Эта теорема сопровождается единственной характеристикой "уменьшение(второйтерм)".

2. Попытка усиления эквивалентности путем переброски antecedента в конъюнктивные члены заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \rightarrow (a = b \vee b = -a) \& b - \text{число} \& b \leq 0 \leftrightarrow b = -|a|)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ b \leq 0 \rightarrow a = b \ \vee \ b = -a \leftrightarrow b = -|a|)$$

Характеристика - "уменьшение(первыйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемое утверждение. Проверяется, что оно является равенством некоторой переменной x13 выражению, не содержащему этой переменной. В нашем примере x13 - переменная b . Переменной x14 присваивается список антецедентов. Он разбивается на подсписок x15 утверждений, содержащих переменную x13, и подсписок x16 остальных утверждений. Проверяется, что список x15 непуст. В нашем примере он состоит из утверждений " $b \leq 0$ " и " $b - \text{число}$ ". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что конъюнкция утверждений x15 - следствие равенства x10 и утверждений x16. Переменной x19 присваивается конъюнкция заменяющего утверждения теоремы и утверждений списка x15. Создается импликация с антецедентами x16, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x10 и x19. Она регистрируется в списке вывода.

3. Переход от эквивалентности для равенства числового атома к эквивалентности для линейного уравнения с числовым атомом.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{adef}(\neg(a = \emptyset) \ \& \ \neg(d = 0) \ \& \ a - \text{set} \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \rightarrow f = e + d \cdot \inf(a) \leftrightarrow \text{наибольший}((f - e)/d, \text{set}_b(\text{нижняягрань}(b, a))))$$

из теоремы

$$\forall_{ac}(a - \text{set} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ \neg(a = \emptyset) \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \rightarrow c = \inf(a) \leftrightarrow \text{наибольший}(c, \text{set}_b(\text{нижняягрань}(b, a))))$$

Характеристика - "уменьшение(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемое утверждение. Проверяется, что оно представляет собой равенство некоторой переменной x13 выражению x14, не содержащему этой переменной. В нашем примере x13 - переменная c , x14 - выражение " $\inf(a)$ ". Переменной x15 присваивается список антецедентов, проверяется, что x14 - числовой атом. Проверяется, что из объединения списка x15 со списком конъюнктивных членов заменяющего утверждения теоремы при помощи задачи на доказательство не усматривается, что x13 - целое число.

Выбираются переменные A, B, C , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные d, e, f . Переменной x18 присваивается равенство " $A \cdot x14 + B = C$ ". В нашем примере - равенство " $d \cdot \inf(a) + e = f$ ". Переменной x19 присваивается выражение " $(C - B)/A$ ". В нашем примере - " $(d - e)/f$ ". Переменной x20 присваивается результат подстановки в заменяющую часть теоремы выражения x19 вместо переменной x13, переменной x21 - эквивалентность утверждений x18 и x20. Переменной x22 присваивается список результатов подстановки в антецеденты x15 выражения x19 вместо переменной x13, к которому добавляются утверждения " $A - \text{число}$ ", " $B - \text{число}$ ", " $C - \text{число}$ ", " $\neg(A = 0)$ ".

Затем создается импликация с антецедентами x_{22} и консеквентом x_{21} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

4. Исключение операции типа "отрицание", если она встречается над всеми вхождениями заданной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq d \rightarrow 0 \leq b + d|c| \leftrightarrow 0 \leq b + cd \ \vee \ 0 \leq b - cd)$$

из теоремы

$$\forall_{bcd}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq d \rightarrow 0 \leq d|c| - b \leftrightarrow b + cd \leq 0 \ \vee \ 0 \leq cd - b)$$

Характеристика - "уменьшение(второйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяемое утверждение. В нем рассматривается вхождение x_{11} неоднобуквенного подтерма, имеющего ровно один корневой операнд - некоторую переменную x_{12} . В нашем примере x_{11} - вхождение подтерма " $-b$ ", x_{12} - переменная b . Переменной x_{13} присваивается символ по вхождению x_{11} . В нашем примере - "минус". Справочник "отрицание" проверяет, что двукратное применение операции x_{13} в ее о.д.з. не изменяет исходного значения. Проверяется, что вхождения переменной x_{12} в терм x_{10} суть корневые операнды операций x_{13} . Переменной x_{14} присваивается список антецедентов теоремы. Проверяется, что в каждом содержащем x_{12} утверждении списка x_{14} , имеющем более одного вхождения переменной x_{12} либо содержащего отличную от x_{12} переменную, все вхождения переменной x_{12} суть операнды операций x_{13} . Переменной x_{15} присваивается список результатов подстановки выражения " $x_{13}(x_{12})$ " вместо переменной x_{12} в утверждения списка x_{14} . Переменной x_{16} присваивается результат такой же подстановки в консеквент теоремы. Затем создается импликация с антецедентами x_{15} и консеквентом x_{16} . Она обрабатывается операторами "полныепосылки" и "нормтеорема", после чего регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. Исходная теорема помечается символом "исключение".

Использование задачи на описание для получения новой теоремы

1. Сведение разрешения относительно переменной заменяемого утверждения к разрешению относительно этой переменной заменяющего.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(\neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \log_d c = -1 \leftrightarrow \neg(c = 1) \ \& \ d = 1/c)$$

из теоремы

$$\forall_{cd}(\neg(d - 1 = 0) \ \& \ 0 < c \ \& \ 0 < d \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \log_d c = -1 \leftrightarrow c = 1/d)$$

Характеристика - "уменьшение(второйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно и неповторно. Переменной x_{11} присваивается заменяющее утверждение. Проверяется, что оно не имеет связанных переменных. Переменной x_{12} присваивается набор атомарных утверждений, из которых x_{11} построено при помощи логических связок. В нашем примере x_{12} состоит из единственного утверждения " $c = 1/d$ ". Проверяется, что x_{10} имеет единственный подтерм максимальной сложности, и этот подтерм присваивается переменной x_{14} . В нашем примере x_{14} имеет вид " $\log_d c$ ". Переменной x_{15} присваивается вхождение терма x_{14} в утверждение x_{10} . Проверяется, что оно является корневым операндом утверждения x_{10} . Среди параметров терма x_{10} выбирается переменная x_{17} , глубина вхождения которой в x_{10} больше 1. В нашем примере - переменная d . Проверяется, что вхождение переменной x_{17} в терм x_{10} единственное. Проверяется, что среди утверждений списка x_{12} имеет такое, что глубина вхождения в него переменной x_{17} больше единицы.

Переменной x_{18} присваивается список антецедентов исходной теоремы, переменной x_{19} - список не содержащих переменной x_{17} утверждений набора x_{18} . Переменной x_{20} присваивается результат удаление из списка x_{18} утверждений x_{19} и добавления утверждения x_{11} . Решается задача на описание с посылками x_{19} и условиями x_{20} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{17} ". В нашем примере посылки суть " $0 < c$ ", " c - число", условия - " $\neg(d - 1 = 0)$ ", " $0 < d$ ", " d - число", " $c = 1/d$ ". Неизвестная - d .

Ответ присваивается переменной x_{22} . В нашем примере он имеет вид " $\neg(c = 1) \& d = 1/c$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Затем решается задача на описание с посылками x_{18} , единственным условием которой служит утверждение x_{22} . Цели задачи - "редакция", "неизвестные x_{17} ". Ответ присваивается переменной x_{24} . В нашем примере исходное утверждение x_{22} не изменяется. Далее создается импликация с антецедентами x_{18} , консеквентом которой является эквивалентность утверждений x_{10} и x_{24} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "глуб(x_{17} второйтерм)".

Склейка двух теорем

1. Склейка двух теорем, отличающихся заменяющими частями.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acd}(a - \text{число} \& d - \text{число} \& c - \text{число} \& \neg(d = 0) \rightarrow c/d < a \leftrightarrow d < 0 \& ad < c \vee 0 < d \& c < ad)$$

из теоремы

$$\forall_{bcd}(c < 0 \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& d - \text{число} \rightarrow bc < d \leftrightarrow d/c < b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{acd}(0 < d \& a - \text{число} \& c - \text{число} \& d - \text{число} \rightarrow c < ad \leftrightarrow c/d < a)$$

Характеристика - "уменьшение(первыйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяющее утверждение, переменной x_{11} - заменяемое. В списке вывода находится дополнительная теорема, отличная от исходной и имеющая характеристику "уменьшение(N)". Переменной x_{17} присваивается заменяемая часть дополнительной теоремы. Проверяется, что ее длина равна длине утверждения x_{11} . Переменной x_{18} присваивается корневая связывающая приставка исходной теоремы. Проверяется, что она включается в список параметров утверждения x_{11} . Переменной x_{19} присваивается корневая связывающая приставка дополнительной теоремы. Проверяется, что она включается в список параметров утверждения x_{17} . Проверяется отсутствие в блоках вывода исходной и дополнительной теорем элемента "склейка", указывающего, что они уже были обобщены ранее путем склейки с другими теоремами. Находится подстановка S вместо переменных x_{18} , переводящая утверждение x_{11} в x_{17} . Проверяется, что эта подстановка осуществляет переобозначение переменных без их отождествлений.

Переменной x_{21} присваивается список антецедентов исходной теоремы, переменной x_{22} - список антецедентов дополнительной теоремы. Переменной x_{23} присваивается список обработанных оператором "станд" результатов применения подстановки S к утверждениям набора x_{21} . Переменной x_{24} присваивается список обработанных оператором "станд" утверждений набора x_{22} . Переменной x_{25} присваивается разность списков x_{23} и x_{24} , переменной x_{26} - разность списков x_{24} и x_{23} . Проверяется, что обе эти разности одноэлементны. Пусть A, B - их элементы. Переменной x_{27} присваивается пересечение списков x_{23} и x_{24} . Переменной x_{28} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_{10} .

Переменной x_{29} присваивается дизъюнкция конъюнкции утверждений A и x_{28} с конъюнкцией утверждений B и заменяющей части дополнительной теоремы. Переменной x_{30} присваивается дизъюнкция утверждений A, B . В нашем примере x_{29} имеет вид " $d < 0 \ \& \ ad < c \ \vee \ 0 < d \ \& \ c < ad$ ", x_{30} - вид " $d < 0 \ \vee \ 0 < d$ ". Решается задача на описание с посылками x_{27} и единственным условием x_{30} . Цели задачи - "свертка", "и", "редакция". Ответ присваивается переменной x_{32} . В нашем примере он имеет вид " $\neg(d = 0)$ ". Проверяется, что утверждение x_{32} элементарно и отлично от утверждений A, B . В блоки вывода исходной и дополнительной теорем заносится элемент "склейка". Затем создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x_{27} и утверждение x_{32} , а консеквентом - эквивалентность утверждений x_{17} и x_{29} . Эта импликация регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Группировка в левой части заменяющего двуместного отношения всех ненулевых членов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \rightarrow \ a = b/c \leftrightarrow b - ac = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow b = ac \leftrightarrow a = b/c)$$

Характеристика - "уменьшение(первыйтерм)".

Переменной x10 присваивается вхождение заменяющей части теоремы. Проверяется, что она имеет ровно два операнда. При помощи справочника "перегруппировка" усматривается возможность перегруппировки всех ненулевых членов консеквента в его левой части. Переменной x15 присваивается результат такой перегруппировки. Создается импликация, антецеденты которой такие же, как у исходной теоремы, а консеквент - эквивалентность заменяемой части исходной теоремы утверждению x15. Эта импликация регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "упрощУмножение(второйтерм)".

Использование дополнительного тождества для упрощения заменяемой части

1. Использование дополнительного тождества для упрощения заменяемой части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq d \rightarrow 0 \leq d|c| - b \leftrightarrow b + cd \leq 0 \vee 0 \leq cd - b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow b \leq |a| \leftrightarrow b \leq a \vee b \leq -a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \leq b \rightarrow b|a| = |ab|)$$

Характеристика - "уменьшение(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается вхождение заменяемой части. Внутри него выбирается вхождение x11 неоднбуквенного собственного подтерма терма x10. Переменной x12 присваивается заголовок терма x11. В нашем примере x11 - выражение " $|a|$ ", x12 - символ "модуль". Справочник поиска теорем "упрощимп" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x16 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x12. Переменной x17 присваивается направление замены для дополнительной теоремы, при котором x16 оказывается заменяемой частью. Оператор "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x11 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы, применяемой в направлении x17. Переменной x19 присваивается результат преобразования теоремы x18 операторами "Спускоперандов" и "демодификация". В нашем примере x19 имеет вид:

$$\forall_{bcd}((cd) - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ 0 \leq d \rightarrow b \leq d|c| \leftrightarrow b \leq cd \vee b \leq -cd)$$

Переменной x20 присваивается список антецедентов теоремы x19, переменной x21 - пара левых частей эквивалентности в консеквенте теоремы x19. Переменной x22 присваивается результат обработки списка x20 оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждений x21. Переменной x23 присваивается пара результатов упрощения утверждений списка x21 относительно посылок x20 задачами на преобразование. Проверяется, что эти результаты различны. Затем создается импликация с антецедентами x22, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x23. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.122 Характеристика "уменьшсложн"

Характеристикой "уменьшсложн(N)" сопровождаются тождества, одновременно уменьшающие число выражений максимальной сложности и приводящие к более простым таким выражениям. N - направление замены.

Использование тождества для упрощения заменяемой части дополнительного тождества

1. Попытка исключить корневую не самую сложную операцию заменяемого термина.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{de}(d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e \rightarrow \sqrt{2\sqrt{e} + 2\sqrt{e + d^2}} = \sqrt{d + \sqrt{e + d^2}} + \sqrt{-d + \sqrt{e + d^2}})$$

из теоремы

$$\forall_{de}(d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e \rightarrow (\sqrt{d + \sqrt{e + d^2}} + \sqrt{-d + \sqrt{e + d^2}})^2 = 2\sqrt{e} + 2\sqrt{e + d^2})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow (a^b)^{1/b} = a)$$

Характеристика - "уменьшсложн(второйтерм)".

Переменной x9 присваивается список антецедентов, переменной x11 - вхождение заменяемой части теоремы. Проверяется, что она имеет не менее двух корневых операндов. Проверяется существование такого операнда вхождения x11, параметры которого не встречаются в других операндах. Переменной x12 присваивается подтерм x11, переменной x13 - список подтермов термина x12, имеющих максимальную оценку сложности. В нашем примере это три радикала. Проверяется, что сам терм x12 не встречается в списке x13. Переменной x14 присваивается символ по вхождению x11. В нашем примере - символ "степень". Справочник поиска теорем "сокращдробн" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Находится ее комментарий "нормализация(N)". Переменной x20 присваивается вхождение заменяемой части дополнительной теоремы относительно направления замены N . Внутри x20 рассматривается

вхождение x21 символа x14. Оператор "тождвывод" определяет результат x22 преобразования вхождения x21 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Обобщение теоремы

1. Обобщение упрощающего тождества путем домножения всех членов корневой ассоциативно-коммутативной операции на дополнительный параметр.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ade}(d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e \ \& \ a - \text{число} \rightarrow a\sqrt{2\sqrt{e} + 2\sqrt{e + d^2}} = a\sqrt{d + \sqrt{e + d^2}} + a\sqrt{-d + \sqrt{e + d^2}})$$

из теоремы

$$\forall_{de}(d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ 0 \leq e \rightarrow \sqrt{2\sqrt{e} + 2\sqrt{e + d^2}} = \sqrt{d + \sqrt{e + d^2}} + \sqrt{-d + \sqrt{e + d^2}})$$

Характеристика - "уменьшсложн(первыйтерм)".

Проверяется отсутствие у теоремы характеристик с заголовками "нормализация" и "числатом". Переменной x10 присваивается заменяемая часть теоремы, переменной x11 - ее заголовок. В нашем примере - символ "плюс". Справочник "стандформа" определяет по x11 название x12 стандартной формы с корневой операцией x11. В нашем примере - "стандплюс". Справочник "станддн" определяет по x12 пару (F, G) , где F - корневая ассоциативно-коммутативная операция, G - внутренняя ассоциативно-коммутативная операция. В нашем примере имеем пару (плюс, умножение). Устанавливается, что операция G имеет единицу. Переменной x16 присваивается список корневых операндов терма x10, переменной x17 - список наборов G - членов выражений x16. В нашем примере x16 состоит из выражений " $\sqrt{d + \sqrt{e + d^2}}$ " и " $\sqrt{-d + \sqrt{e + d^2}}$ ". Все элементы списка x17 суть одноэлементные наборы. Переменной x18 присваивается пересечение всех наборов списка x17. В нашем примере оно пусто. Проверяется, что в списке x18 нет переменной, встречающейся в каждом выражении набора x16 однократно.

Выбирается переменная x19, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x20 присваивается нормализатор общей стандартизации выражений с заголовком G . В нашем примере - "нормумножение". Переменной x21 присваивается список результатов обработки нормализатором x20 результатов соединения операцией G новой переменной x19 и выражений списка x16. Проверяется избыточность ввода новой переменной x19.

Переменной x22 присваивается список результатов обработки нормализатором x20 результатов соединения операцией G новой переменной x19 и всевозможных x11 - членов заменяющей части теоремы. Переменной x23 присваивается равенство результата соединения операцией x11 выражений набора x21 результату соединения операцией x11 выражений набора x22. Сохраняется ориентация

исходной теоремы. Переменной x26 присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы со всеми содержащими переменную x19 утверждениями, необходимыми для сопровождения терма x23 по о.д.з. Наконец, создается импликация с антецедентами x26 и консеквентом x23. Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

3.123 Характеристика "упрощение"

Характеристикой "упрощение(N)" сопровождаются тождества, обеспечивающие переход к более простым в смысле справочника "оценка" термам. N - направление замены.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Обозначение самого сложного подвыражения заменяемого терма вспомогательной переменной, определяемой через равенство в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ |a| = c \rightarrow a^b = c^b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \rightarrow |a|^b = a^b)$$

Характеристика - "упрощение(второйтерм)".

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x11 - заменяемое выражение. Проверяется, что оно неповторно. Переменной x12 присваивается заменяющее выражение. Проверяется, что оно тоже неповторно и отличается от переменной. Проверяется, что оценка сложности выражения x12 меньше оценки сложности выражения x11. Проверяется, что список подтермов выражения x11, имеющих максимальную оценку сложности, одноэлементный, и переменной x14 присваивается его элемент. В нашем примере - " $|a|$ ". Проверяется, что выражение x14 имеет длину 2, и переменной x15 присваивается одноэлементный список его параметров. Выбирается переменная x16, не входящая в исходную теорему.

Предпринимается попытка решить задачу на описание с единственной посылкой "истина", единственным условием которой является равенство выражения x14 переменной x16. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "известные x17", "упростить", "одз". Если получается ответ, отличный от символа "отказ", не содержащий символов "принадлежит", "или" и не имеющий связанных переменных, то применение приема отменяется. Иначе переменной x17 присваивается результат добавления к списку x8 равенства выражений x14 и x16. Переменной x19 присваивается результат замены вхождения терма x14 в выражение x11 на переменную x16. Создается импликация с антецедентами x17, консеквентом которой служит равенство выражений x12 и x19. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "опрнеизв N ", где N - номер ее последнего антецедента.

2. Использование дополнительного группировочного тождества для получения эквивалентности, кимбинирующей уравнения с целью исключения части числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefgh}(a - \text{число} \ \& \ g - \text{rational} \ \& \ d - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(d) - \text{even}) \ \& \ \text{числитель}(g) - \text{even} \ \& \ |a|^d b = c \rightarrow b f a^g = h \leftrightarrow c f |a|^{g-d} = h)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \rightarrow |a|^b = a^b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$$

Характеристика - "упрощение(второйтерм)".

Переменной x9 присваивается список антецедентов, переменной x11 - вхождение заменяемой части теоремы. Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. В нашем примере - символ "степень". Справочник поиска теорем "извлечпарам" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется наличие у нее характеристики "группмножитель(N)". В нашем примере - "группмножитель(второйтерм)". Переменной x18 присваивается вхождение заменяемой части дополнительной теоремы. Проверяется, что она имеет ровно два операнда. Переменной x19 присваивается символ по вхождению x18. В нашем примере - символ "умножение". Проверяется, что символ x19 ассоциативен и коммутативен. Оператор "тождвывод" определяет результат x20 преобразования вхождения x11 в основную теорему при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере x20 имеет вид:

$$\forall_{ade}(a - \text{число} \ \& \ (d + e) - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(d + e) - \text{even} \ \& \ |a| - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ d - \text{rational} \ \& \ e - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(d) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(e) - \text{even}) \rightarrow |a|^d |a|^e = a^{d+e})$$

Переменной x22 присваивается вхождение заменяемой части теоремы x20. В нашем примере - левой части. Проверяется, что она имеет заголовок x19, а число ее корневых операндов равно 2. Выбираются переменные A, B, C, D, E , не входящие в теорему x20. В нашем примере - переменные b, c, f, g, h . Переменной x27 присваивается заменяющая часть теоремы x20, переменным x28 и x29 - операнды вхождения x22. В нашем примере x27 имеет вид " a^{d+e} ", x28 - вид " $|a|^d$ ", x29 - вид " $|a|^e$ ". Переменной x30 присваивается список антецедентов теоремы x20. Переменной x32 присваивается неоднобуквенный корневой операнд выражения x27. В нашем примере - " $d + e$ ". Выбирается параметр x33 терма x32, не входящий в терм x28. В нашем примере - переменная e . Переменной x34 присваивается список всех утверждений набора x30, содержащих переменную x33, переменной x35 - остаток списка x30. Переменной x36 присваивается результат добавления к списку x34 равенства выражения x32 переменной D .

Решается задача на описание с посылками x35 и условиями x36. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x33". В нашем примере посылки задачи имеют вид:

" a – число", " $|a|$ – число", " d – число", " d – rational", " $\neg(\text{знаменатель}(d) - \text{even})$ ".

Условия задачи имеют вид:

" $(d + e) - \text{rational}$ ", " $\text{числитель}(d + e) - \text{even}$ ", " $e - \text{число}$ ", " $e - \text{rational}$ ", " $\neg(\text{знаменатель}(e) - \text{even})$ ", " $d + e = g$ ".

Неизвестная задачи - e . Ответ задачи присваивается переменной x38. В нашем примере он имеет вид:

" $g - \text{число} \ \& \ \text{числитель}(g) - \text{even} \ \& \ (g - d) - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(g - d) - \text{even}) \ \& \ e = g - d$ ".

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x39 присваивается список его конъюнктивных членов. В этом списке находится равенство x40 с переменной x33 в левой части. Переменной x14 присваивается правая часть. В утверждения списка x30 вместо переменной x33 подставляется выражение x41, и к этому списку добавляются отличные от x40 элементы набора x39. Переменной x42 присваивается результат обработки списка x30 оператором "нормантецеденты" относительно параметры утверждений данного списка. Переменной x43 присваивается равенство " $x19(x28, A) = B$ ", переменной x44 - равенство " $x19(x27, A, C) = E$ ", переменной x45 - равенство " $x19(x29, B, C) = E$ ". В нашем примере x43 имеет вид " $|a|^d b = c$ ", x44 - вид " $a^{d+e} b f = h$ ", x45 - " $|a|^e c f = h$ ". Переменной x46 присваивается результат подстановки выражения x41 вместо переменной x33 в эквивалентность утверждений x44 и x45. Этот результат обрабатывается нормализаторами общей стандартизации. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x42 и утверждение x43, а консеквентом - утверждение x46. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "исклант(второйтерм)".

Обобщение теоремы

1. Попытка навешивания внешней операции типа "возведение в степень".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdefg} (\neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ 0 \leq e \rightarrow (d + fe^{g/2})^c (fe^{g/2} - d)^c = (e^g f^2 - d^2)^c)$$

из теоремы

$$\forall_{bcdf} (b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ 0 \leq c \rightarrow c^f d^2 - b^2 = (b + dc^{f/2})(dc^{f/2} - b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc} (a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^c b^c = (ab)^c)$$

Характеристика - "упрощение(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяющая часть, переменной x11 - заменяемая. Переменной x12 присваивается заголовок выражения x11. В нашем примере - символ "умножение". Проверяется, что число корневых операндов терма x11 равно 2, а общее число переменных теоремы не превосходит 4. Справочник поиска теорем "раздпарам" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется наличие у нее характеристики "нормализация(N)". В нашем примере - "нормализация(первыйтерм)". Переменной x18 присваивается вхождение заменяемой части дополнительной теоремы, переменной x19 - заголовок этой части. В нашем примере x19 - символ "степень". Проверяется, что число корневых операндов терма x18 равно 2, причем операция x19 имеет единицу E. Переменной x21 присваивается вхождение того операнда вхождения x18, который имеет заголовок x12. Проверяется, что операция x19 имеет единицу E по оставшемуся операнду x22 вхождения x18. Переменной x23 присваивается заменяющая часть дополнительной теоремы. Проверяется, что она имеет заголовок x12, причем каждый ее корневой операнд имеет заголовок x19, а операнд этого корневого операнда, номер которого равен номеру операнду x22 вхождения x18, совпадает с подтермом x22.

Оператор "тождвывод" определяет результат x24 преобразования вхождения x21 дополнительной теоремы при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. Исходная теорема помечается символом "исключение".

2. Выделение невырожденного подвыражения с уникальным параметром и замена его на новый параметр.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{целое} \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ 0 \leq c - b + 1 \rightarrow \text{card}(\{b, \dots, c\}) = c - b + 1)$$

из теоремы

$$\forall_{ac}(a - \text{целое} \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ 0 \leq c - a \rightarrow \text{card}(\{a + 1, \dots, c\}) = c - a)$$

Характеристика - "упрощение(второйтерм)".

Переменной x8 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x11 - заменяемое выражение. Выбирается параметр x12 выражения x11, имеющий в нем единственное вхождение. В нашем примере x12 - переменная a. Переменной x13 присваивается список всех отличных от x12 параметров антецедентов, содержащих x12. В нашем примере он состоит из единственной переменной c. Рассматривается вхождение переменной x12 в терм x11, и переменной x14 присваивается вхождение максимального надтерма x15 данного вхождения, параметры которого не пересекаются с x13. Если при расширении терма встречается ассоциативно-коммутативная операция, у которой лишь часть операндов не содержат переменные списка x13, то в качестве x15 берется результат группировки всех таких операндов, а x14 становится вхождением самой операции. В

нашем примере x15 - выражение $a + 1$. Проверяется, что выражение x15 неоднобуквенное и не совпадает с x11, причем оценка сложности его меньше оценки сложности выражения x11. Переменной x18 присваивается тип значений выражений с тем же заголовком, что у x15. В нашем примере x18 - символ "число". Выбирается переменная x19, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b .

Решается задача на описание с посылками x8 и двумя условиями - равенством переменной x19 выражению x15 и утверждением "x18(x19)". Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x12". В нашем примере условия суть " $b = a + 1, b$ - число". Неизвестная - a . Ответ присваивается переменной x22. В нашем примере он имеет вид " $a = b - 1$ & b - число". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x23 присваивается список конъюнктивных членов ответа. В нем находится равенство x24 с переменной x12 в левой части. Переменной x25 присваивается правая часть. Если x15 было сформировано как часть операндов вхождения x14, то переменной x26 присваивается результат соединения операций x14 переменной x19 и не вошедших в x15 операндов вхождения x14. Иначе x26 полагается равным x19. В нашем примере x26 - переменная b

Переменной x27 присваивается заменяющая часть теоремы, переменной x28 - результат подстановки в нее выражения x25 вместо переменной x12. Переменной x29 присваивается результат замены вхождения x14 в терм x11 на выражение x26. В нашем примере x28 имеет вид " $c - b + 1$ ", x29 - " $\text{card}(\{b, \dots, c\})$ ". Переменной x30 присваивается объединение списка результатов подстановки x25 вместо x12 в утверждения набора x8 со списком отличных от x24 элементов набора x23.

Список x30 обрабатывается оператором "нормантецеденты" относительно параметров термов x28 и x29. Результат снова присваивается переменной x30. Создается импликация с антецедентами x30, консеквентом которой служит равенство выражений x28 и x29. Ориентация исходной теоремы сохраняется. Импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

Индуктивное обобщение тождества

1. Индуктивное обобщение тождества с двумя переменными, связанными симметричным отношением в антецедентах - переход к конечному множеству.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c(\text{конечное}(c) \ \& \ \text{конечные}(c) \ \& \ \text{классмножеств}(c) \ \& \ \text{Разделимы}(c) \rightarrow \text{card}(\bigcup_{a,a \in c} a) = \sum_{a,a \in c} \text{card}(a))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, b) \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a \cup b) = \text{card}(a) + \text{card}(b))$$

Характеристика - "упрощение(второйтерм)".

Переменной x_9 присваивается список антецедентов, переменной x_{11} - заменяемая часть, переменной x_{12} - заменяющая. Проверяется, что число корневых операндов выражения x_{11} равно 1, и переменной x_{13} присваивается заголовок этого выражения. В нашем примере x_{13} - символ "мощность". Переменной x_{14} присваивается вхождение корневого операнда терма x_{11} . Проверяется, что число операндов вхождения x_{14} равно 2. Переменной x_{15} присваивается символ по вхождению x_{14} . В нашем примере x_{15} - символ "объединение". Проверяется, что символ x_{15} коммутативный и ассоциативный. Переменным x_{16} и x_{17} присваиваются переменные - первый и второй операнды вхождения x_{14} . В нашем примере x_{16} , x_{17} - переменные a, b . Проверяется, что теорема не имеет переменных, отличных от x_{16} и x_{17} . Переменной x_{18} присваивается заголовок выражения x_{12} . В нашем примере - символ "плюс". Проверяется, что символ x_{18} ассоциативный и коммутативный. Проверяется, что число корневых операндов выражения x_{12} равно 2, причем оба они имеют заголовок x_{13} . Переменной x_{19} присваивается вхождение того из них, операндом которого служит переменная x_{16} , переменной x_{20} - того, операндом которого служит переменная x_{17} . В нашем примере x_{19} - вхождение выражения " $\text{card}(a)$ ", x_{20} - выражения " $\text{card}(b)$ ".

Переменной x_{21} присваивается результат обобщения операции x_{15} на наборы произвольной длины, переменной x_{22} - результат обобщения операции x_{18} на наборы произвольной длины. В нашем примере x_{21} - символ "объединение всех", x_{22} - символ "сумма всех". Переменной x_{23} присваивается список всех антецедентов, содержащих обе переменные x_{16} , x_{17} . Проверяется, что этот список одноэлементный, и переменной x_{24} присваивается этот элемент. В нашем примере - утверждение " $\text{непересек}(a, b)$ ". Переменной x_{25} присваивается список обработанных оператором "станд" утверждений списка x_9 , содержащих x_{16} и не содержащих x_{17} . Переменной x_{26} присваивается список обработанных оператором "станд" утверждений списка x_9 , содержащих x_{17} и не содержащих x_{16} . Проверяется, что списки x_{25} и x_{26} имеют равные длины.

Переменной x_{27} присваивается результат обработанных оператором "станд" результатов замены в утверждениях x_{26} переменной x_{17} на переменную x_{16} . Проверяется, что x_{27} - подсписок списка x_{25} . Переменной x_{28} присваивается результат перестановки переменных x_{16} и x_{17} в утверждении x_{24} . Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" утверждений x_{24} и x_{28} совпадают.

Выбирается переменная x_{29} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная c . Переменной x_{30} присваивается список результатов замены переменной x_{16} на переменную x_{29} в утверждениях списка x_{25} . Переменной x_{31} присваивается объединение списков x_{25} , x_{26} и x_{30} . Переменной x_{32} присваивается результат подстановки переменной x_{29} вместо переменной x_{17} в утверждении x_{24} , переменной x_{33} - результат добавления к списку x_{31} утверждений x_{24} и x_{32} . Переменной x_{34} присваивается результат подстановки в утверждение x_{24} выражения " $x_{15}(x_{17} x_{29})$ " вместо переменной x_{17} . В нашем примере x_{34} имеет вид " $\text{непересек}(a, b \cup c)$ ". Список x_{33} состоит из утверждений " $a - \text{set}$ ", " $\text{конечное}(a)$ ", " $b - \text{set}$ ", " $\text{конечное}(b)$ ", " $c - \text{set}$ ", " $\text{конечное}(c)$ ", " $\text{непересек}(a, b)$ ", " $\text{непересек}(a, c)$ ". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x_{34} - следствие утверждений x_{33} .

Переменной x_{36} присваивается список, состоящий из утверждений "множество(x_{29})", "конечное(x_{29})", "длялюбого(x_{16} x_{17} если принадлежит(x_{16} x_{29}) принадлежит(x_{17} x_{29})не(равно(x_{16} x_{17})) то x_{24})" и всевозможных утверждений вида "длялюбого(x_{16} если принадлежит(x_{16} x_{29}) то A), где A - элемент списка x_{25} . Переменной x_{37} присваивается утверждение "равно(x_{13} (x_{21} (отображение(x_{16} принадлежит(x_{16} x_{29}) x_{16}))) x_{22} (отображение(x_{16} принадлежит(x_{16} x_{29}) x_{13} (x_{16}))))". Переменной x_{38} присваивается результат обработки списка x_{36} оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{37} . Затем создается импликация с антецедентами x_{38} и консеквентом x_{37} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема". Если все антецеденты результата суть элементарные утверждения, то он регистрируется в списке вывода.

- Индуктивное обобщение тождества с двумя переменными, связанными симметричным отношением в антецедентах - переход к конечному семейству.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c(c - \text{функция} \ \& \ \text{семействомножеств}(c) \ \& \ \text{конечное}(\text{Dom}(c)) \ \& \ \text{разделимы}(c) \ \& \ \text{конечные}(\text{Val}(c)) \rightarrow \text{card}(\bigcup(c)) = \sum_{a, a \in \text{Dom}(c)} \text{card}(a))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, b) \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a \cup b) = \text{card}(a) + \text{card}(b))$$

Характеристика - "упрощение(второйтерм)".

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Так как исходная теорема та же, не будем повторять это начало. Отличия начинаются после того, как устанавливается, что x_{34} - следствие утверждений x_{33} .

Выбирается переменная x_{36} , не входящая в исходную теорему и отличная от переменной x_{29} . В нашем примере - переменная d . Переменной x_{37} присваивается результат подстановки выражений "значение(x_{29} x_{16})" и "значение(x_{29} x_{17})" вместо переменных x_{16} и x_{17} в утверждение x_{24} . В нашем примере x_{37} имеет вид "непересек($c(a)$, $c(b)$)". Переменной x_{38} присваивается список результатов подстановки выражения "значение(x_{29} x_{16})" вместо переменной x_{16} в утверждения списка x_{25} . Переменной x_{39} присваивается список, состоящий из утверждений "функция(x_{29})", "равно(область(x_{29}) x_{36})", "конечное(x_{36})", "длялюбого(x_{16} x_{17} если принадлежит(x_{16} x_{36}) принадлежит(x_{17} x_{36})не(равно(x_{16} x_{17})) то x_{37})" и всевозможных утверждений вида "длялюбого(x_{16} если принадлежит(x_{16} x_{36}) то A), где A - элемент списка x_{38} .

Переменной x_{40} присваивается утверждение "равно(x_{13} (x_{21} (отображение(x_{16} принадлежит(x_{16} x_{36})значение(x_{29} x_{16})))) x_{22} (отображение(x_{16} принадлежит(x_{16} x_{36}) x_{13} (значение(x_{29} x_{16}))))". Переменной x_{41} присваивается результат обработки списка x_{39} оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{40} . Затем создается импликация с антецедентами x_{41} и консеквентом x_{40} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема". Если все антецеденты результата суть элементарные утверждения, то он регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительного тождества для упрощения заменяемой части

1. Попытка навесить внешнюю операцию для устранения повторного вхождения переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{def}(\neg(\cos e) \ \& \ \neg(\cos f) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow d + d \operatorname{tg} e \operatorname{tg} f = d \cos(e - f) / (\cos e \cos f))$$

из теоремы

$$\forall_{acf}(\neg(\cos f = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow a \sin c \operatorname{tg} f + a \cos c = a \cos(c - f) / \cos f)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abx}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ x - \text{число} \ \& \ \neg(\cos x = 0) \rightarrow (a \sin x + b \cos x) / \cos x = a \operatorname{tg} x + b)$$

Характеристика - "упрощение(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяемое выражение, переменной x11 - заменяющее. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Проверяется, что выражение x10 небесповторно. Переменной x13 присваивается список заголовков подтермов терма x10, оценка сложности которых больше 6. В нашем примере x13 состоит из символов "синус", "тангенс", "косинус". Проверяется, что список x13 имеет не менее двух элементов. В этом списке выбирается символ x14. В нашем примере - символ "синус". Справочник поиска теорем "склейкалин" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x17 имеет вид:

$$\forall_{bde}(b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \neg(\cos e = 0) \rightarrow (b \sin e + d \cos e) / \cos e = b \operatorname{tg} e + d)$$

Переменной x18 присваивается вхождение консеквента теоремы x17, переменной x19 - вхождение первого операнда консеквента. Переменной x20 присваивается вхождение небесповторного операнда x22 вхождения x19. В нашем примере x22 имеет вид " $b \sin e + d \cos e$ ". Проверяется, что заголовки выражений x22 и x10 равны. Переменной x23 присваивается список параметров выражения x10 и x22. В нашем примере - a, b, c, d, e, f . Определяется подстановка S вместо переменных x23, унифицирующая выражения x10 и x22. Переменной x25 присваивается список имеющих максимальную сложность подтермов выражения x22. В нашем примере - "sin e" и "cos e". Переменной x26 присваивается список заголовков термов набора x25. Проверяется, что подстановка S подставляет вместо параметров терма x10 только термы, не содержащие символов x26.

Переменной x27 присваивается результат применения подстановки S к правой части консеквента теоремы x17. В нашем примере - " $(d \operatorname{tg} f) \operatorname{tg} e + d$ ". Переменной x28 присваивается результат замены в подтерме x19 вхождения операнда x20 на выражение x11. Переменной x29 присваивается результат применения подстановки S к выражению x28. Переменной x30 присваивается список

результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и теоремы x17. Затем создается импликация с антецедентами x30, консеквентом которой является равенство выражений x27 и x29. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительного тождества для упрощения заменяющей части

1. Использование дополнительного тождества для упрощения небесповторной заменяющей части, с целью получения тождества общей стандартизации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cf}(c - \text{set} \ \& \ c \subseteq \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \text{Val}(\text{сужение}(f, c)) = \text{образ}(f, c))$$

из теоремы

$$\forall_{fA}(A - \text{set} \ \& \ f - \text{функция} \rightarrow \text{Val}(\text{сужение}(f, A)) = \text{образ}(f, A \cap \text{Dom}(f)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ c \subseteq b \rightarrow b \cap c = c)$$

Характеристика - "упрощение(второйтерм)".

Переменной x11 присваивается заменяющее выражение. Проверяется, что оно небесповторно. Внутри заменяющей части теоремы выбирается вхождение x12 неоднобуквенного подтерма. Переменной x13 присваивается его заголовок. В нашем примере x12 - вхождение выражения " $A \cap \text{Dom}(f)$ ", x13 - символ "пересечение". Справочник поиска теорем "поглощает" находит по x13 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x12 в основную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Попытка варьирования дополнительной теоремы

1. Попытка упрощения заменяемой части тождества для невырожденного числового атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcdef}(f = [b, c] \ \& \ d \in (b, c) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(e) \ \& \ \text{Числотр}(f) \rightarrow \text{длина}(\text{Путь}(e, f)) = \text{длина}(\text{Путь}(e, [b, d])) + \text{длина}(\text{Путь}(e, [d, c])))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdg}(g = [a, b] \ \& \ c \in (a, b) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(d) \ \& \ \text{Числотр}(g) \rightarrow \text{Путь}(d, g) = \text{путь}(\text{Путь}(d, [a, c]), \text{Путь}(d, [c, b])))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{an}(\text{пути}(a) \ \& \ l(a) = n \rightarrow \text{длина}(\text{путь}(a)) = \sum_{i=1}^n \text{длина}(a(i)))$$

Характеристика - "упрощение(первыйтерм)".

Переменной x_9 присваивается список антецедентов, переменной x_{11} - заменяемое выражение. Проверяется, что x_{11} содержится в списке своих подтермов, имеющих максимальную сложность. Переменной x_{13} присваивается заголовок выражения x_{11} . В нашем примере - символ "путь". Переменной x_{14} присваивается название раздела, к которому относится x_{13} . В нашем примере - символ "орквивые". В этом разделе находится указанная выше дополнительная теорема - тождество, имеющее характеристику "числзнач" либо "числатом". Переменной x_{20} присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Рассматривается та часть x_{23} равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая представляет собой невырожденный числовой атом. В нашем примере - "длина(путь(a))". Внутри вхождения этой части выбирается вхождение x_{24} символа x_{13} . Оператор "тождвывод" определяет результат x_{25} преобразования вхождения x_{24} в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому разрешается использовать при упрощениях уже имеющиеся в списке вывода теоремы. Затем он регистрируется в списке вывода.

3.124 Характеристика "упрощэв"

Характеристикой "упрощэв(N)" сопровождаются тождества, обеспечивающие упрощающий переход от характеристики класса к характеристикам других классов. N - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Попытка исключить квантор общности внутри заменяемого описателя путем рассмотрения конечного списка элементов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(a = b) \& c\text{-set} \& d\text{-set} \& \text{конечное}(c) \& \text{конечное}(d) \rightarrow \text{card}(\text{set}_f(\text{Dom}(f) = \{a, b\} \& f(a) \in c \& f(b) \in d \& f - \text{функция})) = \text{card}(c)\text{card}(d))$$

из теоремы

$$\forall_{AB}(\text{семействомножеств}(A) \& \text{конечное}(\text{Dom}(A)) \& \forall_x(x \in \text{Val}(A) \rightarrow \text{конечное}(x)) \rightarrow \text{card}(\text{set}_f(f - \text{функция} \& \text{Dom}(f) = \text{Dom}(A) \& \forall_x(x \in \text{Dom}(A) \rightarrow f(x) \in A(x)))) = \prod_{i, i \in \text{Dom}A} \text{card}A(i))$$

Характеристика - "упрощэв(второйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяющая часть. Внутри нее рассматривается вхождение x_{11} квантора общности. В нашем примере - " $\forall_x(x \in \text{Dom}(A) \rightarrow f(x) \in A(x))$ ". Переменной x_{12} присваивается список антецедентов импликации x_{11} . Проверяется, что он одноэлементный, и переменной x_{13} присваивается этот элемент. Проверяется, что x_{13} - условие принадлежности с некоторой переменной x_{15} в левой части и выражение x_{16} в правой. Проверяется, что переменная

x_{15} входит в связывающую приставку квантора x_{11} . Рассматривается вхождение x_{17} выражения x_{13} в терм x_{10} . Проверяется, что переменные второго операнда вхождения x_{17} не связаны внешними кванторами и описателями.

Рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{18} присваивается единица, во втором - двойка. В нашем примере x_{18} равно 2. Переменной x_{19} присваивается список не входящих в исходную теорему переменных длины x_{18} . В нашем примере - переменные a, b . Переменной x_{20} присваивается выражение "перечень(набор(x_{19}))". Переменной x_{21} присваивается результат добавления к списку антецедентов исходной теоремы равенства выражений x_{16} и x_{20} . Если x_{18} равно 2, то к списку x_{21} добавляется отрицание равенства друг другу переменных пары x_{19} . Переменной x_{22} присваивается результат замены вхождения x_{17} в терм x_{10} на дизъюнкцию равенств переменной x_{15} переменным списка x_{19} . Переменной x_{23} присваивается равенство выражения x_{22} заменяющему выражению исходной теоремы. Переменной x_{24} присваивается результат обработки процедурой "нормантецеденты" списка x_{21} относительно параметров равенства x_{23} . Затем создается импликация с антецедентами x_{24} и консеквентом x_{23} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.125 Характеристика "уравнвариант"

Характеристикой "уравнвариант(F, N)" сопровождаются эквивалентности, преобразующие уравнение к виду, допускающему декомпозицию. F - конъюнкция фильтров, N - направление замены.

Обобщение теоремы

1. Ввод обобщающего коэффициента с использованием различия степеней по паре неизвестных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdeh} (\neg(h = 0) \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \ \& \ h - \text{целое} \rightarrow e = ad + bc + bdh \leftrightarrow (a + bh)(c + dh) = ac + eh)$$

из теоремы

$$\forall_{abcde} (a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ e - \text{целое} \rightarrow e = ad + bc + bd \leftrightarrow (a + b)(c + d) = e + ac)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc} (\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{целое} \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ c - \text{целое} \rightarrow ab = bc \leftrightarrow a = c)$$

Характеристика - "уравнвариант(и(контекст(обл(x_6) заголовок(x_6 целое натуральное) первыйсимвол(x_6 x_7) неизвестная(x_7) входит(x_7 корень)) не(известно(b)) не(известно(d)) не(заголовок(терм($e + ac$)0)) целое(a) целое(c) целое(e)) второйтерм)".

Фильтры характеристики указывают, что a, c, e - целочисленные константы; выражения b, d содержат неизвестные. Исходная теорема позволяет преобразовать уравнение в ее левой части к виду равенства целочисленной константе произведения двух целочисленных выражений с неизвестными. Далее можно будет применять разбор случаев по разбиению целого числа в произведение двух целочисленных сомножителей.

Переменной x_{10} присваивается заменяемое утверждение, переменной x_{11} - заменяющее. Переменной x_{12} присваивается набор конъюнктивных членов фильтра из текущей характеристики. Переменной x_{13} присваивается список переменных X , для которых в x_{12} встречается терм "не(известно(X))". В нашем примере - список b, d . Проверяется, что список x_{13} непуст. Если x_{11} - равенство, у которого одна из частей не содержит переменных списка x_{13} , то переменной x_{13} переприсваивается разность списков параметров терма x_{10} и указанной части. В нашем примере x_{13} не изменяется.

Проверяется, что список x_{13} имеет не менее двух переменных, а x_{10} - равенство. Переменной x_{14} присваивается входение той его части, которая представляет собой некоторую переменную Z , а переменной x_{15} - противоположной части. В нашем примере Z - переменная e , x_{15} - входение выражения $ad + bc + bd$. Переменной x_{16} присваивается символ по входению x_{15} . В нашем примере - символ "плюс". Проверяется, что этот символ ассоциативен и коммутативен. Переменной x_{17} присваивается список операндов входения x_{15} . Проверяется, что он имеет не менее трех элементов.

В списке x_{13} выбирается входение x_{18} переменной x_{19} и идущее после x_{18} входение x_{20} переменной x_{21} . В нашем примере x_{19} - переменная b , x_{21} - переменная d . Проверяется, что в каждое выражение списка x_{17} входит хотя бы одна из переменных x_{19} , x_{21} .

Проверяется, что заголовки всех выражений списка x_{17} с одноместной корневой операцией совпадают, а прочие выражения имеют ассоциативную и коммутативную корневую операцию, и их заголовки тоже совпадают. При этом x_{22} становится равно общему заголовку выражений с одноместной корневой операцией, а x_{23} - общему заголовку остальных выражений. При отсутствии выражений указанных типов x_{22} , x_{23} остаются равны 0.

Проверяется, что x_{23} не равно 0. В нашем примере $x_{22} = 0$, x_{23} - символ "умножение". Справочник "дистрибутивно" устанавливает дистрибутивность операции x_{23} относительно операции x_{16} . Если x_{22} отлично от 0, то проверяется, что справочник "заменазнака" допускает внесение знака x_{22} в операнд операции x_{23} .

Переменной x_{24} присваивается результат обращения к справочнику "степень" на символ x_{23} . Этот результат - пара (A, B) , где A - двуместная операция, такая, что ее значение на паре (D, M) равно применению операции x_{23} к набору из M элементов D . При этом B - номер операнда операции A , равного M . В нашем примере x_{24} - пара (степень, 2). Переменной x_{25} присваивается первый элемент пары x_{24} , переменной x_{26} - второй. Просматриваются выражения списка x_{17} , и составляется набор x_{27} сумм показателей "степеней", в которых переменные

x_{19} и x_{21} входят в качестве "сомножителей" этих выражений. Корневые "знаки" x_{22} игнорируются. Роль возведения в степень здесь играет операция x_{25} , роль произведения - операция x_{23} . В нашем примере x_{27} - набор (1,1,2). Проверяется, что в наборе x_{27} нет нуля и что не все значения набора x_{27} равны друг другу Переменной x_{28} присваивается наименьший элемент набора x_{27} . В нашем примере - 1.

Выбирается переменная x_{29} , не входящая в исходную теорему и в текущую характеристику. В нашем примере - переменная h . Переменной x_{30} присваивается выражение для "степени" x_{25} переменной x_{29} с показателем x_{28} . При $x_{28} = 1$ берется сама переменная x_{29} . В нашем примере x_{30} - переменная h . Переменной x_{31} присваивается результат соединения операций x_{16} результатов "домножения" выражений списка x_{17} на такую "степень" переменной x_{29} , показатель которой равен разности соответствующего значения набора x_{27} и значения x_{28} . В нашем примере x_{31} имеет вид " $ad + bc + bdh$ ". Переменной x_{32} присваивается результат подстановки в утверждение x_{11} выражений " $x_{23}(x_{19} x_{29})$ ", " $x_{23}(x_{21} x_{29})$ ", " $x_{23}(Z, x_{30})$ " вместо переменных x_{19} , x_{21} , Z . В нашем примере x_{32} имеет вид " $(a + bh)(c + dh) = eh + ac$ ".

Справочник поиска теорем "Равно" определяет по символу x_{23} указанную выше дополнительную теорему. Она представляет собой эквивалентность. Переменной x_{36} присваивается вхождение той части данной эквивалентности, которая представляет собой равенство двух выражений с заголовками x_{23} . Переменной x_{38} присваивается одна из частей данного равенства, переменной x_{39} - другая. В нашем примере x_{38} - вхождение выражения ab , x_{39} - вхождение выражения bc . Проверяется, что каждое из вхождений x_{38} и x_{39} имеет ровно два операнда. Один операнд у них совпадает - это некоторая переменная x_{44} . Другим операндом вхождения x_{38} является переменная x_{45} , вхождения x_{39} - переменная x_{46} . В нашем примере x_{44} - переменная b , x_{45} - a , x_{46} - c . Проверяется, что противоположным операндом эквивалентности в консеквенте дополнительной теоремы служит равенство переменных x_{45} и x_{46} .

Дополнительная теорема обосновывает предпринятое выше "сокращение" на выражение x_{30} при получении x_{31} . В рамках вспомогательной задачи такое сокращение не получилось бы из-за отсутствия указания, что h не равно 0. Это ограничение обеспечивается антецедентом дополнительной теоремы. Чтобы учесть ее антецеденты, составляется список x_{50} , полученный добавлением к антецедентам исходной теоремы результатов подстановки в антецеденты дополнительной теоремы выражений x_{30} , x_{31} и Z вместо переменных x_{44} , x_{45} и x_{46} .

Далее вводится заготовка x_{51} новой характеристики "уравнвариант". Первоначально она совпадает с такой характеристикой текущей теоремы. Предпринимается просмотр элементов x_{53} списка x_{52} конъюнктивных членов фильтра исходной характеристики. Как только обнаруживается утверждение x_{53} длины 2, первый операнд которого не попадает в список x_{13} , к списку x_{50} добавляется результат замены корневого операнда утверждения x_{53} на переменную x_{29} . В нашем примере добавляется " h — целое". Затем просматриваются содержащие переменную Z элементы x_{56} списка x_{52} , заголовок которых отличен от заголовка утверждения x_{53} . В эти элементы предпринимается подстановка терма

"x23($Z, x30$)" вместо переменной Z . В заключение просмотра переменной x51 переприсваивается конъюнкция термов x52, пополненная добавленным к списку x50 утверждением.

Далее создается импликация с антецедентами x50, консеквентом которого служит эквивалентность равенства выражения x31 переменной Z утверждению x32. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с характеристикой x51.

3.126 Характеристика "уравндробь"

Характеристикой "уравндробь" сопровождаются теоремы, среди антецедентов которых имеется равенство для координат множества объектов.

Обобщение теоремы

1. Обобщение антецедента, задающего уравнение множества объектов: выделение невырожденного не зависящего от варьируемых переменных подвыражения с уникальным параметров и замена его на новый параметр.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcefABK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(e, K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + ft \ \& \ y = b + ct \ \& \ t - \text{число})) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (a + f, b + c) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow e = \text{прямая}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{abdefABK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(e, K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + ft \ \& \ y = b + t(d - b) \ \& \ t - \text{число})) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (a + f, d) \ \& \ f - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow e = \text{прямая}(AB))$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов. В нем находится равенство x10, у которого в одной части расположен описатель "класс", а в другой - обозначение координат. Переменной x12 присваивается вхождение описателя, переменной x11 - вхождение обозначения координат, переменной x13 - символ по вхождению x11. В нашем примере x10 имеет вид "коорд(e, K) = set_{xy}($\exists_t(x = a + ft \ \& \ y = b + t(d - b) \ \& \ t - \text{число})$)", x13 - символ "коорд". Переменной x14 присваивается связывающая приставка описателя x12, переменной x15 - подтерм x12, переменной x16 - список параметров выражения x15. В нашем примере x16 - список a, b, d, f . В списке x16 выбирается переменная x17, имеющая единственное вхождение в терм x15. В нашем примере - переменная d . Переменной x18 присваивается ее вхождение в терм x15. Переменной x19 присваивается объединенный список всех связывающих приставок кванторов и описателей терма x15, внутри которых расположено x18. В нашем примере x19 состоит из переменных x, y, t .

Переменной x20 присваивается максимальный надтерм вхождения x18, параметры которого не пересекаются со списком x19. Переменной x18 переприсваивается вхождение такого надтерма. Если в процессе продвижения к надтерму

встречается ассоциативный и коммутативный символ, то x_{20} группируется из его операндов, не содержащих переменных x_{19} . Дополнительно могут предприниматься попытки воспользоваться преобразованиями перестановочного типа, выявляющими операнд текущего надтерма, содержащий x_{17} и не содержащий переменных x_{19} . Для таких преобразований используется справочник поиска теорем "перестановки".

В нашем примере x_{20} имеет вид " $d - t$ ". Переменной x_{21} присваивается список антецедентов исходной теоремы, отличных от x_{10} . Переменной x_{23} присваивается тип значений выражений с тем же заголовком, что у терм x_{20} . В нашем примере - символ "число". Выбирается переменная x_{24} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная c . Переменной x_{25} присваивается пара утверждений "равно($x_{24} x_{20}$)", " $x_{23}(x_{24})$ ". В нашем примере - пара " $d = b + c, c - \text{число}$ ". Переменной x_{26} присваивается результат переориентировки равенств в списке x_{21} таким образом, чтобы переменная x_{17} находилась справа.

Решается задача на описание с посылками x_{26} и условиями x_{25} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{17} ". Те ее посылки, которые суть равенства с переменной x_{17} в правой части, помечаются комментарием "ориентация равенства", блокирующим перестановку частей равенства. Ответ задачи присваивается переменной x_{28} . В нашем примере он имеет вид " $d = b + c \ \& \ c - \text{число}$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{29} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{28} . В нем выбирается равенство x_{30} с переменной x_{17} в левой части. Переменной x_{31} присваивается правая часть данного равенства. Переменной x_{32} присваивается однобуквенное выражение x_{24} . Если x_{20} было сформировано как часть операндов подтерма x_{18} , то переменной x_{32} переприсваивается результат подстановки выражения x_{31} вместо переменной x_{17} в подтерм x_{18} .

Переменной x_{34} присваивается результат подстановки x_{31} вместо x_{17} в консеквент исходной теоремы, переменной x_{35} - результат замены вхождения x_{18} в терм x_{15} на выражение x_{32} . Переменной x_{36} присваивается равенство подтерма x_{11} выражению x_{35} . Переменной x_{37} присваивается объединение списка результатов подстановки x_{31} вместо x_{17} в утверждения списка x_{21} с отличными от x_{30} утверждениями набора x_{29} и с утверждением x_{36} . Затем создается теорема с антецедентами x_{37} и консеквентом x_{34} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Обобщение антецедента, задающего уравнение множества объектов: выделение одноместной операции типа отрицания над уникальным параметром и замена его на новый параметр.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acdABK} (\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) = \text{set}_{xy}(d + ay + cx + x^2 + y^2 = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ 0 < -d + (a^2 + c^2)/4 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (-c/2, -a/2))$$

из теоремы

$\forall_{acdABK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) = \text{set}_{xy}(d + ay - cx + x^2 + y^2 = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ 0 < -d + (a^2 + c^2)/4 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (c/2, -a/2))$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x9 присваивается список антецедентов. В нем находится равенство x10, у которого в одной части расположен описатель "класс", а в другой - обозначение координат. Переменной x12 присваивается вхождение описателя, переменной x11 - вхождение обозначения координат, переменной x13 - символ по вхождению x11. В нашем примере x10 имеет вид "коорд(окружность(AB), K) = set_{xy}(d + ay - cx + x² + y² = 0 & x - число & y - число)", x13 - символ "коорд". Переменной x14 присваивается связывающая приставка описателя x12, переменной x15 - подтерм x12, переменной x16 - список параметров выражения x15. В нашем примере x16 - список a, c, d. В списке x16 выбирается переменная x17, имеющая единственное вхождение в терм x15. В нашем примере - переменная c. Переменной x18 присваивается ее вхождение в терм x15. Переменной x19 присваивается объединенный список всех связывающих приставок кванторов и описателей терма x15, внутри которых расположено x18. В нашем примере x19 состоит из переменных x, y.

Дальше начинаются отличия. Переменной x20 присваивается вхождение, непосредственным операндом которого служит x18. Проверяется, что число операндов вхождения x20 не менее 2. Переменной x21 присваивается вхождение, операндом которого служит x20. Проверяется, что число его операндов равно 1, и переменной x22 присваивается символ по вхождению x21. В нашем примере x21 - вхождение выражения "-cx", x22 - символ "минус". Справочник "отрицание" усматривает, что двойное применение операции x22 не изменяет исходного значения. Справочник "заменазнака" усматривает возможность отнесения внешнего знака "минус" к операнду x18 операции x20. При таком отнесении сам знак может измениться и превратиться в некоторую другую одноместную операцию P, извлекаемую из результата обращения к справочнику "заменазнака". В нашем примере P совпадает с x22. Переменной x27 присваивается выражение P(x17). В нашем примере - "-c". Переменной x28 присваивается список результатов подстановки выражения x27 вместо переменной x17 в утверждения x9, переменной x29 - результат такой же подстановки в консеквент исходной теоремы. Затем создается импликация с антецедентами x28 и консеквентом x29. Она обрабатывается операторами "полныепосылки" и "нормтеорема", после чего регистрируется в списке вывода.

3. Обобщение антецедента, задающего уравнение множества объектов: домножение обеих частей двуместного отношения на новый параметр и дистрибутивная развертка.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{abcdABK}(\neg(b = 0) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) = \text{set}_{xy}(aby + bcx + bd + bx^2 + by^2 = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (-c/2, -a/2))$

из теоремы

$$\forall_{acdABK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) = \text{set}_{xy}(d + ay + cx + x^2 + y^2 = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (-c/2, -a/2))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab = bc \leftrightarrow a = c)$$

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов. В нем находится равенство x10, у которого в одной части расположен описатель "класс", а в другой - обозначение координат. Переменной x12 присваивается вхождение описателя, переменной x11 - вхождение обозначения координат, переменной x13 - символ по вхождению x11. В нашем примере x10 имеет вид "коорд(окружность(AB), K) = set_{xy}(d + ay + cx + x² + y² = 0 & x - число & y - число)", x13 - символ "коорд". Переменной x14 присваивается связывающая приставка описателя x12, переменной x15 - набор конъюнктивных членов утверждения под описателем. В наборе x15 выбирается утверждение x16, имеющее два корневых операнда. В нашем примере оно имеет вид "d + ay + cx + x² + y² = 0". Переменной x19 присваивается тот корневой операнд утверждения x16, который имеет переменную из связывающей приставки x14. Переменной x18 присваивается вхождение другого операнда. Поверяется, что подтерм x18 не содержит переменных списка x14. Переменной x20 присваивается заголовок утверждения x16. Если это утверждение - равенство, то x20 переписывается тип значений операндов данного равенства. В нашем примере значением переменной x20 становится символ "число".

Справочник поиска теорем "коэфф" определяет по символу x20 указанную выше первую дополнительную теорему. Переменной x25 присваивается ее заменяемая часть. В нашем примере - равенство "ab = bc". Переменной x26 присваивается заголовок первого операнда терма x25. В нашем примере - символ "умножение". Справочник поиска теорем "дистрибразвертка" определяет по x26 указанную выше вторую дополнительную теорему. Переменной x31 присваивается заменяющая часть консеквента второй дополнительной теоремы. В нашем примере - левая часть; она имеет вид "ab + ac". Проверяется, что заголовок x32 выражения x31 равен заголовку выражения x19. В нашем примере x32 - символ "плюс". Переменной x33 присваивается список корневых операндом выражения x19. В нашем примере он состоит из выражений "d", "ay", "cx", "x²", "y²".

Проверяется избыточность домножения - существование в списке x33 выражения, отличного от переменной либо являющегося переменной связывающей приставки x14, причем, с точностью до отбрасывания корневой одноместной операции, не являющегося результатом применения операции x26 к операндам, среди которых встречается переменная, не входящая в список x14.

Выбирается переменная x34, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b. Переменной x35 присваивается результат соединения опера-

цией x32 результатов соединения операцией x26 элементов списка x33 с переменной x34. Иными словами, результат "домножения" левой части уравнения на b . Переменной x36 присваивается результат соединения операцией x26 подтерма x18 и переменной x34. Иными словами, результат "домножения" правой части. Переменной x37 присваивается равенство выражений x35 и x36, с сохранением ориентации исходной теоремы.

Переменной x38 присваивается параметр утверждения x25, имеющий в нем более одного вхождения. В нашем примере - параметр b . Переменной x39 присваивается заменяющая часть первой дополнительной теоремы. Переменным x40 и x41 присваиваются корневые операнды утверждения x39. В нашем примере - переменные a и c . Переменной x42 присваивается список результатов подстановки в antecedentes первой дополнительной теоремы переменной x34, первого корневого операнда утверждения x16 и его второго корневого операнда вместо переменных x38, x40 и x41. Переменной x43 присваивается объединение отличных от x10 утверждений списка x9, утверждений x42 и равенства, полученного из x10 заменой подутверждения x16 на x37.

Создается импликация с antecedентами x43 и тем же консеквентом, что у исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и, после проверки отсутствия пар переменных, встречающихся лишь вместе и под одной и той же ассоциативно-коммутативной операцией, регистрируется в списке вывода.

4. Отбрасывание избыточного условия на параметры уравнения, представленного в antecedентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acdABK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) = \text{set}_{xy}(d + ay + cx + x^2 + y^2 = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (-c/2, -a/2))$$

из теоремы

$$\forall_{acdABK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) = \text{set}_{xy}(d + ay + cx + x^2 + y^2 = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ 0 < -d + (a^2 + c^2)/4 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (-c/2, -a/2))$$

Переменной x9 присваивается список antecedентов. В нем находится равенство x10, у которого в одной части расположен описатель "класс", а в другой - обозначение координат. Переменной x12 присваивается вхождение описателя, переменной x11 - вхождение обозначения координат, переменной x13 - символ по вхождению x11. В нашем примере x10 имеет вид "коорд(окружность(AB), K) = $\text{set}_{xy}(d + ay + cx + x^2 + y^2 = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число})$ ", x13 - символ "коорд". Переменной x14 присваивается связывающая приставка описателя x12, переменной x15 - подтерм x12, переменной x16 - список параметров выражения x15. В нашем примере x16 - список a, c, d . Переменной x17 присваивается список утверждений, используемых для сопровождения равенства x10 по о.д.з. В списке x9 выбирается элементарное утверждение x18, отличное от x10 и не входящее в список x17. Проверяется, что его список параметров включается в список x16. В нашем примере x18 имеет вид " $0 < -d + (a^2 + c^2)/4$ ". Проверяется,

что из утверждений списка x_9 , отличных от x_{10} и x_{18} , усматривается непустота множества - первого операнда координатного выражения x_{11} . В нашем примере - множества "окружность(AB)".

Переменной x_{19} присваивается результат добавления к списку утверждений набора x_9 , отличных от x_{10} и x_{18} , отрицания утверждения x_{18} . Переменной x_{20} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под описателем x_{12} . Решается задача на описание с посылками x_{19} и условиями x_{20} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{14} ", "параметры x_{14} ". В нашем примере посылки суть " $\neg(A = B)$ ", " a - число", " c - число", " d - число", " A - точка", " B - точка", "прямокоорд(K)", " $\neg(0 < -d + (a^2 + c^2)/4)$ ". Условия суть " $d + ay + cx + x^2 + y^2 = 0$ ", " x - число", " y - число". Неизвестные - x, y .

Ответ присваивается переменной x_{22} . В нашем примере он имеет вид " $0 \leq -4d + a^2 + c^2$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{23} присваивается список параметров утверждений x_{22} и x_{18} , переменной x_{24} - объединение списка отличных от x_{10} и x_{18} утверждений набора x_9 , параметры которых включаются в список x_{23} с набором конъюнктивных членов утверждения x_{22} и с отрицанием утверждения x_{18} . Решается задача на описание с единственной посылкой "истина" и списком условий x_{24} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{23} ". В нашем примере условия суть " a - число", " c - число", " d - число", " $\neg(0 < -d + (a^2 + c^2)/4)$ ", " $0 \leq -4d + a^2 + c^2$ ".

Ответ присваивается переменной x_{26} . В нашем примере он имеет вид " c - число & $d = (a^2 + c^2)/4$ & a - число". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ".

Если ответ x_{26} отличен от символа "ложь", то переменной x_{27} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{26} . Проверяется, что среди них имеется равенство переменной не содержащему этой переменной выражению. Переменной x_{28} присваивается объединение списков x_{19} и x_{27} , после чего решается задача на описание с посылками x_{28} и условиями x_{20} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{14} ". В нашем примере посылки суть " $\neg(A = B)$ ", " a - число", " c - число", " d - число", " A - точка", " B - точка", "прямокоорд(K)", " $0 \leq d - (a^2 + c^2)/4$ ", " c - число", " $d = (a^2 + c^2)/4$ ", " a - число". Условия суть " $d + ay + cx + x^2 + y^2 = 0$ ", " x - число", " y - число". Неизвестные - x, y .

Ответ присваивается переменной x_{30} . В нашем примере он имеет вид " $x = -c/2$ & $y = -a/2$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{31} присваивается равенство подтерма x_{11} выражению "класс(x_{14} x_{30})". В нашем примере - "коорд(окружность(AB), K) = $\text{set}_{xy}(x = -c/2$ & $y = -a/2)$ ". Переменной x_{32} присваивается результат добавления утверждения x_{31} к списку x_{28} , затем решается задача на исследование с посылками x_{32} и целью "противоречие". Проверяется, что после решения в ее списке посылок оказывается константа "ложь".

Если указанные проверки прошли успешно, все переменные начиная с x_{27} снова оказываются не определены. Тогда переменной x_{27} присваивается результат

удаления утверждениях18 из списка х9, переменной х28 - консеквент исходной теоремы. Если х18 входит в список необходимых для сопровождения термина х28 по о.д.з. утверждений, то х28 заменяется на конъюнкцию х28 и х18. Затем создается импликация с антецедентами х27 и консеквентом х28, которая регистрируется в списке вывода.

5. Варьирование системы координат для обобщения тождества, выражающего характеристику объекта через параметры уравнения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abefghqr}(\text{коорд}(q, r) = \text{set}_{kl}(h + bk^2 + ek + fl^2 + gl = 0 \ \& \ k - \text{число} \ \& \ l - \text{число}) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ \text{прямокоорд}(r) \ \& \ \text{эллипс}(q) \ \& \ a = 4bfh - bg^2 - fe^2 \rightarrow \text{большаяось}(q) = \max(\sqrt{-a/b/|f|}, \sqrt{-a/f/|b|}))$$

из теоремы

$$\forall_{acdEK}(\text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(c + ax^2 + dy^2 = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \ \& \ \text{эллипс}(E) \rightarrow \text{большаяось}(E) = 2\max(\sqrt{-c/a}, \sqrt{-c/d}))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{EKabcde}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ \neg(a = 0) \ \& \ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + cy^2 + bx + dy + e = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \rightarrow \exists_{ABCQ}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ (A, B, C) = Q \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (-b/(2a), -d/(2c)) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (-b/(2a) + 1, -d/(2c)) \ \& \ \text{коорд}(C, K) = (-b/(2a), -d/(2c) + 1) \ \& \ \text{коорд}(E, Q) = \text{set}_{uv}(4a^2cu^2 + 4ac^2v^2 - b^2c - d^2a + 4ace \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число}))$$

Переменной х9 присваивается список антецедентов. В нем находится равенство х10, у которого в одной части расположен описатель "класс", а в другой - обозначение координат. Переменной х12 присваивается вхождение описателя, переменной х11 - вхождение обозначения координат, переменной х13 - символ по вхождению х11. В нашем примере х10 имеет вид $\text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(c + ax^2 + dy^2 = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число})$.

Переменной х14 присваивается список параметров равенства х10. В нашем примере - "a, c, d, E, K". Проверяется, что он включает все параметры антецедентов. Справочник поиска теорем "нормкоорд" определяет по х13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной х17 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере х17 имеет вид:

$$\forall_{qrbefgh}(b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ \text{прямокоорд}(r) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ \text{коорд}(q, r) = \text{set}_{kl}(bk^2 + fl^2 + ek + gl + h = 0 \ \& \ k - \text{число} \ \& \ l - \text{число}) \rightarrow \exists_{mnp}(m - \text{точка} \ \& \ n - \text{точка} \ \& \ p - \text{точка} \ \& \ (m, n, p) = s \ \& \ \text{коорд}(m, r) = (-e/(2b), -g/(2f)) \ \& \ \text{коорд}(n, r) = (-e/(2b) + 1, -g/(2f)) \ \& \ \text{коорд}(p, r) = (-e/(2b), -g/(2f) + 1) \ \& \ \text{коорд}(q, s) = \text{set}_{ij}(4b^2fi^2 + 4bf^2j^2 - e^2f - g^2b + 4bfh \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число}))$$

Переменной x_{18} присваивается вхождение консеквента теоремы x_{17} . Проверяется, что этот консеквент - квантор существования. Переменной x_{19} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором x_{18} . В этом списке находится равенство x_{20} с описателем "класс" в одной части и выражением для координат x_{13} в другой. Переменной x_{22} присваивается вхождение описателя "класс", переменной x_{21} - вхождение выражения для координат. В нашем примере x_{20} имеет вид "коорд(q, s) = set $_{ij}(4b^2fi^2 + 4bf^2j^2 - e^2f - g^2b + 4bfh \& i - \text{число} \& j - \text{число})$ ".

Определяется подстановка S вместо переменных x_{14} , унифицирующая термы x_{10} и x_{20} . Оператору "унификация" передается опция "плюс", усиливающая его действия.

Проверяется отсутствие у исходной теоремы характеристик с заголовками "характ", "системыкоординат". Переменной x_{24} присваивается объединение списка антецедентов теоремы x_{17} со списком результатов применения подстановки S к отличным от x_{10} антецедентам исходной теоремы. Переменной x_{25} присваивается результат применения подстановки S к консеквенту исходной теоремы. Переменной x_{26} присваивается результат обработки списка x_{24} оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x_{25} . Затем создается импликация с антецедентами x_{26} и консеквентом x_{25} . Она обрабатывается операторами "нормтеорема" и "сокращтеор", после чего регистрируется в списке вывода.

6. Попытка развязки параметров уравнения для координат множества объектов, не входящих в консеквент.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcdefklmn} BCD(\neg(B = C) \& \text{коорд}(\text{прямая}(BC), D) = \text{set}_{vwA}(v - \text{число} \& w - \text{число} \& A - \text{число} \& \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (l + v, m + w, n + A))) \& \text{коорд}(\text{вектор}(AC), D) = (b, c, k) \& d - \text{число} \& e - \text{число} \& f - \text{число} \& l - \text{число} \& m - \text{число} \& n - \text{число} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{Трехмерн}(D) \rightarrow \text{пропорцнаборы}((b, c, k), (d, e, f)))$$

из теоремы

$$\forall_{abcghijklpqr} K(\neg(a = g) \& \text{коорд}(g, K) = (h, i, j) \& \text{коорд}(\text{прямая}(ag), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \& y - \text{число} \& z - \text{число} \& \text{пропорцнаборы}((p, q, r), (x - h, y - i, z - j))) \& \text{коорд}(\text{вектор}(ga), K) = (b, c, k) \& p - \text{число} \& q - \text{число} \& r - \text{число} \& a - \text{точка} \& g - \text{точка} \& \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{пропорцнаборы}((b, c, k), (p, q, r)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABKabcdefpqr} (A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& \neg(A = B) \& \text{Трехмерн}(K) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& d - \text{число} \& e - \text{число} \& f - \text{число} \& \text{коорд}(A, K) = (p, q, r) \& \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \& y - \text{число} \& z - \text{число} \& \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (x + d, y + e, z + f))) \rightarrow \text{tbody}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \& y - \text{число} \& z - \text{число} \& \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (x - p, y - q, z - r))))$$

Переменной x_9 присваивается список антецедентов. В нем находится равенство x_{10} , у которого в одной части расположен описатель "класс", а в другой -

обозначение координат. Переменной x12 присваивается вхождение описателя, переменной x11 - вхождение обозначения координат, переменной x13 - символ по вхождению x11. В нашем примере x10 имеет вид "коорд(прямая(ag), K) = set_{xyz}(x - число & y - число & z - число & пропорцнаборы((p, q, r), (x - h, y - i, z - j)))".

Переменной x14 присваивается консеквент, переменной x15 - список его параметров. В нашем примере - список b, c, k, p, q, r . Переменной x16 присваивается подтерм x12, переменной x17 - список параметров терма x16, не входящих в список x15. В нашем примере x17 состоит из переменных h, i, j . Проверяется, что список x17 непуст. Проверяется наличие существенного antecedента теоремы, отличного от x10 и содержащего параметр из списка x17. Проверяется, что терм x16 имеет единственный подтерм максимальной сложности, и этот подтерм присваивается переменной x20. В нашем примере x20 имеет вид "пропорцнаборы((p, q, r), (x-h, y-i, z-j))". Проверяется, что параметры терма x20 пересекаются со списком x17.

Справочник поиска теорем "свобпарам" определяет по заголовку терма x20 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x23 присваивается вхождение antecedента исходной теоремы, равного x10. Процедура "выводпосылки" определяет результат x24 последовательного применения исходной и дополнительной теорем при унификации antecedента x23 с консеквентом дополнительной теоремы. Переменной x25 присваивается список antecedентов теоремы x24, переменной x26 - ее консеквент. При помощи вспомогательной задачи на исследование проверяется непротиворечивость списка x25. Затем определяется результат x27 обработки списка x25 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x26. Создается импликация с antecedентами x27 и консеквентом x26. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование теоремы для варьирования дополнительной теоремы

1. Варьирование системы координат для получения утверждения существования канонической системы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefghqr}(af < 0 \ \& \ 0 < bf \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ \text{прямкоорд}(r) \ \& \ \text{коорд}(q, r) = \text{set}_{kl}(h + bk^2 + dk + fl^2 + gl = 0 \ \& \ k - \text{число} \ \& \ l - \text{число}) \ \& \ b(f - b) \leq 0 \ \& \ a = 4bfh - bg^2 - fd^2 \ \& \ c = -d/(2b) \ \& \ e = -g/(2f) \rightarrow \exists_{mnp}(m, n, p) = s \ \& \ \text{коорд}(m, r) = (c, e) \ \& \ \text{коорд}(n, r) = (c, e + 1) \ \& \ \text{коорд}(p, r) = (c + 1, e) \ \& \ \text{коорд}(q, s) = \text{set}_{ji}(a + 4bf^2j^2 + 4fb^2i^2 = 0 \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число}) \ \& \ m - \text{точка} \ \& \ n - \text{точка} \ \& \ p - \text{точка} \ \& \ \text{прямкоорд}(s) \ \& \ \text{каноничкоорд}(s, q))$$

из теоремы

$$\forall_{EKace}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + cy^2 + e = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ 0 < ac \ \& \ 0 \leq e(a - c) \ \& \ ce < 0 \rightarrow \text{каноничкоорд}(K, E)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{EKabcde}(a\text{-число} \& b\text{-число} \& c\text{-число} \& d\text{-число} \& e\text{-число} \& \text{прямкоорд}(K) \& \neg(c=0) \& \neg(a=0) \& \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + cy^2 + bx + dy + e = 0 \& x\text{-число} \& y\text{-число}) \rightarrow \exists_{ABCQ}(A\text{-точка} \& B\text{-точка} \& C\text{-точка} \& (A, B, C) = Q \& \text{коорд}(A, K) = (-b/(2a), -d/(2c)) \& \text{коорд}(C, K) = (-b/(2a) + 1, -d/(2c)) \& \text{коорд}(B, K) = (-b/(2a), -d/(2c) + 1) \& \text{коорд}(E, Q) = \text{set}_{vu}(4a^2cu^2 + 4ac^2v^2 - b^2c - d^2a + 4ace \& u\text{-число} \& v\text{-число})))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы одного из предшествующих приемов. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x9 присваивается список антецедентов. В нем находится равенство x10, у которого в одной части расположен описатель "класс", а в другой - обозначение координат. Переменной x12 присваивается вхождение описателя, переменной x11 - вхождение обозначения координат, переменной x13 - символ по вхождению x11. В нашем примере x10 имеет вид "коорд(E, K) = set_{xy}($ax^2 + cy^2 + e = 0 \& x$ - число & y - число)".

Переменной x14 присваивается список параметров равенства x10. В нашем примере - " a, c, e, E, K ". Проверяется, что он включает все параметры антецедентов. Справочник поиска теорем "нормкоорд" определяет по x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x17 имеет вид:

$$\forall_{qrbdfgh}(b\text{-число} \& d\text{-число} \& f\text{-число} \& g\text{-число} \& h\text{-число} \& \text{прямкоорд}(r) \& \neg(f=0) \& \neg(b=0) \& \text{коорд}(q, r) = \text{set}_{kl}(bk^2 + fl^2 + dk + gl + h = 0 \& k\text{-число} \& l\text{-число}) \rightarrow \exists_{mnp}(m\text{-точка} \& n\text{-точка} \& p\text{-точка} \& (m, n, p) = s \& \text{коорд}(m, r) = (-d/(2b), -g/(2f)) \& \text{коорд}(n, r) = (-d/(2b) + 1, -g/(2f)) \& \text{коорд}(p, r) = (-d/(2b), -g/(2f) + 1) \& \text{коорд}(q, s) = \text{set}_{ij}(4b^2fi^2 + 4bf^2j^2 - d^2f - g^2b + 4bfh \& i\text{-число} \& j\text{-число})))$$

Переменной x18 присваивается вхождение консеквента теоремы x17. Проверяется, что этот консеквент - квантор существования. Переменной x19 присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором x18. В этом списке находится равенство x20 с описателем "класс" в одной части и выражением для координат x13 в другой. Переменной x22 присваивается вхождение описателя "класс", переменной x21 - вхождение выражения для координат. В нашем примере x20 имеет вид "коорд(q, s) = set_{ij}($4b^2fi^2 + 4bf^2j^2 - d^2f - g^2b + 4bfh \& i$ - число & j - число)".

Определяется подстановка S вместо переменных x14, унифицирующая термы x10 и x20. Оператору "унификация" передается опция "плюс", усиливающая его действия.

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что исходная теорема имеет характеристику с заголовком "характ" либо "системыкоординат". Переменной x24 присваивается список результатов применения подстановки S к отличным от x10 антецедентам исходной теоремы, а также к ее консеквенту. Переменной x25

присваивается связывающая приставка квантора x_{18} . Переменной x_{26} присваивается список утверждений набора x_{24} , параметры которых пересекаются со списком x_{25} , переменной x_{27} - остаток списка x_{24} . Переменной x_{28} присваивается объединение списка антецедентов теоремы x_{17} и списка x_{27} . Переменной x_{29} присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x_{25} на конъюнкцию утверждений списков x_{19} и x_{26} . Переменной x_{30} присваивается результат обработки списка x_{28} оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x_{29} . Создается импликация с антецедентами x_{30} и консеквентом x_{29} . Она обрабатывается оператором "сокращтеор" и регистрируется в списке вывода.

- Использование параметрического описания координат точки множества для получения параметрического описания уравнения множества, определяемого при помощи данной точки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdehijklBCK}(\neg(a = s) \& \neg(B = C) \& \text{коорд}(s, K) = (b, d, e) \& \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \& y - \text{число} \& z - \text{число} \& \text{пропорцнаборы}((j, k, l), (c + x, h + y, i + z))) \& a \in \text{прямая}(BC) \& c - \text{число} \& h - \text{число} \& i - \text{число} \& j - \text{число} \& k - \text{число} \& l - \text{число} \& a - \text{точка} \& s - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{пропорцнаборы}((p - b, q - d, r - e), (jm - b - c, km - d - h, lm - e - i)))$$

из теоремы

$$\forall_{achijklBCK}(\neg(B = C) \& \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \& y - \text{число} \& z - \text{число} \& \text{пропорцнаборы}((j, k, l), (c + x, h + y, i + z))) \& a \in \text{прямая}(BC) \& c - \text{число} \& h - \text{число} \& i - \text{число} \& j - \text{число} \& k - \text{число} \& l - \text{число} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \exists_m(\text{коорд}(a, K) = (jm - c, km - h, lm - i) \& m - \text{число}))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABabcdefK}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& \text{Трехмерн}(K) \& \neg(A = B) \& \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \& \text{коорд}(B, K) = (d, e, f) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x - a, y - b, z - c), (d - a, e - b, f - c)) \& x - \text{число} \& y - \text{число} \& z - \text{число}))$$

Переменной x_8 присваивается входжение консеквента, переменной x_9 - список антецедентов. Переменной x_{10} присваивается связывающая приставка квантора существования x_8 , переменной x_{11} - список конъюнктивных членов утверждения под этим квантором. В списке x_{11} выбирается равенство x_{12} , в левой части которого расположено выражение для координат, а в правой - выражение с заголовком "набор". Переменной x_{13} присваивается название координат. В нашем примере - x_{12} имеет вид " $\text{коорд}(a, K) = (jm - c, km - h, lm - i)$ ", x_{13} - символ "коорд". Определяется раздел x_{14} , к которому относится символ x_{13} . В нашем примере - "системыкоординат". В этом разделе находится теорема с характеристикой "уравмножество". В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x_{21} присваивается входжение ее консеквента. Проверяется, что этот консеквент - равенство, в левой части которого расположено выражение с заголовком x_{13} . Переменной x_{22} присваивается первый

операнд данного выражения. В нашем примере - "прямая(AB)". Проверяется, что выражение x_{22} имеет единственное вхождение в дополнительную теорему. Проверяется наличие у дополнительной теоремы антецедента, представляющего собой равенство, первым операндом которого служит выражение с заголовком x_{13} , а вторым - выражение "набор(...)" с тем же числом операндов, что у правой части равенства x_{12} . Проверяется, что консеквент дополнительной теоремы не содержит символа "существует", причем все переменные теоремы входят в этот консеквент. Переменной x_{23} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{23} имеет вид:

$$\forall_{stbdefgnu}(s - \text{точка} \ \& \ t - \text{точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(u) \ \& \ \neg(s = t) \ \& \ \text{коорд}(s, u) = (b, d, e) \ \& \ \text{коорд}(t, u) = (f, g, n) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(st), u) = \text{set}_{pqr}(\text{пропорцнаборы}((p - b, q - d, r - e), (f - b, g - d, n - e)) \ \& \ p - \text{число} \ \& \ q - \text{число} \ \& \ r - \text{число}))$$

Переменной x_{24} присваивается список антецедентов теоремы x_{23} . В нем находится равенство x_{25} , заголовок левой части которого - символ x_{13} , а правой части - символ "набор". В нашем примере x_{25} имеет вид "коорд(t, u) = (f, g, n)". Переменной x_{26} присваивается список параметров равенства x_{25} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{26} , переводящая равенство x_{25} в x_{12} . Переменной x_{28} присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям списка x_{24} , переменной x_{29} - результат применения этой подстановки к консеквенту теоремы x_{23} . Список x_{28} подразбивается на подсписок x_{30} утверждений, содержащих переменную списка x_{10} , и подсписок x_{31} остальных утверждений. Проверяется, что среди параметров утверждения x_{29} встречаются переменные списка x_{10} . Переменной x_{32} присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x_{10} на конъюнкцию отличных от x_{12} утверждений списка x_{11} , утверждений списка x_{30} и утверждения x_{29} . Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения списков x_9 и x_{31} , а консеквент - утверждение x_{32} . Она обрабатывается оператором "норм-теорема" и регистрируется в списке вывода.

Замена переменных в теореме

1. Переход к теореме, усматривающей тип множества, заданного уравнением.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcefK}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ \neg(c^2 + f^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(e, K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + ft \ \& \ y = b + ct \ \& \ t - \text{число})) \rightarrow \text{Прямая}(e))$$

из теоремы

$$\forall_{abcefABK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(e, K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + ft \ \& \ y = b + ct \ \& \ t - \text{число})) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (a + f, b + c) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow e = \text{прямая}(AB))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_A(\text{Прямая}(A) \leftrightarrow \exists_{BC}(B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A = \text{прямая}(BC)))$$

Переменной x_9 присваивается список антецедентов. В нем находится равенство x_{10} , у которого в одной части расположен описатель "класс", а в другой - обозначение координат. Переменной x_{12} присваивается вхождение описателя, переменной x_{11} - вхождение обозначения координат, переменной x_{13} - символ по вхождению x_{11} . В нашем примере x_{10} имеет вид "коорд(e, K) = set_{xy}($\exists_t(x = a + ft \ \& \ y = b + ct \ \& \ t - \text{число})$)", x_{11} - вид "коорд(e, K)".

Переменной x_{14} присваивается переменная - первый операнд координатного выражения x_{11} . В нашем примере - переменная e . Проверяется, что консеквент теоремы - равенство, в одной из частей которого расположена переменная x_{14} . Переменной x_{17} присваивается заголовок другой части равенства. В нашем примере - символ "прямая". Справочник поиска теорем "называть" определяет по x_{17} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{20} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{20} имеет вид:

$$\forall_d(\text{Прямая}(d) \leftrightarrow \exists_{gh}(g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ \neg(g = h) \ \& \ d = \text{прямая}(gh)))$$

Переменной x_{23} присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте теоремы x_{20} , которая имеет заголовок "существует", переменной x_{22} - вхождение другой части. Переменной x_{24} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования x_{23} . В нем находится равенство x_{25} , содержащее символ x_{17} . В нашем примере x_{25} имеет вид " $d = \text{прямая}(gh)$ ". Переменной x_{26} присваивается список параметров равенства x_{25} . Проверяется, что он включает в себя все переменные теоремы x_{20} . Находится подстановка S вместо переменных x_{26} , унифицирующая равенство x_{25} с консеквентом исходной теоремы. Переменной x_{28} присваивается объединение списка результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_{20} со списком результатов применения подстановки S к отличным от x_{25} утверждениям списка x_{24} . При помощи задач на доказательство проверяется, что все не содержащиеся в списке x_9 утверждения списка x_{28} суть следствия утверждений x_9 .

Переменной x_{29} присваивается результат применения подстановки S к подтерму x_{22} . В нашем примере он имеет вид "Прямая(e)". Переменной x_{30} присваивается список параметров утверждений x_{29} и x_{10} . В нашем примере - " e, a, b, c, f, K ". Переменной x_{31} присваивается список параметров антецедентов x_9 , не вошедших в список x_{30} . В нашем примере - список " A, B ". Переменной x_{32} присваивается список утверждений набора x_9 , имеющих параметр из списка x_{31} . Проверяется, что список x_{32} непуст. Переменной x_{33} присваивается список утверждений набора x_9 , не вошедших в список x_{32} и отличных от x_{10} .

Решается задача на описание с посылками x_{33} и условиями x_{32} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "неизвестные x_{31} ", "параметры x_{31} ". В нашем примере посылки суть " $c - \text{число}$ ", " $f - \text{число}$ ", "систкоорд(K)", условия - " $\neg(A = B)$ ", "коорд(A, K) = (a, b)", "коорд(B, K) = ($a + f, b + c$)", " $A - \text{точка}$ ", " $B - \text{точка}$ ". Неизвестные - A, B , причем они несущественные. Ответ задачи присваивается переменной x_{35} . В нашем примере он имеет вид " $(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число}) \ \& \ \neg(c = 0 \ \& \ f = 0) \ \& \ (a + f - \text{число} \ \& \ b + c - \text{число})$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и не содержит переменных списка x_{31} .

Переменной х36 присваивается объединение списка х33 со списком конъюнктивных членов утверждения х35, переменной х37 - результат обработки списка х36 оператором "нормантецеденты" относительно переменных х30. Затем создается импликация, антецедентами которой служат утверждения х37 и утверждение х10, а консеквентом - утверждение х29. Она регистрируется в списке вывода.

Варьирование антецедента

1. Переход от обычного задания класса к параметрическому.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{defghpqBK}(\neg(e^2 + g^2 = 0) \& \text{коорд}(d, K) = \text{set}_{jk}(\exists_i(j = f + ei \& k = h + gi \& i - \text{число})) \& \text{коорд}(B, K) = (p, q) \& e - \text{число} \& f - \text{число} \& g - \text{число} \& h - \text{число} \& \text{Прямая}(d) \& \text{систкоорд}(K) \& \text{Вектор}(B) \rightarrow d \parallel B \leftrightarrow gp - eq = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abcdpqBK}(\text{коорд}(d, K) = \text{set}_{xy}(c+ax+by = 0 \& x - \text{число} \& y - \text{число}) \& \text{коорд}(B, K) = (p, q) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& \text{Прямая}(d) \& \text{систкоорд}(K) \& \text{Вектор}(B) \rightarrow d \parallel B \leftrightarrow ap + bq = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& d - \text{число} \& \neg(a^2 + c^2 = 0) \rightarrow \text{set}_{xy}(\exists_t(x = at + b \& y = ct + d \& t - \text{число})) = \text{set}_{xy}(cx - ay + ad - bc = 0 \& x - \text{число} \& y - \text{число}))$$

Переменной х9 присваивается список антецедентов. В нем находится равенство х10, у которого в одной части расположен описатель "класс", а в другой - обозначение координат. Переменной х12 присваивается вхождение описателя, переменной х11 - вхождение обозначения координат, переменной х13 - символ по вхождению х11. В нашем примере х10 имеет вид "коорд(d, K) = set_{xy}($c + ax + by = 0 \& x - \text{число} \& y - \text{число}$)".

Проверяется, что среди антецедентов нет отличного от х10 равенства с описателем "класс" в правой части. Переменной х14 присваивается вхождение утверждения под описателем х12. Проверяется, что его заголовком не является квантор существования. Переменной х15 присваивается переменная - первый операнд координатного выражения х11. В нашем примере х15 - переменная d . Среди антецедентов находится утверждение х16 вида " $P(x15)$ ". В нашем примере - "Прямая(d)". Справочник поиска теорем "урвн" определяет по символу P указанную выше дополнительную теорему. Переменной х21 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок "класс". Проверяется, что утверждение под описателем х21 не имеет заголовка "существует". Переменной х24 присваивается вхождение в антецедент исходной теоремы выражения х12. Оператор "тождвывод" находит результат х25 преобразования вхождения х24 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы, применяемой так, что х21 является заменяемой частью. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.127 Характеристика "уравнкрив"

Характеристикой "уравнкрив" сопровождаются эквивалентности, определяющие общий вид уравнения для координат точек множества заданного типа.

Логические следствия теоремы

1. Извлечение приема усмотрения вида множества по его координатам.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcKP}(\neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{Прямая}(P))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCKP}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ P \subseteq \text{плоскость}(ABC) \rightarrow \text{Прямая}(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a - \text{число} \ \& \ _ \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ ax + by + c = 0)))$$

Переменной x10 присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте, которая представляет собой квантор существования. Переменной x11 присваивается объединение списка антецедентов со списком конъюнктивных членов утверждения под квантором x10. Затем создается импликация, антецеденты которой суть утверждения списка x11, а консеквент - противоположная часть эквивалентности. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Извлечение приема усмотрения ограничения на коэффициенты уравнения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcKP}(\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{Прямая}(P) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \neg(a^2 + b^2 = 0))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCKP}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ P \subseteq \text{плоскость}(ABC) \rightarrow \text{Прямая}(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a - \text{число} \ \& \ _ \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ ax + by + c = 0)))$$

Переменной x10 присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте, которая представляет собой квантор существования, переменной x9 - вхождение другой части. Переменной x11 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором x10, переменной x12 - список антецедентов. В списке x11 находится равенство x13 с описателем "класс" в правой части. В нашем примере - равенство "коорд(P, K) = set_{xy}(x - число & y - число & ax + by + c = 0)". Переменной x14 присваивается список остальных утверждений набора x11. Переменной x15 присваивается подсписок списка x14, образованный утверждениями, необходимыми для сопровождения по о.д.з. выражения x13, переменной x16 - оставшая часть списка x14. Проверяется, что среди утверждений x16 нет равенства. Переменной x17 присваивается список утверждений набора x16, имеющих своим заголовком один из символов "не", "меньше",

"меньшеилиравно". Проверяется, что список x17 непуст. Переменной x18 присваивается связывающая приставка квантора x10. В нашем примере - " a, b, c ". Определяется список x19 переменных, не входящих в исходную теорему, имеющий такую же длину, как список x18. В нашем примере x19 - " d, e, f ". Далее начинается цикл просмотра утверждений списка x17, причем некоторые из них будут сохраняться в накопителе x20, используемом другим приемом вывода теорем. Этот прием будет рассмотрен ниже.

В списке x17 выбирается утверждение x21. В нашем примере - " $\neg(a^2 + b^2 = 0)$ ". Переменной x22 присваивается результат замены в отрицании утверждения x21 переменных x18 на переменные x19. В нашем примере - " $d^2 + e^2 = 0$ ". Переменной x23 присваивается список результатов замены переменных x18 на x19 в утверждениях набора x15. Переменной x24 присваивается объединение списков x12, x23 и утверждения x22. Переменной x25 присваивается результат замены переменных x19 на x19 в правой части равенства x13. Переменной x27 присваивается утверждение "не(существует(x18 и(x26)))". При помощи задачи на доказательство проверяется, что x27 - следствие утверждений x24. Тогда утверждения x21 заносится в накопитель x20.

Переменной x29 присваивается объединение списков x12, x15, подтерма x9 и равенства x13. Затем создается импликация с антецедентами x29 и консеквентом x21. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Извлечение приема усмотрения существования множества заданного типа, имеющего заданные координаты.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcK}(\neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \exists_P(\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ \text{число}) \ \& \ \text{Прямая}(P)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCKP}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ P \subseteq \text{плоскость}(ABC) \rightarrow \text{Прямая}(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ ax + by + c = 0)))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x10 присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте, которая представляет собой квантор существования, переменной x9 - вхождение другой части. Переменной x11 присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором x10, переменной x12 - список антецедентов. В списке x11 находится равенство x13 с описателем "класс" в правой части. В нашем примере - равенство " $\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ ax + by + c = 0)$ ". Переменной x14 присваивается список остальных утверждений набора x11. Переменной x15 присваивается подтерм x9. В нашем примере - " $\text{Прямая}(P)$ ". Проверяется, что длина терма x15 равна 2, причем его корневой операнд - некоторая переменная x16. В нашем примере - переменная

P . Переменной x_{17} присваивается объединение списков x_{12} и x_{14} . Переменной x_{18} присваивается список всех утверждений набора x_{17} , которые содержат параметр x_{16} . Переменной x_{19} присваивается остаток набора x_{17} . При помощи задач на доказательство устанавливается, что все утверждения списка x_{18} суть следствия утверждений набора x_{19} , пополненного утверждениями x_{15} и x_{13} . Переменной x_{20} присваивается утверждение "существует(x_{16} и(x_{15} и x_{13}))". Затем создается импликация с антецедентами x_{19} и консеквентом x_{20} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Переход к импликации, дающей общий вид уравнения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCKP}(K = (A, B, C) \& P \subseteq \text{плоскость}(ABC) \& \text{Прямая}(P) \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow \exists_{abc}(\neg(a^2 + b^2 = 0) \& \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \& x - \text{число} \& y - \text{число}) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число}))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCKP}(\text{систкоорд}(K) \& K = (A, B, C) \& P \subseteq \text{плоскость}(ABC) \rightarrow \text{Прямая}(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& \neg(a^2 + b^2 = 0) \& \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \& y - \text{число} \& ax + by + c = 0))$$

Переменной x_{10} присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте, которая представляет собой квантор существования, переменной x_9 - вхождение другой части. Переменной x_{11} присваивается результат добавления подтерма x_9 к списку антецедентов теоремы. Создается импликация с антецедентами x_{11} , консеквентом которой служит подтерм x_{10} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Использование явного параметрического описания рассматриваемых объектов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{efABCK}(\neg(e = f) \& K = (A, B, C) \& e \in \text{плоскость}(ABC) \& f \in \text{плоскость}(ABC) \& e - \text{точка} \& f - \text{точка} \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow \exists_{abc}(\neg(a^2 + b^2 = 0) \& \text{коорд}(\text{прямая}(ef), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \& x - \text{число} \& y - \text{число}) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число}))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCKP}(\text{систкоорд}(K) \& K = (A, B, C) \& P \subseteq \text{плоскость}(ABC) \rightarrow \text{Прямая}(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& \neg(a^2 + b^2 = 0) \& \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \& y - \text{число} \& ax + by + c = 0))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_A(\text{Прямая}(A) \leftrightarrow \exists_{BC}(B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \neg(B = C) \& A = \text{прямая}(BC)))$$

Переменной x_{10} присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте, которая представляет собой квантор существования, переменной x_9 - вхождение другой части. Переменной x_{11} присваивается подтерм x_9 . Проверяется, что он имеет длину 2. Переменной x_{12} присваивается его заголовок,

переменной x_{13} - переменная, являющаяся его корневым операндом. В нашем примере x_{12} - символ "Прямая", x_{13} - переменная P . Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по символу x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{16} присваивается результат переобозначения в ней переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{16} имеет вид:

$$\forall_d(\text{Прямая}(d) \leftrightarrow \exists_{ef}(e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ \neg(e = f) \ \& \ d = \text{прямая}(ef)))$$

Переменной x_{18} присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте теоремы x_{16} , которая имеет заголовок x_{12} , переменной x_{19} - вхождение другой части, представляющей собой квантор существования. Переменной x_{20} присваивается переменная - операнд вхождения x_{18} . В нашем примере x_{20} - переменная d . Переменной x_{21} присваивается набор конъюнктивных членов утверждения под квантором x_{19} . В нем находится равенство x_{22} с переменной x_{20} в одной из своих частей. Переменной x_{25} присваивается другая часть данного равенства. В нашем примере x_{22} имеет вид " $d = \text{прямая}(ef)$ ". Переменной x_{26} присваивается результат подстановки выражения x_{25} вместо переменной x_{20} в подтерм x_{10} . Переменной x_{27} присваивается список антецедентов теоремы x_{16} . Переменной x_{28} присваивается список результатов подстановки выражения x_{25} вместо переменной x_{13} в антецеденты исходной теоремы. Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения списков x_{27} , x_{28} и отличные от x_{22} утверждения списка x_{21} . Консеквентом служит утверждение x_{26} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Ей передаются характеристики "общий", "координаты".

6. Условие существования множества точек заданного типа, содержащего точку с заданными координатами и имеющего заданное уравнение.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefK}(\neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(d, K) = (e, f) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \exists_P(\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ d \in P \ \& \ \text{Прямая}(P)) \leftrightarrow c + ae + bf = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCKP}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ P \subseteq \text{плоскость}(ABC) \rightarrow \text{Прямая}(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ ax + by + c = 0))$$

Переменной x_{10} присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте, которая представляет собой квантор существования, переменной x_9 - вхождение другой части. Переменной x_{11} присваивается подтерм x_9 . Проверяется, что он элементарный и имеет единственный параметр x_{13} . В нашем примере x_{13} - переменная P . Переменной x_{14} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. В нем находится равенство x_{15} , в левой части которого расположено обозначение каких-либо координат, а в правой - описатель "класс". Переменной x_{17} присваивается вхождение левой части равенства, переменной x_{18} - вхождение правой части. В нашем примере x_{17} - вхождение выражения " $\text{коорд}(P, K)$ ". Переменной x_{16}

присваивается символ по вхождению x_{17} . В нашем примере - символ "коорд". Проверяется, что первым операндом вхождения x_{17} служит переменная x_{13} . Проверяется, что переменная x_{13} не входит в утверждения списка x_{14} , отличные от x_{15} . Переменной x_{19} присваивается связывающая приставка описателя x_{18} . В нашем примере - x, y .

Выбирается переменная x_{20} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная d . Переменной x_{21} присваивается список отличных от x_{20} и не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x_{19} . В нашем примере x_{21} - пара e, f . Переменной x_{22} присваивается равенство выражения " $x_{16}(x_{20} Q)$ " выражению "набор(x_{21})". Здесь Q - второй операнд вхождения x_{17} . В нашем примере x_{22} имеет вид "коорд(d, K) = (e, f)". Переменной x_{23} присваивается список antecedентов исходной теоремы.

Список x_{23} разбивается на подсписок x_{24} утверждений, содержащих переменную x_{13} , и подсписок x_{25} остальных утверждений. Переменной x_{26} присваивается объединение списков x_{25} и x_{14} . При помощи задачи на доказательство проверяется, что конъюнкция утверждений x_{24} является следствием утверждений x_{26} . Переменной x_{28} присваивается результат замены переменных x_{19} на переменные x_{21} в утверждении под описателем x_{18} . В нашем примере - " e - число & f - число & $ae + bf + c = 0$ ". Переменной x_{29} присваивается эквивалентность утверждения "существует(x_{13} и(x_{11} принадлежит($x_{20} x_{13}$) x_{15}))" утверждению x_{28} . Переменной x_{30} присваивается объединение списка x_{25} со списком отличных от x_{15} утверждений набора x_{14} и с утверждением x_{22} . Создается импликация с antecedентами x_{30} и консеквентом x_{29} . Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому передается опция "кванторнаясвертка", и регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Извлечение эквивалентности, вводящей уравнение множества точек в задаче на преобразование, имеющей цель "класс".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{dABC}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \rightarrow \exists_{P_e}(\text{Прямая}(P) \ \& \ d(P, e)) \leftrightarrow \exists_{P_{eabc}}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ ax + by + c = 0) \ \& \ \text{Прямая}(P) \ \& \ d(P, e)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCKP}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ P \subseteq \text{плоскость}(ABC) \rightarrow \text{Прямая}(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ ax + by + c = 0)))$$

Переменной x_{10} присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте, которая представляет собой квантор существования, переменной x_9 - вхождение другой части. Выбираются переменные X, Y , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные d, e . Переменной x_{12} присваивается подтерм x_9 . В нашем примере - "Прямая(P)". Переменной x_{13} присваивается результат добавления к списку переменных терма x_9 переменной Y . В нашем примере - пара переменных P, e . Переменной x_{14} присваивается выражение

"значение(X , набор(x_{13}))". В нашем примере - " $d(P, e)$ ". Переменной x_{15} присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x_{13} на конъюнкцию утверждений x_{12} и x_{14} . Переменной x_{16} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором x_{10} . В нем находится равенство x_{17} , в левой части которого расположено выражение для координат. В нашем примере x_{17} имеет вид " $\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ ax + by + c = 0)$ ". Переменной x_{19} присваивается список всех таких утверждений набора x_{16} , которые либо необходимы для сопровождения правой части равенства x_{17} по о.д.з., либо имеют параметр, не являющийся параметром этой части. В нашем примере x_{19} состоит из утверждений " $a - \text{число}$ ", " $b - \text{число}$ ", " $c - \text{число}$ ", " $\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ ax + by + c = 0)$ ".

Переменной x_{20} присваивается результат добавления к списку x_{19} утверждений x_{12} и x_{14} . Переменной x_{21} присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x_{13} и переменным связывающей приставки квантора x_{10} на конъюнкцию утверждений x_{20} . Переменной x_{22} присваивается список antecedентов исходной теоремы. Если среди утверждений x_{22} имеется единственное, параметры которого пересекаются с параметрами терма x_{12} , причем оно имеет вид включения в плоскость, то такое утверждение исключается из списка x_{22} , а переменной x_{23} присваивается одноэлементный список, образованный термом " $\text{посылки(планиметрия)}$ ". В противном случае список x_{23} полагается пустым. Создается импликация с antecedентами x_{22} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{15} и x_{21} . Она регистрируется в списке вывода с единственными характеристиками списка x_{23} и характеристикой " $\text{уравнприннадлежит(второйтерм)}$ ".

2. Извлечение эквивалентности, позволяющей исключить несущественные неизвестные.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcK}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \exists_P(\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ \text{Прямая}(P)) \leftrightarrow \neg(a^2 + b^2 = 0))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCKP}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ P \subseteq \text{плоскость}(ABC) \rightarrow \text{Прямая}(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ ax + by + c = 0)))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_{10} присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте, которая представляет собой квантор существования, переменной x_9 - вхождение другой части. Переменной x_{11} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования, переменной x_{12} - список antecedентов. В списке x_{11} выбирается равенство x_{13} , в правой части которого расположен описатель "класс". Переменной x_{14} присваивается список остальных утверждений набора x_{11} . В нашем примере x_{13} имеет вид " $\text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ ax + by + c = 0)$ ". Переменной

x15 присваивается подсписок списка x14, образованный утверждениями, необходимыми для сопровождения по о.д.з. равенства x13. Переменной x16 присваивается остаток списка x14. Проверяется, что в нем нет равенства. Переменной x17 присваивается список утверждений набора x16, имеющих своим заголовком один из символов "не", "меньше", "меньшеилиравно". В нашем примере он состоит из единственного утверждения " $\neg(a^2 + b^2 = 0)$ ". Проверяется, что список x17 непуст.

Переменной x18 присваивается связывающая приставка квантора x10. В нашем примере - " a, b, c ". Переменной x19 присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x18. В нашем примере - переменные " d, e, f ". Вводится пустой накопитель x20.

С этой точки начинаются отличия от приема, рассмотренного ранее. Тот прием заполнял накопитель x20 утверждениями списка x17, выбранными в качестве консеквентов новых теорем. К моменту применения текущего приема этот накопитель уже заполнен. В нашем примере он содержит единственное утверждение " $\neg(a^2 + b^2 = 0)$ ". Проверяется, что списки x16 и x20 имеют равные длины. Переменной x21 присваивается объединение списков x12 и x15, переменной x22 - подтерм x9, переменной x23 - список параметров терма x22. Переменной x24 присваивается список утверждений набора x21, имеющих общий параметр со списком x23. В нашем примере он состоит из единственного утверждения " $P \subseteq \text{плоскость}(ABC)$ ". Переменной x25 присваивается остаток списка x21. Проверяется, что все утверждения списка x24 суть следствия утверждений списка x25, пополненного утверждениями x22 и x13.

Переменной x26 присваивается эквивалентность утверждений "существует(x23 и(x22 x13))" и "и(x20)". Создается импликация с антецедентами x25 и консеквентом x26. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с характеристикой "связка".

3. Вывод тождества, исключаящего вспомогательный параметр в задаче на преобразование, имеющей цель "класс".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefghijk}(\neg(d = e) \ \& \ \neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ c + ag + bh = 0 \ \& \\ c + ai + bj = 0 \ \& \ \text{коорд}(d, K) = (g, h) \ \& \ \text{коорд}(e, K) = (i, j) \ \& \ a - \text{число} \ \& \\ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \\ \text{set}_f(\exists_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ \text{коорд}(f, K) = (x, y) \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \\ f - \text{точка}) = \text{прямая}(de))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCKP}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ P \subseteq \text{плоскость}(ABC) \rightarrow \\ \text{Прямая}(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \\ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ ax + by + c = 0))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABP}(\text{Прямая}(P) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ A \in P \ \& \ B \in P \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \\ P = \text{прямая}(AB))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_{10} присваивается входение той части эквивалентности в консеквенте, которая представляет собой квантор существования, переменной x_9 - входение другой части. Переменной x_{11} присваивается подтерм x_9 . Проверяется, что он элементарный и имеет единственный параметр x_{13} . В нашем примере x_{13} - переменная P . Переменной x_{14} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. В нем находится равенство x_{15} , в левой части которого расположено обозначение каких-либо координат, а в правой - описатель "класс". Переменной x_{17} присваивается входение левой части равенства, переменной x_{18} - входение правой части. В нашем примере x_{17} - входение выражения "коорд(P, K)". Переменной x_{16} присваивается символ по входению x_{17} . В нашем примере - символ "коорд". Проверяется, что первым операндом входения x_{17} служит переменная x_{13} . Проверяется, что переменная x_{13} не входит в утверждения списка x_{14} , отличные от x_{15} . Переменной x_{19} присваивается связывающая приставка описателя x_{18} . В нашем примере - x, y .

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что терм x_{11} имеет длину 2. Справочник поиска теорем "параметрвывода" определяет по его заголовку указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{22} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{22} имеет вид:

$$\forall_{def}(\text{Прямая}(f) \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ d \in f \ \& \ e \in f \ \& \ \neg(d = e) \rightarrow f = \text{прямая}(de))$$

Переменной x_{23} присваивается список антецедентов теоремы x_{22} . Переменной x_{27} присваивается та часть равенства в консеквенте теоремы x_{22} , которая является переменной, переменной x_{28} - другая часть. В нашем примере x_{27} - переменная f , x_{28} - выражение "подтерм(de)". В списке x_{23} выбирается утверждение x_{29} , содержащее переменную x_{27} и имеющее длину 2. В нашем примере - утверждение "Прямая(f)". Проверяется, что заголовки утверждений x_{29} и x_{11} совпадают. Переменной x_{30} присваивается список параметров выражения x_{28} . Проверяется, что для любого из этих параметров в списке x_{23} имеется отношение принадлежности с этим параметром в левой части и переменной x_{27} в правой. Переменной x_{31} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под описателем x_{18} . Переменной x_{32} присваивается связывающая приставка квантора x_{10} . В нашем примере - a, b, c . Переменной x_{33} присваивается список всех утверждений набора x_{31} , имеющих параметр из списка x_{32} . В нашем примере - единственное утверждение " $ax + by + c = 0$ ". Переменной x_{34} присваивается остаток списка x_{31} . Проверяется, что список x_{34} непуст. В нашем примере он состоит из утверждений " x - число", " y - число". Переменной x_{35} присваивается список переменных исходной теоремы и теоремы x_{22} . Вводятся пустые накопители x_{36} и x_{37} . Переменной x_{38} присваивается список отличных от x_{15} утверждений набора x_{14} .

Предпринимается цикл просмотра переменных x_{39} списка x_{30} . Для текущей такой переменной выбирается список x_{40} переменных, не входящих в набор

x35 и имеющий такую же длину, как список x19. Сразу же переменные x40 добавляются к списку x35. К списку x36 добавляется равенство "x16(x39, T) = набор(x40)", где T - правая часть равенства x17. К списку x37 добавляется список результатов замены переменных x19 на x40 в утверждениях списка x34. К списку x38 добавляется список результатов замены переменных x19 на x40 в утверждениях списка x33.

По завершении цикла все переменные начиная с x39 снова оказываются не определены. В нашем примере x36 содержит равенства "коорд(d, K) = (g, h)" и "коорд(e, K) = (i, j)", список x37 - утверждения "g - число", "h - число", "i - число", "j - число", список x38 - утверждения "a - число", "b - число", "c - число", " $\neg(a^2 + b^2 = 0)$ ", " $ag + bh + c = 0$ ", " $ai + bj + c = 0$ ".

Переменной x39 присваивается список принадлежащих набору x23 утверждений о принадлежности переменных списка x30. Переменной x40 присваивается остаток списка x23. Переменной x41 присваивается список результатов замены переменной x27 на x13 в утверждениях набора x40. Переменной x42 присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы со списками x41, x36, x37 и x38. Переменной x43 присваивается список результатов подстановки выражения x28 вместо переменной x13 в утверждения x42.

Выбирается переменная x44, не входящая в утверждения x43. В нашем примере - переменная f. Переменной x45 присваивается первый элемент списка x30. В нашем примере - переменная d. Переменной x46 присваивается список результатов замены переменной x45 на переменную x44 в утверждениях списка x40, имеющих единственный параметр x45. В нашем примере x46 состоит из единственного утверждения "f - точка". Переменной x47 присваивается результат замены переменной x45 на x44 в левой части первого равенства списка x36. В нашем примере - "коорд(f, K)". Переменной x48 присваивается равенство выражений x47 и "набор(x19)". Переменной x49 присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x19 на конъюнкцию утверждений списка x31 и утверждения x48. Переменной x50 присваивается выражение "класс(x44 и(x46 x49))", переменной x51 - равенство выражений x50 и x28. Затем создается импликация с антецедентами x43 и консеквентом x51. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с характеристикой "вспомпараметр(второйтерм)".

Вывод теоремы путем доказательства гипотезы

1. Попытка усмотрения двумерного множества точек.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_E(\text{эллипс}(E) \rightarrow \text{двумерн}(E))$$

из теоремы

$$\forall_E(\text{эллипс}(E) \leftrightarrow E - \text{set} \ \& \ \exists_{KabABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \ \& \ E \subseteq \text{плоскость}(ABC) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 \leq a - b \ \& \ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число})))$$

Утверждение "двумерн(X)" означает, что X есть множество точек трехмерного пространства, не являющееся подмножеством прямой.

Переменной x_{11} присваивается список конъюнктивных членов одной из частей эквивалентности в консеквенте теоремы. Вхождение другой части присваивается переменной x_9 . В списке x_{11} выбирается утверждение x_{12} с заголовком "существует". Переменной x_{13} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором x_{12} . Переменной x_{14} присваивается список антецедентов теоремы. В списке x_{13} выбирается равенство x_{15} , в правой части которого расположен описатель "класс", длина связывающей приставки которого равна 2, а заголовок левой части - символ "коорд". Переменной x_{18} присваивается объединение списков x_{14} и x_{13} , переменной x_{19} - первый операнд координатного выражения в левой части равенства x_{15} . В нашем примере x_{19} - переменная E . При помощи задачи на доказательство устанавливается, что утверждение "двумерн(x_{19})" - следствие утверждений x_{18} . Переменной x_{21} присваивается объединение списка x_{14} и списка конъюнктивных членов утверждения x_9 . Создается импликация с антецедентами x_{21} и консеквентом "двумерн(x_{19})". Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Отождествление плоскостей, содержащих двумерное множество.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdefghE}(\neg(c = d) \ \& \ \neg(f = g) \ \& \ \neg(e \in \text{прямая}(cd)) \ \& \ \neg(h \in \text{прямая}(fg)) \ \& \\ E \subseteq \text{плоскость}(cde) \ \& \ E \subseteq \text{плоскость}(fgh) \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \\ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ \text{эллипс}(E) \rightarrow \\ \text{плоскость}(cde) = \text{плоскость}(fgh))$$

из теоремы

$$\forall_E(\text{эллипс}(E) \leftrightarrow E - \text{set} \ \& \ \exists_{KabABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \\ K = (A, B, C) \ \& \ \text{прямоорд}(K) \ \& \ E \subseteq \text{плоскость}(ABC) \ \& \ a - \text{число} \ \& \\ b - \text{число} \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 \leq a - b \ \& \ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \ \& \\ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число})))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема, включая формирование списка x_{21} . Так как исходная теорема та же самая, повторять эту программу не будем.

Дальше, вместо создания итоговой теоремы, выбираются переменные X_1, X_2, \dots, X_6 , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные c, d, e, f, g, h . Переменным x_{23} и x_{24} присваиваются выражения "плоскость($X_1X_2X_3$)" и "плоскость($X_4X_5X_6$)". Переменной x_{25} присваивается объединение списка x_{21} с утверждениями, сопровождающими выражения x_{23} и x_{24} по о.д.з. и с включениями "содержится($x_{19} \ x_{23}$)", "содержится($x_{19} \ x_{24}$)". Создается импликация с антецедентами x_{25} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{23} и x_{24} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительной теоремы

1. Использование дополнительной теоремы, выражающей множество точек через отдельные точки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{deghijK}(\neg(d = e) \ \& \ \text{коорд}(d, K) = (g, h) \ \& \ \text{коорд}(e, K) = (i, j) \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(de), K) = \text{set}_{xy}(hi + x(j - h) + y(g - i) - gj = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCKP}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ P \subseteq \text{плоскость}(ABC) \rightarrow \text{Прямая}(P) \leftrightarrow \exists_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xy}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ ax + by + c = 0))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABP}(\text{Прямая}(P) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ A \in P \ \& \ B \in P \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow P = \text{прямая}(AB))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x10 присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте, которая представляет собой квантор существования, переменной x9 - вхождение другой части. Переменной x11 присваивается подтерм x9. Проверяется, что он элементарный и имеет единственный параметр x13. В нашем примере x13 - переменная P . Переменной x14 присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. В нем находится равенство x15, в левой части которого расположено обозначение каких-либо координат, а в правой - описатель "класс". Переменной x17 присваивается вхождение левой части равенства, переменной x18 - вхождение правой части. В нашем примере x17 - вхождение выражения "коорд(P, K)". Переменной x16 присваивается символ по вхождению x17. В нашем примере - символ "коорд". Проверяется, что первым операндом вхождения x17 служит переменная x13. Проверяется, что переменная x13 не входит в утверждения списка x14, отличные от x15. Переменной x19 присваивается связывающая приставка описателя x18. В нашем примере - x, y .

Проверяется, что терм x11 имеет длину 2. Справочник поиска теорем "параметрывывода" определяет по его заголовку указанную выше дополнительную теорему. Переменной x22 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x22 имеет вид:

$$\forall_{def}(\text{Прямая}(f) \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ d \in f \ \& \ e \in f \ \& \ \neg(d = e) \rightarrow f = \text{прямая}(de))$$

Переменной x23 присваивается список антецедентов теоремы x22. Переменной x27 присваивается та часть равенства в консеквенте теоремы x22, которая является переменной, переменной x28 - другая часть. В нашем примере x27 -

переменная f , x_{28} - выражение "подтерм(de)". В списке x_{23} выбирается утверждение x_{29} , содержащее переменную x_{27} и имеющее длину 2. В нашем примере - утверждение "Прямая(f)". Проверяется, что заголовки утверждений x_{29} и x_{11} совпадают. Переменной x_{30} присваивается список параметров выражения x_{28} . Проверяется, что для любого из этих параметров в списке x_{23} имеется отношение принадлежности с этим параметров в левой части и переменной x_{27} в правой. Переменной x_{31} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под описателем x_{18} . Переменной x_{32} присваивается связывающая приставка квантора x_{10} . В нашем примере - a, b, c . Переменной x_{33} присваивается список всех утверждений набора x_{31} , имеющих параметр из списка x_{32} . В нашем примере - единственное утверждение " $ax + by + c = 0$ ". Переменной x_{34} присваивается остаток списка x_{31} . Проверяется, что список x_{34} непуст. В нашем примере он состоит из утверждений " x - число", " y - число". Переменной x_{35} присваивается список переменных исходной теоремы и теоремы x_{22} . Вводятся пустые накопители x_{36} и x_{37} . Переменной x_{38} присваивается список отличных от x_{15} утверждений набора x_{14} .

Предпринимается цикл просмотра переменных x_{39} списка x_{30} . Для текущей такой переменной выбирается список x_{40} переменных, не входящих в набор x_{35} и имеющий такую же длину, как список x_{19} . Сразу же переменные x_{40} добавляются к списку x_{35} . К списку x_{36} добавляется равенство " $x_{16}(x_{39}, T) = \text{набор}(x_{40})$ ", где T - правая часть равенства x_{17} . К списку x_{37} добавляется список результатов замены переменных x_{19} на x_{40} в утверждениях списка x_{34} . К списку x_{38} добавляется список результатов замены переменных x_{19} на x_{40} в утверждениях списка x_{33} .

По завершении цикла все переменные начиная с x_{39} снова оказываются не определены. В нашем примере x_{36} содержит равенства "коорд(d, K) = (g, h)" и "коорд(e, K) = (i, j)", список x_{37} - утверждения " g - число", " h - число", " i - число", " j - число", список x_{38} - утверждения " a - число", " b - число", " c - число", " $\neg(a^2 + b^2 = 0)$ ", " $ag + bh + c = 0$ ", " $ai + bj + c = 0$ ".

Дальше начинаются отличия. Решается задача на описание с посылками x_{37} и условиями x_{38} . Цели задачи - "прямойответ", "пример", "неизвестные x_{32} ", "упростить". В нашем примере неизвестные суть a, b, c . Переменной x_{40} присваивается ответ. В нашем примере он имеет вид:

$$(\neg(i = g) \ \& \ a = (j - h)/(g - i) \ \& \ c = (gj - hi)/(i - g) \ \vee \ a = 0 \ \& \ c = -h \ \& \ i = g \ \& \ j = h) \ \& \ b = 1 \ \vee \ a = 1 \ \& \ b = 0 \ \& \ c = -g \ \& \ i = g$$

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{41} присваивается список дизъюнктивных членов результата приведения ответа x_{40} к виду д.н.ф. В этом списке выбирается утверждение x_{42} . В нашем примере - утверждение " $\neg(i = g) \ \& \ a = (j - h)/(g - i) \ \& \ c = (gj - hi)/(i - g) \ \& \ b = 1$ ". Переменной x_{43} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{42} . Проверяется, что каждое равенство списка x_{43} имеет в своей левой части переменную списка x_{32} , а в правой части - выражение, не содержащее переменных x_{32} . Переменной x_{44} присваивается список правых частей равенств набора x_{32} , соответствующих переменным списка x_{32} . Проверяется, что длины списков x_{32} и x_{44} равны. Переменной x_{45} присваивается список отличных от равенств утверждений набора x_{43} . Переменной x_{46} присваивается объединение списков x_{37} и

x45. Переменной x47 присваивается список результатов подстановки выражений x44 вместо переменных x32 в утверждения набора x33.

Решается задача на описание с посылками x46 и условиями x47. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "редакция", "неизвестные x19". В нашем примере посылки суть " g - число", " h - число", " i - число", " j - число", " $\neg(i = g)$ ", условие - $(j - h)/(g - i)x + 1 \cdot y + (gj - hi)/(i - g) = 0$. Неизвестные - x, y .

Ответ задачи присваивается переменной x49. В нашем примере он имеет вид " $hi + x(j - h) + y(g - i) - gj = 0$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x50 присваивается список содержащихся в наборе x23 условий принадлежности с переменной списка x30 в левой части. В нашем примере - " $d \in f$ " и " $e \in f$ ". Переменной x51 присваивается остаток списка x23. Переменной x52 присваивается список результатов замены переменной x27 на переменную x13 в утверждениях набора x51, переменной x53 - объединение списка антецедентов исходной теоремы со списками x52, x36 и x37. Переменной x54 присваивается список результатов подстановки выражения x28 вместо переменной x13 в утверждения списка x53. Переменной x55 присваивается выражение "класс(x19 и(x34 x49))". Переменной x56 присваивается результат подстановки выражения x28 вместо переменной x13 в левую часть равенства x15. Переменной x57 присваивается равенство выражений x56 и x55. Создается импликация с антецедентами x54 и консеквентом x57. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- Использование определения отношения в задании класса для получения его параметрического описания.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdef}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (x - a, y - b, z - c))) = \text{set}_{xyz}(\exists_g(x = a + dg \ \& \ y = b + eg \ \& \ z = c + fg \ \& \ g - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{KP}(P - \text{set} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \ \& \ P \subseteq \text{Точки} \rightarrow \text{Прямая}(P) \leftrightarrow \exists_{abcdef}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((x - a, y - b, z - c), (d, e, f))))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcdef}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d, e, f)) \leftrightarrow \exists_{uv}(u - \text{число} \ \& \ v - \text{число} \ \& \ \neg(u^2 + v^2 = 0) \ \& \ au + dv = 0 \ \& \ bu + ev = 0 \ \& \ cu + fv = 0))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x10 присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте, которая представляет собой квантор существования, переменной x9

- вхождение другой части. Переменной x_{11} присваивается подтерм x_9 . Проверяется, что он элементарный и имеет единственный параметр x_{13} . В нашем примере x_{13} - переменная P . Переменной x_{14} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. В нем находится равенство x_{15} , в левой части которого расположено обозначение каких-либо координат, а в правой - описатель "класс". Переменной x_{17} присваивается вхождение левой части равенства, переменной x_{18} - вхождение правой части. В нашем примере x_{17} - вхождение выражения "коорд(P, K)". Переменной x_{16} присваивается символ по вхождению x_{17} . В нашем примере - символ "коорд". Проверяется, что первым операндом вхождения x_{17} служит переменная x_{13} . Проверяется, что переменная x_{13} не входит в утверждения списка x_{14} , отличные от x_{15} . Переменной x_{19} присваивается связывающая приставка описателя x_{18} . В нашем примере - x, y, z .

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что длина утверждения x_{11} равна 2. Внутри последнего операнда описателя x_{18} выбирается вхождение x_{20} неоднородного утверждения. Переменной x_{21} присваивается его заголовок. В нашем примере x_{20} - вхождение утверждения "пропорцнаборы($(x - a, y - b, z - c), (d, e, f)$)", x_{21} - символ "пропорцнаборы". Справочник поиска теорем "определение" находит по x_{21} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{25} присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x_{21} , переменной x_{26} - вхождение другой части, представляющей собой квантор существования. Переменной x_{27} присваивается подтерм x_{25} . В нашем примере - утверждение "пропорцнаборы($(a, b, c), (d, e, f)$)". Переменной x_{28} присваивается корневая связывающая приставка дополнительной теоремы. В нашем примере - " a, b, c, d, e, f ". Переменной x_{29} присваивается список параметров утверждения x_{27} . Проверяется, что он состоит из тех же переменных, что и список x_{28} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{29} , переводящая терм x_{27} в подтерм x_{20} .

Переменной x_{31} присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы с отличными от x_{15} элементами списка x_{14} . Переменной x_{32} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под описателем x_{18} . Переменной x_{33} присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам дополнительной теоремы. Список x_{33} подразбивается на подсписок x_{34} утверждений, содержащих переменные x_{19} , и подсписок x_{35} остальных утверждений. В нашем примере x_{34} состоит из утверждений " $(x - a) - \text{число}$ ", " $(y - b) - \text{число}$ ", " $(z - c) - \text{число}$ ", x_{35} - из утверждений " $d - \text{число}$ ", " $e - \text{число}$ ", " $f - \text{число}$ ". Переменной x_{36} присваивается результат применения подстановки S к подтерму x_{26} . В нашем примере он имеет вид:

$$\exists_{uv}(u - \text{число} \ \& \ v - \text{число} \ \& \ \neg(u^2 + v^2 = 0) \ \& \ (x - a)u + dv = 0 \ \& \ (y - b)u + ev = 0 \ \& \ (z - c)u + fv = 0)$$

Переменной x_{37} присваивается объединение списков x_{32} и x_{34} .

В списке x_{32} выбирается утверждение x_{38} . В нашем примере - утверждение "пропорцнаборы($(x - a, y - b, z - c), (d, e, f)$)". Переменной x_{39} присваивается вхождение в него подтерма x_{20} . В нашем примере это корневое вхождение.

Переменной x_{40} присваивается список конъюнктивных членов утверждения, получаемого из утверждения x_{38} заменой вхождения x_{39} на терм x_{36} . Переменной x_{41} присваивается объединение списка x_{40} со списком отличных от x_{38} утверждений набора x_{32} и со списком x_{34} . Переменной x_{42} присваивается объединение списков x_{31} и x_{35} . Переменной x_{43} присваивается выражение "класс(x_{19} и(x_{37}))". В нашем примере - выражение "set_{xyz}(x - число & y - число & z - число & пропорцнаборы($(x - a, y - b, z - c), (d, e, f)$) & ($x - a$) - число & ($y - b$) - число & ($z - c$) - число)". Переменной x_{45} присваивается результат упрощения выражения x_{43} относительно посылок x_{42} при помощи задачи на преобразование. В нашем примере - "set_{xyz}(x - число & y - число & z - число & пропорцнаборы($(d, e, f), (x - a, y - b, z - c)$))".

В списке x_{41} находится утверждение x_{46} с заголовком "существует". В нашем примере - " $\exists_{uv}(u$ - число & v - число & $\neg(u^2 + v^2 = 0)$ & $(x - a)u + dv = 0$ & $(y - b)u + ev = 0$ & $(z - c)u + fv = 0)$ ". Переменной x_{47} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором x_{46} , переменной x_{48} - связывающая приставка этого квантора. Переменной x_{49} присваивается объединение списка отличных от x_{46} элементов набора x_{41} со списком x_{47} . Решается задача на описание с посылками x_{42} и условиями x_{49} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "разделение", "неизвестные x_{19} ". Ответ присваивается переменной x_{51} . В нашем примере он имеет вид " $\neg(u = 0)$ & $x = a - dv/u$ & $y = b - ev/u$ & $z = c - fv/u$ & u - число & v - число". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x_{52} присваивается список его конъюнктивных членов. Проверяется, что для каждой переменной списка x_{19} среди утверждений x_{52} имеется равенство с этой переменной в левой части. Переменной x_{53} присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x_{48} на утверждение x_{51} . Переменной x_{55} присваивается результат упрощения утверждения x_{53} относительно посылок x_{42} при помощи задачи на преобразование. Переменной x_{56} присваивается равенство подтерма x_{18} выражению "класс(x_{19} x_{55})". Затем создается импликация с антецедентами x_{42} и консеквентом x_{56} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Попытка рассмотреть координаты элемента множества и исключить с их помощью часть параметров уравнения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ghijKP}(\text{коорд}(g, K) = (h, i, j) \ \& \ g \in P \ \& \ \text{Прямая}(P) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \exists_{def}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (x - h, y - i, z - j))) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число}))"$$

из теоремы

$$\forall_{KP}(P - \text{set} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \ \& \ P \subseteq \text{Точки} \rightarrow \text{Прямая}(P) \leftrightarrow \exists_{abcdef}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(P, K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((x - a, y - b, z - c), (d, e, f))))"$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_{10} присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте, которая представляет собой квантор существования, переменной x_9 - вхождение другой части. Переменной x_{11} присваивается подтерм x_9 . Проверяется, что он элементарный и имеет единственный параметр x_{13} . В нашем примере x_{13} - переменная P . Переменной x_{14} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. В нем находится равенство x_{15} , в левой части которого расположено обозначение каких-либо координат, а в правой - описатель "класс". Переменной x_{17} присваивается вхождение левой части равенства, переменной x_{18} - вхождение правой части. В нашем примере x_{17} - вхождение выражения "коорд(P, K)". Переменной x_{16} присваивается символ по вхождению x_{17} . В нашем примере - символ "коорд". Проверяется, что первым операндом вхождения x_{17} служит переменная x_{13} . Проверяется, что переменная x_{13} не входит в утверждения списка x_{14} , отличные от x_{15} . Переменной x_{19} присваивается связывающая приставка описателя x_{18} . В нашем примере - x, y, z .

Выбирается переменная x_{20} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная g . Переменной x_{21} присваивается список отличных от x_{20} и не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x_{19} . В нашем примере x_{21} - тройка h, i, j . Переменной x_{22} присваивается равенство выражения " $x_{16}(x_{20} Q)$ " выражению "набор(x_{21})". Здесь Q - второй операнд вхождения x_{17} . В нашем примере x_{22} имеет вид "коорд(g, K) = (h, i, j)". Переменной x_{23} присваивается список antecedентов исходной теоремы.

Дальше начинаются отличия. Переменной x_{24} присваивается связывающая приставка квантора x_{10} . В нашем примере - " a, b, c, d, e, f ". Переменной x_{25} присваивается объединение списков x_{23} , x_{14} и утверждений x_{11} , "принадлежит($x_{20} x_{13}$)", x_{22} . Решается задача на исследование с посылками x_{25} . Цели ее - "известно", "неизвестные X ", "исключ x_{24} ", где X - все параметры утверждений x_{25} . По окончании решения в списке посылок задачи находится равенство x_{28} с выражением x_{17} в левой части. В нашем примере - равенство "коорд(P, K) = set _{xyz} (x - число & y - число & z - число & пропорцнаборы((d, e, f), ($x - h, y - i, z - j$)))". Переменной x_{29} присваивается правая часть данного равенства, переменной x_{30} - подтерм x_{18} . Переменной x_{31} присваивается пересечение списка параметров выражения x_{29} со списком x_{24} , переменной x_{32} - пересечение списка параметров выражения x_{30} со списком x_{24} . Проверяется, что список x_{31} включается в список x_{32} , но короче его. В нашем примере x_{31} - " d, e, f ", x_{32} - " a, b, c, d, e, f ". Переменной x_{33} присваивается результат замены в списке x_{14} равенства x_{15} на равенство x_{28} . Переменной x_{34} присваивается утверждение "существует(x_{24} и(x_{33}))". Переменной x_{35} присваивается результат добавления к списку x_{23} утверждений x_{11} , "принадлежит($x_{20} x_{13}$)" и x_{22} . Создается импликация с antecedентами x_{35} и консеквентом x_{34} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.128 Характеристика "уравнмножество"

Характеристикой "уравнмножество" сопровождаются тождества либо дизъюнкции тождеств, определяющих координаты заданного множества объектов.

Логические следствия теоремы

1. Ввод вспомогательных параметров для числовых атомов, встречающихся в уравнении множества объектов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \rightarrow \exists_c(\text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) = \text{set}_{xy}(c - 2ax - 2by + x^2 + y^2 = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ c - \text{число}))$$

из теоремы

$$\forall_{abABK}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \rightarrow \text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) = \text{set}_{xy}((x - a)^2 + (y - b)^2 = l(AB)^2 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$$

Переменной x9 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте, которая является обозначением каких-либо координат, переменной x10 - вхождение другой части равенства, имеющей заголовок "класс". Переменной x11 присваивается символ по вхождению x9. В нашем примере - "коорд". Переменной x12 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x13 - подтерм x10. Переменной x14 присваивается список всех невырожденных числовых атомов терма x13. В нашем примере - единственный атом "l(AB)". Проверяется, что список x14 непуст, и переменной x15 присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x14. В нашем примере - переменная c. Переменной x16 присваивается список вхождений в терм x13 числовых атомов списка x14. Переменной x17 присваивается список переменных набора x15, соответствующих числовым атомам на вхождениях x16. Переменной x18 присваивается результат замены вхождения x16 в терм x13 на переменные x17. В нашем примере он имеет вид "set_{xy}((x - a)² + (y - b)² = c² & x - число & y - число)". Переменной x19 присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x15 на конъюнкцию невозможных утверждений "число(X)" для переменных X списка x15 и равенства подтерма x9 выражению x18. Создается импликация с антецедентами x12 и консеквентом x19. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с характеристикой "координаты".

2. Вывод теоремы, усматривающей тип множества точек по уравнению для его координат.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdeABK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(e, K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + t(c - a) \ \& \ y = b + t(d - b) \ \& \ t - \text{число})) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) = e = \text{прямая}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABKabcd}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(t - \text{число} \ \& \ x = (c - a)t + a \ \& \ y = (d - b)t + b))$$

Переменной x9 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте, которая является обозначением каких-либо координат, переменной x10 - вхождение другой части равенства, имеющей заголовок "класс". Переменной x11 присваивается символ по вхождению x9. В нашем примере - "коорд". Переменной x12 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x13 - подтерм x10. Переменной x14 присваивается список всех невырожденных числовых атомов терма x13. В нашем примере список x14 пуст.

Проверяется, что первый операнд выражения x9 неоднобуквенный. В нашем примере он имеет вид "прямая(AB)". Переменной x15 присваивается список x12, переменной x16 - выражение x13. Если список x14 непуст, то для числовых атомов этого списка выбираются их обозначения - новые переменные. В терме x16 вхождения атомов x14 заменяются на обозначающие их переменные, а к списку x15 добавляются равенства числовых атомов набора x14 обозначающим их переменным. В нашем примере x15 и x16 не изменяются.

Выбирается переменная x17, не входящая в термы списка x15 и в терм x15. В нашем примере - переменная e. Переменной x18 присваивается результат замены первого операнда терма x9 на переменную x17. В нашем примере x18 имеет вид "коорд(e, K)". Переменной x19 присваивается результат добавления к списку x15 равенства выражений x18 и x16. Переменной x20 присваивается равенство переменной x17 первому операнду терма x9. Затем создается импликация с антецедентами x19 и консеквентом x20. Она обрабатывается операторами "фикс-парам", "нормтеорема" и "исклфикс", после чего регистрируется в списке вывода с характеристиками "характ", "уравндробь". Операторы "фикс-парам" и "исклфикс" защищают теорему от исключения равенств в ее антецедентах при обработке оператором "нормтеорема".

3. Получение импликации, задающей общий вид уравнения множества объектов, путем отбрасывания в антецедентах равенств для координат объектов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABK}(\neg(A = B) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \exists_{abcd}(\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + t(c - a) \ \& \ y = b + t(d - b) \ \& \ t - \text{число})) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число}))$$

из теоремы

$$\forall_{ABKabcd}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(t - \text{число} \ \& \ x = (c - a)t + a \ \& \ y = (d - b)t + b))$$

Переменной x9 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте, которая является обозначением каких-либо координат, переменной x10 - вхождение другой части равенства, имеющей заголовок "класс". Переменной x11

присваивается символ по вхождению x_9 . В нашем примере - "коорд". Переменной x_{12} присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_{13} - подтерм x_{10} . Переменной x_{14} присваивается список всех невырожденных числовых атомов термина x_{13} . В нашем примере список x_{14} пуст.

Просматриваются равенства списка x_{12} , у которых в одной из частей стоит координатное выражение с переменной в качестве первого операнда. Переменной x_{15} присваивается набор всех таких равенств, а переменной x_{16} - список параметров их противоположных частей. В нашем примере x_{15} состоит из равенств "коорд(A, K) = (a, b)", "коорд(B, K) = (c, d)", а x_{16} - из переменных a, b, c, d .

Проверяется, что список x_{15} непуст. Переменной x_{17} присваивается список утверждений набора x_{12} , не вошедших в набор x_{15} . Проверяется, что список x_{17} непуст и не содержит переменных x_{16} . Проверяется, что все переменные списка x_{16} имеют численные значения. Переменной x_{18} присваивается терм x_{13} . Если список x_{14} непуст, то для числовых атомов этого списка выбираются их обозначения - новые переменные. В терме x_{18} вхождения атомов x_{14} заменяются на обозначающие их переменные, а к списку x_{17} добавляются равенства числовых атомов набора x_{14} обозначающим их переменным. В нашем примере x_{17} и x_{18} не изменяются.

Переменной x_{19} присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x_{16} на конъюнкцию невозможных утверждений "число(X)" для переменных X списка x_{16} и заключенного под одноместный символ "фикс" равенства подтерма x_9 выражению x_{18} . Переменной x_{20} присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты списка x_{17} относительно параметров утверждения x_{19} . Создается импликация с антецедентами x_{20} и консеквентом x_{19} . Она обрабатывается операторами "нормтеорема", "исклфикс" и регистрируется в списке вывода с характеристикой "координаты".

Вывод следствия путем решения задачи на описание

1. Усмотрение значений координат объектов либо числовых атомов из уравнения для множества объектов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcABK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) = \text{set}_{xy}(-2ax - 2by - c^2 + a^2 + b^2 + x^2 + y^2 = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ 0 < c \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(A, K) = (a, b))$$

из теоремы

$$\forall_{abABK}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \rightarrow \text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) = \text{set}_{xy}((x - a)^2 + (y - b)^2 = l(AB)^2 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$$

Переменной x_9 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте, которая является обозначением координат, переменной x_{10} - вхождение другой части, представляющей собой описатель "класс". Переменной x_{12} присваивается список антецедентов, переменной x_{13} - подтерм x_{10} . Переменной x_{14} присваивается список невырожденных числовых атомов выражения x_{13} . В нашем

примере - единственный атом " $l(AB)$ ". Переменной x_{15} присваивается первый операнд выражения x_9 . В нашем примере - выражение "окружность(AB)". Переменной x_{16} присваивается список параметров выражения x_{15} . В нашем примере - A, B . Проверяется, что этот список непуст. Переменной x_{17} присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x_{16} . В нашем примере x_{17} состоит из переменных c, d . Переменной x_{18} присваивается список утверждений набора x_{12} , параметры которых включаются в список x_{16} . Проверяется, что он непуст. Переменной x_{19} присваивается список результатов подстановки переменных x_{17} вместо переменных x_{16} в утверждения списка x_{18} . Переменной x_{20} присваивается результат такой же подстановки в выражение x_{15} . Переменной x_{21} присваивается объединение списков x_{18} и x_{19} .

Решается задача на описание с посылками x_{21} , единственным условием которой служит равенство выражений x_{15} и x_{20} . Цели задачи - "полный", "прямой ответ", "редакция". В нашем примере посылки задаи суть " A - точка", " B - точка", " $\neg(A = B)$ ", " c - точка", " d - точка", " $\neg(c = d)$ ". Условие - равенство "окружность(AB) = окружность(cd)".

Ответ задачи присваивается переменной x_{23} . В нашем примере он имеет вид " $l(cB) = l(cd) \& A = c$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x_{24} присваивается список его конъюнктивных членов. Переменной x_{25} присваивается список переменных набора x_{16} , являющихся частями равенств набора x_{24} , переменной x_{26} - список противоположных частей этих равенств. В нашем примере список x_{25} состоит из единственной переменной A , список x_{26} - из переменной c . Вводится пустой накопитель x_{27} .

Просматриваются выражения x_{28} списка x_{14} . Переменной x_{29} присваивается результат подстановки переменных x_{17} вместо x_{16} в выражение x_{28} , переменной x_{30} - результат подстановка выражений x_{26} вместо переменных x_{25} в равенство выражения x_{28} и x_{29} . Переменной x_{31} присваивается результат подстановки выражений x_{26} вместо переменных x_{25} в утверждение x_{23} . Если результат обработки оператором "станд" утверждения x_{30} входит в список конъюнктивных членов результата обработки оператором "станд" утверждения x_{31} , то выражение x_{28} регистрируется в накопителе x_{27} .

После указанного цикла все переменные, начиная с x_{28} , снова оказываются не определены. В нашем примере накопитель x_{27} состоит из выражения $l(AB)$. Переменной x_{28} присваивается исходная теорема. Если список x_{14} непуст, то для каждого числового атома списка x_{14} вводится обозначающая его переменная. К списку x_{12} и списку антецедентов теоремы x_{28} добавляются равенства числовых атомов набора x_{14} обозначающим их переменным. Остальные вхождения атомов x_{14} в теорему x_{28} заменяются на их обозначения. В нашем примере x_{28} приобретает вид:

$$\forall_{abcABK}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& \text{прямкоорд}(K) \& \neg(A = B) \& \text{коорд}(A, K) = (a, b) \& l(AB) = c \rightarrow \text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) = \text{set}_{xy}((x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2 \& x - \text{число} \& y - \text{число}))$$

Переменной x_{29} присваивается список антецедентов теоремы x_{28} . Переменной x_{30} присваивается подсписок списка x_{29} , образованный утверждениями, содер-

жащими параметр списка x16. Проверяется, что этот подсписок непуст. Переменной x31 присваивается остаток списка x29. Решается задача на описание с посылками x31 и условиями x30. Цели задачи - "полный", "явное", "прямой-ответ", "упростить", "неизвестные x16", "параметры x16". В нашем примере единственная посылка - "прямокоорд(K)", условия - "A – точка", "B – точка", " $\neg(A = B)$ ", "коорд(A, K) = (a, b)", " $l(AB) = c$ ". Неизвестные - A, B, причем они несущественные. Ответ присваивается переменной x33. В нашем примере он имеет вид " b – число & a – число & $0 < c$ & c – число". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Составляется список x34 равенств набора x29, у которых в одной части расположено либо обозначение координат, первым операндом которого является переменная списка x25, либо выражение списка x27. В нашем примере этот список содержит равенства "коорд(A, K) = (a, b)" и " $l(AB) = c$ ". Переменной x35 присваивается результат добавления к не вошедшим в список x34 утверждениям набора x29 всех конъюнктивных членов утверждения x33 и консеквента теоремы x28. Выбирается элемент x36 списка x34, и создается импликация с антецедентами x35 и консеквентом x36. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Определение пересечения двух множеств, заданных однотипными параметрическими уравнениями.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefgijklmnpABK}(\neg(l = m) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(i = 0) \ \& \ \text{коорд}(l, K) = (e, f) \ \& \ \text{коорд}(m, K) = (g, h) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \ \& \ j \in \text{прямая}(lm) \ \& \ j \in \text{прямая}(AB) \ \& \ l - \text{точка} \ \& \ m - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ i = n(a - c) + (b - d)p \ \& \ k = an + bp + eh - fg \ \& \ n = f - h \ \& \ p = g - e \rightarrow \text{коорд}(j, K) = (a + k(c - a)/i, b + k(d - b)/i))$$

из теоремы

$$\forall_{ABKabcd}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(t - \text{число} \ \& \ x = (c - a)t + a \ \& \ y = (d - b)t + b)))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Проверяется, что в левой части равенства - консеквента теоремы - расположено обозначение некоторых координат. Переменной x10 присваивается название этих координат. В нашем примере - символ "коорд". Переменной x12 присваивается переменная - второй операнд этого обозначения координат. В нашем примере - переменная K. Переменной x13 присваивается результат переобозначения переменных исходной теоремы на новые переменные. В нашем примере x13 имеет вид:

$$\forall_{lmnefgh}(l - \text{точка} \ \& \ m - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(n) \ \& \ \text{коорд}(l, n) = (e, f) \ \& \ \text{коорд}(m, n) = (g, h) \ \& \ \neg(l = m) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(lm), n) = \text{set}_{jk}(\exists_i(i - \text{число} \ \& \ j = (g - e)i + e \ \& \ k = (h - f)i + f)))$$

Переменной x14 присваивается вхождение консеквента теоремы x13, переменной x15 - второй операнд левой части равенства x14. В нашем примере это переменная n. Переменной x17 присваивается вхождение правой части консеквента исходной теоремы. Проверяется, что эта часть - описатель "класс",

причем утверждение под описателем имеет заголовок "существует". Переменной x18 присваивается связывающая приставка описателя. В нашем примере - x, y . Переменной x19 присваивается связывающая приставка правой части равенства в консеквенте теоремы x13. В нашем примере - j, k . Переменной x20 присваивается результат подстановки вместо переменной x15 и переменных x19 переменной x12 и переменных x18 в теорему x13. В нашем примере x20 имеет вид:

$$\forall_{lmKefgh}(l - \text{точка} \ \& \ m - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(l, K) = (e, f) \ \& \ \text{коорд}(m, K) = (g, h) \ \& \ \neg(l = m) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(lm), K) = \text{set}_{xy}(\exists_i(i - \text{число} \ \& \ x = (g - e)i + e \ \& \ y = (h - f)i + f)))$$

Переменной x22 присваивается вхождение правой части равенства в консеквенте теоремы x20. Переменной x23 присваивается вхождение последнего операнда описателя x17, переменной x24 - вхождение последнего операнда описателя x22. Переменной x25 присваивается объединение связывающих приставок кванторов существования x23 и x24 со списком x18. В нашем примере - t, i, x, y . Переменной x26 присваивается объединение списков конъюнктивных членов утверждений под кванторами x23 и x24. Переменной x27 присваивается объединение списков антецедентов исходной теоремы и теоремы x20. Список x27 разбивается на подсписок x28 утверждений, содержащих переменные списка x18, и подсписок x29 остальных утверждений. Переменной x30 присваивается объединение списков x28 и x26.

Решается задача на описание с посылками x29 и условиями x30. Цели задачи - "допосылки", "явное", "прямой ответ", "упростить", "неизвестные x25", "параметры X", где X - объединение связывающих приставок кванторов x23 и x24. В нашем примере посылки суть: "A - точка", "B - точка", "систкоорд(K)", "коорд(A, K) = (a, b)", "коорд(B, K) = (c, d)", " $\neg(A = B)$ ", "l - точка", "m - точка", "коорд(l, K) = (e, f)", "коорд(m, K) = (g, h)", " $\neg(l = m)$ ". Условия суть "t - число", " $x = (c - a)t + a$ ", " $y = (d - b)t + b$ ", "i - число", " $x = (g - e)i + e$ ", " $y = (h - f)i + f$ ". Неизвестные t, i, x, y ; несущественные неизвестные t, i .

Ответ задачи присваивается переменной x33. В нашем примере он имеет вид:

$$x = a + (c - a)(af + bg + eh - ah - be - fg) / (af + bg + ch + de - ah - be - cf - dg) \ \& \ y = b + (d - b)(af + bg + eh - ah - be - fg) / (af + bg + ch + de - ah - be - cf - dg)$$

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x34 присваивается список его конъюнктивных членов. Переменной x35 присваивается список равенств набора x34, дающих значения для переменных списка x18. Проверяется, что для каждой переменной такое равенство имеется. Переменной x36 присваивается список правых частей данных равенств. Переменной x37 присваивается список утверждений набора x34, не вошедших в список x35. Если задача на описание имела комментарии "допосылки", содержащие новые посылки, введенные при ее решении, то эти посылки добавляются к списку x37. В нашем примере x37 состоит из единственного утверждения " $\neg(af + bg + ch + de - ah - be - cf - dg = 0)$ ".

Выбирается переменная x38, не входящая в исходную теорему и в теорему x20. В нашем примере - переменная j . Переменной x39 присваивается равенство "равно(x10(x38, x12) набор(x36))". В нашем примере - равенство:

$$\text{коорд}(j, K) = (a + (c - a)(af + bg + eh - ah - be - fg) / (af + bg + ch + de - ah - be - cf - dg), b + (d - b)(af + bg + eh - ah - be - fg) / (af + bg + ch + de - ah - be - cf - dg))$$

Переменной x40 присваивается объединение списков x27, x37 и утверждений "принадлежит(x38 P)", "принадлежит(x38 Q)", где P, Q - первые операнды координатных выражений в левых частях консеквентов исходной теоремы и теоремы x20. В нашем примере эти операнды суть "прямая(AB)" и "прямая(lm)". Создается импликация с антецедентами x40 и консеквентом x39. Переменной x41 присваивается результат обработки ее оператором "нормтеорема". Этот результат обрабатывается задачей на преобразование с целью "сокращениетерма" относительно единственной посылки "истина". В нашем примере это приводит к различным группировкам. Ответ далее обрабатывается оператором "сокращтерма", обозначающим повторяющиеся вхождения выражений новыми переменными и выносящим эти обозначения в антецеденты. Результат регистрируется в списке вывода.

3. Определение координат множества, выделенного квазипротоколом "актив(...)".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdeK}(K = (d, e, c) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(de), K) = \text{set}_{xy}(y = 0 \ \& \ x - \text{число}))$$

из теоремы

$$\forall_{deghijK}(\neg(d = e) \ \& \ \text{коорд}(d, K) = (g, h) \ \& \ \text{коорд}(e, K) = (i, j) \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(de), K) = \text{set}_{xy}(hi + x(j - h) + y(g - i) - gj = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$$

и квазипротокола

$$\forall_{ABCK}(K = (A, B, C) \rightarrow \text{актив}(\text{прямая}(AB)))$$

Переменной x9 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте, которая является обозначением координат, переменной x10 - вхождение другой части, представляющей собой описатель "класс". Переменной x11 присваивается символ по вхождению x9. В нашем примере - "коорд". Переменной x12 присваивается первый операнд вхождения x9. В нашем примере - выражение "прямая(de)". Переменной x13 присваивается список антецедентов теоремы. Переменной x14 присваивается заголовок выражения x12. В разделе, к которому относится символ x11, выбирается кванторная импликация, консеквент которой имеет заголовок "актив". В нашем примере - указанный выше квазипротокол. Переменной x20 присваивается вхождение консеквента квазипротокола. Проверяется, что заголовок его операнда равен x14. Среди характеристик квазипротокола находится терм вида "актив(контрольвывода(T))". В нашем примере T имеет вид "коорд(a, K)". Проверяется, что терм T имеет заголовок x11. Переменной x22 присваивается результат переобозначения переменных квазипротокола на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{abcf}(f = (a, b, c) \rightarrow \text{актив}(\text{прямая}(ab)))$$

Переменной x_{23} присваивается первый операнд консеквента теоремы x_{22} . В нашем примере - "прямая(ab)". Переменной x_{24} присваивается список параметров терма x_{23} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{24} , переводящая терм x_{23} в терм x_{12} . Переменной x_{26} присваивается список переменных исходного квазипротокола. Определяется подстановка R вместо переменных x_{26} , переводящая его в теорему x_{22} . Переменной x_{28} присваивается второй операнд терма T . В нашем примере - переменная K . Переменной x_{29} присваивается выражение, в которую переменная x_{28} переводится подстановкой R . В нашем примере - переменная f . Проверяется, что выражение x_{29} однобуквенное и образовано переменной. Переменной x_{30} присваивается переменная - второй операнд вхождения x_9 . В нашем примере - переменная K . Рассматривается подстановка S' , полученная доопределением подстановки S , при котором вместо переменной x_{29} подставляется переменная x_{30} . Переменной x_{33} присваивается список результатов применения подстановки S' к антецедентам теоремы x_{22} . Переменной x_{34} присваивается объединение списков x_{33} и x_{13} . Переменной x_{35} присваивается список имеющихся в x_{34} равенств, заголовок левой части которых равен x_{11} . Проверяется, что список x_{35} непуст. В нашем примере он состоит из равенств "коорд(d, K) = (g, h)" и "коорд(e, K) = (i, j)". Проверяется, что правые части этих равенств имеют заголовок "набор", а параметры первых операндов их левых частей содержатся в списке параметров терма x_{12} .

Переменной x_{36} присваивается список не входящих в утверждения x_{34} переменных, длина которого равна длине списка x_{35} . Переменной x_{37} присваивается список утверждений набора x_{34} , не вошедших в набор x_{35} . Проверяется, что он непуст. В нашем примере x_{37} состоит из утверждений " $K = (d, e, c)$ ", " $\neg(d = e)$ ", " d - точка", " e - точка", "систкоорд(K)". Переменной x_{38} присваивается список результатов замены правых частей равенств набора x_{35} на соответствующие переменные набора x_{36} . В нашем примере - "коорд(d, K) = a ", "коорд(e, K) = b ". Переменной x_{39} присваивается список всех численных параметров утверждений набора x_{37} . В нашем примере он пуст.

Решается задача на описание с посылками x_{37} и условиями x_{38} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "известно x_{39} ", "неизвестные x_{36} ". Ответ присваивается переменной x_{41} . В нашем примере он имеет вид " $b = (1, 0) \ \& \ a = (0, 0)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x_{42} присваивается набор его конъюнктивных членов. Переменной x_{43} присваивается список правых частей имеющихся в x_{42} равенств с переменными списка x_{36} в левых частях. Переменной x_{44} присваивается список равенств правых частей равенств списка x_{35} соответствующим выражениям списка x_{43} . В нашем примере x_{44} состоит из равенств " $(g, h) = (0, 0)$ " и " $(i, j) = (0, 0)$ ". Переменной x_{45} присваивается объединение спискаов x_{37} и x_{44} . Создается импликация с антецедентами x_{45} и тем же консеквентом, что у исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Попытка заменить неоднобуквенные подвыражения уравнения на координаты вспомогательного объекта.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abefABK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (e, f) \ \& \\ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \\ \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + et \ \& \ y = b + ft \ \& \ t - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{ABKabcd}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \\ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \\ \text{set}_{xy}(\exists_t(t - \text{число} \ \& \ x = (c - a)t + a \ \& \ y = (d - b)t + b)))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - подсписок списка x8, образованный равенствами, в левой части которых находится обозначение координат. В нашем примере x9 имеет два элемента "коорд(A, K) = (a, b)", "коорд(B, K) = (c, d)". Проверяется, что в списке x9 не менее двух элементов. Решается задача на исследование с посылками x8 и целями "известно", "неизвестные X", "систкоорд". Здесь X - все параметры утверждений x8. Цель "систкоорд" активирует вывод координат всевозможных объектов, выразимых только через те объекты, координаты которых изначально были указаны в посылках.

После решения задачи в ее списке посылок выбирается не входящее в список x9 равенство x11, в левой части которого расположено обозначение для координат. В нашем примере x11 имеет вид "коорд(вектор(AB), K) = (c - a, d - b)". Проверяется, что в правой части равенства x11 расположено выражение с заголовком "набор", и переменной x13 присваивается список элементов этого набора. В нашем примере - список "c - a", "d - b". Проверяется, что каждое выражение списка x13 неоднобуквенное, причем параметры равенства x11 включаются в список параметров утверждений набора x8.

Переменной x14 присваивается консеквент исходной теоремы. Проверяется, что он включает все параметры термов списка x13, причем каждое выражение списка x13 встречается внутри утверждения x14. В списке x9 выбирается равенство x15. В нашем примере - равенство "коорд(B, K) = (c, d)". Переменной x16 присваивается вхождение той части равенства x15, которая имеет заголовок "набор". Переменной x17 присваивается список элементов этого набора. В нашем примере - список "c", "d". Проверяется, что элементы списка x17 суть различные переменные, имеющие единственное вхождение в утверждении x14 и входящие в список параметров выражений набора x13.

Выбирается список x19 переменных, не входящих в исходную теорему, длина которого равна длине набора x13. В нашем примере - список e, f. Переменной x20 присваивается результат замены в утверждении x14 вхождений выражений набора x13 на переменные x19. В нашем примере x20 имеет вид:

$$\text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + te \ \& \ y = b + tf \ \& \ t - \text{число}))$$

Переменной x21 присваивается результат замены правой части равенства x11 на "набор(x19)". В нашем примере он имеет вид "коорд(вектор(AB), K) = (e, f)". Переменной x22 присваивается результат замены в списке x8 равенства x15

на равенство x21. Переменной x23 присваивается результат обработки списка x22 оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x20. Создается импликация с антецедентами x23 и консеквентом x20. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка использовать в антецедентах координаты других объектов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{adefghijk}(\neg(a = g) \ \& \ \text{коорд}(g, K) = (h, i, j) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(ga), K) = (d, e, f) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(ag), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (x - h, y - i, z - j))))$$

из теоремы

$$\forall_{abcghijk}(\neg(a = g) \ \& \ \text{коорд}(a, K) = (b, c, k) \ \& \ \text{коорд}(g, K) = (h, i, j) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(ag), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((b - h, c - i, k - j), (x - h, y - i, z - j))))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - список правых частей равенств набора x8, у которых в левой части находится обозначение координат, а в правой - выражение с заголовком "набор". В нашем примере x9 состоит из двух выражений "(b, c, k)", "(h, i, j)". Проверяется, что список x9 непуст. Переменной x10 присваивается список параметров выражений x9. Проверяется, что список x10 непуст. В нашем примере он состоит из переменных b, c, h, i, j, k. Переменной x11 присваивается консеквент исходной теоремы, переменной x12 - результат добавления к списку x8 утверждения x11.

Решается задача на исследование с посылками x12 и целями "известно", "неизвестные x10". После решения в ее списке посылок выбирается не входящее в список x8 равенство x15 с заголовком "набор" своей правой части. В нашем примере это равенство имеет вид "коорд(вектор(ga), K) = (b - h, c - i, k - j)". Переменной x16 присваивается заголовок левой части равенства x15. Проверяется, что он представляет собой название координат. Проверяется, что в списке x8 отсутствует равенство для координат того же объекта, быть может, относительно другой системы координат. Проверяется, что список параметров равенства x15 включается в список параметров утверждений x12. Переменной x17 присваивается правая часть равенства x15, переменной x18 - список вхождений выражения x17 в утверждение x11. Проверяется, что список x18 непуст. Переменной x19 присваивается список элементов набора x17. В нашем примере - "b - h", "c - i", "k - j".

Выбирается список x20 переменных, не входящих в исходную теорему, длина которого равна длине списка x19. В нашем примере - d, e, f. Переменной x21 присваивается выражение "набор(x20)". В нашем примере - "(d, e, f)". Переменной x22 присваивается равенство, полученное из x15 заменой правой части на x21. В нашем примере - "коорд(вектор(ga), K) = (d, e, f)". Переменной x23 присваивается результат замены вхождений x18 в утверждение x11 на выражения x21. Переменной x24 присваивается результат добавления к списку x8 равенства

x22. Переменной x25 присваивается результат обработки списка x24 оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x23. Затем создается импликация с антецедентами x25 и консеквентом x23. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Замена переменных в теореме

1. Использование параметрического описания для исключения стандартного обозначения объектов данного типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcefABK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (e, f) \ \& \ A \in c \ \& \ B \in c \ \& \ \text{Прямая}(c) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(c, K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + et \ \& \ y = b + ft \ \& \ t - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{abefABK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (e, f) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + et \ \& \ y = b + ft \ \& \ t - \text{число})))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_A(\text{Прямая}(A) \leftrightarrow \exists_{BC}(B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A = \text{прямая}(BC)))$$

Переменной x9 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте, которая является обозначением координат, переменной x10 - вхождение другой части. Переменной x12 присваивается первый операнд вхождения x9. В нашем примере - "прямая(AB)". Переменной x13 присваивается список антецедентов теоремы. Переменной x14 присваивается заголовок выражения x12. В нашем примере - символ "прямая". Справочник поиска теорем "называть" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x17 имеет вид:

$$\forall_c(\text{Прямая}(c) \leftrightarrow \exists_{dg}(d - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ \neg(d = g) \ \& \ c = \text{прямая}(dg)))$$

Переменной x19 присваивается вхождение правой части эквивалентности в консеквенте теоремы x17. Проверяется, что по этому вхождению расположен символ "существует". Переменной x20 присваивается связывающая приставка квантора x19, переменной x21 - список конъюнктивных членов утверждения под квантором x19. В этом списке находится равенство x22, заголовок правой части которого - символ x14. Переменной x23 присваивается эта правая часть. В нашем примере x23 имеет вид "прямая(dg)". Определяется подстановка S вместо переменных x20, унифицирующая выражения x23 и x12. Переменной x25 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям набора x21.

Переменной x26 присваивается список антецедентов теоремы x17, переменной x27 - результат добавления к x26 утверждений, необходимых для сопровождения консеквента теоремы x17 по о.д.з., а также левой части этого консеквента.

Решается задача на описание с посылками x27 и условиями x25. Цели задачи - "полный", "попыткаспуска", "прямойответ", "неизвестные X", где X - параметры выражения x12. В нашем примере посылки суть "c – set", "Прямая(c)". Условия - "A – точка", "B – точка", " $\neg(A = B)$ ", "c = прямая(AB)". Неизвестные - A, B.

Ответ присваивается переменной x29. В нашем примере он имеет вид "B ∈ c & A – точка & B – точка & $\neg(A = B)$ & A ∈ c". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x30 присваивается список конъюнктивных членов ответа. Проверяется, что глубина вхождения неизвестных в утверждения списка x30 равна 1 (без учета внешнего отрицания там, где оно есть). Переменной x31 присваивается результат добавления к списку x13 утверждений x30 и левой части консеквента теоремы x17. Переменной x32 присваивается результат замены в консеквенте исходной теоремы первого операнда T его левой части на первый операнд R левой части консеквента теоремы x17. В нашем примере T - выражение "прямая(AB)", R - переменная c. Утверждение x32 имеет вид:

$$\text{коорд}(c, K) = \text{set}_{xy}(\exists_t(x = a + et \ \& \ y = b + ft \ \& \ t - \text{число}))$$

Такая же замена T на R предпринимается в утверждениях списка x31. Затем создается импликация с антецедентами x31 и консеквентом x32. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с характеристикой "уравнмножество".

Обобщение теоремы

1. Развязка параметров, определяющих множество объектов, с помощью дополнительного тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ghijABCDK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (g, h) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (i, j) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ A \in \text{прямая}(CD) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD) \ \rightarrow \ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{xy}(hi + x(j - h) + y(g - i) - gj = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$$

из теоремы

$$\forall_{deghijK}(\neg(d = e) \ \& \ \text{коорд}(d, K) = (g, h) \ \& \ \text{коорд}(e, K) = (i, j) \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \rightarrow \ \text{коорд}(\text{прямая}(de), K) = \text{set}_{xy}(hi + x(j - h) + y(g - i) - gj = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ A \in \text{прямая}(CD) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD) \ \& \ \neg(A = B) \ \rightarrow \ \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD))$$

Переменной x9 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте, которая является обозначением координат, переменной x10 - вхождение другой части. Переменной x12 присваивается первый операнд вхождения x9. В нашем примере - "прямая(de)". Переменной x13 присваивается список антецедентов

теоремы. Переменной x_{14} присваивается заголовок выражения x_{12} . В нашем примере - символ "прямая". Переменной x_{15} присваивается список параметров выражения x_{12} . Проверяется, что в списке x_{13} имеется равенство, в одной части которого расположено выражение с заголовком "набор", а в другой - обозначение координат некоторого объекта, параметры которого пересекаются со списком x_{15} . Справочник поиска теорем "равны" определяет по символу x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она представляет собой кванторную импликацию. Переменной x_{18} присваивается консеквент дополнительной теоремы. Проверяется, что он включает все переменные этой теоремы. Переменной x_{19} присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Переменной x_{21} присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения термина x_{18} по о.д.з. Переменной x_{22} присваивается вхождение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x_{14} . В нашем примере - правой части "прямая(CD)". Переменной x_{24} присваивается список параметров подтерма x_{22} . В нашем примере - C, D . Проверяется, что все элементы списка x_{24} входят в утверждения списка x_{19} , не принадлежащие набору x_{21} , только внутри подтермов, равных x_{22} .

Оператор "тождвывод" определяет результат x_{26} преобразования первого операнда левой части консеквента исходной теоремы при помощи дополнительной теоремы, применяемой в таком направлении, что вхождение x_{22} оказывается заменяющим. Переменной x_{27} присваивается список антецедентов теоремы x_{26} , переменной x_{28} - ее консеквент. Переменной x_{29} присваивается результат обработки процедурой "нормантецеденты" списка x_{27} относительно параметров термина x_{28} . Затем создается импликация с антецедентами x_{29} и консеквентом x_{28} , которая регистрируется в списке вывода с характеристикой "уравнмножество".

Попытка использования дополнительной эквивалентности для варьирования консеквента

1. Попытка использования дополнительной эквивалентности для развязки консеквента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcghijklmnK} (\neg(a = g) \ \& \ \neg(l^2 + m^2 + n^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(a, K) = (b, c, k) \ \& \ \text{коорд}(g, K) = (h, i, j) \ \& \ l - \text{число} \ \& \ m - \text{число} \ \& \ n - \text{число} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((l, m, n), (b - h, c - i, k - j)) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(ag), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((l, m, n), (x - h, y - i, z - j))))$$

из теоремы

$$\forall_{abcghijkK} (\neg(a = g) \ \& \ \text{коорд}(a, K) = (b, c, k) \ \& \ \text{коорд}(g, K) = (h, i, j) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(ag), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((b - h, c - i, k - j), (x - h, y - i, z - j))))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcdefklm}(\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ \neg(a^2 + b^2 + c^2 = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \ \& \ l - \text{число} \ \& \ m - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d, e, f)) \rightarrow \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (k, l, m))) \leftrightarrow \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (k, l, m)))$$

Переменной x9 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте, которая является обозначением координат, переменной x10 - вхождение другой части, представляющей собой описатель "класс". Переменной x11 присваивается символ по вхождению x9. В нашем примере - "коорд". Переменной x12 присваивается список антецедентов. Переменной x13 присваивается вхождение конъюнктивного члена утверждения под описателем "класс". В нашем примере - утверждения "пропорцнаборы((b - h, c - i, k - j), (x - h, y - i, z - j))". Переменной x14 присваивается символ по вхождению x13. В нашем примере - символ "пропорцнаборы". Проверяется, что число операндов вхождения x13 равно 2, и переменной x15 присваивается пара этих операндов. Переменной x16 присваивается связывающая приставка описателя x10. В списке x15 выбирается выражение x17, параметры которого не пересекаются со списком x16. В нашем примере - выражение "(b - h, c - i, k - j)". Переменной x18 присваивается список параметров выражения x17. В нашем примере - b, c, h, i, j, k. Проверяется, что список x18 непуст, причем в списке x12 имеется равенство, в одной из частей которого имеется переменная списка x18, а в другой части нет параметров подтерма x13. Справочник поиска теорем "подстзамена" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождения x13 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы, причем этом оператору передается опция (фикс x16), указывающая на переменные x16, вместо которых подстановка не выполняется. Теорема x21 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительной импликации

1. Использование дополнительной импликации для варьирования параметров уравнения и вывода условия на новые параметры.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcghijklpqrK}(\neg(a = g) \ \& \ \text{коорд}(g, K) = (h, i, j) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(ag), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((p, q, r), (x - h, y - i, z - j))) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(ga), K) = (b, c, k) \ \& \ p - \text{число} \ \& \ q - \text{число} \ \& \ r - \text{число} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{пропорцнаборы}((b, c, k), (p, q, r)))$$

из теоремы

$$\forall_{adefghijk}(\neg(a = g) \ \& \ \text{коорд}(g, K) = (h, i, j) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(ga), K) = (d, e, f) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(ag), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (x - h, y - i, z - j))))$$

и дополнительной теоремы

$\forall_{abcdefklm} (\neg(d^2 + e^2 + f^2 = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \ \& \ l - \text{число} \ \& \ m - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (d, e, f)) \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (k, l, m)) \rightarrow \text{пропорцнаборы}((a, b, c), (k, l, m)))$

Переменной x9 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте, которая является обозначением координат, переменной x10 - вхождение другой части, представляющей собой описатель "класс". Переменной x11 присваивается символ по вхождению x9. В нашем примере - "коорд". Переменной x12 присваивается список антецедентов. Переменной x13 присваивается связывающая приставка описателя x10, переменной x14 - утверждение под этим описателем. Проверяется, что x14 имеет единственный подтерм максимальной сложности, и этот подтерм присваивается переменной x16. В нашем примере x16 имеет вид "пропорцнаборы((d, e, f), (x - h, y - i, z - j))". Переменной x17 присваивается список конъюнктивных членов утверждения x14. Проверяется, что x16 - элемент этого списка. Проверяется, что число корневых операндов утверждения x16 равно 2, и переменной x19 присваивается список этих операндов. В нашем примере - "(d, e, f)", "(x - h, y - i, z - j)". В списке x19 выбирается позиция x20, на которой расположено выражение x21, параметры которого не пересекаются со списком x13. В нашем примере - "(d, e, f)". Переменной x22 присваивается другой элемент списка x19; проверяется, что его параметры пересекаются со списком x13. В нашем примере x22 - "x - h, y - i, z - j". Переменной x23 присваивается заголовок терма x16. В нашем примере - символ "пропорцнаборы". Справочник поиска теорем "связкоорд" определяет по x23 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x26 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x26 имеет вид:

$\forall_{bcklmnpqr} (\neg(l^2 + m^2 + n^2 = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \ \& \ l - \text{число} \ \& \ m - \text{число} \ \& \ n - \text{число} \ \& \ p - \text{число} \ \& \ q - \text{число} \ \& \ r - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((b, c, k), (l, m, n)) \ \& \ \text{пропорцнаборы}((l, m, n), (p, q, r)) \rightarrow \text{пропорцнаборы}((b, c, k), (p, q, r)))$

Переменной x27 присваивается список антецедентов теоремы x26, переменной x28 - список утверждений набора x27, имеющих заголовок x23. В нашем примере x28 состоит из утверждений "пропорцнаборы((b, c, k), (l, m, n))" и "пропорцнаборы((l, m, n), (p, q, r))". Проверяется, что список x28 двухэлементный. Переменной x31 присваивается список операндов первого утверждения списка x28, переменной x33 - список операндов второго утверждения. Переменным x34 и x36 присваиваются позиции списков x31 и x33, на которых расположено одно и то же выражение x35. В нашем примере - выражение "(l, m, n)". Если отношение x23 несимметрично, то проверяется, что номера позиций x20 и x34 различны. В нашем примере x23 симметрично. Переменной x37 присваивается список параметров утверждений x16 и x30, не вошедших в список x13. В нашем примере x37 состоит из переменных b, c, d, e, f, h, i, j, k, l, m, n. Переменной x38 присваивается элемент списка x31, отличный от x35. В нашем примере - "(b, c, k)".

Определяется подстановка S вместо переменных x37, унифицирующая одновременно термы x21, x38 и x22, x35. Переменной x40 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждения набора x12. Проверяется,

утверждения x40 не содержат переменных x13. Переменной x41 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям списка x27, не вошедшим в список x28. Список x41 разбивается на подсписок x42 утверждений, содержащих переменные x13, и подсписок x43 остальных утверждений. Переменной x44 присваивается объединение наборов x40 и x43, переменной x45 - объединение наборов x17 и x42. Переменной x46 присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x13 на конъюнкцию утверждений x45. В нашем примере x46 имеет вид:

$$\exists_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (x - h, y - i, z - j)) \ \& \ \neg((x - h)^2 + (y - i)^2 + (z - j)^2 = 0) \ \& \ (x - h) - \text{число} \ \& \ (y - i) - \text{число} \ \& \ (z - j) - \text{число})$$

При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x46 - следствие утверждений x47. Переменной x49 присваивается результат применения подстановки S ко второму элементу списка x28. В консеквенте исходной теоремы рассматривается вхождение x50 терма x16. Переменной x51 присваивается результат замены в этом консеквенте вхождения x50 на утверждение x49. Переменной x52 присваивается результат применения подстановки S к консеквенту теоремы x26. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x47 и утверждение x51, а консеквентом - утверждение x52. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.129 Характеристика "усиление"

Характеристикой "усиление(N)" снабжаются эквивалентности, обеспечивающие усиление элементарного утверждения. N - направление замены.

Использование дополнительной эквивалентности для упрощения заменяемой части

1. Использование эквивалентности, выражающей условие декомпозируемости числового атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acd}(a - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ a \subseteq c \cup d \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ \text{конечное}(d) \rightarrow \text{card}(c) + \text{card}(d) = \text{card}(a) \leftrightarrow a = c \cup d \ \& \ \text{непересек}(c, d))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq b \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a) = \text{card}(b) \leftrightarrow a = b)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a \cup b) = \text{card}(a) + \text{card}(b) \leftrightarrow \text{непересек}(a, b))$$

Характеристика - "усиление(второйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяемая часть теоремы. Проверяется, что она является равенством. Переменной x_{11} присваивается список антецедентов. Переменной x_{12} присваивается входение одной из частей равенства x_{10} , переменной x_{13} - входение другой части. Переменной x_{14} присваивается подтерм x_{12} . В нашем примере - " $\text{card}(b)$ ". Проверяется, что выражение x_{14} имеет численное значение. Рассматривается входящий в x_{14} невырожденный числовой атом x_{16} . В нашем примере он совпадает с x_{14} . Проверяется, что x_{16} не входит в подтерм x_{13} . Выбирается переменная x_{17} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная c . Переменной x_{19} присваивается результат замены входений выражения x_{16} в терм x_{14} на переменную x_{17} . В нашем примере x_{19} - переменная c . Переменной x_{20} присваивается выражение " $\text{отображение}(x_{17} \text{ число}(x_{17})x_{19})$ ". В нашем примере - " $\lambda_c(c, c - \text{число})$ ". При помощи проверочного оператора устанавливается, что функция x_{20} не убывает на числовой оси. Проверяется также, что разность выражений x_{14} и подтерма x_{13} неотрицательна.

Дополнительная теоремы либо определяется справочником поиска теорем "экв-термы" по заголовку терма x_{16} , либо выбирается в текущем списке вывода как имеющая характеристика с заголовком "числвыраз". В нашем примере имеет место второй случай. Переменной x_{23} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{23} имеет вид:

$$\forall_{cd}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ \text{конечное}(d) \rightarrow \text{card}(c \cup d) = \text{card}(c) + \text{card}(d) \leftrightarrow \text{непересек}(c, d))$$

Переменной x_{27} присваивается направление замены для теоремы x_{23} согласно характеристике "числвыраз". В нашем примере - "первыйтерм2. Переменной x_{29} присваивается заменяющая часть теоремы x_{23} согласно x_{27} . В нашем примере - " $\text{card}(c \cup d) = \text{card}(c) + \text{card}(d)$ ". Проверяется, что x_{29} имеет заголовок "равно". Переменной x_{30} присваивается входение одной части равенства x_{29} , переменной x_{31} - другой части. Переменной x_{32} присваивается подтерм x_{32} . Проверяется, что он имеет тот же заголовок, что и выражение x_{16} . В нашем примере x_{32} - выражение " $\text{card}(c \cup d)$ ". Переменной x_{33} присваивается список антецедентов теоремы x_{23} . Проверяется, что невырожденные числовые атомы подтерма x_{31} образуют декомпозицию выражения x_{32} по его переменным. Переменной x_{34} присваивается список параметров выражений x_{16} и x_{32} . В нашем примере - b, c, d . Определяется подстановка S вместо переменных x_{34} , унифицирующая выражения x_{16} и x_{32} . При унификации блокируется введение новых переменных. Проверяется, что разность выражений x_{31} и x_{32} неотрицательна.

Переменной x_{36} присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям списков x_{11} и x_{33} . Переменной x_{37} присваивается результат замены в терме x_{14} выражений x_{16} на подтерм x_{31} . В нашем примере x_{37} имеет вид " $\text{card}(b)$ " на " $\text{card}(c) + \text{card}(d)$ ". Переменной x_{38} присваивается равенство выражения x_{37} подтерму x_{13} . Переменной x_{39} присваивается эквивалентность равенства x_{38} конъюнкции заменяющей части исходной теоремы и заменяемой части теоремы x_{23} . Переменной x_{40} присваивается результат применения к x_{39} подстановки S . Создается импликация с антецедентами x_{36} и консеквентом x_{40} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.130 Характеристика "усмгруппа"

Характеристикой "усмгруппа($i N$)" снабжаются эквивалентности, преобразующие одно утверждение с помощью другого таким образом, что новое утверждение содержит параметры обоих исходных утверждений. i - номер антецеденты, идентифицируемого с другим утверждением, N - направление замены.

Применение дополнительной эквивалентности для упрощения заменяемого утверждения

1. Попытка упростить заменяемую часть эквивалентности при помощи стандартизирующей эквивалентности двух элементарных утверждений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abef}(a - \text{число} \ \& \ b = a \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow f = e \leftrightarrow a - f = b - e)$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a = b \rightarrow c = d \leftrightarrow a + c = b + d)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow -b = -a \leftrightarrow b = a)$$

Характеристика - "усмгруппа(5 второйтерм)".

Переменной x11 присваивается вхождение заменяемой части, переменной x12 - список антецедентов. Переменной x13 присваивается символ по вхождению x11. Если этот символ - "равно", то переменной x13 переписывается тип значений частей равенства. В нашем примере x13 становится равно символу "число". Справочник поиска теорем "упроцэkv" определяет по x13 указанную выше дополнительную теоремы. Оператор "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x11 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы, применяемой в направлении общей стандартизации. В нашем примере - слева направо.

Переменной x19 присваивается список антецедентов теоремы x18, переменной x20 - ее консеквент. Переменной x21 присваивается результат обработки набора x19 оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x20. Создается импликация с антецедентами x21 и консеквентом x20, которая регистрируется в списке вывода с характеристикой "усмгруппа".

Специальная стандартизация теоремы

1. Группировка в левых частях двуместных отношений консеквента всех ненулевых членов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a = b \rightarrow c = d \leftrightarrow a + c - b - d = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(a\text{—число} \ \& \ b\text{—число} \ \& \ c\text{—число} \ \& \ d\text{—число} \ \& \ a = b \rightarrow c = d \leftrightarrow a+c = b+d)$$

Характеристика "усмгруппа(5 второйтерм)".

Переменной x_9 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x_{11} - заменяющая часть ее консеквента. При помощи справочника "перегруппировка" определяется возможность группировки в левых частях двуместных отношений утверждения x_{11} всех "ненулевых" членов, и результат такой перегруппировки переписывается переменной x_{11} . В нашем примере он имеет вид " $a + c - b - d = 0$ ". После проверки того, что утверждение x_{11} было изменено, переменной x_{12} присваивается результат замены заменяющей части консеквента теоремы на утверждение x_{11} . Затем теорема x_{12} регистрируется в списке вывода с характеристикой "усмгруппа".

3.131 Характеристика "факторизация"

Характеристикой "факторизация($P \ N$)" снабжаются теоремы, полученные в цикле вывода тождеств приведения к заголовку P . N - направление замены.

Использование дополнительного тождества для упрощения заменяемой части

1. Попытка склеить два члена факторизуемого выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(b\text{—число} \ \& \ a\text{—число} \rightarrow a^2 - b^2 = (a + b)(a - b))$$

из теоремы

$$\forall_{abde}(a\text{—число} \ \& \ b\text{—число} \ \& \ d\text{—число} \ \& \ e\text{—число} \rightarrow ad+ae+bd+be = (a+b)(d+e))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a\text{—число} \rightarrow a - a = 0)$$

Характеристика - "факторизация(умножение второйтерм)".

Цикл вывода тождеств для приведения к заголовку P иницируется протоколом "факторизация(P)". В качестве ограничителя вводится характеристика "число(N)" данного протокола, обрывающая вывод при получении N тождеств. Пока в системе имеется единственный такой протокол, расположенный в разделе "Элементарная алгебра" - "Умножение" - "Формулы сокращенного умножения" - "Вывод тождеств для разложения на множители" оглавления базы теорем. В начале цикла список вывода заполняется несколькими соотношениями дистрибутивности - для различного числа слагаемых в каждом из сомножителей. В той же ячейке вывода, что и протокол, расположены несколько тождеств для "склейки" слагаемых. В нашем примере - единственное такое тождество для взаимного их уничтожения. Вывод заключается в попытках

применения склеивающих тождеств к исходным соотношениям дистрибутивности для получения формул сокращенного умножения. Этот процесс приводит к получению формул для разности квадратов либо кубов, для суммы кубов, а также некоторых других аналогичных формул. Например, выводится формула " $a^5 + b^5 + ab^4 = (ab + a^2 + b^2)(a^3 + b^3 - a^2b)$ ". На основе выводимых формул сразу же создаются приемы нормализатора "текторм", проверяющего новые соотношения на избыточность. Этот нормализатор сохраняется в буфере базы приемов. По завершении цикла вывода его следует удалять вручную, сбрасывая буфер нажатием "O".

Перейдем к описанию приема. Переменной x8 присваивается элемент (факторизация A1 A2 A3) из установки на цикл вывода. Здесь A1 - требуемый заголовок, A2 - пара (теорема - набор характеристик) для дистрибутивной развертки выражений с заголовком A1, A3 - набор пар (теорема - набор характеристик) для склеивающих тождеств, используемых в цикле вывода. Переменной x11 присваивается заменяемая часть тождества, переменной x12 - ее заголовок. В качестве дополнительной теоремы выбирается тождество из набора A3. Переменной x14 присваивается результат переобозначения переменных дополнительного тождества на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x14 имеет вид:

$$\forall_c (c - \text{число} \rightarrow c - c = 0)$$

Переменной x17 присваивается заменяемая часть теоремы x14. Проверяется, что ее заголовок равен x12, а число корневых операндов равно 2. Переменной x18 присваивается вхождение некоторого корневого операнда выражения x11. В нашем примере - вхождение слагаемого ad . Переменной x19 присваивается вхождение некоторого операнда, расположенного правее операнда x18. В нашем примере - вхождение слагаемого be . Переменной x20 присваивается результат соединения операцией x12 подтермов x18 и x19. В нашем примере - " $ad + be$ ". Переменной x21 присваивается список параметров термов x20 и x17.

Перечисляются подстановки S вместо переменных x21, унифицирующие термы x20 и x17. Перечисление обрывается, если количество версий подстановки превысило 600.

Переменной x24 присваивается результат замены в терме x11 операндов x18 и x19 на заменяющую часть теоремы x14. Затем переменной x25 присваивается результат применения к x24 подстановки S . В нашем примере x25 имеет вид " $0 + aa + b(-b)$ ". Переменной x26 присваивается результат применения подстановки S к заменяющей части исходной теоремы. В нашем примере он имеет вид " $(a + b)(a - b)$ ". Переменной x27 присваивается объединение списков антецедентов исходной теоремы и теоремы x14. Переменной x28 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям списка x27. Переменной x29 присваивается равенство выражений x25 и x26, переменной x30 - результат обработки набора x28 оператором "нормантецеденты" относительно параметров равенства x29. Переменной x31 присваивается результат обработки равенства x29 нормализаторами общей стандартизации. В нашем примере получается " $-b^2 + a^2 = (a + b)(a - b)$ ". Проверяется, что x31 - равенство с различными правой и левой частями. К списку x30 добавляются утверждения, необходимые

для сопровождения равенства х31 по о.д.з. Переменной х32 присваивается результат левой части равенства х31 процедурой "текторм". В нашем примере эта левая часть не изменяется. Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" выражения х31 и левой части равенства х31 совпадают. Создается импликация с антецедентами х30 и консеквентом х31, которая регистрируется в списке вывода. Ее характеристика совпадает с характеристикой исходной теоремы. При регистрации теорема порождает прием нормализатора "текторм". Проверяется достижение лимита количества теорем. Если он достигнут, цикл вывода завершается.

3.132 Характеристика "функ"

Характеристикой "функ" снабжаются теоремы, полученные из определения отношения путем явного выражения функции через прочие параметры.

Использование дополнительного тождества для упрощения консеквента

1. Примерка тождеств, упрощающих выражение под описателем "отображение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ae} (\text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \text{ — функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, e) \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(-a(x), x \in \text{Dom}(e)), \lambda_c(-e(c), c \in \text{Dom}(e))))$$

из теоремы

$$\forall_g (\forall_x (x \in \text{Dom}(g) \rightarrow \text{дифференцируема}(g, x)) \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \\ g \text{ — функция} \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(\text{производная}(g, x), x \in \text{Dom}(g)), g))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ae} (\text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \in \text{Dom}(e) \ \& \ e \text{ — функция} \ \& \\ \text{дифференцируема}(e, a) \rightarrow \text{производная}(\lambda_c(-e(c), c \in \text{Dom}(e)), a) = \\ \text{— производная}(e, a))$$

Исходная теорема получила характеристику "функ" после того, как в левую часть эквивалентности для определения первообразной был подставлен описатель "отображение", подсказанный правой частью.

Переменной х8 присваивается список антецедентов, переменной х9 - вхождение консеквента. Переменной х10 присваивается вхождение операнда вхождения х9, имеющего заголовок "отображение". Переменной х11 присваивается связывающая приставка описателя х10. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной х12 присваивается ее элемент. Переменной х13 присваивается предпоследний операнд вхождения х10 (он определяет условия на варьируемую переменную). Проверяется, что х13 - условие принадлежности переменной х12 области определения некоторой функции, обозначенной переменной х14. В нашем примере х12 - переменная x , х14 - переменная g . Переменной х15 присваивается последний операнд описателя х10. В нашем примере - "производная(g, x)". Проверяется, что терм х15 неоднобуквенный, и переменной х16 присваивается его за-

головок. Дополнительная теорема выбирается в том разделе, к которому относится символ x16. Проверяется, что эта теорема - кванторная импликация с характеристикой "описатель(N)". В нашем примере - "описатель(второйтерм)". Переменной x25 присваивается заменяемая часть дополнительной теоремы. Проверяется, что эта часть имеет заголовок x16. Переменной x26 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x26 совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x28 присваивается заменяемая часть теорем x26. В нашем примере - "производная($\lambda_c(-e(c), c \in \text{Dom}(e)), a$)". Переменной x29 присваивается список параметры выражений x15 и x28, отличных от x12. В нашем примере - a, e, g . Проверяется, что переменная x14 входит в список x29.

Находится подстановка S вместо переменных x29, унифицирующая выражения x15 и x28. Переменной x31 присваивается выражение, подставляемое подстановкой S вместо переменной x14. В нашем примере - " $\lambda_c(-e(c), c \in \text{Dom}(e))$ ". Проверяется, что терм x31 имеет заголовок "отображение". Переменной x32 присваивается его связывающая приставка, Проверяется, что она одноэлементна. Переменной x33 присваивается список результатов замены переменной x12 на переменную списка x32 в содержащих переменную x12 результатах применения подстановки S к антецедентам теоремы x26. В нашем примере x33 состоит из утверждений " $c \in \text{Dom}(e)$ " и "дифференцируема(e, c)". Переменной x34 присваивается результат замены предпоследнего операнда описателя x31 на конъюнкцию этого операнда с утверждениями x33. Подстановка S корректируется так, что вместо выражения x31 подставляет выражение x34.

Переменной x35 присваивается список не содержащих переменной x12 результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x26. Переменной x36 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям набора x8. Переменной x37 присваивается объединение списков x35 и x36. Переменной x38 присваивается результат применения подстановки S к заменяющей части теоремы x26. В нашем примере x38 имеет вид " $-$ производная(e, x)". Переменной x39 присваивается результат замены в консеквенте исходной теоремы последнего операнда описателя x10 на выражение x38 и одновременной подстановки S вместо прочих вхождений переменных. Создается импликация с антецедентами x37 и консеквентом x39. Переменной x40 присваивается результат обработки этой импликации оператором "нормтеорема". В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_e(\text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ e - \text{функция} \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(-\text{первообразная}(e, x), x \in \text{Dom}(e) \ \& \\ \text{дифференцируема}(e, x)), \lambda_c(-e(c), c \in \text{Dom}(e) \ \& \ \text{дифференцируема}(e, c))))$$

Переменной x42 присваивается вхождение того операнда консеквента теоремы x40, номер которого совпадает с номером операнда x10 вхождения x9. В нашем примере x42 - вхождение первого операнда. Проверяется, что x42 - описатель "отображение". Переменной x43 присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она одноэлементна. Переменной x44 присваивается вхождение последнего операнда описателя x42, переменной x45 - набор антецедентов теоремы x40.

Составляется список x_{46} таких пар (T, X) , что в списке x_{45} имеется утверждение "функция(X)", внутри x_{44} встречается вхождение выражения T , корневым операндом которого служит X , причем заголовок T отличен от символа "значение", T содержит переменную списка x_{43} и не содержит таких отличных от X переменных Y , для которых в x_{45} имеется утверждение "функция(Y)". В нашем примере x_{46} состоит из единственной пары "(производная(e, x), x)".

Если список x_{46} пуст, то теорема x_{40} регистрируется в списке вывода с характеристиками "функперех i ", "функполе", где i - номер операнда x_{10} вхождения x_9 .

Если список x_{46} непуст, то переменной x_{47} присваивается список не входящих в теорему x_{40} переменных, длина которого равна длине списка x_{46} . В нашем примере x_{47} состоит из переменной a .

Вводится накопитель x_{48} , в который первоначально заносятся все антецеденты теоремы x_{40} . Затем предпринимается синхронный просмотр списков x_{46} и x_{47} : переменной x_{49} присваивается текущее вхождение в список x_{46} , переменной x_{50} - соответствующее вхождение в список x_{47} . Переменной x_{51} присваивается пара (T, X) по вхождению x_{49} , переменной x_{52} - равенство выражения T выражению " $X(x_{43})$ ". В нашем примере - равенство "производная(e, x) = $a(x)$ ". Переменной x_{53} присваивается список, состоящий из утверждений "длялюбого(x_{43} если Q то x_{52})", "функция(x_{50})", "функция(X)", "равно(область(x_{50}) область(X))", а также из равенств списка x_{45} , содержащих подтерм "область(X)". Здесь Q - предпоследний операнд описателя x_{42} . В нашем примере x_{53} состоит из утверждений " $\forall_x(x \in \text{Dom}(e) \ \& \ \text{дифференцируема}(e, x) \rightarrow \text{производная}(e, x) = a(x))$ ", " a - функция", " e - функция", " $\text{Dom}(a) = \text{Dom}(e)$ ". Переменной x_{54} присваивается список всех не содержащих переменной X утверждений списка x_{45} . В нашем примере он пуст. Решается задача на описание с посылками x_{53} и условиями x_{53} . Цели - "прямойответ", "неизвестные X ", "разделение X ". Ответ присваивается переменной x_{56} . В нашем примере он имеет вид "первообразная(a, e) & a -функция & $\text{Dom}(e) = \text{Dom}(a)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" (иначе применение приема отменяется), и список его конъюнктивных членов добавляется к списку x_{48} . Затем - продолжение просмотра.

По завершении просмотра все переменные начиная с x_{49} становятся снова не определены. В нашем примере x_{48} будет состоять из утверждений " $\text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R}$ ", " $\text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R}$ ", " e -функция", "первообразная(a, e)", " a -функция", " $\text{Dom}(e) = \text{Dom}(a)$ ".

Переменной x_{49} присваивается подтерм x_{44} . В нашем примере x_{49} имеет вид "-производная(e, x)". Предпринимается замена вхождений в терм x_{49} выражений T - первых элементов пар (T, X) набора x_{46} на выражения " $X(x_{43})$ ". Результат присваивается переменной x_{52} . В нашем примере имеем " $-a(x)$ ". Переменной x_{53} присваивается результат замены вхождения x_{44} в утверждение x_{41} на терм x_{52} . В нашем примере он имеет вид:

первообразная($\lambda_x(-a(x), x \in \text{Dom}(e) \ \& \ \text{дифференцируема}(e, x)), \lambda_x(-e(c), c \in \text{Dom}(e) \ \& \ \text{дифференцируема}(e, c))$)

Затем создается импликация с антецедентами x48 и консеквентом x43. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с характеристиками "функперех(i)", "функполе", "отображение". Здесь i - номер операнда x10 вхождения x9.

3.133 Характеристика "функперех"

Характеристикой "функперех(i)" снабжаются теоремы, представляющие собой частный случай определения функциональной характеристики. i - номер операнда консеквента, на котором расположена характеризующая функция.

Обобщение теоремы

1. Обобщение характеристики функции путем ввода неповторного внешнего параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abde}(\neg(e = 0) \ \& \ \text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \text{ — функция} \ \& \ b \text{ — число} \ \& \ e \text{ — число} \ \& \ \text{первообразная}(a, d) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_f(ba(f)/e, f \in \text{Dom}(a)), \lambda_c(bd(c)/e, c \in \text{Dom}(d)))$$

из теоремы

$$\forall_{abd}(\text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \text{ — функция} \ \& \ b \text{ — число} \ \& \ \text{первообразная}(a, d) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(ba(x), x \in \text{Dom}(a)), \lambda_c(bd(c), c \in \text{Dom}(d))))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(\neg(b = 0) \ \& \ a \text{ — число} \ \& \ b \text{ — число} \ \& \ e \text{ — число} \rightarrow e \cdot (a/b) = ae/b)$$

Характеристика - "функперех(1)".

Переменной x8 присваивается операнд характеристики. В нашем примере - символ 1. Переменной x9 присваивается вхождение консеквента. Проверяется, что оно имеет ровно два операнда, и переменной x10 присваивается вхождение операнда с номером x8. Переменной x11 присваивается подтерм x10. В нашем примере - " $\lambda_x(ba(x), x \in \text{Dom}(a))$ ". Проверяется, что x11 содержит символ "значение". Внутри терма x11 выбирается вхождение x12 неоднобуквенного подтерма с двумя корневыми операндами; переменной x13 присваивается его заголовок. В нашем примере x12 - выражение $ba(x)$, x13 - символ "умножение". Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается вхождение консеквента дополнительной теоремы, переменной x19 - ее заменяемая часть. В нашем примере - " $e \cdot (a/b)$ ". Проверяется, что она имеет заголовок x13. Рассматривается вхождение x20 корневого операнда терма x19, представляющее собой двуместную операцию от переменных x22 и x23. Находится единица E этой операции. В нашем примере переменная x22 - a , переменная x23 - b . Проверяется, что другой корневой операнд терма x19 представляет собой переменную x25. В нашем примере - e .

Если символ x_{13} коммутативен, то переменной x_{26} присваивается произвольный корневой операнд операции x_{12} , иначе - операнд, имеющий тот же номер, что и операнд x_{19} операции x_{20} . В нашем примере x_{26} - вхождение операнда b .

Проверяется, что по вхождению x_{26} расположена переменная x_{27} , имеющая единственное вхождение в терм x_{10} . Переменной x_{28} присваивается вхождение отличного от x_{26} операнда операции x_{12} . Переменной x_{29} присваивается та из переменных x_{22} , x_{23} , по которой операция x_{20} не имеет единицы, переменной x_{30} - та, по которой она имеет единицу. В нашем случае x_{29} - a , x_{30} - b . Переменной x_{31} присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. Проверяется, что его заголовок отличен от символа x_{13} и что число его корневых операндов равно 2. Рассматривается вхождение x_{32} того корневого операнда терма x_{31} , который имеет заголовок x_{13} . В нашем примере - терма " ae ". Проверяется, что число операндов вхождения x_{32} равно 2. Переменной x_{33} присваивается вхождение операнда операции x_{32} , равного переменной x_{25} (т.е. e), переменной x_{34} - вхождение операнда, равного переменной x_{29} (т.е. a). Если операция x_{13} некоммутативна, то проверяется, что операнд x_{34} операции x_{32} имеет тот же номер, что и операнд x_{20} операции x_{19} . Рассматривается вхождение x_{35} корневого операнда терма x_{31} , отличного от x_{32} . Проверяется, что на этом вхождении расположена переменная x_{30} (т.е. b). Переменной x_{36} присваивается заголовок терма x_{31} .

Выбирается переменная x_{37} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - " e ". Переменной x_{38} присваивается результат соединения термов x_{12} и x_{37} операцией x_{36} , причем номер операнда x_{37} совпадает с номером операнда x_{35} операции x_{31} . В нашем примере x_{38} имеет вид $ba(x)/e$. Переменной x_{39} присваивается результат замены вхождения x_{12} в терм x_{11} на x_{38} . В нашем случае - " $\lambda_x(ba(x)/e, x \in \text{Dom}(a))$ ". Переменной x_{40} присваивается результат подстановки термов x_{27} и x_{37} вместо переменных x_{29} и x_{30} в подтерм x_{20} . В нашем примере - " b/e ". Переменной x_{41} присваивается вхождение операнда консеквента исходной теоремы, отличного от x_{10} . Переменной x_{42} присваивается подтерм x_{41} . Переменной x_{43} присваивается результат подстановки терма x_{40} вместо переменной x_{27} в терм x_{42} . В нашем случае - " $\lambda_c((b/e) \cdot d(c), c \in \text{Dom}(d))$ ". Переменной x_{45} присваивается набор результатов подстановки выражений x_{27} , x_{37} и подтерма x_{28} вместо переменных x_{29} , x_{30} и x_{25} в антецеденты дополнительной теоремы. В нашем примере - " $\neg(e = 0)$ ", " b - число", " e - число", " $a(x)$ - число". Переменной x_{46} присваивается объединение набора x_{45} с набором результатов подстановки выражения x_{40} вместо переменной x_{27} в антецеденты исходной теоремы.

Далее предпринимается анализ избыточности добавленной переменной x_{37} . Выражение x_{39} обрабатывается нормализаторами общей стандартизации и проверяется, что в результате переменная x_{37} не оказалась в одной и той же ассоциативно-коммутативной операции с другой неповторной переменной.

Создается импликация с антецедентами x_{46} , консеквентом которой служит результат соединения заголовком терма x_9 выражений x_{39} и x_{43} , причем номер операнда x_{39} равен x_8 . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

2. Обобщение характеристики функции путем ввода неповторного дополнительного параметра операнда.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcef}(\neg(f = 0) \ \& \ \neg(b - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \& \ (0, \infty) \subseteq a \ \& \ b - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_x(e(x)/x, x \in a), c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(e(b^{fx}), x - \text{число}), \lambda_d(c(b^{df})/(f \ln b), d - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{abce}(\neg(b - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \& \ (0, \infty) \subseteq \text{Dom}(\lambda_x(e(x)/x, x \in \text{Dom}(a))) \ \& \ \lambda_x(e(x)/x, x \in \text{Dom}(a)) - \text{функция} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_x(e(x)/x, x \in a), c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(e(b^x), x - \text{число}), \lambda_d(c(b^d)/\ln b, d - \text{число})))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \cdot (a/b) = ae/b)$$

Характеристика - "функперех(1)".

Переменной x8 присваивается операнд характеристики. В нашем примере - символ 1. Переменной x9 присваивается вхождение консеквента. Проверяется, что оно имеет ровно два операнда, и переменной x10 присваивается вхождение операнда с номером x8. Переменной x11 присваивается подтерм x10. В нем рассматривается вхождение x12 двуместной операции x13. В нашем примере - операции b^x . Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x13 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x20 присваивается ее заменяемая часть. Проверяется, что она имеет заголовок x13. Рассматривается вхождение x21 корневого операнда терма x20, представляющее собой двуместную операцию от переменных x23 и x24. Находится единица этой операции. В нашем примере x20 - " $(a^b)^c$ "; переменная x23 - a , переменная x24 - b . Проверяется, что другой корневой операнд терма x19 представляет собой переменную x26. В нашем примере - c .

Если символ x13 коммутативен, то переменной x27 присваивается произвольный корневой операнд операции x12, иначе - операнд, имеющий тот же номер, что и операнд x21 операции x20. В нашем примере x27 - вхождение операнда b . Проверяется, что по вхождению x27 расположена переменная x28, имеющая единственное вхождение в терм x11 и не связанная в x11 кванторами и описателями. Переменной x29 присваивается вхождение отличного от x27 операнда операции x12. Переменной x30 присваивается та из переменных x23, x24, по которой операция x21 не имеет единицы, переменной x31 - та, по которой она имеет единицу. В нашем случае x30 - a , x31 - b . Переменной x32 присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы.

Проверяется, что заголовком терма x32 служит символ x13. В нашем примере x32 - " a^{bc} ". Переменной x33 присваивается тот корневой операнд терма x32, который расположен так же, как операнд x21 операции x20. В нашем случае - a . Проверяется, что по вхождению x33 расположена переменная x30. Переменной x34 присваивается вхождение операнда операции x32, отличного от x33.

Переменной x35 присваивается символ по вхождению x34. Проверяется, что он коммутативен. Если x29 - вхождение операции x35, то проверяется, что оно не имеет операнда - неповторной в терме x11 переменной.

Выбирается не входящая в исходную теорему переменная x36. В нашем примере - f . Переменной x37 присваивается результат соединения операцией x35 переменной x36 и подтерма x29. В нашем примере - " fx ". Переменной x38 присваивается результат замены в терме x11 вхождения x29 на терм x37. В нашем случае - " $\lambda_x(e(b^{fx}), x - \text{число})$ ". Переменной x39 присваивается результат подстановки термов x28 и x36 вместо переменных x30 и x31 в подтерм x21. В нашем примере - " b^f ". Переменной x42 присваивается результат подстановки терма x39 вместо переменной x28 в операнд вхождения x9, отличный от x10. В нашем примере - " $\lambda_d(c((b^f)^d)/\ln(b^f), d - \text{число})$ ". Переменной x44 присваивается набор результатов подстановки термов x28, x36 и подтерма x29 вместо переменных x30, x31 и x26 в антецеденты дополнительной теоремы. Переменной x45 присваивается объединение списка x44 с набором результатов подстановки терма x39 вместо переменной x28 в антецеденты исходной теоремы.

Предпринимается анализ избыточности добавленной переменной x36. Выражение x37 обрабатывается нормализаторами общей стандартизации и проверяется, что в результате переменная x36 не оказалась в одной и той же ассоциативно-коммутативной операции с другой неповторной переменной.

Создается импликация с антецедентами x45, консеквентом которой служит результат соединения заголовком терма x9 выражений x42 и x38, причем номер операнда x42 равен x8. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

3. Обобщение характеристики функции путем ввода нового параметра вместо неоднобуквенного выражения с единственным неповторным старым параметром.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(\neg(b + 1 = 0) \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_f(f^b, 0 < f \ \& \ f - \text{число}), \lambda_c(c^{b+1}/(b + 1), 0 < c \ \& \ c - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_a(\neg(a = 0) \ \& \ a - \text{число} \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_f(f^{a-1}, 0 < f \ \& \ f - \text{число}), \lambda_c(c^a/a, 0 < c \ \& \ c - \text{число})))$$

Характеристика - "функперех(1)".

Переменной x8 присваивается номер операнда из характеристики. В нашем примере - 1. Переменной x10 присваивается вхождение операнда консеквента с номером x8. Переменной x11 присваивается подтерм x10, переменной x12 - список его параметров. В нашем примере x11 - " $\lambda_f(f^{a-1}, 0 < f \ \& \ f - \text{число})$ ", x12 - единственная переменная a . Проверяется, что список x12 непуст. Внутри терма x11 выбирается вхождение x13 неоднобуквенного подтерма x14. В нашем примере - выражения $a - 1$. Проверяется, что это выражение имеет единственный

параметр x16, причем он входит в список x12. Проверяется, что переменная x16 имеет единственное вхождение в терм x11. Проверяется, что список параметров непосредственного надтерма вхождения x13 содержит отличную от x16 переменную.

Переменной x17 присваивается список антецедентов теоремы x2. Проверяется, что он непуст. Определяется тип x19 значения выражения x14. В нашем примере - символ "число". Выбирается переменная x20, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Решается задача на описание с посылками x17, условиями которой являются утверждения "равно(x20 x14)" и "x19(x20)". Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x16". В нашем примере посылки суть " $\neg(a = 0)$ ", " a - число"; условия - " $a - 1 = b$ " и " b - число". Неизвестная - a . Ответ присваивается переменной x23. В нашем примере он имеет вид " $a = b + 1$ & b - число". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x24 присваивается список его конъюнктивных членов. В этом списке находится равенство x25 с переменной x16 в левой части. Переменной x26 присваивается правая часть.

Переменной x27 присваивается объединение списка результатов подстановки выражения x26 вместо переменной x16 в утверждения набора x17 с отличными от x25 утверждениями списка x24. Переменной x28 присваивается результат подстановки выражения x26 вместо переменной x16 в консеквент теоремы. Создается импликация с антецедентами x27 и консеквентом x28. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому передается опция "степенмнож", иницирующая группировки под описателем "отображение". Результат регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

4. Обобщение функциональной переменной в произведении до дробного вида.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcej}(\neg(j = 0) \ \& \ b \text{ - число} \ \& \ j \text{ - число} \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^{b-1}/e(l), \\ l \text{ - число}), c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(x^j)x^{bj-1}/e(x^j, x \text{ - число}), \\ \lambda_d(c(d^j)/j, d \text{ - число})))$$

из теоремы

$$\forall_{abcj}(\neg(j = 0) \ \& \ b \text{ - число} \ \& \ j \text{ - число} \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^{b-1}, l \text{ - число}), c) \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(a(x^j)x^{bj-1}, x \text{ - число}), \lambda_d(c(d^j)/j, d \text{ - число})))$$

Характеристика - "функперех(1)".

Переменной x8 присваивается номер операнда из характеристики. В нашем примере - 1. Переменной x10 присваивается список антецедентов, переменной x11 - вхождение операнда консеквента с номером x8. Проверяется, что x11 - описатель "отображение", и переменной x12 присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она состоит из единственной переменной x13. В нашем примере - из переменной x . Внутри последнего операнда описателя x11 выбирается вхождение x14 символа "значение", первым операндом которого служит некоторая переменная x15. В нашем примере x14 - вхождение терма " $a(x^j)$ ", x15 - переменная a . Проверяется, что переменная x15 имеет единственное вхождение в описателе x11 и что среди антецедентов нет утверждения "функция(x15)".

Переменной x_{16} присваивается второй операнд вхождения x_{14} . В нашем примере - выражение " x^j ". Проверяется, что переменной x_{13} входит в терм x_{16} . Переменной x_{17} присваивается вхождение, операндом которого служит вхождение x_{14} . В нашем примере - вхождение выражения " $a(x^j)x^{bj-1}$ ". Если по вхождению x_{17} расположен символ "умножение", то переменной x_{18} присваивается само вхождение x_{17} . Иначе - проверяется, что по вхождению x_{17} расположен символ "дробь", причем x_{14} - вхождение числитель этой дроби. При этом переменной x_{18} присваивается вхождение x_{14} . В нашем примере x_{18} совпадает с x_{17} .

Проверяется избыточность обобщения: x_{18} не является вхождением знаменателя дроби либо вхождением числителя такой дроби, знаменатель которой имеет сомножитель вида $F(x_{16})$, где F - переменная, имеющая единственное вхождение в подтерм x_{11} .

Выбирается переменная x_{19} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная e . Переменной x_{20} присваивается выражение "отображение(x_{13} число(x_{13}) дробь(значение(x_{15} x_{13}) значение(x_{19} x_{13})))". В нашем примере - " $\lambda_x(a(x)/e(x), x - \text{число})$ ". Переменной x_{21} присваивается список результатов подстановки выражения x_{20} вместо переменной x_{15} в антецеденты исходной теоремы, переменной x_{22} - список такой же подстановки в консеквент. Создается импликация с антецедентами x_{21} и консеквентом x_{22} . Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому передается опция "степеньмнож". Результат регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

5. Усмотрение возможности выразить внешние операции над варьируемой переменной через аргумент функциональной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ach}(\text{первообразная}(\lambda_e(a(e)/((1+e^2)h(e)), e - \text{число}), c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(\text{ctg } x)/h(\text{ctg } x), x - \text{число}), \lambda_d(-c(\text{ctg } d), d - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\text{первообразная}(\lambda_e(a(e)/b(e), e - \text{число}), c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(\text{ctg } x)/(b(\text{ctg } x)(\sin x)^2), x - \text{число}), \lambda_d(-c(\text{ctg } d), d - \text{число})))$$

Характеристика - "функперех(1)".

Проверяется наличие характеристики "упроцинтеграл". Переменной x_8 присваивается номер операнда из текущей характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Переменной x_{10} присваивается список антецедентов, переменной x_{11} - вхождение операнда консеквента с номером x_8 . Проверяется, что x_{11} - описатель "отображение", и переменной x_{12} присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она состоит из единственной переменной x_{13} . В нашем примере - из переменной x . Внутри последнего операнда последнего операнда описателя x_{11} выбирается вхождение x_{15} символа "значение", первым операндом которого служит некоторая переменная x_{16} . В нашем примере x_{15} - вхождение терма " $b(\text{ctg } x)$ ", x_{16} - переменная b . Проверяется, что x_{16} встречается среди параметров консеквента. Переменной x_{17} присваивается второй

операнд вхождения x_{15} . В нашем примере - "ctg x ". Проверяется, что выражение x_{17} неоднобуквенное и содержит переменную x_{13} . Рассматривается вхождение x_{18} , расположенное внутри последнего операнда описателя x_{11} и содержащее внутри себя вхождение x_{15} . В нашем примере x_{18} - вхождение выражения " $b(\text{ctg } x)(\sin x)^2$ ". Проверяется, что число операндов вхождения x_{18} больше 1. Переменной x_{20} присваивается подтерм x_{18} . Проверяется, что в нем имеется единственное вхождение символа "значение", причем некоторое вхождение в x_{20} переменной x_{13} не расположено внутри подтерма x_{17} .

Переменной x_{21} присваивается результат применения нормализатора "извлечение" к выражению x_{20} с опцией (новаргумент x_{17} x_{13}). Нормализатор принимает попытку так преобразовать выражение, чтобы все вхождения переменной x_{13} оказались расположены только внутри подтермов, равных x_{17} . В нашем примере x_{21} имеет вид " $b(\text{ctg } x) \cdot 1/((\text{ctg } x)^2 + 1)$ ". Проверяется, что указанное требование на вхождения переменной x_{13} для терма x_{21} выполнено.

Выбираются переменные X, Y, Z , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные f, g, h . Рассматривается вхождение x_{23} символа "значение" в терм x_{21} . Проверяется, что его первый операнд равен x_{16} . Переменной x_{24} присваивается результат замены вхождения x_{23} на переменную X . В нашем примере x_{24} имеет вид " $f \cdot 1/((\text{ctg } x)^2 + 1)$ ". Проверяется, что терм x_{24} содержит вхождения подтермов, равных x_{17} , и переменной x_{26} присваивается результат замены всех этих вхождений на переменную Y . В нашем примере x_{26} имеет вид " $f \cdot 1/(g^2 + 1)$ ". Определяется тип T тип значения выражения x_{20} . В нашем примере - "число".

Переменной x_{28} присваивается пара утверждений "равно(x_{26} Z)", " $T(Z)$ ". Определяется тип P значения выражения x_{17} . В нашем примере - "число". Переменной x_{30} присваивается результат добавления к списку антецедентов теоремы утверждения " $P(Y)$ ". Решается задача на описание с посылками x_{30} и условиями x_{28} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "упростить", "одз", "неизвестные X ". В нашем примере посылки суть "первообразная($\lambda_e(a(e)/b(e), e$ - число), c)", " g - число", условия - " $f \cdot 1/(g^2 + 1) = h$ ", " h - число". Неизвестные - f .

Ответ присваивается переменной x_{32} . В нашем примере он имеет вид " $f = h(1 + g^2) \ \& \ h$ - число". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x_{33} присваивается список его конъюнктивных членов. В этом списке находится равенство x_{34} с переменной X в левой части. Переменной x_{35} присваивается правая часть равенства. Переменной x_{36} присваивается результат подстановки в терм x_{35} выражения "значение(Z, Y)" вместо переменной Z . В нашем примере x_{36} имеет вид " $h(g)(1 + g^2)$ ".

Переменной x_{37} присваивается выражение "отображение($Y, P(Y), x_{36}$)". В нашем примере - " $\lambda_g(h(g)(1 + g^2), g$ - число)". Переменной x_{38} присваивается результат замены в консеквенте теоремы вхождения x_{18} на терм "значение(Z, x_{17})". В нашем примере x_{38} имеет вид "первообразная($\lambda_x(a(\text{ctg } x)/h(\text{ctg } x), x$ - число), $\lambda_d(-c(\text{ctg } d), d$ - число))". Переменной x_{39} присваивается список результатов подстановки в антецеденты теоремы выражения x_{37} вместо переменной x_{16} . Затем создается импликация с антецедентами x_{39} и консеквентом x_{38} .

Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

6. Обобщающая подстановка единицы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bh}(\neg(b = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(1/(h + bx), x - \text{число}), \lambda_d(\ln |h + bd|/b, d - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{bgh}(\neg(b = 0) \ \& \ \neg(g = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(1/(gh + bx), x - \text{число}), \lambda_d(\ln |(gh + bd)/g|/b, d - \text{число})))$$

Характеристика - "функперех(1)".

Переменной x8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Переменной x10 присваивается вхождение операнда консеквента с номером x8. Проверяется, что x10 - описатель "отображение". Переменной x11 присваивается подтерм x10. В нашем примере - " $\lambda_x(1/(gh + bx), x - \text{число})$ ". Среди параметров выражения x11 выбирается переменная x12, имеющая в этом выражении единственное вхождение. В нашем примере - переменная g . Переменной x13 присваивается вхождение переменной x12 в описатель x11. Проверяется, что оно расположено внутри последнего операнда описателя. Переменной x14 присваивается вхождение, операндом которого служит x13. В нашем примере - вхождение выражения " gh ". Переменной x15 присваивается символ по вхождению x14. В нашем примере - "умножение". Определяется единица E операции x15. Проверяется, что эта операция имеет единицу именно по операнду x13. Проверяется, что среди операндов вхождения x14 имеется отличный от x13 операнд - переменная, имеющая единственное вхождение в терме x11.

Переменной x17 присваивается вхождение операнда консеквента, отличное от x10, переменной x18 - подтерм x17. В нашем примере x18 имеет вид " $\lambda_d(\ln |(gh + bd)/g|/b, d - \text{число})$ ". Проверяется, что внутри терма x18 имеется вхождение операции с операндом x12, имеющей для данного операнда единицу E . Переменной x19 присваивается результат добавления к списку антецедентов теоремы утверждения "равно(x12 E)". Создается импликация с антецедентами x19, консеквент которой - тот же, что у исходной теоремы. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

7. Обобщение характеристики функции: выделение невырожденного подвыражения без варьируемой переменной и замена его на новый параметр.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(c < 0 \ \& \ 0 < a^2 - 4bc \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(\sqrt{1/(b + ax + cx^2)}, x - \text{число}), \\ \lambda_d(-\arcsin((a + 2cd)/\sqrt{a^2 - 4bc})/\sqrt{-c}, d - \text{число})))$$

из теоремы

$\forall_{acg}(\neg(g = 0) \ \& \ c < 0 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \rightarrow$
 первообразная($\lambda_x(\sqrt{1/(ax + cx^2 + a^2/(4c) + g^2)}, x - \text{число})$),
 $\lambda_d(g \cdot \arcsin(-a/(2g\sqrt{-c}) + d\sqrt{-c}/g)/(|g|\sqrt{-c}), d - \text{число}))$)

Характеристика - "функперех(1)".

Проверяется наличие у теоремы характеристики с заголовком "едн". Переменной x8 присваивается номер операнда из текущей характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Переменной x10 присваивается вхождение операнда консеквента с номером x8. Проверяется, что x10 - описатель "отображение". Переменной x11 присваивается подтерм x10. В нашем примере этот подтерм имеет вид " $\lambda_x(\sqrt{1/(ax + cx^2 + a^2/(4c) + g^2)}, x - \text{число})$ ". Переменной x12 присваивается список параметров терма x11. Проверяется, что он непуст. В нашем примере - список a, c, g . Переменной x13 присваивается список antecedентов. Проверяется, что он непуст и не содержит утверждения с тем же заголовком, что консеквент. Переменной x14 последовательно присваиваются значения 1, 2 и 3. В нашем примере x14 равно 3.

Внутри последнего операнда описателя x10 выбирается вхождение x15 неоднобуквенного подтерма. Переменной x16 присваивается этот подтерм. В нашем примере - " $ax + cx^2 + a^2/(4c) + g^2$ ". Переменной x17 присваивается 0, переменной x18 - вхождение x15.

Предпринимается попытка коррекции значений x16, x17 и x18. Прежде всего, переменной x19 присваивается список параметров терма x16. В нашем примере - a, c, g, x . Проверяется, что список x19 непуст, иначе - откат к выбору очередного вхождения x15.

Если список x19 включается в список x12, то проверяется, что x15 - операнд неассоциативной либо некоммутативной операции, параметры которой не включаются в список x12. Если это не так, то откат к выбору очередного вхождения x15.

Если список x19 не включается в список x12, то проверяется, что заголовком терма x16 служит ассоциативная и коммутативная операция x20. Переменной x21 присваивается список операндов операции x15. Переменной x22 присваивается подсписок списка x21, образованный выражениями, параметры которых включаются в список x12. Проверяется, что данный подсписок непуст, и переменной x23 присваивается результат соединения операцией x20 выражений x22. В нашем примере - " $a^2/(4c) + g^2$ ". Переменной x24 присваивается список параметров терма x23. Проверяется, что этот список непуст. Переменной x16 переприсваивается значение x23, переменной x17 - разность списков x21 и x22. В нашем примере - " ax ", " cx^2 ". Если x15 - операнд одноместной операции x26, причем справочник "заменазнака" допускает ее перенесение вглубь операции x20, то знак выражения x16 соответствующим образом изменяется. При этом переменной x18 переприсваивается вхождение операции x26.

После указанных действий, если не произошел откат к выбору нового значения x15, переменной x16 оказывается присвоено выражение, с непустым списком параметров, включающимся в список x12. Это выражение могло быть сгруппировано как часть операндов ассоциативно-коммутативной операции, причем

в таком случае x17 - список остальных операндов. Кроме того, при наличии внешней операции типа "минус" ее вхождение становится значением переменной x18. По окончании данных действий все переменные начиная с x19 снова оказываются не определены.

Проверяется, что выражение x16 неоднобуквенное, и выбирается переменная x19 из его списка параметров. В нашем примере - переменная g . Проверяется отсутствие характеристики теоремы с заголовком "фиксвыр", содержащей переменную x19. Проверяется, что x19 имеет единственное вхождение в терм x16. Выбирается переменная x20, не встречающаяся в теореме. В нашем примере - переменная b . Определяется тип T значения выражения x16. В нашем примере - "число". Переменной x22 присваивается пара утверждений "равно(x16 x20)", " $T(x20)$ ".

Решается задача на описание с посылками x13 и условиями x22. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "или", "упростить", "неизвестные x19". В нашем примере посылки суть " $\neg(g = 0)$ ", " $c < 0$ ", " a - число", " c - число", " g - число. Условия суть " $a^2/(4c) + g^2 = b$ ", " b - число". Неизвестная - g . Ответ присваивается переменной x24. В нашем примере он имеет вид:

$$(g = -\sqrt{4b - a^2/c}/2 \vee g = \sqrt{4b - a^2/c}/2) \& b - \text{число} \& 4bc - a^2 \leq 0$$

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x26 присваивается список дизъюнктивных членов результата приведения утверждения x24 к виду д.н.ф. В этом списке выбирается утверждение x27. В нашем примере - " $g = \sqrt{4b - a^2/c}/2 \& b - \text{число} \& 4bc - a^2 \leq 0$ ". Переменной x28 присваивается список конъюнктивных членов утверждения x27. В этом списке выбирается равенство x29 с переменной x19 в левой части. Переменной x30 присваивается правая часть равенства. Проверяется, что среди элементов списка x26 нет такого, который давал бы более короткое выражения x30. В нашем примере x30 имеет вид " $\sqrt{4b - a^2/c}/2$ ". Переменной x31 присваивается результат удаления из списка x28 равенства x29. Проверяется, что либо x14 равно 3, либо x14 равно 2, а выражение x30 имеет единственный параметр, либо список x31 имеет не более одного элемента.

Если x17 равно 0, то переменной x32 присваивается однобуквенное выражение x20, иначе - результат соединения операцией по вхождению x15 переменной x20 и выражений списка x17. В нашем примере x32 имеет вид " $b + ax + cx^2$ ". Переменной x33 присваивается результат замены вхождения x18 в консеквенте x9 на выражение x32. Переменной x34 присваивается результат подстановки выражения x30 вместо переменной x19 в утверждение x33. Переменной x35 присваивается объединение списка x31 со списком результатов подстановки выражения x30 вместо переменной x19 в утверждения списка x13.

Создается импликация с антецедентами x35 и консеквентом x34. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому передается опция "первообразная", и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. Ей передаются характеристики исходной теоремы, имеющие заголовки "едн" либо "фиксвыр", и вводится дополнительная характеристика "фиксвыр(x20)". Допускается также создание характеристик с заголовком "функперех".

8. Обобщение путем поглощения внешней операции функциональной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

" $\forall_{abce}(\neg(b-1=0) \ \& \ 0 < b \ \& \ (0, \infty) \subseteq \text{Dom}(\lambda_x(e(x)/x, x \in \text{Dom}(a))) \ \& \ \lambda_x(e(x)/x, x \in \text{Dom}(a)) - \text{функция} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_x(e(x)/x, x \in \text{Dom}(a)), c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(e(b^x), x - \text{число}), \lambda_d(c(b^d)/\ln b, d - \text{число}))$ "

из теоремы

" $\forall_{abc}(\neg(b-1=0) \ \& \ 0 < b \ \& \ (0, \infty) \subseteq \text{Dom}(a) \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(b^x)b^x, x - \text{число}), \lambda_d(c(b^d)/\ln b, d - \text{число}))$ ".

Характеристика - "функперех(1)".

Проверяется наличие у теоремы характеристики "упроцинтеграл". Переменной x8 присваивается номер операнда из текущей характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Переменной x10 присваивается вхождение операнда консеквента с номером x8. Проверяется, что x10 - описатель "отображение". Переменной x11 присваивается связывающая приставка описателя x10. Проверяется, что она состоит из единственной переменной x12. В нашем примере - переменная x . Внутри описателя x10 рассматривается вхождение x13 символа "значение". Проверяется, что первым операндом вхождения x13 служит некоторая переменная x14. В нашем примере x13 имеет вид " $a(b^x)$ ", x14 - переменная a . Переменной x15 присваивается второй операнд вхождения x13. В нашем примере - " b^x ". Переменной x16 присваивается вхождение, операндом которого служит x13. В нашем примере - вхождение выражения " $a(b^x)b^x$ ". Проверяется, что число операндов вхождения x16 равно 2. Переменной x17 присваивается вхождение операнда, отличное от x13. Переменной x18 присваивается подтерм x17, переменной x19 - вхождение выражения x15 в терм x18. Проверяется, что все вхождения переменных в терм x18 расположены только внутри вхождения x19.

Переменной x20 присваивается консеквент теоремы. Проверяется, что переменная x14 имеет в нем единственное вхождение. Выбираются переменные X, Y , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные e, f . Переменной x24 присваивается выражение " $X(x15)$ ", переменной x25 - равенство результата замены вхождения x13 в подтерме x16 на переменную Y выражению x24. В нашем примере x24 имеет вид " $e(b^x)$ ", x25 - вид " $f \cdot b^x = e(b^x)$ ". Переменной x26 присваивается список antecedентов исходной теоремы. Определяется тип T значения выражения x16. В нашем примере - "число". Переменной x28 присваивается результат добавления к списку x26 терма " $T(x24)$ ".

Решается задача на описание с посылками x28 и единственным условием x25. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "одз", "неизвестные x23". Ответ присваивается переменной x30. В нашем примере он имеет вид " $f = e(b^x)/b^x$ ". Проверяется, что x30 - равенство с переменной x23 в левой части. Переменной x31 присваивается правая часть равенства. Проверяется, что каждое

вхождение переменной x_{12} в терм x_{31} расположено внутри подтерма, равно-го x_{15} . Переменной x_{33} присваивается результат замены вхождений выражения x_{15} в терм x_{31} на переменную x_{12} . В нашем примере - " $e(x)/x$ ". Переменной x_{34} присваивается выражение "отображение(x_{12} принадлежит(x_{12} область(x_{14})) x_{33})". Переменной x_{35} присваивается список результатов подстановки выражения x_{34} вместо переменной x_{14} в утверждения списка x_{26} . Переменной x_{36} присваивается результат замены вхождения x_{16} в консеквент теоремы на выражение x_{24} . Создается импликация с антецедентами x_{35} и консеквентом x_{36} . Она регистрируется в списке вывода с характеристиками "упрощинтеграл" и "функперех" как обобщение исходной теоремы.

Склейка двух теорем

1. Склейка двух теорем для расширения области определения входной функции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

первообразная($\lambda_f(1/f, \neg(f = 0) \ \& \ f - \text{число}), \lambda_f(\ln |f|, f - \text{число}))$

из теоремы

первообразная($\lambda_x(1/x, x < 0 \ \& \ x - \text{число}), \lambda_d(\ln(-d), d - \text{число}))$

и дополнительной теоремы

первообразная($\lambda_f(1/f, 0 < f \ \& \ f - \text{число}), \lambda_c(\ln c, c - \text{число}))$

Характеристика - "функперех(1)".

Проверяется отсутствие характеристики с заголовком "упрощинтеграл". Переменной x_8 присваивается номер операнда из текущей характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Если теорема - кванторная импликация, то переменной x_9 присваивается вхождение ее консеквента, иначе - ее корневое вхождение. Проверяется, что число операндов вхождения x_9 равно 2, и переменной x_{10} присваивается вхождение операнда с номером x_8 . Проверяется, что x_{10} - описатель "отображение". Переменной x_{12} присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она одноэлементная. Переменной x_{13} присваивается список конъюнктивных членов предпоследнего операнда описателя (он определяет условия на варьируемую переменную), переменной x_{14} - последний операнд описателя (он определяет значение функции). В нашем примере x_{13} состоит из утверждений " $x < 0$ " и " $x - \text{число}$ ", x_{14} имеет вид " $1/x$ ". Переменной x_{15} присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения x_{14} по о.д.з. В нашем примере - " $\neg(x = 0)$ ", " $x - \text{число}$ ". Переменной x_{16} присваивается разность списков x_{13} и x_{15} . В нашем примере она состоит из единственного утверждения " $x < 0$ ". Проверяется, что список x_{16} непуст. Переменной x_{17} присваивается символ по вхождению x_9 . Для упрощения приема, пока он применяется только в том случае, когда x_{17} - символ "первообразная". Если теорема - кванторная импликация, то проверяется, что заголовки ее антецедентов отличны от этого символа.

Просматриваются теоремы того раздела, к которому относится символ x_{17} . В качестве дополнительной теоремы среди них выбирается некоторая теорема с

характеристикой "функперех(N)", не имеющая характеристик с заголовками "едн" и "упрощинтеграл" и отличная от исходной теоремы. Если дополнительная теорема - кванторная импликация, то проверяется отсутствие у нее антецедента с заголовком х17. Если дополнительная теорема - кванторная импликация, то переменной х25 присваивается входение ее консеквента, иначе - корневое входение. Проверяется, что по входению х25 расположен символ х17. Переменной х26 присваивается входение операнда входения х25, имеющего номер N . Проверяется, что х26 - описатель "отображение". Переменной х27 присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной х28 присваивается ее элемент. В нашем примере - символ f . Переменной х29 присваивается список конъюнктивных членов предпоследнего операнда описателя х26. В нашем примере он состоит из утверждений " $0 < f$ " и " f - число". Переменной х30 присваивается последний операнд описателя х26. В нашем примере - " $1/f$ ".

Проверяется, что длины выражений х30 и х14 равны. Переменной х31 присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения х30 по о.д.з. В нашем примере - " $\neg(f = 0)$ ", " f - число". Переменной х32 присваивается разность списков х29 и х31. В нашем примере она состоит из единственного утверждения " $0 < f$ ". Проверяется, что список х32 непуст.

Переменной х33 присваивается список параметров терма х14, переменной х34 - список параметров терма х30. Проверяется, что длины этих списков равны. В нашем примере х33 состоит из переменной x , х34 - из переменной f . Проверяется, что параметры антецедентов исходной теоремы и терма х14 содержатся в списке х33, а параметры антецедентов дополнительной теоремы и терма х30 - в списке х34. Определяется подстановка S вместо переменных х33, переводящая терм х14 в х30. Переменной х36 присваивается список результатов применения S к антецедентам исходной теоремы (если их нет, то пустой список). Если дополнительная теорема - кванторная импликация, то к х36 добавляются ее антецеденты. Переменной х37 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям набора х13, переменной х38 - дизъюнкция конъюнкции утверждений х37 и конъюнкции утверждений х29. В нашем примере х38 имеет вид " $f < 0 \ \& \ f$ - число $\vee \ 0 < f \ \& \ f$ - число".

Переменной х39 присваивается результат упрощения утверждения х38 относительно посылок х36 вспомогательной задачей на преобразование. В нашем примере х39 имеет вид " $\neg(f = 0) \ \& \ f$ - число". Проверяется, что х39 не содержит символа "или". Переменной х41 присваивается входение операнда входения х9, отличного от х19, переменной х42 - входение операнда входения х25, отличного от х26. Переменной х43 присваивается подтерм х41, переменной х44 - подтерм х42. Проверяется, что оба выражения х43 и х44 суть описатели "отображение". В нашем примере х43 имеет вид " $\lambda_d(\ln(-d), d$ - число)", х44 - вид " $\lambda_c(\ln c, c$ - число)". Переменной х45 присваивается результат применения подстановки S к выражению х43. В нашем примере он имеет вид " $\lambda_d(\ln(-d), d$ - число)".

В выражении х44 его связанная переменная переменная х46 заменяется на переменную х28. В результате х44 приобретает вид " $\lambda_f(\ln f, f$ - число)". Точно так

же, в выражении x45 его связанная переменная заменяется на x28. В результате оно приобретает вид " $\lambda_f(\ln(-f), f - \text{число})$ ".

Проверяется равенство предпоследних операндов описателей x44 и x45. Переменной x46 присваивается разность списков x37 и x29, а переменной x47 - разность списков x29 и x37. Переменной x48 присваивается объединение списка x36 со списком конъюнктивных членов утверждения x39 и со списком x46. При помощи задачи на доказательство проверяется, что отрицание конъюнкции утверждений x47 - следствие утверждений x48. Переменной x50 присваивается выражение "вариант(и(x47) A B)", где A, B - последние операнды описателей x44 и x45. В нашем примере x50 имеет вид " $\ln f$ при $0 < f$, иначе $\ln(-f)$ ". Переменной x51 присваивается объединение списка x36 со списком конъюнктивных членов утверждения x39. Переменной x52 присваивается результат упрощения выражения x50 относительно посылок x51. В нашем примере - " $\ln |f|$ ". Проверяется, что выражение x52 не содержит символа "вариант". Переменной x54 присваивается выражение "отображение(x28 P x52)", где P - предпоследний операнд описателя x45. Переменной x55 присваивается выражение "отображение(x28 x30 x30)". Если x8 равно 1, то переменной x56 присваивается выражение " $x_{17}(x_{55} x_{54})$ ", иначе - выражение " $x_{17}(x_{54} x_{55})$ ". Создается импликация с антецедентами x36 и консеквентом x56. Она обрабатывается оператором "норм-теорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

2. Склейка двух теорем для одинаковых входных данных и альтернативных антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(0 < 4bc - a^2 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(1/(b + ax + cx^2), x - \text{число}), \\ \lambda_x(2 \arctg((a + 2cx)/\sqrt{4bc - a^2})/\sqrt{4bc - a^2}, x - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(0 < c \ \& \ 0 < 4bc - a^2 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(1/(b + ax + cx^2), x - \text{число}), \\ \lambda_d(2 \arctg((a + 2cd)/\sqrt{4bc - a^2})/\sqrt{4bc - a^2}, d - \text{число})))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abd}(b < 0 \ \& \ 0 < 4ab - d^2 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(1/(a + dx + bx^2), x - \text{число}), \\ \lambda_c(2 \arctg((d + 2bc)/\sqrt{4ab - d^2})/\sqrt{4ab - d^2}, c - \text{число})))$$

Характеристика - "функперех(1)".

Переменной x8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Если теорема - кванторная импликация, то переменной x9 присваивается вхождение ее консеквента, иначе - ее корневое вхождение. Проверяется, что число операндов вхождения x9 равно 2, и переменной x10 присваивается вхождение операнда с номером x8. Проверяется, что x10 - описатель "отображение". Переменной x11 присваивается подтерм x10, переменной

x12 - список антецедентов. Проверяется, что антецеденты не имеют связанных переменных.

В списке вывода находится дополнительная теорема, отличная от исходной теоремы и имеющая ту же самую характеристику "функперех", что исходная теорема. Переменной x16 присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет ту же длину, что список x12. Переменной x17 присваивается вхождение консеквента дополнительной теоремы. Проверяется, что заголовки консеквентов дополнительной и исходной теоремы равны, причем число операндов вхождения x17 равно 2. Переменной x18 присваивается операнд вхождения x17, имеющий номер x8. Переменной x19 присваивается подтерм x18. Проверяется, что длины термов x11 и x19 равны, а список параметров антецедентов x16 включается в список параметров терма x19. Переменной x20 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x20 имеет вид:

$$\forall_{efh}(f < 0 \ \& \ 0 < 4ef - h^2 \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_i(1/(e + hi + fi^2), i - \text{число}), \\ \lambda_g(2 \arctg((h + 2fg)/\sqrt{4ef - h^2}/\sqrt{4ef - h^2}, g - \text{число}))))$$

Переменной x21 присваивается вхождение консеквента теоремы x20, переменной x22 - вхождение операнда консеквента, имеющего номер x8. Переменной x23 присваивается подтерм x22, переменной x24 - список его переменных. В нашем примере x23 имеет вид " $\lambda_i(1/(e + hi + fi^2), i - \text{число})$ ", x24 - список e, f, h, i . Определяется подстановка S вместо переменных x24, переводящая терм x23 в терм x11. Переменной x26 присваивается список обработанных оператором "станд" результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x20. Переменной x27 присваивается список обработанных оператором "станд" антецедентов исходной теоремы. Переменной x28 присваивается разность списков x26 и x27, переменной x29 - разность списков x27 и x26. Проверяется, что обе эти разности одноэлементны. Переменной x30 присваивается пересечение списков x26 и x27. Переменной x31 присваивается дизъюнкция элементов этих списков. В нашем примере она имеет вид " $c < 0 \vee 0 < c$ ". Переменной x32 присваивается результат упрощения утверждения x31 относительно посылок x30 при помощи задачи на преобразование. В нашем примере, с учетом имеющегося в списке x30 неравенства " $0 < 4bc - a^2$ ", терм x32 оказывается логической константой "истина".

Проверяется, что утверждение x32 элементарно. Проверяется, что выражение x23 - описатель "отображение". Переменной x34 присваивается связывающая приставка описателя x10. Проверяется, что она одноэлементна. Переменной x35 присваивается вхождение операнда консеквента x21, отличное от x22. Проверяется, что x35 - описатель "отображение". Переменной x36 присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она одноэлементна. Переменной x37 присваивается результат замены в подтерме x35 переменной x36 на переменную x34. Переменной x38 присваивается результат применения к терму x37 подстановки S . Переменной x39 присваивается операнд консеквента x9, отличный от x10. Проверяется, что этот операнд - описатель "отображение". Переменной x41 присваивается его связывающая приставка, переменной x42 - результат замены

в подтерме x_{39} переменной x_{41} на переменную x_{34} . Переменной x_{43} присваивается выражение "вариант(P x_{42} x_{38})", где P - утверждение списка x_{29} . Переменной x_{44} присваивается результат замены вхождения x_{39} в исходную теорему на выражение x_{43} . Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x_{30} и утверждение x_{32} , а консеквентом служит консеквент импликации x_{44} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. Заметим, что в нашем примере условное выражение в консеквенте пропадает, ввиду равенства альтернативных выражений.

Вывод теоремы путем доказательства гипотезы

1. Переход к области определения исходных функций.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ae}(\text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \text{ — функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, e) \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(-a(x), x \in \text{Dom}(a)), \lambda_c(-e(c), c \in \text{Dom}(e))))$$

из теоремы

$$\forall_{ae}(\text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \text{ — функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, e) \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(-a(x), x \in \text{Dom}(e)), \lambda_c(-e(c), c \in \text{Dom}(e))))$$

Характеристика - "функперех(1)".

Переменной x_8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Проверяется, что теорема - кванторная импликация. Переменной x_9 присваивается вхождение ее консеквента. Переменной x_{10} присваивается вхождение операнда с номером x_8 . Проверяется, что x_{10} - описатель "отображение". Проверяется, что предпоследний операнд описателя x_{10} (он задает условие на варьируемую переменную) имеет вид "принадлежит(x_{12} область(x_{14}))", где x_{12} , x_{14} - некоторые переменные. В нашем примере - переменные x , e . Переменной x_{15} присваивается последний операнд описателя (он определяет значение функции). В нашем примере - " $-a(x)$ ". Проверяется, что переменная x_{14} не входит в выражение x_{15} . Внутри терма x_{15} рассматривается вхождение x_{16} символа "значение". Проверяется, что его первый операнд - некоторая переменная x_{17} . Переменной x_{18} присваивается список антецедентов исходной теоремы. Переменной x_{19} присваивается утверждение "равно(область(x_{17})область(x_{14}))". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x_{19} - следствие утверждений x_{18} . Переменной x_{21} присваивается результат замены в предпоследнем операнде описателя x_{10} переменной x_{14} на x_{17} . Этот результат регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

Использование дополнительной теоремы для усиления основной

1. Попытка отбросить внешнюю одноместную операцию.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

первообразная($\lambda_x(1/(\sin x)^2, \neg(\sin x = 0) \ \& \ x - \text{число}), \lambda_c(-\text{ctg } c, \neg(\sin c = 0) \ \& \ c - \text{число})$)

из теоремы

первообразная($\lambda_x(-1/(\sin x)^2, \neg(\sin x = 0) \ \& \ x - \text{число}), \lambda_y(\text{ctg } y, \neg(\sin y = 0) \ \& \ y - \text{число})$)

и дополнительных теорем

$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow \neg\neg b = b)$

$\forall_{ac}(\text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, e) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(-a(x), x \in \text{Dom}(a)), \lambda_c(-e(c), c \in \text{Dom}(e))))$

Характеристика - "функперех(1)".

Переменной x8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Если теорема - кванторная импликация, то переменной x9 присваивается вхождение ее консеквента, иначе - ее корневое вхождение. Проверяется, что число операндов вхождения x9 равно 2, и переменной x10 присваивается вхождение операнда с номером x8. Проверяется, что x10 - описатель "отображение". Переменной x11 присваивается вхождение последнего операнда описателя (он определяет значение функции). Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. В нашем примере - "минус". Проверяется, что x11 имеет единственный операнд, заголовок которого отличен от символа "значение". В нашем примере этот операнд имеет вид " $1/(\sin x)^2$ ". Справочник поиска теорем "обращение" определяет по x12 указанную выше первую дополнительную теорему. Переменной x15 присваивается вхождение равенства - консеквента дополнительной теоремы. Переменной x16 присваивается вхождение того операнда вхождения x15, по которому расположен некоторый логический символ x18. В нашем примере - символ "минус".

В списке вывода находится вторая дополнительная теорема, имеющая характеристику "функперех(N)" и не помечанная символом "исключение". Проверяется, что консеквент второй дополнительной теоремы имеет тот же заголовок, что и подтерм x9. Переменной x24 присваивается вхождение операнда консеквента второй дополнительной теоремы, имеющего номер N. Проверяется, что x24 - описатель "отображение". Переменной x25 присваивается вхождение последнего операнда описателя x24. Проверяется, что по этому вхождению расположен символ x18. В нашем примере x25 - вхождение выражения " $-a(x)$ ". Переменной x26 присваивается первый операнд вхождения x25. Проверяется, что этот операнд имеет вид "значение(x27 x28)", где x27 и x28 - некоторые переменные. В нашем примере - a, x . Проверяется, что предпоследний операнд вхождения x24 имеет вид "принадлежит(x28 область(x27))".

Переменной x30 присваивается подтерм x10. В нашем примере этот подтерм имеет вид " $\lambda_x(-1/(\sin x)^2, \neg(\sin x = 0) \ \& \ x - \text{число})$ ". Переменной x31 присваивается список антецедентов второй дополнительной теоремы. В этом списке находится утверждение x32, заголовок которого равен заголовку подтерм x9. В

нашем примере х32 имеет вид "первообразная(a, e)". Переменной х33 присваивается корневой операнд утверждения х32, имеющий номер х8. В нашем примере - a . Проверяется, что этим операндом служит переменная х27. Переменной х34 присваивается вхождение другого корневого операнда утверждения х32. Проверяется, что этим операндом служит некоторая переменная х35. В нашем примере - переменная e . Переменной х37 присваивается операнд вхождения х9, отличный от х10. В нашем примере - " $\lambda_y(\text{ctg } y, \neg(\sin y = 0) \ \& \ y - \text{число})$ ".

Переменной х38 присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы со списком результатов подстановки выражений х30 и х37 вместо переменных х27 и х35 в отличные от х32 утверждения списка х31. Переменной х39 присваивается результат такой же подстановки в консеквент второй дополнительной теоремы. Создается импликация с антецедентами х38 и консеквентом х39. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

2. Попытка отбросить константные операнды.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ a - \text{число} \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_f(a^f, f - \text{число}), \lambda_c(a^c / \ln a, c - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_a(\neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < a \ \& \ a - \text{число} \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a^x \cdot \ln a, x - \text{число}), \lambda_c(a^c, c - \text{число})))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{ae}(\neg(e = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow ae/e = a)$$

$$\forall_{abde}(\neg(e = 0) \ \& \ \text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \text{первообразная}(a, d) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_f(ba(f)/e, f \in \text{Dom}(a)), \lambda_c(bd(c)/e, c \in \text{Dom}(d))))$$

Характеристика - "функперех(1)".

Переменной х8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Если теорема - кванторная импликация, то переменной х9 присваивается вхождение ее консеквента, иначе - ее корневое вхождение. Проверяется, что число операндов вхождения х9 равно 2, и переменной х10 присваивается вхождение операнда с номером х8. Проверяется, что х10 - описатель "отображение". Переменной х11 присваивается вхождение последнего операнда описателя (он определяет значение функции). Переменной х12 присваивается символ по вхождению х11. В нашем примере - "умножение". Проверяется, что х11 имеет больше одного операнда, и переменной х13 присваивается подтерм х11. В нашем примере х13 имеет вид " $a^x \cdot \ln a$ ". Проверяется, что терм х13 не содержит символа "значение". Переменной х14 присваивается связывающая приставка описателя х10. Справочник поиска теорем "сокращдоби" определяет по символу х12 указанную выше первую дополнительную теорему. Переменной х20 присваивается заменяемая часть равенства в консеквенте дополнительной теоремы. В нашем примере - " ae/e ". Проверяется, что все переменные дополнительной теоремы встречаются среди параметров терма х20 и

что число корневых операндов терма x_{20} равно 2. Переменной x_{22} присваивается вхождение того корневого операнда терма x_{20} , заголовок которого равен x_{12} , переменной x_{21} - вхождение другого операнда. Переменной x_{23} присваивается подтерм x_{22} . В нашем примере - " ae ". Переменной x_{24} присваивается список параметров терма x_{23} , переменной x_{25} - подтерм x_{21} , переменной x_{26} - список параметров подтерма x_{25} . В нашем примере x_{25} - переменная e . Проверяется, что список x_{26} включается в x_{24} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{24} , переводящая терм x_{23} в x_{13} . Переменной x_{28} присваивается результат применения подстановки S к терму x_{25} . В нашем примере - " $\ln a$ ". Проверяется, что параметры терма x_{28} не пересекаются со списком x_{14} .

Выбирается переменная x_{29} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - b . Переменной x_{30} присваивается результат замены вхождения x_{22} в терм x_{20} на выражение "значение(x_{29} x_{14})" и последующего применения подстановки S . В нашем примере x_{30} имеет вид " $b(x)/\ln a$ ".

В списке вывода находится вторая дополнительная теорема, имеющая характеристику "функперех(N)" и не помечанная символом "исключение". Проверяется, что консеквент второй дополнительной теоремы имеет тот же заголовок, что и подтерм x_9 . Переменной x_{36} присваивается вхождение операнда консеквента второй дополнительной теоремы, имеющего номер N . Проверяется, что x_{36} - описатель "отображение". Переменной x_{37} присваивается вхождение последнего операнда описателя x_{36} . Пусть P - заголовок терма x_{20} . В нашем примере - символ "дробь". Проверяется, что либо по вхождению x_{37} расположен символ P , либо x_{37} имеет ровно два корневых операнда, один из которых имеет заголовок P , а другой является переменной. В нашем примере x_{37} - вхождение выражения " $ba(f)/e$ ". Переменной x_{38} присваивается подтерм x_{37} . Переменной x_{39} присваивается список первых операндов подтермов "значение(...)" терма x_{38} . Проверяется, что этот список одноэлементный, и переменной x_{40} присваивается его элемент. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{41} присваивается связывающая приставка описателя x_{36} . Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x_{42} присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная f . Проверяется, что вхождение переменной x_{42} в терм x_{38} единственное, причем x_{38} имеет подтерм "значение(...)" со вторым операндом x_{42} . Проверяется, что предпоследний операнд описателя x_{36} имеет вид "принадлежит(x_{42} область(x_{40}))".

Переменной x_{44} присваивается список параметров терма x_{38} , переменной x_{45} - список параметров терма x_{30} . В нашем примере x_{44} состоит из переменных " a, b, e, f ", x_{45} - из переменных " a, b, x ". Переменной x_{46} присваивается список не входящих в x_{44} переменных, длина которого равна длине списка x_{45} . В нашем примере x_{46} состоит из переменных " c, d, g ". Переменной x_{47} присваивается результат замены переменных x_{45} и x_{46} в терме x_{30} . В нашем примере - " $d(g)/\ln c$ ". Определяется подстановка R вместо переменных x_{44} , унифицирующая термы x_{38} и x_{47} . При унификации допускается подстановка единиц вместо переменных x_{44} . В термах, которые подстановка R подставляет вместо переменных x_{44} , выполняется замена переменных x_{46} на x_{45} . Это дает новую подстановку R' .

Переменной x_{50} присваивается вхождение операнда консеквента исходной теоремы, отличного от x_{10} . Переменной x_{51} присваивается подтерм x_{50} . В на-

шем примере - " $\lambda_c(a^c, c - \text{число})$ ". Переменной х52 присваивается результат исключения из списка х44 переменных х40 и х42. В нашем примере - " b, e ". Переменной х53 присваивается список термов, подставляемых подстановкой R' вместо переменных х52. Переменной х54 присваивается список антецедентов второй дополнительной теоремы. В этом списке находится утверждение х55 с тем же заголовком, что консеквент исходной теоремы. В нашем примере - " $\text{первообразная}(a, d)$ ". Переменной х56 присваивается корневой операнд терма х55, имеющий номер х8. Проверяется, что этот операнд представляет собой переменную х40. Переменной х57 присваивается корневой операнд терма х55, отличный от х56. Проверяется, что он представляет собой некоторую переменную х58. В нашем примере - d . Переменной х59 присваивается подтерм х10, переменной х60 - объединение списка х52 с переменными х40 и х58. В нашем примере х60 имеет вид " b, e, a, d ". Переменной х61 присваивается объединение списка х53 с выражениями х59 и х51. Переменной х62 присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы со списком результатов подстановки выражений х61 вместо переменных х60 в отличные от х55 элементы списка х54. Переменной х63 присваивается результат применения такой же подстановки к консеквенту второй дополнительной теоремы. Затем создается импликация с антецедентами х62 и консеквентом х63. Она обрабатывается оператором "норм-теорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

3. Попытка отбросить внешнюю одноместную операцию в антецеденте.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acdeh}(\text{Dom}(a) = \text{Dom}(e) \ \& \ \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \ \& \ \text{первообразная}(e, d) \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_x(c(x)e(x), x \in \text{Dom}(e)), h) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_k(a(k)d(k), k \in \text{Dom}(e)), \lambda_g(c(g)d(g) - h(g), g \in \text{Dom}(e))))$$

из теоремы

$$\forall_{acdei}(\text{Dom}(a) = \text{Dom}(e) \ \& \ \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \ \& \ \text{первообразная}(e, d) \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_x(-c(x)e(x), x \in \text{Dom}(e)), i) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_k(a(k)d(k), k \in \text{Dom}(a)), \lambda_g(c(g)d(g) + i(g), g \in \text{Dom}(e))))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ae}(\text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, e) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(-a(x), x \in \text{Dom}(a)), \lambda_c(-e(c), c \in \text{Dom}(e))))$$

Характеристика - "функперех(1)".

Переменной х8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Проверяется, что теорема - кванторная импликация, и переменной х9 присваивается входение ее консеквента. Проверяется, что число операндов входения х9 равно 2. Переменной х10 присваивается список антецедентов. В нем выбирается утверждение х11 с тем же заголовком, что у консеквента. В нашем примере - " $\text{первообразная}(\lambda_x(-c(x)e(x), x \in \text{Dom}(e)), i)$ ". Переменной х13 присваивается входение корневого операнда терма х11 с номером х8. Проверяется, что х13 - описатель "отображение". Переменной х14

присваивается вхождение последнего операнда описателя (он определяет значение функции). Переменной x15 присваивается символ по вхождению x14. В нашем примере - "минус". Проверяется, что x14 имеет единственный операнд, заголовок которого отличен от символа "значение". В нашем примере этот операнд имеет вид " $c(x)e(x)$ ".

В списке вывода находится дополнительная теорема x18, имеющая характеристику "функперех(N)" и не помеченная символом "исключение". Проверяется, что эта теорема - кванторная импликация, заголовок консеквента которой такой же, как у консеквента исходной теоремы. Переменной x22 присваивается вхождение операнда консеквента дополнительной теоремы, имеющего номер N . Проверяется, что x22 - описатель "отображение". Переменной x23 присваивается вхождение последнего операнда описателя x22. Проверяется, что этот операнд имеет заголовок x15.

Переменной x18 переписывается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. Переменной x20 переписывается вхождение консеквента теоремы x18, переменной x22 - вхождение операнда консеквента, имеющего номер N , переменной x23 - вхождение последнего операнда описателя x22. В нашем примере x23 - вхождение термина " $-b(j)$ ". После переобозначения переменных x18 приобретает вид:

$$\forall_{bh}(\text{Dom}(b) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b \text{ — функция} \ \& \ \text{первообразная}(b, h) \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_j(-b(j), j \in \text{Dom}(b)), \lambda_f(-h(f), f \in \text{Dom}(h))))$$

Переменной x24 присваивается вхождение первого операнда вхождения x23. Проверяется, что x24 имеет вид "значение(x25 x26)", где x25 и x26 - некоторые переменные. В нашем примере x25 - b , x26 - j . Проверяется, что предпоследний операнд описателя x22 имеет вид "принадлежит(x26 область(x25))". Переменной x29 присваивается операнд консеквента x20, отличный от x22. В нашем примере - " $\lambda_f(-h(f), f \in \text{Dom}(h))$ ". Переменной x30 присваивается вхождение корневого операнда термина x11, отличное от x13. Проверяется, что по этому вхождению расположена некоторая переменная x31. В нашем примере - переменная i .

Переменной x32 присваивается результат замены вхождения x14 в описатель x13 на первый операнд вхождения x14. Переменной x33 присваивается список результатов подстановки выражений x32 и x29 вместо переменных x25 и x31 в antecedentes теоремы x18, а также в отличные от x11 элементы списка x10. Переменной x34 присваивается результат такой же подстановки в консеквент исходной теоремы. Создается импликация с antecedентами x33 и консеквентом x34. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

4. Усмотрение явной выразимости параметров друг через друга.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall abch(\forall_f(f \in \text{Dom}(b) \rightarrow \text{дифференцируема}(b, f)) \ \& \ \text{Dom}(a) = \text{Dom}(b) \ \& \\ \text{Dom}(b) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \text{ — функция} \ \& \ b \text{ — функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \\ \& \ \text{первообразная}(\lambda_x(c(x)\text{производная}(b, x), x \in \text{Dom}(b)), h) \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_k(a(k)b(k), k \in \text{Dom}(b)), \lambda_g(b(g)c(g) - h(g), g \in \text{Dom}(b))))$$

из теоремы

$$\forall_{acdeh}(\text{Dom}(a) = \text{Dom}(e) \ \& \ \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \ \& \ \text{первообразная}(e, d) \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_x(c(x)e(x), x \in \text{Dom}(e)), h) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_k(a(k)d(k), k \in \text{Dom}(a)), \lambda_g(c(g)d(g) - h(g), g \in \text{Dom}(e))))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_g(\forall_x(x \in \text{Dom}(g) \rightarrow \text{дифференцируема}(g, x)) \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g - \text{функция} \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(\text{производная}(g, x), x \in \text{Dom}(g)), g))$$

Характеристика - "функперех(1)".

Переменной x8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Проверяется, что теорема - кванторная импликация, и переменной x9 присваивается вхождение ее консеквента. Проверяется, что число операндов вхождения x9 равно 2, и переменной x10 присваивается вхождение операнда с номером x8. Переменной x11 присваивается подтерм x10, переменной x12 - список антецедентов. Переменной x13 присваивается заголовок консеквента. В нашем случае - символ "первообразная". Среди антецедентов находится утверждение x14 с заголовком x13. В нашем примере - "первообразная(e, d)". Рассматривается переменная x16 - корневой операнд утверждения x14, входящий в параметры терма x11. В нашем примере - переменная d. Проверяется, что номер корневого операнда x14 не равен x8.

В списке вывода выбирается дополнительная теорема с характеристикой "функ"/ и заголовком консеквента x13. Проверяется, что число операндов консеквента дополнительной теоремы равно 2. Переменной x20 присваивается вхождение того операнда, номер которого равен x8, переменной x21 - вхождение другого операнда. Проверяется, что по вхождению x21 расположена некоторая переменная x22. В нашем примере - переменная g. Переменной x23 присваивается вхождение в исходную теорему антецедента x14. Процедура "выводпосылки" определяет результат x24 последовательного применения дополнительной и исходной теорем при унификации антецедента x23 исходной теоремы с консеквентом дополнительной. Переменной x25 присваивается результат обработки импликации x24 оператором "нормтеорема". Этот результат регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

5. Попытка исключить один из операндов для выделения новой двуместной операции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acdei}(\text{Dom}(a) = \text{Dom}(e) \ \& \ \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \ \& \ \text{первообразная}(e, d) \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_x(-c(x)e(x), x \in \text{Dom}(e)), i) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_k(a(k)d(k), k \in \text{Dom}(a)), \lambda_g(c(g)d(g) + i(g), g \in \text{Dom}(e))))$$

из теоремы

$$\forall_{acde}(\text{Dom}(a) = \text{Dom}(e) \ \& \ \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \ \& \ \text{первообразная}(e, d) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(x)d(x) + c(x)e(x), x \in \text{Dom}(e)), \lambda_b(c(b)d(b), b \in \text{Dom}(e))))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{acde}(\text{Dom}(a) = \text{Dom}(e) \ \& \ \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \\ \text{первообразная}(a, c) \ \& \ \text{первообразная}(e, d) \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(a(x) + e(x), x \in \text{Dom}(e)), \lambda_b(c(b) + d(b), b \in \text{Dom}(e))))$$

Характеристика - "функперех(1)".

Переменной x8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Проверяется, что теорема - кванторная импликация, и переменной x9 присваивается вхождение ее консеквента. Переменной x10 присваивается вхождение операнда с номером x8. Проверяется, что x10 - описатель "отображение". Переменной x11 присваивается подтерм x10. Проверяется, что он содержит символ "значение". Переменной x12 присваивается вхождение последнего операнда описателя x10. В нашем примере - вхождение подтерма " $a(x)d(x) + c(x)e(x)$ ". Проверяется, что число операндов вхождения x12 равно 2. Переменной x15 присваивается символ по вхождению x12. В нашем примере - символ "плюс". Проверяется, что он ассоциативный и коммутативный. Переменной x13 присваивается вхождение неоднобуквенного операнда вхождения x12. В нашем примере - операнда " $a(x)d(x)$ ". Проверяется, что вхождение x13 имеет ровно два операнда, и переменной x16 присваивается символ по этому вхождению. В нашем примере - символ "умножение". Проверяется, что оба операнда вхождения x13 имеют заголовок "значение".

В списке вывода выбирается дополнительная теорема x18 с характеристикой "функперех(N)". Переменной x22 присваивается вхождение ее консеквента. Проверяется, что его заголовок тот же, что у исходной теоремы. Переменной x23 присваивается вхождение операнда вхождения x22, имеющего номер N. Проверяется, что x23 - описатель "отображение". Переменной x24 присваивается вхождение его последнего операнда. Проверяется, что по вхождению x24 расположен символ x15.

Переменной x18 переписывается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x18 имеет вид:

$$\forall_{fhij}(\text{Dom}(f) = \text{Dom}(j) \ \& \ \text{Dom}(j) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ j - \text{функция} \ \& \\ \text{первообразная}(f, h) \ \& \ \text{первообразная}(j, i) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_k(f(k) + j(k), \\ k \in \text{Dom}(j)), \lambda_g(h(g) + i(g), g \in \text{Dom}(j))))$$

Соответственно корректируются значения x22, x23 и x24. По вхождению x24 оказывается расположено выражение " $f(k) + j(k)$ ". Проверяется, что число операндов вхождения x24 равно 2, причем каждый из этих операндов имеет вид "значение(F, X)", где X - переменная из связывающей приставки описателя x23. Проверяется, что эта связывающая приставка одноэлементная. Переменной x25 присваивается список первых операндов термов "значение(...)". В нашем примере - " f, j ". Проверяется, что эти операнды суть различные переменные.

Выбирается переменная x26, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная f . Переменной x27 присваивается утверждение "равно(x15(x12,

x26) x13)". В нашем примере - " $a(x)d(x) + c(x)e(x) + f = a(x)d(x)$ ". Переменной x28 присваивается список антецедентов исходной теоремы, переменной x29 - объединение списка x28 с набором конъюнктивных членов предпоследнего операнда описателя x10. Решается задача на описание с посылками x29 и единственным условием x27. Цели задачи - "полный", "явное", "прямой-ответ", "неизвестные x26", "одз", "упростить", "равно". Ответ присваивается переменной x31. В нашем примере он имеет вид " $f = -c(x)e(x)$ ". Проверяется, что x31 - равенство с переменной x26 в левой части. Переменной x32 присваивается правая часть. Переменной x33 присваивается результат замены вхождения x12 в описатель x10 на выражение x32. В нашем примере - " $\lambda_x(-c(x)e(x), x \in \text{Dom}(e))$ ".

Переменной x34 присваивается список антецедентов теоремы x18. В нем находится утверждение x35 с тем же заголовком, что у консеквента исходной теоремы. В нашем примере - "первообразная(f, h)". Переменной x36 присваивается вхождение корневого операнда терма x35, имеющего номер x8. Проверяется, что по этому вхождению расположена переменная - первый элемент списка x25. Переменной x38 присваивается другой корневой операнд терма x35 - некоторая переменная, не входящая в список x25. Переменной x39 присваивается результат добавления переменной x38 к списку x25. Переменной x40 присваивается вхождение операнда консеквента исходной теоремы, отличного от x10. Переменной x41 присваивается тройка, состоящая из выражений x11, x33 и подтерма x40. Переменной x42 присваивается результат добавления к антецедентам исходной теоремы результатов подстановки термов x41 вместо переменных x39 в отличные от x35 утверждения набора x34. Переменной x43 присваивается результат такой же подстановки в консеквент теоремы x18. Создается импликация с антецедентами x42 и консеквентом x43, которая обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

6. Попытка сгруппировать с внешним операндом функцию от обобщенного аргумента с использованием справочника "включ".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acjk}(\neg(j = 0) \ \& \ (0, \infty) \subseteq \text{Dom}(a) \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^k, l \in \text{Dom}(a)), c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(x^j)x^{j(k+1)-1}, 0 < x \ \& \ x - \text{число}), \lambda_d(c(d^j)/j, 0 < d \ \& \ d - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ (0, \infty) \subseteq \text{Dom}(a) \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(x^b)x^{b-1}, 0 < x \ \& \ x - \text{число}), \lambda_d(c(d^b)/b, 0 < d \ \& \ d - \text{число})))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 < a \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$$

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow (a^b)^c = a^{bc})$$

Характеристика - "функперех(1)".

Переменной x_8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Проверяется, что теорема - кванторная импликация, и переменной x_9 присваивается вхождение ее консеквента. Проверяется, что x_9 имеет ровно два операнда, и переменной x_{10} присваивается вхождение операнда с номером x_8 . Проверяется, что x_{10} - описатель "отображение". Переменной x_{11} присваивается список антецедентов. Проверяется, что связывающая приставка описателя x_{10} состоит из единственной переменной x_{13} . В нашем примере - из переменной x . Переменной x_{14} присваивается вхождение последнего операнда описателя x_{10} . Внутри него находится вхождение x_{15} символа "значение". В нашем примере - " $a(x^b)$ ". Переменной x_{16} присваивается второй операнд вхождения x_{15} . В нашем примере - " x^b ". Проверяется, что он содержит переменную x_{13} и не содержит символа "значение". Переменной x_{17} присваивается переменная - первый операнд вхождения x_{15} . В нашем примере - a . Проверяется наличие антецедента "функция(x_{17})". Переменной x_{18} присваивается вхождение, операндом которого является x_{15} , переменной x_{19} - символ по вхождению x_{18} . В нашем примере x_{18} имеет вид " $a(x^b)x^{b-1}$ ", x_{19} - символ "умножение". Проверяется, что символ x_{19} ассоциативный и коммутативный, а число операндов вхождения x_{18} равно 2. Переменной x_{21} присваивается операнд этого вхождения, отличный от x_{15} . В нашем примере - " x^{b-1} ". Проверяется, что выражение x_{21} содержит переменную x_{13} и не содержит символа "значение". Переменной x_{22} присваивается заголовок выражения x_{21} . В нашем примере - символ "степень".

Выбирается переменная x_{23} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная e . Переменной x_{24} присваивается выражение " $x_{19}(x_{23}, x_{21})$ ". В нашем примере - " $e \cdot x^{b-1}$ ".

Справочник поиска теорем "свертки" определяет по символу x_{19} указанную выше первую дополнительную теорему. Переменной x_{29} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему и в терм x_{24} . В нашем примере x_{29} имеет вид:

$$\forall_{fgh}(f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ 0 < f \rightarrow f^g f^h = f^{g+h})$$

Переменной x_{31} присваивается заменяемая часть равенства в консеквенте теоремы x_{29} . Проверяется, что она имеет заголовок x_{19} , причем число ее корневых операндов равно 2. Переменной x_{34} присваивается список параметров выражения x_{24} и x_{31} , отличных от переменной x_{13} . В нашем примере - список b, e, f, g, h . Переменной x_{35} присваивается список параметров выражения x_{31} , имеющих в этом выражении лишь одно вхождение. В нашем примере - список g, h .

Определяется подстановка S вместо переменных x_{34} , унифицирующая термы x_{24} и x_{31} . При определении унификации разрешается подстановка единиц вместо переменных списка x_{35} . Переменной x_{37} присваивается выражение, подставляемое подстановкой S вместо переменной x_{23} . В нашем примере - " x^h ".

Переменной x_{38} присваивается логический символ, являющийся заголовком выражения x_{37} . В нашем примере - символ "степень". Проверяется, что x_{38} - заголовок выражения x_{16} . Справочник поиска теорем "включ" определяет по символу x_{38} указанную выше вторую дополнительную теорему. Переменной

x41 присваивается результат замены ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему, теорему x29 и в терм x24. В нашем примере x41 имеет вид:

$$\forall_{ijk}(i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \ \& \ 0 \leq i \rightarrow (i^j)^k = i^{jk})$$

Переменной x45 присваивается вхождение заменяемой части равенства в консеквенте теоремы x41. Внутри этого вхождения рассматривается отличное от x45 вхождение x46 символа x38. Переменной x47 присваивается подтерм x46. В нашем примере - " i^j ". Переменной x48 присваивается заменяющая часть консеквента теоремы x41. Переменной x49 присваивается список отличных от x13 параметров термов x47, x16, x37, x48. В нашем примере - список " b, h, i, j, k ". Определяется подстановка R вместо переменных x49, унифицирующая терм x16 с термом x47 и одновременно - терм x48 с термом x37.

Переменной x51 присваивается результат применения подстановки R к выражению x37. В нашем примере он имеет вид " x^{jk} ". Переменной x52 присваивается список результатов применения подстановки R к антецедентам теоремы x41. Переменной x53 присваивается список результатов последовательного применения подстановок S и R к антецедентам теоремы x29. Переменной x54 присваивается список результатов последовательного применения подстановок S и R к утверждениям набора x11. Переменной x55 присваивается список всех содержащих переменную x13 утверждений наборов x52 и x53. В нашем примере - " $x - \text{число}$ ", " $0 \leq x$ ", " $0 < x$ ".

Переменной x56 присваивается объединение списка x54 со всеми не содержащими переменной x13 утверждениями списков x52 и x53. Переменной x57 присваивается список конъюнктивных членов предпоследнего операнда описателя x10. В нашем примере - " $0 < x$ " и " $x - \text{число}$ ". Переменной x58 присваивается список результатов последовательного применения подстановок S и R к утверждениям списка x57. Переменной x59 присваивается объединение списков x56 и x58. Проверяется, что каждое утверждение списка x55 - следствие утверждений x59.

Переменной x61 присваивается результат последовательного применения подстановок S и R к выражению x16. В нашем примере - " x^j ". Переменной x63 присваивается результат последовательного применения подстановок S и R к консеквенту исходной теоремы.

Выбирается переменная x64, не входящая в исходную теорему и в термы x29, x41, x24. В нашем примере - переменная l . Переменной x65 присваивается результат замены на эту переменную вхождения x46 в подтерм x45. В нашем примере - " l^k ". Переменной x67 присваивается результат последовательного применения подстановок S и R к терму x65. В нашем примере он совпадает с x65. Переменной x68 присваивается выражение "отображение($x64$ принадлежит($x64$ область($x17$)) $x19(x17(x64), x67)$)". В нашем примере - " $\lambda_l(a(l)l(k), l \in \text{Dom}(a))$ ". Переменной x69 присваивается результат подстановки выражения x68 вместо переменной x17 в утверждение x63. Переменной x70 присваивается список результатов подстановки выражения x68 вместо переменной x17 в утверждения набора x56, дополненный утверждением "функция($x17$)". Создается импликация с антецедентами x70 и консеквентом x69. Она обрабатывается оператором

"Нормтеорема", которому передается опция "степенмнож", после чего регистрируется в списке вывода. Допускаются только характеристики с заголовками "функперех", "упрощинтеграл".

7. Попытка сгруппировать с внешним операндом функцию от обобщенного аргумента с использованием справочника "варпарам".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aci}(\neg(\text{знаменатель}(i) - \text{even} \ \& \ [-1, 1] \subseteq \text{Dom}(a) \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ i - \text{rational} \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_j(a(j)(-j^2 + 1), j \in \text{Dom}(a)), c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(\sin x)(\cos x)^{2i+1}, x - \text{число}), \lambda_d(c(\sin d), d - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall ac([-1, 1] \subseteq \text{Dom}(a) \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(\sin x) \cos x, x - \text{число}), \lambda_d(c(\sin d), d - \text{число})))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ c - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(c) - \text{even}) \rightarrow a^b a^c = a^{b+c})$$

$$\forall_{an}(a - \text{число} \ \& \ n - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(n) - \text{even}) \rightarrow (\cos a)^{2n} = (1 - (\sin a)^2)^n)$$

Характеристика - "функперех(1)".

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повтрим его. Переменной x8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Проверяется, что теорема - кванторная импликация, и переменной x9 присваивается вхождение ее консеквента. Проверяется, что x9 имеет ровно два операнда, и переменной x10 присваивается вхождение операнда с номером x8. Проверяется, что x10 - описатель "отображение". Переменной x11 присваивается список antecedентов. Проверяется, что связывающая приставка описателя x10 состоит из единственной переменной x13. В нашем примере - из переменной x. Переменной x14 присваивается вхождение последнего операнда описателя x10. Внутри него находится вхождение x15 символа "значение". В нашем примере - "a(sin x)". Переменной x16 присваивается второй операнд вхождения x15. В нашем примере - "sin x". Проверяется, что он содержит переменную x13 и не содержит символа "значение". Переменной x17 присваивается переменная - первый операнд вхождения x15. В нашем примере - a. Проверяется наличие antecedента "функция(x17)". Переменной x18 присваивается вхождение, операндом которого является x15, переменной x19 - символ по вхождению x18. В нашем примере x18 имеет вид "a(sin x) cos x", x19 - символ "умножение". Проверяется, что символ x19 ассоциативный и коммутативный, а число операндов вхождения x18 равно 2. Переменной x21 присваивается операнд этого вхождения, отличный от x15. В нашем примере - "cos x". Проверяется, что выражение x21 содержит переменную x13 и не содержит символа "значение". Переменной x22 присваивается заголовок выражения x21. В нашем примере - символ "степень".

Выбирается переменная x_{23} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная e . Переменной x_{24} присваивается выражение " $x_{19}(x_{23}, x_{21})$ ". В нашем примере - " $b \cos x$ ".

Справочник поиска теорем "свертки" определяет по символу x_{19} указанную выше первую дополнительную теорему. Переменной x_{29} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему и в терм x_{24} . В нашем примере x_{29} имеет вид:

$$\forall_{efg}(e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ f - \text{rational} \ \& \ g - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(f) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(g) - \text{even}) \rightarrow e^f e^g = e^{f+g})$$

Переменной x_{31} присваивается заменяемая часть равенства в консеквенте теоремы x_{29} . Проверяется, что она имеет заголовок x_{19} , причем число ее корневых операндов равно 2. Переменной x_{34} присваивается список параметров выражения x_{24} и x_{31} , отличных от переменной x_{13} . В нашем примере - список b, e, f, g . Переменной x_{35} присваивается список параметров выражения x_{31} , имеющих в этом выражении лишь одно вхождение. В нашем примере - список f, g .

Определяется подстановка S вместо переменных x_{34} , унифицирующая термы x_{24} и x_{31} . При определении унификации разрешается подстановка единиц вместо переменных списка x_{35} . Переменной x_{37} присваивается выражение, подставляемое подстановкой S вместо переменной x_{23} . В нашем примере - " $(\cos x)^f$ ".

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что терм x_{37} имеет единственный подтерм максимальной сложности, и этот подтерм присваивается переменной x_{39} . В нашем примере - " $\cos x$ ". Переменной x_{40} присваивается заголовок термина x_{39} . В нашем примере - символ "косинус". Проверяется, что терм x_{16} имеет единственный подтерма максимальной сложности, и этот подтерм совпадает с термом x_{16} . Переменной x_{43} присваивается заголовок термина x_{16} . В нашем примере - символ "синус". Проверяется, что символы x_{40} и x_{43} различны. Справочник поиска теорем "варпарам" определяет по x_{40} указанную выше вторую дополнительную теорему. Проверяется, что она содержит символ x_{43} . Переменной x_{46} присваивается результат переобозначения во второй дополнительной теореме переменных на переменные, не входящие в исходную теорему, в теорему x_{29} и в терм x_{24} . В нашем примере x_{46} имеет вид:

$$\forall_{hi}(h - \text{число} \ \& \ i - \text{rational} \ \& \ \neg(\text{знаменатель}(i) - \text{even}) \rightarrow (\cos h)^{2i} = (1 - (\sin h)^2)^i)$$

Переменной x_{50} присваивается вхождение заменяющей согласно характеристике "варпарам" части равенства в консеквенте теоремы x_{46} . В нашем примере - правой части. Внутри этого вхождения рассматривается отличное от x_{50} вхождение x_{51} символа x_{43} . Переменной x_{52} присваивается подтерм x_{51} . В нашем примере - " $\sin h$ ". Переменной x_{53} присваивается заменяемая часть консеквента теоремы x_{46} . Переменной x_{54} присваивается список отличных от x_{13} параметров термов x_{52} , x_{42} , x_{37} , x_{53} . В нашем примере - список " f, h, i ". Определяется подстановка R вместо переменных x_{54} , унифицирующая терм x_{42} с термом x_{52} и одновременно - терм x_{53} с термом x_{37} .

Переменной x_{56} присваивается результат применения подстановки R к выражению x_{37} . В нашем примере он имеет вид " $(\cos x)^{2i}$ ". Проверяется, что терм

x56 имеет параметр, отличный от x13. Переменной x57 присваивается список результатов применения подстановки R к антецедентам теоремы x46. Переменной x58 присваивается список результатов последовательного применения подстановок S и R к антецедентам теоремы x29. Переменной x59 присваивается список результатов последовательного применения подстановок S и R к утверждениям набора x11. Переменной x60 присваивается список всех содержащих переменную x13 утверждений наборов x57 и x58. В нашем примере - " x – число", " $\cos x$ – число".

Переменной x61 присваивается объединение списка x59 со всеми не содержащими переменной x13 утверждениями списков x57 и x58. Переменной x62 присваивается список конъюнктивных членов предпоследнего операнда описателя x10. В нашем примере - " x – число". Переменной x63 присваивается список результатов последовательного применения подстановок S и R к утверждениям списка x62. Переменной x64 присваивается объединение списков x61 и x63. Проверяется, что каждое утверждение списка x60 - следствие утверждений x64.

Переменной x66 присваивается результат последовательного применения подстановок S и R к выражению x16. В нашем примере - " $\sin x$ ". Переменной x68 присваивается результат последовательного применения подстановок S и R к консеквенту исходной теоремы.

Выбирается переменная x69, не входящая в исходную теорему и в термы x29, x46, x24. В нашем примере - переменная j . Переменной x70 присваивается результат замены на эту переменную вхождения x51 в подтерм x50. В нашем примере - " $(1 - j^2)^i$ ". Переменной x72 присваивается результат последовательного применения подстановок S и R к терму x70. В нашем примере он совпадает с x70. Переменной x73 присваивается выражение "отображение(x69 принадлежит(x69 область(x17)) x19(x17(x69), x72))". В нашем примере - " $\lambda_j(a(j)(1 - j^2)^i, j \in \text{Dom}(a))$ ". Переменной x74 присваивается результат подстановки выражения x73 вместо переменной x17 в утверждение x68. Переменной x75 присваивается список результатов подстановки выражения x73 вместо переменной x17 в утверждения набора x61, дополненный утверждением "функция(x17)". Создается импликация с антецедентами x75 и консеквентом x74. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому передается опция "степенмнож", после чего регистрируется в списке вывода. Допускаются только характеристики с заголовками "функперех", "упрощинтеграл".

Использование дополнительной теоремы для варьирования основной

1. Попытка развязки консеквента с помощью тождества "упрощтерм".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acc}(\forall_f(f \in \text{Dom}(e) \rightarrow \text{дифференцируема}(e, f)) \& \text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Val}(e) \subseteq \text{Dom}(a) \& a - \text{функция} \& e - \text{функция} \& \text{первообразная}(a, c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(e(x)))\text{производная}(e, x), x \in \text{Dom}(e)), \lambda_d(c(e(d)), d \in \text{Dom}(e))))$$

из теоремы

$\forall_{ce}(\forall_f(f \in \text{Dom}(e) \rightarrow \text{дифференцируема}(e, f)) \& \forall_x(x \in \text{Dom}(e) \& \text{дифференцируема}(c, e(x)) \rightarrow \text{дифференцируема}(\lambda_d(c(e(d)), d \in \text{Dom}(e) \& \text{дифференцируема}(c, e(d))), x)) \& \text{Dom}(c) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Val}(c) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Val}(e) \subseteq \text{Dom}(c) \& c - \text{функция} \& e - \text{функция} \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(\text{производная}(c, e(x))\text{производная}(e, x), x \in \text{Dom}(e) \& \text{дифференцируема}(c, e(x))), \lambda_d(c(e(d)), d \in \text{Dom}(e) \& \text{дифференцируема}(c, e(d))))))$

и дополнительной теоремы

$\forall_{fgx}(\text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \& x \in \text{Dom}(g) \& f - \text{функция} \& \text{первообразная}(f, g) \rightarrow \text{производная}(g, x) = f(x))$

Характеристика - "функперех(1)".

Переменной x8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Проверяется, что теорема - кванторная импликация, и переменной x9 присваивается вхождение ее консеквента. Переменной x10 присваивается вхождение операнда консеквента с номером x8. Проверяется, что x10 - описатель "отображение". Переменной x12 присваивается последний операнд этого описателя. В нашем примере - "производная(c, e(x))производная(e, x)". Внутри вхождения в теорему терма x12 выбирается вхождение x13 неоднобуквенного подтерма. Переменной x14 присваивается его заголовок. В нашем примере x13 - вхождение терма "производная(c, e(x))", x14 - символ "производная". Справочник поиска теорем "упрощединица" определяет по символу x14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается список параметров подтерма x13. В нашем примере - "c, e, x". Проверяется, что хотя бы один из них имеет в терме x12 лишь одно вхождение. Переменной x18 присваивается список antecedентов дополнительной теоремы. Переменной x19 присваивается набор подтермов этих antecedентов, имеющих наибольшую оценку сложности. В нашем примере x19 состоит из единственного терма "первообразная(f, g)". Переменной x20 присваивается список заголовков тех термов набора x19, которые принадлежат списку x18. В нашем примере - единственный заголовок "первообразная".

Переменной x21 присваивается список antecedентов исходной теоремы. Проверяется, что среди них нет antecedента с заголовком из набора x20, параметры которого пересекаются со списком x17. Переменной x24 присваивается результат преобразования вхождения x13 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы, причем направление замены определяется характеристикой дополнительной теоремы "упрощтерм(...)". Теорема x24 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Ей передается единственная характеристика "функперех(x8)".

2. Попытка исключения сложной подоперации в определении значения функции при помощи дополнительного тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{ach}(\forall_f(f \in h \rightarrow \text{Квазивнутр}(f, h)) \& h - \text{set} \& h \subseteq \text{Dom}(a) \& a - \text{функция} \& \text{первообразная}(a, c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(x), x \in h), \lambda_d(c(d), d \in h)))$

из теоремы

$\forall_{ace}(\forall_f(f \in \text{Dom}(e) \rightarrow \text{дифференцируема}(e, f)) \& \text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Val}(e) \subseteq \text{Dom}(a) \& a - \text{функция} \& e - \text{функция} \& \text{первообразная}(a, c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(e(x)))\text{производная}(e, x), x \in \text{Dom}(e)), \lambda_d(c(e(d)), d \in \text{Dom}(e)))$)

и дополнительной теоремы

$\forall_{aA}(A - \text{set} \& \text{Квазивнутр}(a, A) \& A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{производная}(\lambda_x(x, x \in A), a) = 1)$

Характеристика - "функперех(1)".

Переменной x8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Проверяется, что теорема - кванторная импликация, и переменной x9 присваивается вхождение ее консеквента. Переменной x10 присваивается вхождение операнда консеквента с номером x8. Проверяется, что x10 - описатель "отображение". Переменной x12 присваивается последний операнд этого описателя. В нашем примере - " $a(e(x))\text{производная}(e, x)$ ". Проверяется, что выражение x12 имеет единственный подтерм максимальной сложности, и переменной x14 присваивается этот подтерм. В нашем примере - " $\text{производная}(e, x)$ ". Переменной x15 присваивается заголовок выражения x14, переменной x16 - список параметров этого выражения.

Переменной x17 присваивается связывающая приставка описателя x10, переменной x18 - список его антецедентов. В списке x16 выбирается переменная x19, не входящая в список x17. В нашем примере - переменная e . Проверяется наличие антецедента "функция(x19)".

В разделе, к которому относится символ, выбирается дополнительная теорема с характеристиками "описатель(...)" и "нормализация(N)". В нашем примере эта теорема указана выше. Проверяется, что в заменяющей части консеквента дополнительной теоремы не встречается символ x15.

Внутри консеквента исходной теоремы выбирается вхождение x28 подтерма x14. Оператор "тождвывод" определяет результат x29 преобразования вхождения x28 посредством дополнительной теоремы, применяемой в направлении N . Переменной x30 присваивается результат обработки теоремы x29 оператором "Нормтеорема", которому передается опция "упрощинтеграл". Среди конъюнктивных членов утверждения x30 выбирается кванторная импликация x31, заголовков консеквента которой такой же, как у исходной теоремы. Проверяется, что она имеет антецедент с этим заголовком. Затем x31 регистрируется в списке вывода.

3. Попытка использования дополнительной теоремы для варьирования теоремы, имеющей существенный антецедент.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{bdf}(0 < f \& 0 < 4df - b^2 \& b - \text{число} \& d - \text{число} \& f - \text{число} \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(1/(-d - bx + (-f)x^2), x - \text{число}), \lambda_c(-2 \arctg((b + 2cf)/\sqrt{4df - b^2})/\sqrt{4df - b^2}, c - \text{число})))$

из теоремы

$$\forall_{abc}(0 < c \ \& \ 0 < 4bc - a^2 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(1/(b + ax + cx^2), x - \text{число}), \\ \lambda_d(2 \arctg((a + 2cd)/\sqrt{4bc - a^2})/\sqrt{4bc - a^2}, d - \text{число})))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ae}(\text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, e) \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(-a(x), x \in \text{Dom}(a)), \lambda_c(-e(c), c \in \text{Dom}(e))))$$

Характеристика - "функперех(1)".

Переменной x8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Проверяется, что теорема - кванторная импликация, и переменной x9 присваивается вхождение ее консеквента. Переменной x10 присваивается вхождение операнда консеквента с номером x8. Проверяется, что x10 - описатель "отображение". Переменной x11 присваивается список antecedентов, переменной x12 - заголовок консеквента. В нашем примере - символ "первообразная". Проверяется отсутствие antecedента с заголовком x12. Переменной x13 присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения консеквента по о.д.з. В нашем примере - " $0 < 4bc - a^2$ ", " $c - \text{число}$ ", " $a - \text{число}$ ", " $b - \text{число}$ ". В списке x11 выбирается утверждение x14, не входящее в список x13. В нашем примере - " $0 < c$ ". Переменной x15 присваивается список утверждений, используемых для сопровождения по о.д.з. остальных antecedентов. В нашем примере - утверждение " $a - \text{число}$ ". Проверяется, что x14 не входит в список x15. Проверяется, что задача на доказательство не выводит x14 из объединения списков x13 и x15.

В разделе, к которому относится символ x12, находится дополнительная теорема с характеристиками "функперех(N)" и "упроцинтеграл". В нашем примере эта теорема приведена выше. Переменной x21 присваивается вхождение antecedента дополнительной теоремы, имеющего заголовок x12. В нашем примере - вхождение antecedента "первообразная(a, e)". Переменной x22 присваивается вхождение операнда данного antecedента, имеющего номер x8. Проверяется, что этот операнд - некоторая переменная x23. В нашем примере - переменная a. Переменной x24 присваивается вхождение консеквента дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет заголовок x12. Переменной x25 присваивается вхождение операнда вхождения x24, имеющего номер x8. Проверяется, что этот операнд - описатель "отображение". В нашем примере он имеет вид " $\lambda_x(-a(x), x \in \text{Dom}(a))$ ".

Переменной x26 присваивается связывающая приставка описателя x25. Проверяется, что она одноэлементна. Переменной x27 присваивается вхождение последнего операнда описателя. В нашем примере - операнда " $-a(x)$ ". Проверяется, что этот операнд неоднобуквенный, а число его корневых операндов равно 1. Переменной x28 присваивается первый операнд вхождения x27. В нашем примере - " $a(x)$ ". Проверяется, что x28 - вхождение выражения вида "значение(x23 T)". Оператор "выводпосылки" определяет результат x29 последовательного применения исходной и дополнительной теоремы при унификации antecedента x21 дополнительной теоремы с консеквентом исходной теоремы.

Переменной x_{30} присваивается консеквент теоремы x_{29} , переменной x_{31} - результат обработки оператором "нормантецеденты" списка антецедентов теоремы x_{29} относительно параметров терма x_{30} . Корневые операнды терма x_{30} соединяются символом "набор", и вспомогательная задача на преобразование упрощает данный набор относительно посылок x_{31} . Результат присваивается переменной x_{33} . В нашем примере x_{33} имеет вид " $(\lambda_x(-1/(d + bx + fx^2), x - \text{число}), \lambda_c(-2 \arctg((b+2cf)/\sqrt{4df - b^2})/\sqrt{4df - b^2}, c - \text{число}))$ ". Переменной x_{35} присваивается корневой операнд выражения x_{33} , имеющий номер x_8 . В нашем примере - первый операнд. Проверяется, что x_{35} - описатель "отображение". Переменной x_{36} присваивается последний операнд описателя x_{35} . В нашем примере - " $-1/(d + bx + fx^2)$ ".

Переменной x_{37} присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения терма x_{33} по о.д.з. В нашем примере - " $0 < 4df - b^2$ ", " $f - \text{число}$ ", " $b - \text{число}$ ", " $d - \text{число}$ ". В списке x_{31} выбирается утверждение x_{38} , не входящее в список x_{37} и в список x_{39} утверждений, используемых для сопровождения по о.д.з. остальных утверждений списка x_{31} . В нашем примере x_{38} имеет вид " $0 < f$ ". Проверяется, что задача на доказательство не усматривает выводимость x_{38} из объединения списков x_{37} и x_{39} . Переменной x_{40} присваивается список параметров утверждения x_{38} . В нашем примере - f . Оператор "спускопер" определяет результат x_{41} перемещения корневой одноместной операции выражения x_{36} вглубь терма. В нашем примере x_{41} имеет вид " $1/(-d - bx + (-f)x^2)$ ". Проверяется, что какая-либо переменная списка x_{40} встречается в терме x_{41} под одноместной операцией. Переменной x_{42} присваивается результат замены в паре x_{33} выражения под первым описателем "отображение" на x_{41} . Переменной x_{43} присваивается результат соединения символом x_{12} двух корневых операндов набора x_{42} . Создается импликация с антецедентами x_{31} и консеквентом x_{43} , которая регистрируется в списке вывода с характеристикой "функперех". Если исходная теорема имела характеристику "едн", то она передается новой теореме.

Попытка реализации антецедента

1. Попытка реализации антецедента с помощью дополнительной теоремы, определяющей характеристику константной функции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bf}(f\text{-set} \ \& \ f \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b\text{-число} \ \& \ \text{квазиобласть}(f) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(b, x \in f), \lambda_c(bc, c \in f)))$$

из теоремы

$$\forall_{abd}(\text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{первообразная}(a, d) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(ba(x), x \in \text{Dom}(a)), \lambda_c(bd(c), c \in \text{Dom}(d))))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_c(c - \text{set} \ \& \ c \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{квазиобласть}(c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(1, x \in c), \lambda_b(b, b \in c)))$$

Характеристика - "функперех(1)".

Проверяется наличие характеристики "функполе". Переменной x8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Проверяется, что теорема - кванторная импликация, и переменной x9 присваивается входение ее консеквента. Переменной x10 присваивается входение операнда консеквента с номером x8. Проверяется, что x10 - описатель "отображение". Проверяется, что если внутри последнего операнда описателя x10 встречается выражение вида "значение(X, T)", то X - переменная, причем имеется антецедент с тем же заголовком, что у консеквента, у которого операндом с номером x8 служит переменная X .

Переменной x11 присваивается входение антецедента, заголовок которого равен заголовку консеквента. В нашем примере - антецедента "первообразная(a, d)". Проверяется, что оба корневых операнда антецедента x11 суть переменные. В списке вывода выбирается дополнительная теорема - кванторная импликация, заголовок консеквента которой такой же, как у консеквента исходной теоремы. Переменной x14 присваивается входение консеквента дополнительной теоремы, переменной x15 - входение его операнда, имеющего номер x8. Проверяется, что x15 - описатель "отображение". Переменной x16 присваивается его связывающая приставка, переменной x17 - последний операнд. Проверяется, что x17 не содержит переменных списка x16, а предпоследний операнд описателя x15 не содержит символа "значение".

Оператор "выводпосылки" определяет результат x18 последовательного применения дополнительной и исходной теорем, при котором антецедент x11 исходной теоремы идентифицируется с консеквентом дополнительной теоремы. Переменной x19 присваивается результат обработки теоремы x18 оператором "нормтеорема". В нашем примере получаем:

$$\forall_{bf}(f - \text{set} \ \& \ f \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{квазиобласть}(f) \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(b, x \in f), \lambda_c(bc, c \in f)))$$

Переменной x20 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка антецедентов теоремы x19 относительно параметров ее консеквента. Создается импликация с антецедентами x20 и консеквентом теоремы x19, и результат обработки ее оператором "нормтеорема" присваивается переменной x21. В нашем примере x21 совпадает с x19. Проверяется, что x21 - кванторная импликация, заголовок консеквента которой такой же, как у исходной теоремы, а x8-й операнд этого консеквента - описатель "отображение". Проверяется, что последний операнд описателя x23 не получается из последнего операнда описателя x10 подстановкой вместо его функциональной переменной. В нашем примере - что b не получается подстановкой вместо a в терм ba . Затем теорема x21 регистрируется в списке вывода с той же характеристикой "функперех", что у исходной теоремы. Допускаются также характеристики "отображение", "функполе".

2. Попытка реализации антецедента и варьирования ограничения на аргумент исходной функции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\text{первообразная}(\lambda_x(1/x, x < 0 \ \& \ x - \text{число}), \lambda_d(\ln(-d), d < 0 \ \& \ d - \text{число}))$$

из теоремы

$$\forall_{ace}(\forall_f(f \in \text{Dom}(e) \rightarrow \text{дифференцируема}(e, f)) \& \text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Val}(e) \subseteq \text{Dom}(a) \& a - \text{функция} \& e - \text{функция} \& \text{первообразная}(a, c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(e(x)))\text{производная}(e, x), x \in \text{Dom}(e)), \lambda_d(c(e(d)), d \in \text{Dom}(e))))$$

и дополнительных теорем

$$\text{первообразная}(\lambda_f(1/f, 0 < f \& f - \text{число}), \lambda_c(\ln c, c - \text{число}))$$

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow 0 < -a \leftrightarrow a < 0)$$

Характеристика - "функперех(1)".

Проверяется наличие характеристики "упрощинтеграл". Переменной x8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Если теорема - кванторная импликация, то переменной x9 присваивается вхождение ее консеквента, иначе - ее корневое вхождение. Проверяется, что число операндов вхождения x9 равно 2, и переменной x10 присваивается вхождение операнда с номером x8. Проверяется, что x10 - описатель "отображение". Переменной x11 присваивается вхождение последнего операнда описателя (он определяет значение функции). В нашем примере x11 - вхождение выражения "a(e(x))производная(e, x)". Внутри вхождения x11 выбирается вхождение x12 подтерма с заголовком "значение". В нашем примере - "a(e(x))". Переменной x13 присваивается первый операнд терма x12. В нашем примере- переменная a.

Переменной x14 присваивается заголовок консеквента исходной теоремы. В нашем примере - символ "первообразная". Переменной x15 присваивается вхождение антецедента с заголовком x14. В нашем примере - антецедента "первообразная(a, c)". Переменной x16 присваивается вхождение операнда антецедента x14, имеющего номер x8. Проверяется, что этот операнд - переменная x13. Переменной x17 присваивается вхождение второго операнда вхождения x12. Проверяется, что этот операнд имеет заголовок "значение".

Переменной x18 присваивается связывающая приставка описателя x10. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x19 присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная x. Проверяется, что второй операнд вхождения x17 равен x19. Переменной x20 присваивается переменная - первый операнд вхождения x17. Проверяется, что эта переменная - e. Проверяется, что переменная x20 входит в параметры описателя x10.

В разделе, к которому относится символ x14, находится первая дополнительная теорема. Она имеет характеристику "функперех(N)" и не имеет характеристик "едн", "упрощинтеграл". Кроме того, она не имеет антецедента с заголовком x14, а ее консеквент имеет заголовок x14. Переменной x29 присваивается вхождение этого консеквента. Переменной x30 присваивается вхождение операнда вхождения x29, имеющего номер N. В нашем примере - вхождение операнда "λ_f(1/f, 0 < f & f – число)". Проверяется, что x30 - описатель "отображение". Переменной x31 присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x32 присваивается этот элемент. Переменной x33 присваивается список конъюнктивных членов предпоследнего операнда

описателя x30, переменной x34 - его последний операнд. Переменной x35 присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения выражения x34 по о.д.з. В нашем примере - утверждения " $\neg(f = 0)$ " и " f - число".

В списке x33 выбирается не входящее в список x35 утверждение x36, длина которого больше 2. В нашем примере - " $0 < f$ ". Если x36 - условие принадлежности с первым операндом x32, то второй операнд должен быть неоднобуквенным и не иметь заголовка "область". Если заголовок утверждения x36 - символ "не", то переменной x37 присваивается его первый операнд, иначе - само утверждение x36. Переменной x38 присваивается заголовок утверждения x36. В нашем примере - символ "меньше". Справочник поиска теорем "упрощэв" определяет по x38 указанную выше вторую дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "общнорм(M)". Переменной x43 присваивается результат переобозначения переменных второй дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x43 имеет вид:

$$\forall_b(b - \text{число} \rightarrow 0 < -b \leftrightarrow b < 0)$$

Переменной x44 присваивается заменяемая часть эквивалентности в консеквенте теоремы x43. В нашем примере - " $0 < -b$ ". Проверяется, что терм x44 содержит все переменные теоремы x43. Если заголовок утверждения x44 - символ "не", то переменной x44 переприсваивается первый операнд данного утверждения. Переменной x45 присваивается результата добавления к параметрам терма x44 переменной x32. В нашем примере x45 имеет вид " f, b ". Определяется подстановка S вместо переменных x45, унифицирующая термы x36 и x44. Переменной x47 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x43. В нашем примере он состоит из единственного утверждения " b - число". Переменной x48 присваивается выражение, подставляемое подстановкой S вместо переменной x32. В нашем примере - " $-b$ ". Переменной x49 присваивается список параметров терма x48. Проверяется, что он одноэлементный, и переменной x50 присваивается его элемент. В нашем примере - b . Список x47 подразбивается на подсписок x51 утверждений, содержащих переменную x50, и подсписок x52 остальных утверждений. В нашем примере x52 пуст. Переменной x53 присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы со списком x52.

Определяется результат x54 упрощения задачей на преобразование конъюнкции утверждений списка x51 и результатов замены переменной x32 на x50 в утверждениях набора x33. Посылками задачи служат утверждения набора x53. В нашем примере x54 имеет вид " $b < 0 \ \& \ b - \text{число}$ ". Переменной x56 присваивается кванторная импликация со связывающей приставкой x32, антецедентами x33 и единственным консеквентом " $\text{существует}(x50 \ \text{и}(\text{равно}(x32 \ x48)x54))$ ". В нашем примере x56 имеет вид:

$$\forall_f(0 < f \ \& \ f - \text{число} \rightarrow \exists_b(f = -b \ \& \ b < 0 \ \& \ b - \text{число}))$$

При помощи задачи на доказательство проверяется, что x56 - следствие посылок x53. Переменной x58 присваивается выражение "отображение($x50 \ x54 \ x48$)". В нашем примере - " $\lambda_b(-b, b < 0 \ \& \ b - \text{число})$ ". Процедура "выводпосылки" определяет результат x59 последовательного применения первой дополнительной теоремы и исходной теоремы при унификации антецедента x15

исходной теоремы с консеквентом первой дополнительной теоремы. Переменной х60 присваивается объединение списка результатов подстановки выражения х58 вместо переменной х20 в антецеденты теоремы х59 со списком х52. Переменной х61 присваивается результат такой же подстановки в консеквент теоремы х59. Затем создается импликация с антецедентами х60 и консеквентом х61. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с той же характеристикой "функперех", что у исходной теоремы.

3. Попытка реализации антецедента путем подбора примера.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abce}(b - \text{целое} \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^{b-2}/e(l), l - \text{число}), c) \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(a(x^{-1})/(e(x^{-1})x^b), x - \text{число}), \lambda_d(-c(d^{-1}), d - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{abcej}(\neg(j = 0) \ \& \ j | -b + 1 \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ j - \text{целое} \ \& \\ \text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^{-1+(-b+1)/j}/e(l), l - \text{число}), c) \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(a(x^j)/(e(x^j)x^b), x - \text{число}), \lambda_d(c(d^j)/j, d - \text{число})))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_n(n - \text{целое} \rightarrow -1 | n)$$

Характеристика - "функперех(1)".

Проверяется наличие характеристики "упрощинтеграл". Переменной х8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Если теорема - кванторная импликация, то переменной х9 присваивается вхождение ее консеквента, иначе - ее корневое вхождение. Проверяется, что число операндов вхождения х9 равно 2. Переменной х12 присваивается вхождение некоторого существенного антецедента теоремы. В нашем примере - " $j | -b + 1$ ". Переменной х13 присваивается символ по вхождению х12. В нашем примере - символ "делит". Переменной х14 присваивается подтерм х12. Проверяется, что утверждение х14 элементарно и имеет не менее двух параметров. Справочник поиска теорем "пример" определяет по х13 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "выводпосылки" определяет результат х17 последовательного применения дополнительной теоремы и исходной теоремы при унификации антецедента х12 исходной теоремы с консеквентом дополнительной. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Допускаются характеристики с заголовками "функперех", "упрощинтеграл".

Специальное преобразование для приемов заданного типа

1. Загрубление формулы нахождения первообразной для нормализатора "нормИнтеграл" - случай кванторной импликации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcj}(\neg(j = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^{b-1}, l - \text{число}), c) \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(a(x^j)x^{bj-1}, x - \text{число}), \lambda_d(c(d^j)/j, d - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{abcj}(\neg(j = 0) \ \& \ (0, \infty) \subseteq \text{Dom}(a) \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^{b-1}, l \in \text{Dom}(a)), c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(x^j)x^{bj-1}, 0 < x \ \& \ x - \text{число}), \lambda_d(c(d^j)/j, 0 < d \ \& \ d - \text{число})))$$

Характеристика - "функперех(1)".

Проверяется наличие характеристики "упрощинтеграл". Проверяется, что теорема представляет собой кванторную импликацию с символом "первообразная" в консеквенте. Переменной x10 присваивается результат обработки исходной теоремы оператором "Нормтеорема", которому передаются опции "норминт" и "степенмнож". Эти опции включают приемы загробления теоремы, ориентированного на создание по ней приемов нормализатора вычисления первообразной "нормИнтеграл". В частности, отбрасываются утверждения, необходимые для сопровождения по о.д.з. Проверяется, что теорема x10 короче исходной теоремы. После этого она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы, причем допускается создание характеристик с заголовками "функперех", "обобщподст", "упрощинтеграл".

2. Загробление формулы нахождения первообразной для нормализатора "нормИнтеграл" - случай простого отношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\text{первообразная}(\lambda_f(1/f, f - \text{число}), \lambda_f(\ln |f|, f - \text{число}))$$

из теоремы

$$\text{первообразная}(\lambda_f(1/f, \neg(f = 0) \ \& \ f - \text{число}), \lambda_f(\ln |f|, f - \text{число}))$$

Характеристика - "функперех(1)".

Проверяется, что теорема имеет заголовок "первообразная". Переменной x9 присваивается результат обработки исходной теоремы оператором "Нормтеорема", которому передается опция "норминт". Проверяется, что теорема x9 короче исходной теоремы. После этого она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

3. Исключение не содержащих варьируемой переменной подтермов с помощью разрешения относительно неповторной переменной и рассмотрение их как константных.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acefj}(\neg(j = 0) \ \& \ j|(f + 1) \ \& \ f - \text{целое} \ \& \ j - \text{целое} \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^{-1+(f+1)/j}/e(l), l - \text{число}), c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(x^j)x^f/e(x^j), x - \text{число}), \lambda_d(c(d^j)/j, d - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{abcej}(\neg(j = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^{b-1}/e(l), l - \text{число}), c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(x^j)x^{bj-1}/e(x^j), x - \text{число}), \lambda_d(c(d^j)/j, d - \text{число})))$$

и протокола "констнорм(a^b , b - целое)".

Протокол "констнорм($f(x_1 \dots x_n)A$)", где A - условие на значение некоторого операнда x_i , указывает наиболее "типичную" ситуацию для выражений с заголовком f , у которых данный операнд - константный.

Характеристика - "функперех(1)".

Проверяется наличие характеристики "упрощинтеграл". Переменной x_8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Проверяется, что теорема - кванторная импликация, и переменной x_9 присваивается вхождение ее консеквента. Переменной x_{10} присваивается список антецедентов, переменной x_{11} - вхождение операнда консеквента с номером x_8 . Проверяется, что x_{11} - описатель "отображение". Переменной x_{12} присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x_{13} присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная x .

Внутри последнего операнда описателя x_{11} выбирается вхождение x_{14} символа x_{13} . Переменной x_{15} присваивается вхождение, операндом которого служит x_{14} . В нашем примере x_{15} - вхождение выражения " x^{bj-1} ". Проверяется, что число операндов вхождения x_{15} равно 2. Переменной x_{16} присваивается вхождение операнда вхождения x_{15} , отличного от x_{14} , и переменной x_{17} - подтерм x_{16} . В нашем примере x_{17} имеет вид " $bj - 1$ ". Проверяется, что переменная x_{13} не входит в терм x_{17} и что этот терм неоднобуквенный. Переменной x_{18} присваивается список параметров терма x_{17} . В этом списке выбирается переменная x_{19} , имеющая единственное вхождение в описатель x_{11} . В нашем примере - переменная b . Переменной x_{20} присваивается символ по вхождению x_{15} . В нашем примере - символ "степень". Справочник поиска теорем "констэкв" определяет по символу x_{20} указанный выше протокол. Переменной x_{23} присваивается первый операнд протокола. В нашем примере - " a^b ". Переменной x_{24} присваивается список параметров терма x_{23} .

Вводится пустой накопитель x_{25} . Для его заполнения просматриваются вхождения x_{26} символа x_{20} в исходную теорему. Переменной x_{27} присваивается подтерм x_{26} . Если x_{27} - результат применения некоторой подстановки в терм x_{23} вместо переменных x_{24} , то переменной x_{29} присваивается результат применения этой подстановки ко второму операнду протокола. Если параметры утверждения x_{29} включаются в список x_{18} , то конъюнктивные члены этого утверждения добавляются к списку x_{25} .

По завершении заполнения списка x_{25} все переменные начиная с x_{26} снова оказываются не определены. В нашем примере x_{25} состоит из утверждение " $(b - 1) - \text{целое}$ ", " j -целое", " $(bj - 1) - \text{целое}$ ".

Выбирается переменная x_{26} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная f . Переменной x_{27} присваивается результат добавления к списку x_{25} утверждения "равно($x_{26} x_{17}$)". Список антецедентов исходной теоремы разбивается на подсписок x_{28} утверждений, содержащих переменную x_{19} , и подсписок x_{29} остальных утверждений. К списку x_{27} добавляются все утверждения набора x_{28} , заголовок которых отличен от заголовка консеквента исходной теоремы. Решается задача на описание с посылками x_{29} и условиями x_{27} .

Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x19", "упростить", "равно". В нашем примере посылки суть " $\neg(j = 0)$ ", " j - число". Условия суть " $f = bj - 1$ ", " $(b-1)$ - целое", " j - целое", " $(bj-1)$ - целое". Неизвестная - b .

Ответ присваивается переменной x32. В нашем примере он имеет вид " $b = (f + 1)/j \ \& \ j|(f + 1) \ \& \ j - \text{целое} \ \& \ f - \text{целое}$ ". Переменной x33 присваивается список конъюнктивных членов утверждения x32. В нем выбирается равенство x34 с переменной x19 в левой части. Переменной x35 присваивается правая часть равенства. В нашем примере - " $(f + 1)/j$ ". Переменной x36 присваивается список результатов подстановки выражения x35 вместо переменной x19 в антецеденты исходной теоремы. Переменной x37 присваивается результат такой же подстановки в ее консеквент. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x36 и отличные от x34 элементы списка x33. Консеквент импликации - утверждение x37. Эта импликация обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "степеньмнож" и регистрируется в списке вывода с характеристикой "упроцинтеграл". Допускается также характеристика "функперех"

4. Попытка упрощения не заключенного под символом "значение" подвыражения описателя "отображение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcej}(\neg(j = 0) \ \& \ j|(-b + 1) \ \& \ b - \text{целое} \ \& \ j - \text{целое} \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^{-1+(-b+1)/j}/e(l), l - \text{число}), c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(x^j)/(e(x^j)x^b), x - \text{число}), \lambda_d(c(d^j)/j, d - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{acefj}(\neg(j = 0) \ \& \ j|(f + 1) \ \& \ f - \text{целое} \ \& \ j - \text{целое} \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_l(a(l)l^{-1+(f+1)/j}/e(l), l - \text{число}), c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(x^j)x^f/e(x^j), x - \text{число}), \lambda_d(c(d^j)/j, d - \text{число})))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow b^{-a} = 1/b^a)$$

Характеристика - "функперех(1)".

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Проверяется наличие характеристики "упроцинтеграл". Переменной x8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Проверяется, что теорема - кванторная импликация, и переменной x9 присваивается входение ее консеквента. Переменной x10 присваивается список антецедентов, переменной x11 - входение операнда консеквента с номером x8. Проверяется, что x11 - описатель "отображение". Переменной x12 присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x13 присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная x .

Внутри последнего операнда описателя x11 выбирается вхождение x14 символа x13. Переменной x15 присваивается вхождение, операндом которого служит x14. В нашем примере x15 - вхождение выражения " x^{bj-1} ". Проверяется, что число операндов вхождения x15 равно 2. В нашем примере x15 - вхождение подтерма " x^f ". Переменной x16 присваивается вхождение операнда вхождения x15, отличного от x14.

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что по вхождению x16 расположена некоторая переменная x17, отличная от x13 и имеющая единственное вхождение в описатель x11. Проверяется, что вхождение x14 не расположено внутри подтерма с заголовком "значение". Переменной x18 присваивается символ по вхождению x15. В нашем примере - "степень". Справочник поиска теорем "упрощстанд" определяет по x18 указанную выше дополнительную теорему.

Оператор "тождвывод" определяет результат x23 преобразования вхождения x15 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этому оператору передавались опции "упрощинтеграл" и "фикс x13". Проверяется, что корневая связывающая приставка теоремы x23 не короче, чем у исходной теоремы. Теорема x23 обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "степенмнож" и регистрируется в списке вывода с характеристикой "упрощинтеграл". Допускается передача ей характеристики "функперех", определяемой характеристизатором.

Использование вспомогательной задачи на преобразование

1. Попытка замены с простым разрешением относительно заменяемой переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acg}(\neg(g-1=0) \ \& \ 0 < g \ \& \ g\text{-число} \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_x(b(g^x)g^x, x\text{-число}), c) \rightarrow \text{первообразная}(b, \lambda_d(c(\log_g d) \ln g, d\text{-число})))$$

из теоремы

$$\forall_{acg}(\neg(g-1=0) \ \& \ 0 < g \ \& \ g\text{-число} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(\log_g x)/x, x\text{-число}), \lambda_d(c(\log_g d) \ln g, d\text{-число})))$$

Характеристика - "функперех(1)".

Проверяется наличие характеристики "упрощинтеграл". Переменной x8 присваивается номер операнда из характеристики "функперех". В нашем примере - 1. Если теорема - кванторная импликация, то переменной x9 присваивается вхождение ее консеквента, иначе - ее корневое вхождение. Проверяется, что число операндов вхождения x9 равно 2. Переменной x10 присваивается вхождение операнда вхождения x9, имеющее номер x8. Проверяется, что x10 - описатель "отображение", и переменной x11 присваивается вхождение его последнего операнда. В нашем примере - вхождение выражения " $a(\log_g x)/x$ ". Внутри вхождения x11 выбирается вхождение x12 символа "значение", имеющее своим первым операндом некоторую переменную x13. В нашем примере - переменную a. Проверяется, что других вхождений символа "значение" внутри вхождения

x11 нет. Переменной x14 присваивается второй операнд подтерма x12. В нашем примере - " $\log_g x$ ".

Проверяется, что связывающая приставка описателя x10 одноэлементная, и переменной x16 присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная x . Проверяется, что переменная x16 имеет ровно одно вхождение в терм x14. Выбирается переменная x17, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Переменной x19 присваивается тип значения выражения x14. В нашем примере - символ "число". Переменной x20 присваивается одноэлементный набор, образованный равенством выражений x14 и x17. Переменной x21 присваивается список антецедентов исходной теоремы, переменной x22 - результат добавления к списку x21 утверждения " $x19(x17)$ ". В нашем примере - утверждения " b - число".

Решается задача на описание с посылками x22 и условиями x20. Цели задачи - "полный", "одз", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x16". В нашем примере посылки суть " $\neg(g - 1 = 0)$ ", " $0 < g$ ", " g - число", "первообразная(a, c)", " b - число". Условие - " $\log_g x = b$ ". Неизвестная - x . Ответ присваивается переменной x24. В нашем примере он имеет вид " $x = g^b$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x25 присваивается список его конъюнктивных членов. В этом списке находится равенство x26 с переменной x16 в левой части. Переменной x27 присваивается правая часть равенства. Проверяется, что оценка сложности выражения x27 меньше оценки сложности выражения x14.

Выбираются переменные X, Y , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные b, e . Переменной x31 присваивается выражение "значение($X, x16$)", переменной x32 - равенство результата замены вхождения x12 в подтерм x11 на переменную Y выражению x31. В нашем примере x32 имеет вид " $e/x = b(x)$ ". Переменной x33 присваивается символ по вхождению x11. В нашем примере - "дробь". Определяется тип T значения выражений с заголовком x33. В нашем примере - "число". Переменной x35 присваивается результат добавления к списку x21 утверждения " $T(x31)$ ". В нашем примере - утверждения " $b(x)$ - число".

Решается задача на описание с посылками x35 и единственным условием x32. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "одз", "упростить", "неизвестные Y ". В нашем примере посылки суть " $\neg(g - 1 = 0)$ ", " $0 < g$ ", " g - число", "первообразная(a, c)", " $b(x)$ - число". Условие - " $e/x = b(x)$ ". Неизвестная - e . Ответ задачи присваивается переменной x37. В нашем примере он имеет вид " $\neg(x = 0) \& x$ - число $\& e = xb(x)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Среди конъюнктивных членов этого ответа находится равенство x38 с переменной Y в левой части. Переменной x39 присваивается правая часть этого равенства. В нашем примере - " $xb(x)$ ". Переменной x40 присваивается результат подстановки переменной x16 вместо переменной x17 в терм x27. В нашем примере - " g^x ". Переменной x41 присваивается результат подстановки выражения x40 вместо переменной x16 в терм x39. В нашем примере - " $g^x b(g^x)$ ". Переменной x42 присваивается результат упрощения выражения x41 в его о.д.з. В нашем примере он совпадает с x41. Переменной x44 присваивается выражение "отображение($x16, x19(x16), x42$)". В нашем примере - " $\lambda_x(b(g^x)g^x, x$ - число)". Переменной x45 присваивается результат замены вхождения x10 в подтерм x9 на

переменную X . Переменной $x46$ присваивается список результатов подстановки выражения $x44$ вместо переменной $x13$ в утверждения списка $x21$. Создается импликация с антецедентами $x46$ и консеквентом $x45$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с характеристикой "контрольвывода($X, x16, x14$)". Допускается передача ей также характеристик с заголовками "функперех" и "упрощинтеграл".

3.134 Характеристика "функполе"

Характеристикой "функполе" снабжаются теоремы, у которых заголовки самых сложных подтермов антецедента и консеквента совпадают. Консеквент имеет единственный самый сложный подтерм, причем этот подтерм содержит описатель "отображение". Антецеденты не содержат описателя "отображение".

Обобщение теоремы

1. Попытка перехода к новой функциональной переменной для упрощения описателя "отображение" в консеквенте. Случай упрощения антецедента, указывающего тип значения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{adfi}(\text{Dom}(d) = \text{Dom}(f) \ \& \ \text{предел}(f, i, a) = \text{неопред} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{предел}(d, i, a) - \text{число} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(d, a, i) \ \& \ \text{Локопред}(f, a, i) \rightarrow \lim_{b \rightarrow a \setminus i}(d(b) + f(b)) = \text{неопред})$$

из теоремы

$$\forall_{aefi}(\text{Dom}(e) = \text{Dom}(f) \ \& \ \text{предел}(f, i, a) = \text{неопред} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{предел}(e, i, a) - \text{число} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(e, a, i) \ \& \ \text{Локопред}(f, a, i) \rightarrow \lim_{b \rightarrow a \setminus i}(-e(b) + f(b)) = \text{неопред})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abghi}(\text{Dom}(h) = g \ \& \ g \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ h - \text{функция} \ \& \ \text{Число}(a) \ \& \ \text{типпредела}(i) \ \& \ \text{Локопред}(h, a, i) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ \text{предел}(h, i, a) = b \rightarrow \lim_{e \rightarrow a \setminus i}(-h(e)) = -b)$$

Переменной $x8$ присваивается список антецедентов, переменной $x9$ - консеквент. Переменной $x10$ присваивается список подтермов консеквента, имеющих максимальную оценку сложности. Переменной $x11$ присваивается первый элемент этого списка. В нашем примере - " $\lim_{b \rightarrow a \setminus i}(-e(b) + f(b))$ ". Внутри терма $x11$ выбирается вхождение $x12$ символа "отображение". В нашем примере подтерм $x12$ имеет вид " $\lambda_b(-e(b) + f(b), b \in \text{Dom}(f))$ ". Переменной $x13$ присваивается вхождение последнего операнда описателя $x12$, Переменной $x14$ - его связывающая приставка. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной $x15$ присваивается ее элемент. В нашем примере $x15$ - переменная b . Переменной

x_{16} присваивается неоднобуквенный операнд вхождения x_{13} , не имеющий заголовка "значение". В нашем примере - операнд " $-e(b)$ ". Внутри вхождения x_{16} рассматривается вхождение x_{17} символа "значение". Переменной x_{18} присваивается переменная, являющаяся первым операндом вхождения x_{17} . В нашем примере - переменная e . Проверяется, что вторым операндом служит переменная x_{15} и что переменная x_{18} имеет единственное вхождение в консеквенте x_9 .

Выбираются переменные X, Y , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные c, d . Переменной x_{22} присваивается результат замены вхождения x_{17} в подтерм x_{16} на переменную X , переменной x_{23} - равенство переменной Y выражению x_{22} . В нашем примере x_{23} имеет вид " $d = -c$ ". Определяется тип T значения подтерма x_{16} . В нашем примере - "число". Переменной x_{25} присваивается утверждение " $T(Y)$ ". Решается задача на описание с посылками x_8 и условиями x_{23}, x_{25} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "равно", "неизвестные X ", "одз", "упростить". В нашем примере условия суть " $d = -c$ ", " d - число". Неизвестная - c . Ответ присваивается переменной x_{27} . В нашем примере он имеет вид " $c = -d \& d$ - число". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{29} присваивается список дизъюнктивных членов результата приведения утверждения x_{27} к виду д.н.ф. В этом списке выбирается элемент x_{29} . В нашем примере он совпадает с ответом x_{27} . Переменной x_{30} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{29} . В нем выбирается равенство x_{31} с переменной X в левой части. Переменной x_{32} присваивается выражение " $Y(x_{15})$ ", переменной x_{33} - результат подстановки выражения x_{32} вместо переменной x_{19} в правую часть равенства x_{31} . В нашем примере x_{33} имеет вид " $-d(b)$ ".

Переменной x_{34} присваивается предпоследний операнд описателя x_{12} . В нашем примере - " $b \in \text{Dom}(f)$ ". Переменной x_{35} присваивается результат подстановки переменной Y вместо переменной x_{18} в терм x_{34} . В нашем примере x_{35} совпадает с x_{34} . Переменной x_{36} присваивается выражение "отображение($x_{15} x_{35} x_{33}$)". Рассматривается вхождение x_{37} подтерма x_{16} в консеквент x_9 , и переменной x_{38} присваивается результат замены этого вхождения на выражение x_{32} . В нашем примере x_{38} имеет вид " $\lim_{b \rightarrow a} \lambda_i (d(b) + f(b)) = \text{неопред}$ ". Переменной x_{39} присваивается результат добавления к списку результатов подстановки выражения x_{36} вместо переменной x_{18} в утверждения набора x_8 утверждений "функция(Y)", "равно(область(Y) класс($x_{15} x_{35}$))".

Просматриваются утверждения x_{40} списка x_{30} , не содержащие переменной X . Определяется результат x_{41} подстановки в x_{40} выражения x_{32} вместо переменной Y , и к списку x_{39} добавляется кванторная импликация "длялюбого(x_{15} если x_{35} то x_{41})".

По окончании просмотра списка x_{30} все переменные начиная с x_{40} снова оказываются не определены. Переменной x_{40} присваивается результат обработки набора x_{39} процедурой "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x_{38} . В списке x_{40} выбирается утверждение x_{41} , содержащее описатель "отображение". В нашем примере - утверждение " $\lim_{b \rightarrow a} \lambda_i (-d(b))$ - число". Проверяется, что все остальные элементы списка x_{40} не содержат символа "отображение". Проверяется, что утверждение x_{41} имеет единственный подтерм максимальной сложности, и переменной x_{43} присваивается этот подтерм. В нашем

примере - подтерм " $\lim_{b \rightarrow a} (-d(b))$ ". Проверяется, что $x43$ содержит символ "отображение". Переменной $x44$ присваивается 0.

Если заголовок утверждения $x41$ - название типа объектов, причем $x43$ - его корневой операнд, то переменной $x44$ переписывается заголовок утверждения $x41$.

Проверяется, что $x44$ не равно 0. Переменной $x45$ присваивается заголовок терма $x43$. В нашем примере - символ "предел". В разделе, к которому относится символ $x45$, находится такая дополнительная теорема с характеристикой "отображение", консеквент $x50$ которой содержит символ $x45$. В нашем примере дополнительная теорема указана выше.

Проверяется, что консеквент дополнительной теоремы - равенство. Переменной $x51$ присваивается вхождение той части равенства, заголовок которой равен $x45$, переменной $x52$ - вхождение другой части равенства. Проверяется, что подтерм $x52$ имеет тип значения $x44$. Переменной $x54$ присваивается подтерм $x51$. В нашем примере - " $\lim_{e \rightarrow a} (-h(e))$ ". Переменной $x55$ присваивается список переменных терма $x54$. В нашем примере - " a, e, g, h, i ". Определяется подстановка S вместо переменных $x55$, переводящая $x54$ в корневой операнд утверждения $x41$. Переменной $x57$ присваивается список результатов применения этой подстановки к антецедентам дополнительной теоремы. Переменной $x58$ присваивается разность списков $x57$ и $x40$. Переменной $x59$ присваивается разность списка параметров утверждений набора $x58$ и списка параметров терма $x41$. Проверяется, что список $x59$ непуст. В нашем примере он состоит из переменной b .

Переменной $x60$ присваивается утверждение "существует($x59$ и($x58$))". Переменной $x62$ присваивается результат упрощения утверждения $x60$ относительно посылок $x40$ задачей на преобразование. В нашем примере он имеет вид "предел(d, i, a) - число & Локопред(d, a, i)". Переменной $x63$ присваивается объединение списка отличных от $x41$ элементов набора $x40$ со списком конъюнктивных членов утверждения $x62$. Затем создается импликация с антецедентами $x63$ и консеквентом $x38$. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

2. Попытка перехода к новой функциональной переменной для упрощения описателя "отображение" в консеквенте. Общий случай упрощаемого антецедента.

3.135 Характеристика "функции"

Характеристикой "функции" снабжаются теоремы, имеющие более одного антецедента вида "функция(f)", причем в теореме встречается терм вида "значение($f t$)".

Логические следствия теоремы

1. Подстановка тождественной функции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abh}(\forall_c(c \in (a, b) \rightarrow \text{дифференцируема}(h, c)) \& 0 < b - a \& \text{Dom}(h) \subseteq \mathbb{R} \& [a, b] \subseteq \text{Dom}(h) \& \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \& h - \text{функция} \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& \text{непрерывно}(h, [a, b]) \rightarrow \exists_c(\text{производная}(h, c) = (-h(b)+h(a))/(a-b) \& c \in (a, b)))$$

из теоремы

$$\forall_{abhi}(\forall_c(c \in (a, b) \rightarrow \neg(\text{mbox}(i, c) = 0)) \& \forall_c(c \in (a, b) \rightarrow \text{дифференцируема}(h, c)) \& \forall_c(c \in (a, b) \rightarrow \text{дифференцируема}(i, c)) \& \text{Dom}(h) = \text{Dom}(i) \& a < b \& \text{Dom}(i) \subseteq \mathbb{R} \& [a, b] \subseteq \text{Dom}(i) \& \text{Val}(h) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Val}(i) \subseteq \mathbb{R} \& h - \text{функция} \& i - \text{функция} \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& \text{непрерывно}(h, [a, b]) \& \text{непрерывно}(i, [a, b]) \rightarrow \exists_c(\text{производная}(h, c)/\text{производная}(i, c) = (-h(b) + h(a))/(-i(b) + i(a)) \& c \in (a, b)))$$

Переменной x8 присваивается вхождение антецедента с заголовком "функция", операндом которого служит некоторая переменная x9. В нашем примере x9 - переменная i . Оператор "подсттожд" присваивает переменной x10 результат подстановки в исходную теорему вместо f тождественной функции. Список антецедентов импликации x10 обрабатывается оператором "нормантецеденты" относительно параметров ее консеквента, после чего переменной x10 переприсваивается импликация с измененными антецедентами. Далее теорема x10 обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому разрешается использовать для упрощений уже имеющиеся в списке вывода теоремы. После упрощения конъюнктивные члены результата регистрируются в списке вывода.

2. Подстановка константной функции.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{beA}(A - \text{set} \& A \subseteq \text{Dom}(e) \& \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \& e - \text{функция} \& b - \text{число} \& \text{ограничена}(e, A) \rightarrow \text{ограничена}(\lambda_a(b + e(a), a \in \text{Dom}(e)), A))$$

из теоремы

$$\forall_{cdeA}(\text{Dom}(d) = c \& \text{Dom}(e) = c \& A - \text{set} \& \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \& \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \& d - \text{функция} \& e - \text{функция} \& \text{ограничена}(d, A) \& \text{ограничена}(e, A) \rightarrow \text{ограничена}(\lambda_a(d(a) + e(a), a \in c), A))$$

Аналогично предыдущему приему, но вместо переменной x9 оператором "подст-конст" подставляется константная функция.

3.136 Характеристика "числатом"

Характеристикой "числатом" снабжаются тождества, выражающие сложный числовой атом через более простые.

Логические следствия теоремы

1. Переход от объединения двух переменных к объединению классов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{def}(\forall_c(d(c) \& f(c) \rightarrow \neg e(c)) \& \text{конечное}(\text{set}_c(d(c) \& f(c))) \& \text{конечное}(\text{set}_c(e(c) \& f(c))) \rightarrow \text{card}(\text{set}_c((d(c) \vee e(c)) \& f(c))) = \text{card}(\text{set}_c(d(c) \& f(c))) + \text{card}(\text{set}_c(e(c) \& f(c))))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a\text{-set} \& b\text{-set} \& \text{непересек}(a, b) \& \text{конечное}(a) \& \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a \cup b) = \text{card}(a) + \text{card}(b))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - вхождение той части равенства в консеквенте, которая представляет собой числовой атом x13. Переменной x11 присваивается вхождение другой части равенства. Проверяется, что оценка сложности атома x13 равна оценке сложности консеквента. В нашем примере x13 - "card(a ∪ b)". Внутри терма x13 выбирается вхождение x14 символа "объединение". Проверяется, что число операндов вхождения x14 равно 2, причем эти операнды суть некоторые переменные x15 и x16. В нашем примере - переменные a, b.

Выбираются переменные A, B, C, D, не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные c, d, e, f. Переменной x18 присваивается выражение "класс(A и(или(B(A) C(A))D(A)))". В нашем примере это выражение имеет вид "set_c((d(c) ∨ e(c)) & f(c))". Переменной x19 присваивается выражение "класс(A и(B(A) D(A)))", переменной x20 - выражение "класс(A и(C(A) D(A)))". В нашем примере выражения x19 и x20 имеют вид "set_c(d(c) & f(c))", "set_c(e(c) & f(c))". Переменной x23 присваивается результат замены в консеквенте исходной теоремы подтерма x14 на выражение x22. Переменной x24 присваивается результат подстановки в утверждение x23 выражений x19 и x20 вместо переменных x15 и x16. Переменной x25 присваивается список результатов применения такой же подстановки к антецедентам теоремы. Переменной x26 присваивается результат обработки списка x25 оператором "нормантецеденты" относительно параметры утверждения x24. Создается импликация с антецедентами x26 и консеквентом x24. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "упрощэкв(N)", где N - направление замены, при котором операнд x10 является заменяемой частью.

2. Переход от объединения двух переменных к конечному списку.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{efg}(\forall_d(e(f(d), d) \rightarrow \neg(f(d) \in \{; g(d)\})) \& \text{конечное}(\text{set}_{cd}(c \in \{; g(d)\} \& e(c, d))) \& \text{конечное}(\text{set}_d(e(f(d), d))) \rightarrow \text{card}(\text{set}_{cd}(c \in \{f(d); g(d)\} \& e(c, d))) = \text{card}(\text{set}_{cd}(c \in \{; g(d)\} \& e(c, d))) + \text{card}(\text{set}_d(e(f(d), d))))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a\text{-set} \& b\text{-set} \& \text{непересек}(a, b) \& \text{конечное}(a) \& \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a \cup b) = \text{card}(a) + \text{card}(b))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - вхождение той части равенства в консеквенте, которая представляет собой числовой

атом x_{13} . Переменной x_{11} присваивается вхождение другой части равенства. Проверяется, что оценка сложности атома x_{13} равна оценке сложности консеквента. В нашем примере x_{13} - "card($a \cup b$)". Внутри терма x_{13} выбирается вхождение x_{14} символа "объединение". Проверяется, что число операндов вхождения x_{14} равно 2, причем эти операнды суть некоторые переменные x_{15} и x_{16} . В нашем примере - переменные a, b .

Дальше начинаются отличия. Выбираются переменные A, B, C, D, E , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные c, d, e, f, g . Переменной x_{18} присваивается выражение "класс(AB и(принадлежит(A перечень(префикс($D(B)$ $E(B)$))) $C(A, B)$))", переменной x_{19} - выражение "класс(AB и(равно(A $D(B)$) $C(A, B)$))", переменной x_{20} - выражение "класс(AB и(принадлежит(A перечень($E(B)$)) $C(A, B)$))". Переменной x_{23} присваивается результат замены в консекvente теоремы вхождения подтерма x_{14} на терм x_{18} . Переменной x_{24} присваивается результат подстановки в утверждение x_{23} выражений x_{19} и x_{20} вместо переменных x_{15} и x_{16} . Переменной x_{25} присваивается список результатов применения такой же подстановки к антецедентам теоремы. Создается импликация с антецедентами x_{25} и консеквентом x_{24} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "упрощэkv(N)", где N - направление замены, при котором операнд x_{10} является заменяемой частью.

3. Использование циклической симметрии числового атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDEF}(a \in \text{прямая}(CD) \ \& \ b \in \text{прямая}(AB) \ \& \ E \in \text{прямая}(BC) \ \& \\ F \in \text{прямая}(AD) \ \& \ \text{параллелограмм}(ABCD) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \\ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \\ \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{прямая}(AD) \perp \text{прямая}(EF) \rightarrow \\ l(AD)l(EF) = l(ab)l(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ F - \text{точка} \ \& \ \text{параллелограмм}(ABCD) \ \& \ \text{прямая}(EF) \perp \text{прямая}(AD) \ \& \\ E \in \text{прямая}(BC) \ \& \ F \in \text{прямая}(AD) \rightarrow S(\text{фигура}(ABCD)) = l(AD)l(EF))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - вхождение консеквента. Переменной x_{10} присваивается вхождение такой части равенства в консекvente, оценка сложности которой равна оценке сложности всего консеквента, переменной x_{11} - вхождение другой части равенства. Переменной x_{12} присваивается подтерм x_{10} . В нашем примере - " $S(\text{фигура}(ABCD))$ ". Переменной x_{13} присваивается невырожденный числовой атом, содержащийся в терме x_{12} . В нашем примере x_{13} совпадает с x_{12} . Проверяется, что все вхождения переменных в терм x_{12} заключены внутри некоторого вхождения подтерма x_{13} . Выбирается вхождение x_{14} в терм x_{12} неоднобуквенного подтерма, переменной x_{15} присваивается его заголовок. Проверяется, что либо подтерм x_{14} имеет вид "фигура(набор(...))", и тогда переменной x_{16} присваивается список операндов данного набора, либо справочник "циклупорядочение" усматривается, что операнды вхождения x_{14} допускают произвольные циклические перестановки

без изменения значения подтерма x_{14} , и тогда переменной x_{16} присваивается список операндов вхождения x_{14} . В нашем примере x_{14} - вхождение термина "фигура(набор($ABCD$)))". Проверяется, что x_{16} - список различных переменных. Переменной x_{17} присваивается список, полученный перенесением последнего термина набора x_{16} в начало. В нашем примере - " B, C, D, A ". Переменной x_{18} присваивается список переменных - заголовков термов списка x_{16} . В нашем примере - " A, B, C, D ". Переменной x_{19} присваивается список параметров антецедентов, не вошедших в список x_{18} . В нашем приеме " E, F ". Переменные списка x_{19} добавляются к концу списка x_{18} . В нашем примере получаем список " A, B, C, D, E, F ". Если список x_{19} непуст, то выбираются не входящие в исходную теорему переменные, число которых равно числу переменных списка x_{19} , и они добавляются в конец списка x_{17} . В нашем примере x_{17} приобретает вид " B, C, D, A, a, b ".

Переменной x_{20} присваивается список результатов подстановки термов x_{17} вместо переменных x_{18} в утверждения списка x_8 , переменной x_{21} - объединение списков x_8 и x_{20} . Переменной x_{22} присваивается результат подстановки термов x_{17} вместо переменных x_{18} в подтерм x_{11} . Переменной x_{23} присваивается равенство подтерма x_{11} выражению x_{22} . Затем создается импликация с антецедентами x_{21} и консеквентом x_{23} , которая обрабатывается оператором "норм-теорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Вывод импликации, усматривающей из равенства нечисловых объектов равенство их численных характеристик.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(d) \ \& \ ab = cd \rightarrow |a|_{\text{длина}(b)} = |c|_{\text{длина}(d)})$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(b) \rightarrow \text{длина}(ab) = |a|_{\text{длина}(b)})$$

Переменной x_8 присваивается вхождение консеквента, переменной x_9 - список антецедентов. Проверяется, что консеквент - равенство, и переменной x_{10} присваивается пара его частей. В этой паре выбирается выражение x_{11} , представляющее собой числовой атом. В нашем примере - " $\text{длина}(ab)$ ". Переменной x_{13} присваивается другой элемент пары x_{10} . В нашем примере - " $|a|_{\text{длина}(b)}$ ".

Проверяется, что теорема не имеет существенных антецедентов, причем число корневых операндов выражения x_{11} равно 1, а выражение x_{13} неповторно. Переменной x_{14} присваивается список числовых атомов термина x_{13} . В нашем примере - переменная a и выражение " $\text{длина}(b)$ ". Проверяется, что список x_{14} имеет хотя бы два элемента, причем каждый его элемент имеет ровно один параметр. Переменной x_{15} присваивается результат переобозначения переменных исходной теоремы на новые переменные. В нашем примере x_{15} имеет вид:

$$\forall_{cd}(c - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(d) \rightarrow \text{длина}(cd) = |c|_{\text{длина}(d)})$$

Переменной x_{16} присваивается список антецедентов теоремы x_{15} , переменной x_{18} - пара частей равенства в ее консеквенте. Выбирается элемент x_{19} этой

пары, представляющий собой числовой атом. В нашем примере - "длина(cd)". Переменной x_{21} присваивается другой элемент пары. Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения списков x_9 и x_{16} , а также равенство корневых операндов термов x_{11} и x_{19} . Консеквентом служит равенство выражений x_{13} и x_{21} . Эта импликация регистрируется в списке вывода.

5. Упрощение числового атома при отрицании единственного существенного антецедента и вывод тождества с условным выражением.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{целое} \ \& \ c - \text{целое} \rightarrow \text{card}(\{b, \dots, c\}) = (c - b + 1 \text{ при } 0 \leq c - b + 1, \text{ иначе } 0))$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{целое} \ \& \ c - \text{целое} \ \& \ 0 \leq c - b + 1 \rightarrow \text{card}(\{b, \dots, c\}) = c - b + 1)$$

Переменной x_8 присваивается входжение консеквента, переменной x_9 - список антецедентов. Проверяется, что теорема имеет единственный существенный антецедент x_{12} . В нашем примере - " $0 \leq c - b + 1$ ". Переменной x_{13} присваивается подтерм x_8 . Проверяется, что x_{12} не входит в о.д.з. утверждения x_{13} , причем это утверждение элементарно. Переменной x_{14} присваивается список невырожденных числовых атомов терма x_{13} . Проверяется, что этот список одноэлементный, и переменной x_{15} присваивается его элемент. В нашем примере x_{15} - выражение " $\text{card}(\{b, \dots, c\})$ ". Переменной x_{16} присваивается входжение той части равенства x_8 , которая равна x_{15} , переменной x_{17} - входжение другой части. Переменной x_{18} присваивается результат замены в списке x_9 утверждения x_{12} на его отрицание. Переменной x_{20} присваивается результат упрощения выражения x_{15} относительно посылок x_{15} . В нашем примере - 0. Проверяется, что x_{20} отлично от символа "отказ", элементарно и не содержит невырожденных числовых атомов. Переменной x_{21} присваивается выражение "вариант(x_{12} x_{17} x_{20})". Создается импликация, антецеденты которой суть отличные от x_{12} утверждения списка x_9 , а консеквент - равенство выражений x_{15} и x_{21} . Она регистрируется в списке вывода.

6. Усмотрение неравенства для двух числовых атомов из выражения для их разности.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq b \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a) \leq \text{card}(b))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(b) \ \& \ a \subseteq b \rightarrow \text{card}(b \setminus a) = \text{card}(b) - \text{card}(a))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Переменной x_{10} присваивается список числовых атомов консеквента. Проверяется, что их ровно 3. Переменной x_{12} присваивается входжение той части равенства x_9 , заголовком которой служит символ "плюс", переменной x_{11} - входжение другой части. Проверяется, что x_{12} - разность числовых атомов x_{15} и x_{16} списка x_{10} . Проверяется, что выражение x_{11} неотрицательно. Создается

импликация с антецедентами x_8 и консеквентом "меньшеилиравно(x_{16} x_{15})". Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Реализация антецедентов

1. Попытка реализации антецедента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ \text{конечное}(d) \rightarrow \text{card}(c \cup d) = \text{card}(c) + \text{card}(d \setminus c))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(b) \ \& \ a \subseteq b \rightarrow \text{card}(b \setminus a) = \text{card}(b) - \text{card}(a))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow b \subseteq b \cup c)$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Переменной x_{12} присваивается вхождение некоторого существенного антецедента. В нашем примере - антецедента " $a \subseteq b$ ". Если заголовок данного антецедента - символ "не", то переменной x_{13} присваивается вхождение первого операнда вхождения x_{12} , иначе - само вхождение x_{12} . Переменной x_{14} присваивается символ по вхождению x_{13} . В нашем примере - символ "содержится". Справочник поиска теорем "пример" определяет по x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Оператор "выводпосылки" определяет результат x_{17} последовательного применения дополнительной и исходной теорем при унификации вхождения x_{12} в консеквенте дополнительной теоремы. В нашем примере x_{17} имеет вид:

$$\forall_{cd}(c - \text{set} \ \& \ (c \cup d) - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(c \cup d) \ \& \ c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \rightarrow \text{card}((c \cup d) \setminus c) = \text{card}(c \cup d) - \text{card}(c))$$

Переменной x_{18} присваивается результат обработки теоремы x_{17} оператором "Спускоперандов". В нашем примере x_{18} совпадает с x_{17} . Переменной x_{19} присваивается консеквент теоремы x_{18} . Проверяется, что он элементарен. Переменной x_{20} присваивается список антецедентов теоремы x_{18} , переменной x_{21} - результат обработки этого списка оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{19} . Проверяется, что список x_{21} непуст и не содержит равенства, причем все его параметры являются параметрами терма x_{19} . Переменной x_{22} присваивается результат обработки утверждения x_{19} нормализаторами общей стандартизации относительно посылок x_{21} . В нашем примере x_{22} имеет вид " $\text{card}(d \setminus c) = -\text{card}(c) + \text{card}(c \cup d)$ ". Проверяется, что x_{22} - равенство с различными частями. Переменной x_{23} присваивается список невырожденных числовых атомов терма x_{22} . В нашем примере - три различных выражения для мощности множества. Переменной x_{24} присваивается оценка сложности терма x_{22} . В списке x_{23} выбирается элемент x_{25} , оценка сложности которого равна x_{24} . В нашем примере - " $\text{card}(c \cup d)$ ". Проверяется, что все параметры равенства x_{22} встречаются в выражении x_{25} .

Выбирается переменная x_{26} , не входящая в утверждения списка x_{21} и в равенство x_{22} . В нашем примере - переменная a . Переменной x_{28} присваивается на переменную x_{26} всех вхождений атома x_{25} в терм x_{22} . В нашем примере - " $\text{card}(d \setminus c) = -\text{card}(c) + a$ ". Решается задача на описание с посылками x_{21} и условиями "число(x_{26})", x_{28} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой-ответ", "упростить", "неизвестные x_{26} ". Ответ присваивается переменной x_{30} . В нашем примере он имеет вид " $a = \text{card}(c) + \text{card}(d \setminus c)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{31} присваивается результат подстановки в терм x_{30} выражения x_{25} вместо переменной x_{26} . Создается импликация с антецедентами x_{21} и консеквентом x_{31} . Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "Числатом" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "Числвыраз".

Использование дополнительного тождества для преобразования заменяемого выражения

1. Попытка свертки заменяемого выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(c \setminus d) \ \& \ \text{конечное}(d \setminus c) \rightarrow \text{card}(c \Delta d) = \text{card}(c \setminus d) + \text{card}(d \setminus c))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, b) \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a \cup b) = \text{card}(a) + \text{card}(b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow a \Delta b = a \setminus b \cup b \setminus a)$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Переменной x_{12} присваивается такая часть равенства в консеквенте, которая представляет собой числовой атом с оценкой сложности равной оценке сложности консеквента. В нашем примере x_{12} - " $\text{card}(a \cup b)$ ". Переменной x_{14} присваивается расположенное внутри этой части равенства вхождение неоднобуквенного подтерма, переменной x_{15} - заголовок этого подтерма. В нашем примере x_{14} - вхождение подтерма " $a \cup b$ ". Справочник поиска теорем "свертки" определяет по x_{15} указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x_{20} преобразования вхождения x_{14} в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Переменной x_{21} присваивается результат обработки теоремы x_{20} оператором "нормтеорема". Проверяется, что корневая связывающая приставка теоремы x_{21} имеет не более трех переменных, после чего эта теорема регистрируется в списке вывода.

2. Попытка использования префиксной рекурсии.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(\neg(c = \text{пустоеслово}) \ \& \ \{; c\} \subseteq \mathbb{R} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ c - \text{слово} \rightarrow \text{inf}(\{d; c\}) = \min(d, \text{inf}(\{; c\})))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{огрснизу}(a) \ \& \ \text{огрснизу}(b) \ \& \ a \subseteq \mathbb{R} \ \& \ b \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \neg(a = \emptyset) \ \& \ \neg(b = \emptyset) \rightarrow \inf(a \cup b) = \min(\inf(a), \inf(b)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{слово} \rightarrow \{; c\} \cup \{d\} = \{d; c\})$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x12 присваивается такая часть равенства в консеквенте, которая представляет собой числовой атом с оценкой сложности равной оценке сложности консеквента. В нашем примере x12 - " $\inf(a \cup b)$ ". Переменной x14 присваивается расположенное внутри этой части равенства вхождение неоднобуквенного подтерма, переменной x15 - заголовков этого подтерма. В нашем примере x14 - вхождение подтерма " $a \cup b$ ".

Дальше начинаются отличия. Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x20 преобразования вхождения x14 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Теорема x20 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Попытка сильного упрощения подвыражения упрощаемого атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Вектор}(d) \rightarrow \text{скалумнож}(b, d - a) = -\text{скалумнож}(b, a - d))$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(\text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Вектор}(c) \rightarrow \text{скалумнож}(b, -c) = -\text{скалумнож}(b, c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(b) \rightarrow -(a - b) = b - a)$$

Переменной x8 присваивается вхождение консеквента, переменной x9 - список антецедентов. В левой части равенства x8 выбирается вхождение x11 собственного неоднобуквенного подтерма. Переменной x12 присваивается заголовок этого подтерма. В нашем примере x11 - вхождение подтерма " $-c$ ", x12 - символ "минусвект". Справочники поиска теорем "Сокращение", "перестановки" определяют по x12 указанную выше дополнительную теорему. Рассматривается ее характеристика "нормализация(N)". Проверяется отсутствие характеристик с заголовками "обобщмножитель", "обобщслаемое". Оператор "тождвывод" определяет результат x17 преобразования вхождения x11 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому разрешается использовать для упрощений уже имеющиеся в списке вывода теоремы. Проверяется, что каждый антецедент, указывающий тип значения, имеет своим операндом переменную, и далее полученная теорема регистрируется в списке вывода.

4. Попытка использовать упрощающее тождество, выведенное в том же цикле.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cde}(\neg(d = 0) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ \text{Вектор}(e) \ \& \ \text{однонаправлены}(c, de) \rightarrow \text{скалумнож}(c, e) = \text{длина}(c)\text{длина}(e)\text{sg}(d))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ \text{однонаправлены}(a, b) \rightarrow \text{скалумнож}(a, b) = \text{длина}(a)\text{длина}(b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bcd}(c - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Вектор}(d) \rightarrow \text{скалумнож}(b, cd) = c \cdot \text{скалумнож}(b, d))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x11 - непустой список существенных антецедентов. В нашем примере - единственный антецедент "однонаправлены(a, b)". Переменной x12 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте, которая представляет собой некоторый невырожденный числовой атом x14. Переменной x13 присваивается вхождение другой части. Переменной x16 присваивается заголовок атома x14. В нашем примере x14 имеет вид "скалумнож(a, b)", x16 - символ "скалумнож". Переменной x17 присваивается подтерм x13. В нашем примере - "длина(a)длина(b)". Проверяется, что его оценка сложности меньше оценки сложности терма x14. В текущем списке вывода выбирается теорема с характеристикой "числатом". В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Переменной x20 присваивается список антецедентов дополнительной теоремы, переменной x24 - та часть равенства в консеквенте дополнительной теоремы, заголовок которой равен x16. Переменной x25 присваивается другая часть равенства. Проверяется, что она тоже содержит символ x16. Переменной x26 присваивается результат преобразования вхождения x12 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы, применяемой в направлении от части x24 к части x25. В нашем примере x26 имеет вид:

$$\forall_{cde}(\text{Вектор}(c) \ \& \ \text{Вектор}(de) \ \& \ \text{однонаправлены}(c, de) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(e) \rightarrow d \cdot \text{скалумнож}(c, e) = \text{длина}(c)\text{длина}(de))$$

Переменной x27 присваивается результата обработки теоремы x26 оператором "нормтеорема". В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_{cde}(d - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ \text{Вектор}(e) \ \& \ \text{однонаправлены}(c, de) \rightarrow d \cdot \text{скалумнож}(c, e) = |d|\text{длина}(c)\text{длина}(e))$$

Переменной x28 присваивается список антецедентов теоремы x27, переменной x30 - пара частей равенства в ее консеквенте. Переменной x31 присваивается элемент пары x30, содержащий символ x16, переменной x32 - другой элемент этой пары. Проверяется, что выражение x32 не содержит символа x16. В нашем примере x31 - выражение "d·скалумнож(c, e)", x32 - "|d|длина(c)длина(e)". Проверяется, что оценка сложности терма x32 меньше оценки сложности терма x31, причем заголовок терма x31 отличен от символа x16. Выбирается переменная x35, не входящая в теорему x27. В нашем примере - переменная a. Переменной

x36 присваивается результат замены вхождения подтерма x34 с заголовком x16 в терм x31 на переменную x35. В нашем примере x36 имеет вид "da". Проверяется, что выражение x36 не содержит символа x16.

Решается задача на описание с посылками x28 и условиями "равно(x36 x32)", "число(x35)". Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x35", "упростить". В нашем примере посылки суть "d – число", "Вектор(c)", "Вектор(e)", "однонаправлены(c, de)", условия - "da = |d|длина(c)длина(e)", "a – число". Неизвестная - a. Ответ задачи присваивается переменной x39. В нашем примере он имеет вид " $(\neg(d = 0) \ \& \ a = \text{длина}(c)\text{длина}(e)\text{sg}(d) \ \vee \ d = 0) \ \& \ a - \text{число}$ ".

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x40 присваивается результат подстановки в терм x39 выражения x34 вместо переменной x35. Затем создается импликация с антецедентами x28 и консеквентом x40. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительного тождества для преобразования заменяющего выражения

1. Попытка сильного упрощения подвыражения заменяющей части - наличие в ней числового атома, включающего все параметры.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{deC}(\neg(\text{вероятность}(d, C) = 0) \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ d \in \text{события}(C) \ \& \ e \in \text{события}(C) \ \& \ \text{непересек}(d, e) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{услвероятн}(e, d, C) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ \neg(\text{вероятность}(A, C) = 0) \ \& \ B - \text{события} \ \& \ A - \text{события} \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{услвероятн}(B, A, C) = \text{вероятность}(A \cap B, C) / \text{вероятность}(A, C))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{de}(d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(d, e) \rightarrow d \cap e = \emptyset)$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов. Переменной x11 присваивается правая часть равенства в консеквенте. Проверяется, что x11 имеет такой числовой атом, который содержит все параметры левой части равенства. Внутри правой части консеквента выбирается вхождение x12 неоднобуквенного подтерма, отличного от всей этой части. Переменной x13 присваивается заголовок этого подтерма. В нашем примере x12 - вхождение подтерма "A ∩ B". Справочник поиска теорем "поглощает" определяет по x13 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" получает результат x15 преобразования вхождения x14 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается процедурой "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка сильного упрощения подвыражения заменяющей части - отсутствие в ней числового атома, включающего все параметры.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{af}(f - \text{комплексное} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow \text{Re}(af) = a\text{Re}(f))$$

из теоремы

$$\forall_{cf}(c - \text{комплексное} \ \& \ f - \text{комплексное} \rightarrow \text{Re}(cf) = \text{Re}(c)\text{Re}(f) - \text{Im}(c)\text{Im}(f))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \text{Re}(a) = a)$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов. Переменной x11 присваивается правая часть равенства в консеквенте. Проверяется, что x11 не имеет такого числового атома, который содержал бы все параметры левой части равенства. Переменной x12 присваивается список всех невырожденных числовых атомов терма x11. В нашем примере - "Re(c)", "Re(f)", "Im(c)", "Im(f)". Проверяется, что длина списка x12 не меньше 2.

В правой части консеквента теоремы выбирается вхождение x13 отличного от этой части неоднобуквенного подтерма. Переменной x14 присваивается его заголовок. В нашем примере x13 - вхождение подтерма "Im(c)". Справочники поиска теорем "исклтерм", "числатом" определяют по x14 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x19 преобразования вхождения x13 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере x19 имеет вид:

$$\forall_{af}(a - \text{комплексное} \ \& \ f - \text{комплексное} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow \text{Re}(af) = \text{Re}(a)\text{Re}(f) - 0 \cdot \text{Im}(f))$$

Переменной x20 присваивается список антецедентов теоремы x19, переменной x21 - ее консеквент, имеющий заголовок "равно". Переменной x22 присваивается результат обработки левой части равенства x21 нормализаторами общей стандартизации относительно посылок x20. В нашем примере x22 имеет вид "Re(af)". Далее рассматриваются два случая:

- (а) x22 - числовой атом. В нашем примере имеет место этот случай. Переменной x24 присваивается правая часть равенства x21, переменной x25 - результат обработки оператором "нормантецеденты" списка x20 относительно параметров термов x22 и x24. Переменной x27 присваивается результат упрощения выражения x24 относительно посылок x20. В нашем примере - "aRe(f)". Переменной x28 присваивается список невырожденных числовых атомов выражения x27. Проверяется, что длина списка x28 меньше, чем уменьшенная на 2 длина списка x12. Затем создается импликация с антецедентами x25 и консеквентом "равно(x22 x27)", которая регистрируется в списке вывода.

(b) Проверяется, что x_{22} имеет ровно два корневых операнда, один из которых - числовой атом, а другой - некоторая переменная x_{27} . Проверяется, что корневая операция выражения x_{22} имеет единицу E по переменной x_{27} . К списку x_{20} добавляется равенство переменной x_{27} единице E . Переменной x_{31} присваивается результат упрощения правой части равенства x_{21} относительно посылок x_{20} . Переменной x_{32} присваивается список невырожденных числовых атомов выражения x_{31} . Проверяется, что длина списка x_{32} меньше, чем уменьшенная на 2 длина списка x_{12} . Затем создается импликация с антецедентами x_{20} и консеквентом "равно(x_{22} x_{31})". Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Рассмотрение вырожденного значения числового атома в заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(\neg(a = b) \ \& \ a \text{ — точка} \ \& \ b \text{ — точка} \rightarrow \text{скалумнож}(\text{вектор}(ba), \text{вектор}(ba)) = l(ab)^2)$$

из теоремы

$$\forall_{BCD}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ D \text{ — точка} \rightarrow \text{скалумнож}(\text{вектор}(CB), \text{вектор}(CD)) = \cos(\angle(BCD))l(BC)l(CD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{AB}(A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \angle(ABA) = 0)$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{12} - та часть равенства в консеквенте теоремы, которая является числовым атомом, причем оценка сложности его равна оценке сложности консеквента. В нашем примере x_{12} имеет вид "скалумнож(вектор(CB), вектор(CD))". Переменной x_{14} присваивается отличная от x_{12} часть равенства в консеквенте. Переменной x_{15} присваивается некоторый невырожденный числовой атом выражения x_{14} , переменной x_{16} - его заголовок. В нашем примере x_{15} имеет вид " $\angle(BCD)$ ". Справочник поиска теорем "числатом" определяет по символу x_{16} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{20} присваивается вхождение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, заголовок которой равен x_{16} , переменной x_{22} - другая часть равенства. В нашем примере x_{20} - вхождение выражения " $\angle(ABA)$ ", x_{22} - 0. Проверяется, что выражение x_{22} не имеет переменных, а дополнительная теорема не имеет существенных антецедентов. Внутри равной x_{14} части равенства в консеквенте исходной теоремы выбирается вхождение x_{23} выражения x_{15} . Оператор "тождвывод" находит результат x_{24} преобразования этого вхождения при помощи дополнительной теоремы. Теорема x_{24} обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Попытка свернуть выражение с числовым атомом в заменяемой части в виде одного числового атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ a \in \text{события}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}((b, a), c) \ \& \ b - \text{set} \ \& \\ b \in \text{события}(c) \ \& \ \text{верпространство}(c) \rightarrow \\ \text{вероятность}(a \cap (\text{элементы}(c) \setminus b), c) = \\ \text{вероятность}(\text{элементы}(c) \setminus b, c) \text{вероятность}(a, c))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \in \text{события}(c) \ \& \ b \in \text{события}(c) \ \& \\ \text{верпространство}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}((b, a), c) \rightarrow \text{вероятность}(a \setminus b, c) = \\ (-\text{вероятность} + 1) \text{вероятность}(a, c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{set} \ \& \ A \in \text{события}(B) \ \& \ \text{верпространство}(B) \rightarrow \\ \text{вероятность}(\text{элементы}(B) \setminus A, B) = 1 - \text{вероятность}(A, B))$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов, переменной x10 - пара частей равенства в консеквенте. Переменной x11 присваивается тот элемент пары x10, который представляет собой числовой атом, переменной x13 - другой элемент. В нашем примере x11 - выражение "вероятность(a \ b, c)", x13 - "(-вероятность + 1)вероятность(a, c)". Переменной x14 присваивается список числовых атомов выражения x13. Проверяется, что все они невырожденные. В нашем примере список x14 состоит из выражений "вероятность(b, c)", "вероятность(a, c)".

Проверяется, что длина списка x14 не менее 2. Выбирается элемент x15 списка x14. В нашем примере - "вероятность(b, c)". Проверяется, что терм x15 имеет единственное вхождение в выражение x13, и переменной x17 присваивается это вхождение. Проверяется, что x17 - операнд такого вхождения, внутри которого не расположены другие подтермы списка x14. Переменной x18 присваивается заголовок выражения x15. В нашем примере - "вероятность". В том разделе, к которому относится символ x18, находится дополнительная теорема с характеристикой "числатом". В нашем примере она указана выше. Переменной x25 присваивается пара частей равенства в консеквенте дополнительной теоремы. Выбирается та часть x26, которая содержит символ x18, но имеет заголовок, отличный от x18. В нашем примере x26 - "1 - вероятность(A, B)". Проверяется, что все переменные дополнительной теоремы суть параметры терма x26. Переменной x27 присваивается заголовок выражения x26. В нашем примере - символ "плюс". Переменной x28 присваивается вхождение надтерма вхождения x17, имеющего заголовок x27. В нашем примере - надтерм "-вероятность(b, c) + 1". Переменной x29 присваивается сам этот надтерм. Проверяется, что x29 не содержит отличных от x15 подвыражений списка x14.

Переменной x30 присваивается список параметров терма x26. В нашем примере - "A, B". Определяется подстановка S вместо переменных x30, переводящая терм x26 в терм x29. Выбирается переменная x32, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - "d". Переменной x33 присваивается элемент пары x25, отличный от x26. Переменной x34 присваивается результат применения к x33 подстановки S. В нашем примере - "вероятность(элементы(c) \ b, c)". Определяются такие вхождения x35 и x36 наименьших подтермов термов x15 и

x34, что они отличаются только внутри этих вхождений. В нашем примере x35 - вхождение переменной b , x36 - вхождение выражения "элементарного события(c) \ b ".

Переменной x37 присваивается символ по вхождению x35. Проверяется, что этот символ - переменная. Переменной x38 присваивается подтерм x36. Проверяется, что он неоднобуквенный и содержит переменную x37. Переменной x39 присваивается равенство выражений x32 и x38. Переменной x41 присваивается тип значения выражения x38. В нашем примере - "множество". Переменной x42 присваивается результат добавления к набору x9 утверждения "x41(x32)". В нашем примере - утверждения " d – множество". Решается задача на описание с посылками x42 и единственным условием x39. Цели задачи - "пример", "прямой ответ", "равно", "неизвестные x37". В нашем примере посылки задачи суть " a – set", " b – set", " $a \in \text{события}(c)$ ", " $b \in \text{события}(c)$ ", "верпространство(c)", "незавсобытия($(b, a), c$)", " d – множество". Условие - " $d = \text{элементарного события}(c) \setminus b$ ". Неизвестная - b .

Ответ присваивается переменной x44. В нашем примере он имеет вид " $b = \text{элементарного события}(c) \setminus d \ \& \ d \subseteq \text{элементарного события}(c)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x45 присваивается список конъюнктивных членов этого ответа. В нем выбирается равенство x46 с переменной x37 в левой части. Переменной x47 присваивается правая часть равенства.

Переменной x48 присваивается объединение списка x9 со списком отличных от x46 элементов набора x45. Переменной x49 присваивается результат подстановки выражения x47 вместо переменной x37 в выражение x11. Переменной x50 присваивается результат упрощения x49 относительно посылок x48. В нашем примере - "вероятность($a \cap d, c$)". Проверяется, что выражение x50 бесспорно. Переменной x52 присваивается результат подстановки в x50 выражения x38 вместо переменной x32. Переменной x53 присваивается объединение списка x9 со списком результатов применения подстановки S к антецедентам дополнительной теоремы. Переменной x54 присваивается список результатов подстановки выражения x38 вместо переменной x32 в утверждения набора x53. Переменной x55 присваивается результат замены вхождения x28 в терм x13 на выражение x34. Проверяется, что выражения x52 и x55 различны, и переменной x56 присваивается равенство этих выражений. Переменной x57 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты списка x54 относительно параметров утверждения x56. Затем создается импликация с антецедентами x57 и консеквентом x56, которая регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на описание для получения новой теоремы

1. Применение операции к операнду исходного числового атома, преобразующей заданным образом один из заменяющих числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(\text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Вектор}(c) \rightarrow \text{скалмнож}(b, -c) = -\text{скалмнож}(b, c))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(\text{Вектор}(a) \ \& \ \text{Вектор}(b) \rightarrow \text{скалмнож}(a, b) = \cos(\text{угол между}(a, b)) \cdot \text{длина}(a) \cdot \text{длина}(b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \rightarrow \text{длина}(-a) = \text{длина}(a))$$

Проверяется, что стартовая теорема списка вывода представляет собой определение. Переменной x_9 присваивается список антецедентов, переменной x_{10} - пара частей равенства в консеквенте. Переменной x_{11} присваивается тот элемент пары x_{10} , который представляет собой числовой атом, переменной x_{13} - другой элемент. В нашем примере x_{11} есть выражение "скалумнож(a, b)", x_{13} - "cos(уголмежду(a, b))длина(a)длина(b)". Переменной x_{14} присваивается список невырожденных числовых атомов выражения x_{13} . В этом списке выбирается выражение x_{15} . В нашем примере - "длина(a)". Проверяется, что выражение x_{15} имеет единственный параметр x_{17} . В нашем примере - a . Переменной x_{18} присваивается вхождение корневого операнда выражения x_{11} , равного x_{17} . Проверяется, что выражение x_{11} неповторно. Переменной x_{18} присваивается заголовок выражения x_{15} , и справочник поиска теорем "числатом" определяет по x_{19} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{22} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{22} имеет вид:

$$\forall_c(\text{Вектор}(c) \rightarrow \text{длина}(-c) = \text{длина}(c))$$

Переменной x_{25} присваивается одна из частей равенства в консеквенте теоремы x_{22} , переменной x_{26} - другая часть. В нашем примере x_{25} - левая часть, x_{26} - правая. Переменной x_{27} присваивается список антецедентов теоремы x_{22} . Проверяется, что x_{25} - числовой атом. Проверяется, что выражение x_{26} имеет единственный невырожденный числовой атом x_{30} , который получается из подтерма терма x_{25} удалением части операндов некоторых операций или заменой операции на ее операнд. В нашем примере x_{30} - "длина(c)". Определяется подстановка S вместо переменной x_{17} , переводящая выражение x_{15} в x_{25} . Переменной x_{32} присваивается объединение списка результатов применения подстановки S к утверждениям набора x_9 со списком x_{27} . Переменной x_{33} присваивается результат применения подстановки S к выражению x_{13} . В нашем примере - "cos(уголмежду($-c, b$))длина($-c$)длина(b)". Переменной x_{35} присваивается результат замены вхождений в терм x_{33} выражения x_{25} на выражение x_{26} . В нашем примере - "cos(уголмежду($-c, b$))длина(c)длина(b)".

Выбираются переменные X, Y , не входящие в утверждения набора x_{32} . В нашем примере - переменные a, d . Определяется подстановка R вместо переменной x_{17} , переводящая терм x_{15} в терм x_{30} . Переменной x_{38} присваивается результат применения подстановки R к выражению x_{13} . В нашем примере - "cos(уголмежду(c, b))длина(c)длина(b)".

Просматриваются результаты применения подстановки R в утверждения набора x_9 . Для каждого такого результата, не принадлежащего списку x_{32} , проверяется, что он является следствием утверждений x_{32} .

Переменной x_{39} присваивается результат добавления к списку x_{32} равенства переменной X выражению x_{38} . Решается задача на описание с посылками x_{39} и единственным условием "равно(Y, x_{35})". Цели задачи - "полный", "явное",

"прямойответ", "неизвестные Y ", "известно Z ", где Z - все параметры выражения x_{25} , не входящие в терм x_{30} , а также переменная X . В нашем примере посылки суть "Вектор($-c$)", "Вектор(b)", "Вектор(c)", " $a = \cos(\text{уголмежду}(c, b)) \cdot \text{длина}(c)\text{длина}(b)$ ". Условие - " $d = \cos(\text{уголмежду}(-c, b))\text{длина}(c)\text{длина}(b)$ ". Неизвестная - d , известные параметры - a .

Ответ задачи присваивается переменной x_{41} . В нашем примере он имеет вид " $d = -a$ ". Проверяется, что ответ представляет собой равенство с переменной Y в левой части. Переменной x_{42} присваивается его правая часть. Переменной x_{43} присваивается результат применения подстановки S к выражению x_{11} , переменной x_{44} - результат применения подстановки R к тому же выражению. Переменной x_{45} присваивается результат подстановки выражения x_{44} вместо переменной X в выражение x_{42} . Переменной x_{46} присваивается равенство выражений x_{43} и x_{45} . Затем создается импликация с антецедентами x_{32} и консеквентом x_{46} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка найти условие равенства числового атома нулю.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c(\text{Вектор}(c) \rightarrow \text{скалумнож}(c, c) = 0 \leftrightarrow c = \text{вектор}0)$$

из теоремы

$$\forall_c(\text{Вектор}(c) \rightarrow \text{скалумнож}(c, c) = (\text{длина}(c))^2)$$

Переменной x_9 присваивается список антецедентов, переменной x_{10} - пара частей равенства в консеквенте. Переменной x_{11} присваивается тот элемент пары x_{10} , который представляет собой числовой атом, переменной x_{13} - другой элемент. В нашем примере x_{11} - "скалумнож(c, c)", x_{13} - " $(\text{длина}(c))^2$ ". Проверяется отсутствие существенных антецедентов. Проверяется, что оценка сложности выражения x_{13} меньше оценки сложности выражения x_{11} . Переменной x_{14} присваивается список параметров выражения x_{13} . Проверяется, что этот список включает все переменные исходной теоремы. Переменной x_{15} присваивается результат добавления к списку x_9 равенства выражения x_{13} нулю. Решается задача на описание с единственной посылкой "истина" и условиями x_{15} . Цели задачи - "полный", "прямойответ", "попыткаспуска", "неизвестные x_{14} ". Ответ задачи присваивается переменной x_{17} . В нашем примере он имеет вид " $c = \text{вектор}0$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и не имеет связанных переменных. Проверяется, что терм x_{17} не содержит числовых атомов. Переменной x_{18} присваивается результат исключения утверждений набора x_9 из списка конъюнктивных членов утверждения x_{17} . Переменной x_{19} присваивается эквивалентность равенства нулю выражения x_{11} конъюнкции утверждений x_{18} . Создается импликация с антецедентами x_9 и консеквентом x_{19} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Попытка вывести неравенство для сравнения числового атома со специальным константным значением.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \& \neg(B = C) \& l(AC) = l(BC) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \rightarrow \angle(ABC) < \pi/2)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& A - \text{точка} \& \neg(B = C) \& l(AC) = l(BC) \rightarrow \angle(ABC) = \arccos(l(AB)/(2l(AC))))$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов, переменной x10 - пара частей равенства в консеквенте. Переменной x11 присваивается тот элемент пары x10, который представляет собой числовой атом, переменной x13 - другой элемент. В нашем примере x11- " $\angle(ABC)$ ", x13 - " $\arccos(l(AB)/(2l(AC)))$ ". Проверяется, что терм x13 имеет непустое множество параметров. Переменной x14 присваивается заголовок выражения x11. Справочник "сравнтермов" определяет по символу x14 список x15 константных термов, для которых целесообразно получение теорем, сравнивающих их с атомом x11. В нашем примере x15 содержит единственное выражение " $\pi/2$ ". Переменной x17 присваивается элемент списка x15. Поочередно рассматриваются четыре случая. В первом из них переменной x18 присваивается утверждение "меньше(x13 x17)", а переменной x19 - утверждение "меньше(x11 x17)". Во втором берется пара утверждений "меньше(x17 x13)" и "меньше(x17 x11)", в третьем - пара утверждений "меньшеилиравно(x17 x13)" и "меньшеилиравно(x17 x11)", в четвертом - "меньшеилиравно(x17 x13)" и "меньшеилиравно(x17 x11)". В нашем примере рассматривается первый случай. Решается задача на описание с посылками x9 и единственным условием x18. Цели задачи - "полный", "прямойответ", "попыткаспуска", "редакция", "неизвестные X", где X - параметры терма x13. Ответ присваивается переменной x21. В нашем примере этот ответ - константа "истина". Проверяется, что после обработки оператором "станд" термы x21 и x18 различаются. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x9 и утверждение x21, а консеквентом - утверждение x19. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Замена переменных в теореме

1. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком - случай единственного подвыражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \& \text{Вектор}(b) \rightarrow \text{длина}(ab) = |a|\text{длина}(b))$$

из теоремы

$$\forall_{aAB}(a - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \rightarrow \text{длина}(a\text{вектор}(AB)) = |a|\text{длина}(\text{вектор}(AB)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& a = \text{вектор}(AB)))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Переменной x12 присваивается та часть равенства в консеквенте, которая представляет собой числовой

атом. В нашем примере - "длина($a \cdot$ вектор(AB))". Проверяется, что оценка сложности этой части равна оценке сложности консеквента. Внутри выражения x_{12} выбирается вхождение x_{14} неоднобуквенного подтерма x_{15} . В нашем примере - "вектор(AB)". Проверяется, что выражение x_{15} атомарное (тип его значения отличен от типа значения хотя бы одного операнда), и переменной x_{16} присваивается список параметров терма x_{15} . Переменной x_{17} присваивается консеквент теоремы. Проверяется, что переменные списка x_{16} встречаются в консеквенте теоремы и ее существенных антецедентах только внутри вхождений терма x_{15} . Переменной x_{18} присваивается заголовок терма x_{15} . В нашем примере - "вектор". Переменной x_{20} присваивается тип значений выражения x_{15} . В нашем примере - "Вектор". Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по x_{20} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{23} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере он имеет вид:

$$\forall_b(\text{Вектор}(b) \leftrightarrow \exists_{cd}(c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ b = \text{вектор}(cd)))$$

Проверяется, что консеквент теоремы x_{23} - эквивалентность, заголовок левой части которой - символ x_{20} , а правой - квантор существования. Переменной x_{26} присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. Переменной x_{27} присваивается переменная, корневой операнд левой части эквивалентности. В нашем примере - переменная b . В списке x_{26} находится равенство x_{28} с переменной x_{27} в левой части и заголовком x_{18} правой части. Переменной x_{29} присваивается эта правая часть, переменной x_{30} - список ее параметров. В нашем примере x_{29} - "вектор(cd)", x_{30} - " c, d ". Проверяется, что список x_{30} включается в связывающую приставку квантора существования. Определяется подстановка S вместо переменных x_{30} , переводящая выражение x_{29} в x_{15} . Переменной x_{32} присваивается список результатов применения подстановки S к отличным от x_{28} элементам списка x_{26} .

Переменной x_{33} присваивается список всех утверждений списка x_8 , содержащих вхождения переменных списка x_{16} , не расположенные внутри подтермов, равных x_{15} . Переменной x_{34} присваивается остаток списка x_8 . В утверждениях списка x_{34} все вхождения подтерма x_{15} заменяются на переменную x_{27} . В нашем примере x_{34} не изменяется. Переменной x_{35} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_{28} . В нашем примере - " $b =$ вектор(AB)". Утверждение x_{35} добавляется к списку x_{33} .

Решается задача на описание с посылками x_{34} и условиями x_{33} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{16} ", "параметры x_{16} ", "исключ". Ответ присваивается переменной x_{37} . В нашем примере он имеет вид "Вектор(b)". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x_{38} присваивается объединение списка x_{34} со списком конъюнктивных членов утверждения x_{37} . Переменной x_{40} присваивается результат замены вхождений терма x_{15} в консеквент исходной теоремы на переменную x_{27} . Создается импликация с антецедентами x_{38} и консеквентом x_{40} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком - случай нескольких подвыражений.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{de}(\neg(d = \text{вектор}0) \ \& \ \neg(e = \text{вектор}0) \ \& \ \text{Вектор}(d) \ \& \ \text{Вектор}(e) \ \& \ \text{однаправлены}(d, e) \rightarrow \text{уголмежду}(d, e) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ a\text{—точка} \ \& \ b\text{—точка} \ \& \ c\text{—точка} \ \& \ \text{точкалуча}(a, b, c) \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(ac)) = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A\text{—точка} \ \& \ B\text{—точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Переменной x8 присваивается список антецедентов. Переменной x12 присваивается та часть равенства в консеквенте, которая представляет собой числовой атом. В нашем примере - "длина(a · вектор(AB))". Проверяется, что оценка сложности этой части равна оценке сложности консеквента. Внутри выражения x12 выбирается вхождение x14 неоднобуквенного подтерма x15. В нашем примере - "вектор(AB)". Проверяется, что выражение x15 атомарное (тип его значения отличен от типа значения хотя бы одного операнда), и переменной x16 присваивается список параметров терма x15. Переменной x17 присваивается консеквент теоремы.

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что существует переменная списка x16, встречающаяся в консеквенте теоремы либо в некотором существенном антецеденте только внутри вхождений терма x15. Переменной x18 присваивается заголовок терма x15. Переменной x20 присваивается тип значений выражения x15. В нашем примере - "Вектор". Переменной x21 присваивается список атомарных подтермов терма x12, имеющих тип x20. В нашем примере - "вектор(ab)" и "вектор(ac)". Проверяется, что список x21 непуст, и переменной x22 присваивается список параметров термов этого списка. В нашем примере - "a, b, c". Проверяется, что каждая переменная списка x22 встречается в консеквенте теоремы только внутри вхождения какого-либо терма списка x21.

Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по x20 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что консеквент дополнительной теоремы - эквивалентность, заголовок левой части которой - символ x20, а правой - квантор существования. Переменной x27 присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. Переменной x28 присваивается переменная, корневой операнд левой части эквивалентности. В нашем примере - переменная a. В списке x27 находится равенство x29 с переменной x28 в левой части и заголовком x18 правой части.

Переменной x30 присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x21. В нашем примере - "d, e". Переменной x33 присваивается результат замены вхождений термов списка x21 в терм x17 на соответствующие переменные набора x30. В нашем примере - "уголмежду(d, e)=0". Переменной x34 присваивается список параметров терма x33. Переменной x35 присваивается объединение списка утверждений набора

х8, параметры которых включаются в список х34, со списком утверждений вида "х20(X)" для переменных X списка х30. Переменной х36 присваивается объединение списка утверждений набора х8, параметры которых не включаются в список х34, со списком равенств выражений набора х21 соответствующим переменным набора х30. Переменной х37 присваивается список параметров утверждений х36, не являющихся параметрами утверждений х33.

Решается задача на описание с посылками х35 и условиями х36. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные х37", "параметры х37", "исключ". Ответ задачи присваивается переменной х39. В нашем примере он имеет вид " $\neg(e = \text{вектор}0) \ \& \ \neg(d = \text{вектор}0) \ \& \ \text{однонаправлены}(d, e)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной х40 присваивается объединение списка х35 со списком конъюнктивных членов утверждения х39. Создается импликация с антецедентами х40 и консеквентом х33. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Переменной х30 присваивается эта правая часть, переменной х30 - список ее параметров. В нашем примере х29 - "вектор(cd)", х30 - " c, d ". Проверяется, что список х30 включается в связывающую приставку квантора существования. Определяется подстановка S вместо переменных х30, переводящая выражение х29 в х15. Переменной х32 присваивается список результатов применения подстановки S к отличным от х28 элементам списка х26.

Обобщение теоремы

1. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aAB}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow \text{длина}(a \cdot \text{вектор}(AB)) = a \cdot \text{длина}(\text{вектор}(AB)))$$

из теоремы

$$\forall_{aAB}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ 0 \leq a \rightarrow \text{длина}(a \cdot \text{вектор}(AB)) = a \cdot \text{длина}(\text{вектор}(AB)))$$

Переменной х8 присваивается список антецедентов, переменной х9 - список утверждений, необходимых для сопровождения консеквента по о.д.з. В списке х8 находится отрицание равенства х10, не входящее в список х9. Проверяется, что в одной части равенства располагается некоторая переменная х13, а в другой - выражение х14, не содержащее переменной х13. В нашем примере х10 - утверждение " $\neg(A = B)$ ", х13 - переменная A . Проверяется, что утверждение х10 не используется для сопровождения по о.д.з. остальных антецедентов. Переменной х16 присваивается результат добавления к отличным от х10 утверждениям набора х8 утверждений, необходимых для сопровождения их по о.д.з. Переменной х17 присваивается результат добавления к х16 равенства - корневого операнда утверждения х10. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что консеквент теоремы - следствие утверждений х17. Задаче передаются комментарии "ложь", "теорвывод" и ссылка на список вывода, чтобы она могла

пользоваться теоремами этого списка. При помощи задачи на доказательство перепроверяется, что x_{10} не является следствием условий на о.д.з. прочих антецедентов и консеквента. Затем создается импликация, полученная из исходной теоремы отбрасыванием антецедента x_{10} . Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. Исходная теорема помечается символом "исключение".

2. Обобщение тождества перехода к более простым числовым атомам путем ввода неповторного дополнительного параметра операнда.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ b \text{ — комплексное} \ \& \ c \text{ — комплексное} \ \& \ a \text{ — число} \rightarrow \operatorname{Re}(c/(ab)) = \operatorname{Re}(c/b)/a)$$

из теоремы

$$\forall_{ac}(\neg(a = 0) \ \& \ c \text{ — комплексное} \ \& \ a \text{ — число} \rightarrow \operatorname{Re}(c/a) = \operatorname{Re}(c)/a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a \text{ — комплексное} \ \& \ b \text{ — комплексное} \ \& \ c \text{ — комплексное} \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ \neg(c = 0) \rightarrow (a/b)/c = a/(bc))$$

Программа приема почти дословно воспроизводит программы аналогичных приемов, рассмотренные ранее. Для удобства чтения повторим ее.

Проверяется, что длина теоремы не более 60 и что она не имеет характеристик с заголовками "обобщслагаемое", "Числпарам". Переменной x_9 присваивается левая часть консеквента, переменной x_{10} - правая. Внутри выражения x_9 выбирается вхождение x_{11} неоднобуквенного подтерма, имеющего ровно два корневых операнда. Переменной x_{12} присваивается символ по вхождению x_{11} . В нашем примере x_{11} - выражение " c/a ", x_{12} - символ "Дробь".

Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "нормализация(N)". В нашем примере N - "второйтерм". Переменной x_{18} присваивается заменяемое выражение дополнительной теоремы. Проверяется, что оно имеет заголовок x_{12} . Рассматривается корневой операнд x_{19} выражения x_{18} , представляющий собой двуместную операцию от переменных. В нашем случае - " a/b ". Проверяется, что эта операция имеет единицу по некоторому своему операнду. Переменной x_{21} присваивается первый операнд операции x_{19} , переменной x_{22} - второй. Проверяется, что x_{21} , x_{22} - различные переменные. В нашем случае x_{21} - a , x_{22} - b . Находится корневой операнд выражения x_{18} , представляющий собой переменную x_{24} . В нашем случае - переменную c . Переменной x_{25} присваивается вхождение операнда операции x_{11} , расположенного так же, как x_{19} в x_{18} . В коммутативном случае берется любой операнд. Для нашего примера x_{25} - вхождение переменной c . Проверяется, что по вхождению x_{25} расположена переменная, и эта переменная присваивается переменной x_{26} . Проверяется, что она имеет единственное вхождение в x_9 .

Переменной x_{27} присваивается другой операнд операции x_{11} . В нашем примере - a . Переменной x_{28} присваивается та из переменных x_{21} , x_{22} , по которой операция x_{19} имеет единицу, переменной x_{29} - другая из них. В нашем примере x_{28} - a , x_{29} - b . Переменной x_{30} присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. Проверяется, что он имеет заголовок x_{12} . Переменной x_{31} присваивается вхождение корневого операнда выражения x_{30} , расположенного так же, как операнд x_{19} операции x_{18} . В нашем примере x_{31} - вхождение переменной a . Проверяется, что по вхождению x_{31} расположена переменная x_{28} . Переменной x_{32} присваивается вхождение корневого операнда выражения x_{30} , отличное от x_{31} . Проверяется, что этот операнд неоднобуквенный и его заголовком служит коммутативный символ x_{33} . В нашем примере x_{32} имеет вид bc , x_{33} - символ "Умножение". Проверяется, что если подтерм x_{27} имеет заголовок x_{33} , то он не имеет своим корневым операндом переменную, неповторную в терме x_9 .

Выбирается новая переменная x_{34} . В нашем примере - b . Переменной x_{35} присваивается результат соединения операцией x_{33} термов x_{34} , x_{27} . Переменной x_{36} присваивается результат замены вхождения x_{27} в терм x_9 на терм x_{35} . В нашем случае он имеет вид $\text{Re}(c/(ba))$. Находится результат x_{37} подстановки в терм x_{19} переменных x_{26} и x_{34} вместо переменных x_{28} и x_{29} . В нашем случае - c/b . Переменной x_{38} присваивается результат подстановки терма x_{37} вместо переменной x_{26} в выражение x_{10} . В нашем примере - $\text{Re}(c/b)/a$. Переменной x_{40} присваивается набор результатов подстановки в antecedentes дополнительной теоремы выражений x_{26} , x_{34} , x_{27} вместо переменных x_{28} , x_{29} , x_{24} . В нашем примере имеем набор утверждений " c - комплексное", " b - комплексное", " a - комплексное", " $\neg(b = 0)$ ", " $\neg(a = 0)$ ".

Переменной x_{41} присваивается объединение списка x_{40} с результатами подстановки в antecedentes исходной теоремы терма x_{37} вместо переменной x_{26} . В нашем примере к указанным выше утверждениям добавляются утверждения " c/b - комплексное", " a - число".

Если x_{27} - не переменная и имеет своим заголовком символ, отличный от x_{33} , то находится результат x_{42} обработки терма x_{35} оператором "норм" относительно посылок x_{41} . Проверяется, что переменная x_{34} в терме x_{42} не является операндом ассоциативно-коммутативной операции, уже имеющей среди своих операндов и другую неповторную переменную. Затем формируется импликация с antecedентами x_{41} и равенством термов x_{36} , x_{38} в консеквенте. Она обрабатывается оператором "нормтеорема". Проверяется, что новая теорема имеет большую длину связывающей приставки, чем исходная, причем в ней отсутствуют "сдвоенные" переменные, допускающие замену на одну новую переменную. Выведенная теорема регистрируется в списке вывода с пометкой "обобщение".

3. Обобщение тождества перехода к более простым числовым атомам путем ввода неповторного внешнего параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abf}(\neg(b = 0) \ \& \ b \text{ - комплексное} \ \& \ f \text{ - комплексное} \ \& \ a \text{ - число} \rightarrow \text{Re}(af/b) = a\text{Re}(f/b))$$

из теоремы

$$\forall_{af}(f - \text{комплексное} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow \text{Re}(af) = a\text{Re}(f))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{комплексное} \ \& \ b - \text{комплексное} \ \& \ c - \text{комплексное} \ \& \ \neg(c = 0) \rightarrow a(b/c) = (ab)/c)$$

Начало программы приема воспроизводит начало программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Проверяется, что длина теоремы не более 60 и что она не имеет характеристик с заголовками "обобщслагаемое", "Числпарам". Переменной x9 присваивается левая часть консеквента, переменной x10 - правая. Внутри выражения x9 выбирается вхождение x11 неоднобуквенного подтерма, имеющего ровно два корневых операнда. Переменной x12 присваивается символ по вхождению x11. В нашем примере x11 - выражение "af", x12 - символ "Умножение".

Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику "нормализация(N)". В нашем примере N - "второйтерм". Переменной x18 присваивается заменяемое выражение дополнительной теоремы. Проверяется, что оно имеет заголовок x12. Рассматривается корневой операнд x19 выражения x18, представляющий собой двуместную операцию от переменных. В нашем случае - "b/c". Проверяется, что эта операция имеет единицу по некоторому своему операнду. Переменной x21 присваивается первый операнд операции x19, переменной x22 - второй. Проверяется, что x21, x22 - различные переменные. В нашем случае x21 - b, x22 - c. Находится корневой операнд выражения x18, представляющий собой переменную x24. В нашем случае - переменную c. Переменной x25 присваивается вхождение операнда операции x11, расположенного так же, как x19 в x18. В коммутативном случае берется любой операнд. Для нашего примера x25 - вхождение переменной f. Проверяется, что по вхождению x25 расположена переменная, и эта переменная присваивается переменной x26. Проверяется, что она имеет единственное вхождение в x9.

Переменной x27 присваивается другой операнд операции x11. В нашем примере - a. Переменной x28 присваивается та из переменных x21, x22, по которой операция x19 имеет единицу, переменной x29 - другая из них. В нашем примере x28 - b, x29 - c. Переменной x30 присваивается заменяющий терм дополнительной теоремы. В нашем примере - "(ab)/c".

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что заголовок терма x30 отличен от x12, причем число корневых операндов равно 2. Переменной x31 присваивается тот корневой операнд терма x30, который представляет собой операцию x12 от двух переменных. В нашем случае это ab. Проверяется, что одна из переменных - x28, причем в случае некоммутативного x12 она расположена под тем же номером, что операнд x19 операции x18. Другая переменная должна быть равна x24. Переменной x34 присваивается оставшийся корневой операнд терма x30. Проверяется, что он представляет собой переменную x29. Переменной x35 присваивается заголовок терма x30. В нашем случае - "Дробь".

Далее предпринимается проверка избыточности нового параметра. В нашем случае - проверка того, что вхождение x_{11} не является числителем дроби, знаменателем которой служит переменная, не имеющая других вхождений в терм x_9 .

После проверки избыточности выбирается не входящая в исходную теорему переменная x_{36} (в нашем случае - b). Формируется терм x_{37} , полученный соединением при помощи операции x_{35} подтерма x_{11} и новой переменной x_{36} . Номер операнда x_{36} - тот же, что номер операнда x_{34} в операции x_{30} . Для нашего примера имеем терм $(af)/b$. Переменной x_{38} присваивается результат замены вхождения x_{11} в терм x_{90} на терм x_{37} . Получается терм $\text{Re}((af)/b)$. Определяется результат x_{39} подстановки в подтерм x_{19} переменных x_{26} , x_{36} вместо переменных x_{28} , x_{29} . Получается терм f/b . Переменной x_{40} присваивается результат подстановки в терм x_{10} выражения x_{39} вместо переменной x_{26} . Получается терм $a\text{Re}(f/b)$. Переменной x_{42} присваивается набор результатов подстановки в antecedentes дополнительной теоремы переменных x_{26} , x_{36} и подтерма x_{27} вместо переменных x_{28} , x_{29} , x_{24} . Получаются утверждения " a - комплексное", " f - комплексное", " b - комплексное", " $\neg(b = 0)$ ". Переменной x_{43} присваивается объединение списка x_{42} с результатами подстановки выражения x_{39} вместо переменной x_{26} в antecedentes исходной теоремы.

Далее выражение x_{38} обрабатывается нормализаторами общей стандартизации относительно посылок x_{43} , чтобы снова проверить избыточность нового параметра: он не должен оказаться операндом ассоциативно-коммутативной операции, имеющей другую неповторную переменную своим операндом.

Наконец, формируется импликация с antecedentesми x_{43} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{38} и x_{40} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема". Проверяется, что полученная теорема не имеет antecedentesов вида " $P(t)$ ", где t - неоднобуквенное выражение. Затем она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

4. Подстановка единицы вместо дублирующего параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c (c - \text{комплексное} \rightarrow \text{Im}(ci) = \text{Re}(c))$$

из теоремы

$$\forall_{ac} (c - \text{комплексное} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow \text{Im}(aci) = a\text{Re}(c))$$

Переменной x_8 присваивается список antecedentesов теоремы, переменной x_9 - вхождение равенства в консеквенте. Внутри левой части равенства выбирается вхождение x_{11} неоднобуквенного подтерма. Переменной x_{12} присваивается его заголовок. В нашем примере x_{11} имеет вид " aci ", x_{12} - символ "Умножение". Проверяется, что символ x_{12} ассоциативен и коммутативен, причем число операндо вхождения x_{11} больше 2. Выбираются два операнда вхождения x_{11} , представляющие собой различные x_{14} и x_{16} . В нашем примере - переменные a, c . Проверяется, что каждая из переменных x_{14} , x_{16} встречается в единственном antecedенте и имеет единственное вхождение в левой части равенства. Переменной x_{20} присваивается antecedент, содержащий переменную

x14, переменной x21 - антецедент, содержащий переменную x16. Проверяется, что оба эти антецедента имеют длину 2. Переменной x22 присваивается заголовок антецедента x20, переменной x23 - заголовок антецедента x21. В нашем примере x22 - символ "число", x23 - символ "комплексное". Проверяется, что x22 и x23 - названия типов объектов, причем либо x22 равно x23, либо тип x22 является подтипом типа x23. Переменной x26 присваивается единица операции x12. В нашем примере - 1. Переменной x27 присваивается результат добавления к списку x8 равенства переменной x14 символу x26. Создается импликация с антецедентами x27 и тем же консеквентом, что у исходной теоремы. Переменной x28 присваивается результат обработки ее оператором "нормтеорема". Проверяется, что характеристизатор выдает характеристику "числатом" теоремы x28, после чего она регистрируется в списке вывода как обобщений исходной теоремы. Исходная теорема помечается символом "исключение".

Склейка теорем

1. Склейка двух тождеств, отличающихся альтернативными антецедентами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aAB}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \text{длина}(a \cdot \text{вектор}(AB)) = |a| \cdot \text{длина}(\text{вектор}(AB)))$$

из теоремы

$$\forall_{aAB}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ 0 \leq a \rightarrow \text{длина}(a \cdot \text{вектор}(AB)) = a \cdot \text{длина}(\text{вектор}(AB)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{aAB}(a - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a \leq 0 \rightarrow \text{длина}(a \cdot \text{вектор}(AB)) = -a \cdot \text{длина}(\text{вектор}(AB)))$$

Переменной x9 присваивается консеквент теоремы, переменной x10 - список ее антецедентов. В списке вывода находится дополнительная теорема x12, отличная от текущей, у которой набор антецедентов x14, консеквент x15 и связывающая приставка x17 имеют такую же длину, как у текущей теоремы. В нашем случае эта теорема указана выше. Переменной x16 присваивается связывающая приставка исходной теоремы. Переменной x18 присваивается левая часть равенства в консеквенте исходной теоремы. В нашем примере - "длина($a \cdot \text{вектор}(AB)$)". Проверяется, что эта часть - числовой атом. Переменной x19 присваивается левая часть консеквента дополнительной теоремы. В нашем примере она совпадает с x18. Проверяется, что параметры терма x18 включают все переменные списка x16, а параметры терма x19 - все переменные списка x17. Определяется подстановка S вместо переменных x17, переводящая терм x19 в терм x18. Переменной x21 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям x14, переменной x22 - результат применения подстановки S к правой части равенства x15.

Переменной x23 присваивается разность списков x21 и x10, переменной x25 - разность списков x10 и x21. Проверяется, что эти разности одноэлементные, и переменным x24, x26 присваиваются их элементы. В нашем примере

x_{24} имеет вид " $a \leq 0$ ", x_{26} - вид " $0 \leq a$ ". Переменной x_{27} присваивается дизъюнкция утверждений x_{24} и x_{26} . Переменной x_{28} присваивается пересечение списков x_{10} и x_{21} . Переменной x_{29} присваивается результат обработки утверждения x_{27} нормализатором "нормили" относительно посылок x_{28} . В нашем примере x_{29} имеет вид " a - число". Проверяется, что утверждение x_{29} элементарно. Переменной x_{30} присваивается результат добавления его к списку x_{28} . Переменной x_{31} присваивается выражение "вариант($x_{26} T x_{22}$)", где T - правая часть равенства x_8 . В нашем примере x_{31} имеет вид "(длина(вектор(AB))) при $0 \leq a$, иначе(длина(вектор(AB)))".

Переменной x_{33} присваивается результат упрощения выражения x_{31} относительно посылок x_{30} вспомогательной задачей на преобразование. В нашем примере - " $|a|$ длина(вектор(AB))". Проверяется, что x_{33} не содержит символа "вариант". Создается импликация с антецедентами x_{30} и равенством выражений x_{18} , x_{33} в консеквенте. Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. При этом исходная и дополнительная теоремы помечаются символом "исключение".

2. Склейка тождества, имеющего существенные посылки, с несколькими тождествами для частных случаев.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{adC}(\neg(a = C) \ \& \ \neg(d = C) \ \& \ a \text{ - точка} \ \& \ d \text{ - точка} \ \& \ C \text{ - точка} \rightarrow \text{уголмежду(вектор}(aC), \text{вектор}(dC)) = \angle(aCd))$$

из теоремы

$$\forall_{adC}(\neg(a = d) \ \& \ \neg(a = C) \ \& \ \neg(\text{прямая}(ad) = \text{прямая}(aC)) \ \& \ a \text{ - точка} \ \& \ d \text{ - точка} \ \& \ C \text{ - точка} \rightarrow \text{уголмежду(вектор}(aC), \text{вектор}(dC)) = \angle(aCd))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{acA}(\neg(a = c) \ \& \ l(aA) = l(cA) \ \& \ A \in \text{отрезок}(ac) \ \& \ a \text{ - точка} \ \& \ c \text{ - точка} \ \& \ A \text{ - точка} \rightarrow \text{уголмежду(вектор}(ca), \text{вектор}(Aa)) = 0)$$

$$\forall_{aAB}(\neg(a = A) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ a \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ a \text{ - точка} \ \& \ A \text{ - точка} \ \& \ B \text{ - точка} \rightarrow \text{уголмежду(вектор}(aA), \text{вектор}(BA)) = 0)$$

$$\forall_{acB}(\neg(a = B) \ \& \ \neg(c = B) \ \& \ B \in \text{отрезок}(ac) \ \& \ a \text{ - точка} \ \& \ c \text{ - точка} \ \& \ B \text{ - точка} \rightarrow \text{уголмежду(вектор}(aB), \text{вектор}(cB)) = \pi)$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Проверяется, что x_9 имеет единственный подтерм максимальной сложности, и этот подтерм присваивается переменной x_{11} . В нашем примере x_{11} имеет вид "уголмежду(вектор(aC), вектор(dC))". Проверяется, что x_{11} - числовой атом, являющийся одной из частей равенства в консеквенте. Переменной x_{12} присваивается входение этой части, переменной x_{13} - входение другой части. Переменной x_{14} присваивается список параметров выражения x_{11} . Проверяется, что он содержит все переменные исходной теоремы. Переменной x_{15} присваивается подтерм x_{15} . В нашем примере - " $\angle(aCd)$ ". Проверяется, что список

параметров терма x_{15} равен x_{14} . Переменной x_{16} присваивается список номеров существенных антецедентов исходной теоремы.

Для отбора дополнительных теорем и связанных с ними данных вводится пустой накопитель x_{17} . Просматриваются четверки x_{18} списка вывода, теорема x_{19} которых имеет характеристику "числатом" и отлична от исходной теоремы. Переменной x_{20} присваивается консеквент теоремы x_{19} . Переменной x_{23} присваивается та часть равенства x_{20} , заголовок которой совпадает с заголовком выражения x_{11} . Проверяется, что длины выражений x_{11} и x_{23} совпадают. Переменной x_{24} присваивается список параметров выражения x_{23} . Проверяется, что его длина равна длине списка x_{14} , причем в него входят все переменные теоремы x_{19} .

Переменной x_{25} присваивается результат переобозначения переменных теоремы x_{19} на переменные, не входящие в исходную теорему. Переменной x_{26} присваивается консеквент теоремы x_{25} , переменной x_{28} - та часть равенства x_{26} , которая расположена так же, как часть x_{23} равенство x_{20} . Переменной x_{29} присваивается входение другой части равенства x_{26} . Переменной x_{30} присваивается список параметров терма x_{28} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{30} , унифицирующая термы x_{28} и x_{11} . Проверяется, что подстановка S лишь переобозначает переменные, не отождествляя их. Переменной x_{32} присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_{25} . Переменной x_{33} присваивается результат применения подстановки S к подтерму x_{29} . При помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство выражений x_{33} и x_{15} - следствие утверждений x_{32} . Утверждения списка x_{32} обрабатываются оператором "станд". Проверяется, что в накопителе x_{17} нет пары, второй элемент которой включается в список x_{32} . Все пары списка x_{17} , вторые элементы которых включают список x_{32} , удаляются из накопителя x_{17} . Затем в накопитель x_{17} заносится пара (x_{18}, x_{32}) .

По завершении просмотра списка вывода все переменные, начиная с x_{18} , снова оказываются не определены. Переменной x_{18} присваивается список обработанных оператором "станд" утверждений набора x_8 . Если в списке x_{17} имеется пара, второй элемент которой включается в список x_{18} , то исходная теорема поменчается элементом "исключение", и применение приема обрывается. Иначе - проверяется, что список x_{17} непуст. Переменной x_{19} присваивается список теорем, извлекаемых из первых элементов пар набора x_{17} . Напомним, что эти элементы суть четверки списка вывода. В нашем примере x_{19} - указанные выше дополнительные теоремы. Переменной x_{20} присваивается дизъюнкция конъюнкции утверждений x_{18} и конъюнкций наборов утверждений, образующих вторые элементы пар наборов x_{17} . Переменной x_{21} присваивается результат обработки нормализатором "нормили" утверждения x_{20} относительно утверждений, задающих о.д.з. консеквента x_9 . В нашем примере x_{21} имеет вид " $\neg(a = C) \& \neg(d = C) \& a - \text{точка} \& d - \text{точка} \& C - \text{точка}$ ". Переменной x_{22} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{21} . Проверяется, что все они элементарны. Затем создается импликация с антецедентами x_{22} и консеквентом x_9 . Переменной x_{23} присваивается результат обработки ее оператором "нормтеорема". Все теоремы списка вывода, представленные в наборе x_{17} , помечаются элементом "исключение". Затем теорема x_{23} регистрируется в списке вывода.

Попытка использовать тождество типа сокращения для соединения двух тождеств типа "числатом"

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcfC}(\neg(\text{вероятность}(b, C) = 0) \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ f - \text{set} \ \& \ b \subseteq f \ \& \\ c \subseteq b \ \& \ b \in \text{события}(C) \ \& \ c \in \text{события}(C) \ \& \ f \in \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \\ \text{услвероятн}(b, f, C) \text{услвероятн}(c, b, C) = \text{услвероятн}(c, f, C))$$

из теоремы

$$\forall_{bcC}(\neg(\text{вероятность}(b, C) = 0) \ \& \ b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ c \subseteq b \ \& \ b \in \text{события}(C) \ \& \\ c \in \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{услвероятн}(c, b, C) = \\ \text{вероятность}(c, C) / \text{вероятность}(b, C))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow a/b \cdot b/c = a/c)$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов, переменной x10 - пара частей равенства в консеквенте. Выбирается элемент x11 пары x10, представляющий собой числовой атом. Переменной x3 присваивается другой элемент пары. В нашем примере x11 - "услвероятн(c, b, C)", x13 - "вероятность(c, C)/вероятность(b, C)". Переменной x14 присваивается заголовок выражения x13. В нашем примере - символ "дробь". Справочник поиска теорем "сокращдоби" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x17 имеет вид:

$$\forall_{ade}(a - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ \neg(d = 0) \rightarrow a/d \cdot d/e = a/e)$$

Переменной x21 присваивается заменяемая часть равенства в консеквенте теоремы x17. Проверяется, что число ее корневых операндов равно 2, и переменной x22 присваивается пара этих операндов. Выбирается элемент x23 данной пары, имеющий заголовок x14. В нашем примере - "a/d". Переменной x24 присваивается другой элемент пары, переменной x25 - его заголовок. В нашем примере x24 - "d/e", x25 - "дробь". В списке вывода находится теорема x27 с характеристикой "числатом", содержащая символ x25 в своем консеквенте. В нашем примере она совпадает с исходной теоремой. Переменной x28 присваивается результат переобозначения переменных теоремы x27 на переменные, не входящие в исходную теорему и в теорему x17. В нашем примере x28 имеет вид:

$$\forall_{fgh}(\neg(\text{вероятность}(f, h) = 0) \ \& \ f - \text{set} \ \& \ g - \text{set} \ \& \ g \subseteq f \ \& \ f \in \text{события}(h) \ \& \\ g \in \text{события}(h) \ \& \ \text{верпространство}(h) \rightarrow \text{услвероятн}(g, f, h) = \\ \text{вероятность}(g, h) / \text{вероятность}(f, h))$$

Переменной x32 присваивается та часть равенства в консеквенте теоремы x28, которая имеет заголовок x25. В нашем примере - "вероятность(g, h)/вероятность(f, h)". Переменной x31 присваивается входение другой части. Переменной x33 присваивается список параметров термов x13, x21 и x32. Определяется подстановка S вместо переменных x33, унифицирующая терм x13 с термом x23 и одновременно - терм x32 с термом x24. Переменной x35 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и теорем x17, x28. Переменной x36 присваивается результат применения подстановки S к заменяющему выражению теоремы

x17. В нашем примере x36 имеет вид "вероятность(c, C)/вероятность(f, C)". Определяется результат x38 упрощения выражения x36 относительно посылок x35 при помощи задачи на преобразование. В нашем примере - "услвероятн(c, f, C)". Проверяется, что x38 - числовой атом. Переменной x40 присваивается заголовок выражения x21. В нашем примере - "умножение". Переменной x41 присваивается результат соединения операцией x40 выражений x11 и подтерма x31, при котором операнд x11 имеет тот же номер, что элемент x23 пары x22. Переменной x42 присваивается результат применения к x41 подстановки S . Создается импликация с антецедентами x35, консеквентом которой служит равенство выражений x42 и x38. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование текущего тождества для варьирования дополнительной теоремы

1. Попытка вывести из дополнительной эквивалентности импликацию без числовых атомов в консеквенте.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(\neg(a = e) \ \& \ \neg(b = d) \ \& \ \neg(c = e) \ \& \ a \in \text{окружность}(bd) \ \& \ b \in \text{отрезок}(ac) \ \& \ c \in \text{окружность}(bd) \ \& \ e \in \text{окружность}(bd) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(ae) \perp \text{прямая}(ce))$$

из теоремы

$$\forall_{abcBE}(c - \text{точка} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ \neg(b = B) \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ \neg(a = E) \ \& \ \neg(c = E) \ \& \ a \in \text{окружность}(bB) \ \& \ b \in \text{отрезок}(ac) \ \& \ c \in \text{окружность}(bB) \ \& \ E \in \text{окружность}(bB) \ \& \ E - \text{точка} \rightarrow \angle(aEc) = \pi/2)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \angle(ABC) = \pi/2 \leftrightarrow \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x12 - та часть равенства в консеквенте, которая представляет собой числовой атом. В нашем примере - " $\angle(aEc)$ ". Переменной x14 присваивается заголовок выражения x12. Справочник поиска теорем "эквтермы" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. В консеквенте дополнительной теоремы рассматривается вхождение x19 символа x14. Оператор "тождвывод" определяет результат x20 преобразования вхождения x19 при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Использование равенства числового атома константе для упрощения теорем, относящихся к надклассу определяемого класса объектов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDEK}(K = (A, B, C, D) \ \& \ E \in \text{прямая}(AD) \ \& \ \text{точкалуча}(A, D, E) \ \& \ \text{прямоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(E, K) = (0, 0, l(AE)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDK}(K = (A, B, C, D) \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow l(AD) = 1)$$

и дополнительных теорем

$$\forall_{ABCDEK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C, D) \rightarrow \text{прямкоорд}(K) \leftrightarrow \\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AD) \ \& \\ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(AD) \ \& \ l(AB) = 1 \ \& \ l(AC) = 1 \ \& \ l(AD) = 1)$$

$$\forall_{ABCDEK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C, D) \ \& \ E \in \text{прямая}(AD) \ \& \\ \text{точкалуча}(A, D, E) \rightarrow \text{коорд}(E, K) = (0, 0, l(AE)/l(AD)))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x12 - та часть равенства в консеквенте, которая представляет собой числовой атом. Переменной x14 присваивается другая часть. В нашем примере x12 - " $l(AD)$ ", x14 - 1. Проверяется, что выражение x14 не имеет переменных. Проверяется, что стартовая теорема цикла вывода - определение некоторого терма x18. В нашем случае - терма " $\text{прямкоорд}(K)$ ". Переменной x19 присваивается заголовок терма x18. В списке x8 выбирается утверждение x20 с заголовком x19. В нашем примере - " $\text{прямкоорд}(K)$ ". Переменной x21 присваивается стартовая теорема цикла вывода. В нашем примере - указанная выше первая дополнительная теорема.

Переменной x22 присваивается результат переобозначения переменных исходной теоремы на переменные, не входящие в теорему x21. В нашем примере x22 имеет вид:

$$\forall_{abcde}(e = (a, b, c, d) \ \& \ \text{прямкоорд}(e) \rightarrow l(ad) = 1)$$

Переменной x23 присваивается список антецедентов теоремы x21, переменной x25 - вхождение той части эквивалентности в консеквенте теоремы x21, которая равна x18. Переменной x26 присваивается результат добавления утверждения x18 к списку x23. Переменной x27 присваивается список параметров утверждений x8. Оператор "подборзначений" определяет подстановку S вместо переменных x27, переводящую термы набора x8 в термы набора x26, с точностью до изменения порядка операндов в ассоциативно-коммутативных операциях. При этом определяется список x29 фактически использованных термов набора x26. Проверяется, что термы x29 содержат все параметры утверждений списка x23. Переменной x30 присваивается разность списков x26 и x29. В нашем примере x30 состоит из единственного утверждения " $\text{систкоорд}(K)$ ". Переменной x31 присваивается результат применения подстановки S к выражению x12. В нашем примере он совпадает с x12. Переменной x32 присваивается список параметров утверждений набора x23. В списке x30 выбирается терм x33. В нашем примере - " $\text{систкоорд}(K)$ ". Переменной x34 присваивается заголовок терма x33. Проверяется, что он отличен от символа "не". Переменной x35 присваивается название раздела, к которому относится символ x34. В нашем примере - "системыкоординат".

В разделе x35 находится теорема, содержащая символ x34 и заголовок терма x31. В нашем примере - указанная выше вторая дополнительная теорема. Переменной x40 присваивается ее список антецедентов. Оператор "подбор"

определяет подстановку R вместо переменных x_{32} , переводящую термины набора x_{23} в термины набора x_{40} , с точностью до изменения порядка операндов в ассоциативно-коммутативных операциях. При этом определяется список x_{42} фактически использованных термов набора x_{40} . Переменной x_{43} присваивается результат применения подстановки R к выражению x_{31} . В нашем примере - " $l(AD)$ ". Переменной x_{44} присваивается список вхождений обработанного оператором "станд" выражения x_{43} во вторую дополнительную теорему. Проверяется, что этот список непуст, причем все его элементы суть вхождения в консеквент. Переменной x_{45} присваивается результат замены вхождений x_{44} во вторую дополнительную теорему на терм x_{14} . Переменной x_{46} присваивается список результатов применения подстановки R к утверждениям набора x_{30} . Проверяется, что x_{46} - подсписок списка x_{40} . Переменной x_{47} присваивается результат применения подстановки R к терму x_{18} . В нашем примере он совпадает с x_{18} . Переменной x_{48} присваивается результат замены в списке x_{40} утверждения x_{46} на x_{47} . Создается импликация с антецедентами x_{48} , консеквент которой тот же, что у импликации x_{45} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Рассмотрение случая, когда равенство числового атома константе допускает простую переформулировку.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \subseteq b \ \& \ 0 \leq -\text{card}(b) + \text{card}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow a = b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(b) \ \& \ a \subseteq b \rightarrow \text{card}(b \setminus a) = \text{card}(b) - \text{card}(a))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \rightarrow \text{card}(a) = 0 \leftrightarrow a = \emptyset)$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{12} - та часть равенства в консеквенте, которая представляет собой числовой атом. Переменной x_{11} присваивается вхождение противоположной части. Проверяется, что оценка сложности выражения x_{12} совпадает с оценкой сложности консеквента. Переменной x_{14} присваивается заголовок атома x_{12} . В нашем примере x_{12} имеет вид " $\text{card}(b \setminus a)$ ". Справочник поиска теорем "числ" определяет по x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{17} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{17} имеет вид:

$$\forall_c(c - \text{set} \rightarrow \text{card}(c) = 0 \leftrightarrow c = \emptyset)$$

Переменной x_{21} присваивается заменяемая часть эквивалентности в консеквенте дополнительной теоремы относительно ее характеристики "упрощдн". В нашем примере - левая часть. Проверяется, что x_{21} - равенство некоторого выражения x_{24} константному выражению Q . В нашем примере x_{24} - " $\text{card}(c)$ ". Переменной x_{25} присваивается список антецедентов теоремы x_{17} , переменной x_{26} - список параметров выражения x_{24} . Проверяется, что все параметры утверждений x_{25} входят в список x_{26} . Определяется подстановка S вместо переменных

x26, переводящая терм x24 в терм x12. Переменной x28 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям x25. Переменной x29 присваивается результат применения подстановки S к заменяющей части консеквента теоремы x17. В нашем примере - " $b \setminus a = \emptyset$ ". Переменной x30 присваивается объединение списков x8, x28 и равенства подтерма x11 выражению Q . Переменной x31 присваивается результат обработки оператором "нормтеорема" импликации с антецедентами x30 и консеквентом x29. Проверяется, что в теореме x31 встречаются невырожденные числовые атомы. Затем она регистрируется в списке вывода.

4. Попытка использовать тождество, декомпозирующее числовой атом, для получения другого тождества, декомпозирующего числовой атом.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \in \text{события}(c) \ \& \ b \in \text{события}(c) \ \& \ \text{верпространство}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}((b, a), c) \rightarrow \text{вероятность}(a \setminus b, c) = (-\text{вероятность}(b, c) + 1)\text{вероятность}(a, c))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \in \text{события}(c) \ \& \ b \in \text{события}(c) \ \& \ \text{верпространство}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}((b, a), c) \rightarrow \text{вероятность}(a \cap b, c) = \text{вероятность}(a, c)\text{вероятность}(b, c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ A \in \text{события}(C) \ \& \ B \in \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{вероятность}(A \setminus B, C) = \text{вероятность}(A, C) - \text{вероятность}(A \cap B, C))$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов, переменной x10 - пара частей равенства в консеквенте. Переменной x11 присваивается та из них, которая представляет собой числовой атом, переменной x13 - другая. В нашем примере x11 - " $\text{вероятность}(a \cap b, c)$ ", переменная x13 - " $\text{вероятность}(a, c)\text{вероятность}(b, c)$ ". Переменной x14 присваивается список числовых атомов выражения x13. В нашем примере - " $\text{вероятность}(a, c)$ ", " $\text{вероятность}(b, c)$ ". Проверяется, что атомы x14 невырожденные, причем список их параметров совпадает со списком параметров атома x11. Проверяется, что атомы x14 образуют декомпозицию по переменным атома x11. Переменной x15 присваивается вхождение неоднобуквенного корневого операнда выражения x11. В нашем примере - операнда " $a \cap b$ ". Переменной x16 присваивается список параметров терма x15. Проверяется, что он имеет не менее двух элементов. Проверяется, что ни один из атомов x14 не содержит всех переменных списка x16. Переменной x17 присваивается заголовок подтерма x15. В нашем примере - "пересечение". В разделе, к которому относится заголовок P атома x11, находится теорема с характеристикой "числатом" или "числзнач". В нашем примере - указанная выше дополнительная теорема. Проверяется, что заголовком одной из частей равенства в консеквенте дополнительной теоремы служит символ P , причем этот символ входит также в другую часть равенства, не имеющую заголовка P . Переменной x24 присваивается вхождение части с заголовком P , переменной x25 - вхождение

другой части, переменной x26 - вхождение символа P в другую часть. В нашем примере x26 - вхождение выражения "вероятность($A \cap B, C$)". Проверяется, что вхождение x26 имеет операнд с заголовком x17.

Переменной x27 присваивается список антецедентов дополнительной теоремы, переменной x28 - подтерм x26. Переменной x29 присваивается список числовых атомов подтерма x25, отличных от x28. Проверяется, что этот список непуст и все его атомы невырожденные. В нашем примере x29 состоит из единственного атома "вероятность(A, C)". Проверяется, что все выражения списка x29 бесповторны, причем список параметров каждого из них - собственное подмножество параметров атома x28. Оператор "тождвывод" определяет результат x30 преобразования вхождения x26 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "числзнач" после чего регистрируется в списке вывода.

5. Использование тождества, уменьшающего оценку сложности, для упрощения заменяемой части тождества, уменьшающего количество невырожденных числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcB} (\neg(\text{вероятность}(a \cap b, c) = 0) \ \& \ a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ a \in \text{события}(c) \ \& \ b \in \text{события}(c) \ \& \ B \in \text{события}(c) \ \& \ \text{верпространство}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}((a, b), c) \rightarrow \text{вероятность}(a, c) \text{услвероятн}(B, a \cap b, c) = \text{услвероятн}(a \cap B, b, c))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC} (\neg(\text{вероятность}(B, C) = 0) \ \& \ A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ A \in \text{события}(C) \ \& \ B \in \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \& \ \text{незавсобытия}((A, B), C) \rightarrow \text{услвероятн}(A, B, C) = \text{вероятность}(A, C))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{deBC} (\neg(\text{вероятность}(d \cap e, C) = 0) \ \& \ d - \text{set} \ \& \ e - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ d \in \text{события}(C) \ \& \ e \in \text{события}(c) \ \& \ B \in \text{события}(c) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{услвероятн}(e, d, C) \text{услвероятн}(B, d \cap e, c) = \text{услвероятн}(e \cap B, d, c))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Проверяется, что x9 имеет единственный подтерм максимальной сложности, и этот подтерм присваивается переменной x11. В нашем примере подтерм x11 имеет вид "услвероятн(A, B, C)". Проверяется, что x11 - числовой атом, представляющий собой одну из частей равенства в консеквенте. Переменной x13 присваивается вхождение другой части. Проверяется, что она бесповторна и имеет невырожденный числовой атом. Переменной x14 присваивается заголовок атома x11. В нашем примере - "услвероятн". Проверяется, что стартовой теоремой списка вывода не является определение символа x14.

В разделе, к которому относится символ x14, находится указанная выше дополнительная теорема с характеристикой "уменьшсложн(N)". В заменяемой части равенства - консеквента дополнительной теоремы выбирается вхождение x24 символа x14. В нашем примере - вхождение подтерма "услвероятн(e, d, C)".

Оператор "тождвывод" определяет результат х26 преобразования вхождения х24 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

6. Использование тождества для преобразования теорем, содержащих заголовков упрощаемого числового атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcABCDEF}(\neg(a = 0) \& E \in \text{прямая}(BC) \& F \in \text{прямая}(BC) \& \text{параллелограмм}(ABCD) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& F - \text{точка} \& \text{прямая}(AD) \perp \text{прямая}(EF) \rightarrow c = b + al(CD)l(EF) \leftrightarrow S(\text{фигура}(ABCD)) = (c - b)/a)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEFA - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& F - \text{точка} \& \text{параллелограмм}(ABCD) \& \text{прямая}(EF) \perp \text{прямая}(AD) \& F \in \text{прямая}(AD) \rightarrow S(\text{фигура}(ABCD)) = l(AD)l(EF))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(a = 0) \rightarrow aS(d) + b = c \leftrightarrow S(d) = (c - b)/a)$$

Переменной х8 присваивается список антецедентов, переменной х9 - консеквент. Проверяется, что х9 имеет единственный подтерм максимальной сложности, и этот подтерм присваивается переменной х11. В нашем примере подтерм х11 имеет вид " $S(\text{фигура}(ABCD))$ ". Проверяется, что х11 - числовой атом, представляющий собой одну из частей равенства в консеквенте. Переменной х13 присваивается вхождение другой части. Проверяется, что она неповторна и имеет невырожденный числовой атом. Переменной х14 присваивается заголовок атома х11. В нашем примере - "площадь". Проверяется, что стартовой теоремой списка вывода не является определение символа х14.

В разделе, к которому относится символ х14, находится указанная выше дополнительная теорема, не имеющая характеристик с заголовками "числатом", "общнорм", "группировки". Проверяется, что в консеквенте дополнительной теоремы символ х14 встречается один либо два раза. Проверяется, что дополнительная теорема не имеет существенных антецедентов длины более 4, не используемых для сопровождения по о.д.з. Переменной х21 присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Проверяется, что среди них нет равенства переменной выражению, не содержащему этой переменной. Рассматривается вхождение х22 символа х14 в консеквент дополнительной теоремы. Оператор "тождвывод" находит результат х23 преобразования вхождения х22 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Создание протокола для разбора случаев при упрощении сложного числового атома

В качестве примера рассмотрим получение протокола

"подслучаи(упрощение($\text{card}\{d; c\}$), $d \in \{; c\} \vee \neg(d \in \{; c\})$)"

из теоремы

$$\forall_{cd}(\neg(d \in \{; c\}) \ \& \ c - \text{слово} \rightarrow \text{card}\{d; c\} = 1 + \text{card}\{; c\})$$

Напомним, что протокол "подслучаи($A_1A_2A_3$)" определяет разбор случаев по дизъюнкции A_2 для достижения цели A_1 . A_3 - список фильтров, уточняющих контекст. В качестве A_1 в нашем примере используется терм вида "упрощение(T)", задающий цель упрощения выражения T .

Переменной x_9 присваивается список антецедентов, переменной x_{10} - пара частей равенства в консеквенте. Переменной x_{11} присваивается та из них, которая представляет собой числовой атом, переменной x_{13} - другая. В нашем примере x_{11} - " $\text{card}\{d; c\}$ ", переменная x_{13} - " $1 + \text{card}\{; c\}$ ". Переменной x_{16} присваивается список всех числовых атомов терма x_{13} , оценка сложности которых равна оценке сложности терма x_{11} . Проверяется, что этот список одноэлементный, и переменной x_{17} присваивается его элемент. В нашем примере - выражение " $\text{card}\{; c\}$ ". Проверяется, что заголовки термов x_{17} и x_{11} равны, причем терм x_{17} короче терма x_{11} . Рассматривается элементарный существенный антецедент x_{20} . В нашем примере - " $\neg(d \in \{; c\})$ ". Переменной x_{21} присваивается его отрицание, переменной x_{22} - результат замены в списке x_9 антецедента x_{20} на x_{21} .

Определяется результат x_{24} упрощения выражения x_{11} относительно посылок x_{22} . В нашем примере - " $\text{card}\{; c\}$ ". Проверяется, что оценка сложности выражения x_{11} не меньше оценки сложности выражения x_{24} . Переменной x_{26} присваивается список числовых атомов выражения x_{24} , имеющих ту же оценку сложности, что выражение x_{11} . Проверяется, что все термы списка x_{26} имеют тот же заголовок, что выражение x_{11} , причем они короче, чем x_{11} . Создается протокол "подслучаи(упрощение(x_{11}) или($x_{21} \ x_{20}$))", который регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "протокол".

Усиление теоремы

1. Попытка исключить параметр, не входящий в заменяемое выражение - простейший случай.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcC}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(c = C) \ \& \ a \in \text{отрезок}(bc) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(cC)) = \angle(bcC))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdC}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ \neg(c = C) \ \& \ l(ab) = l(cd) \ \& \ a \in \text{прямая}(cd) \ \& \ a \in \text{отрезок}(bc) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{точкалуча}(c, d, b) \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(cC)) = \angle(dcC))$$

Переменной x_9 присваивается список антецедентов, переменной x_{10} - пара частей равенства в консеквенте. Переменной x_{11} присваивается та из них, которая представляет собой числовой атом, переменной x_{13} - другая. В нашем примере x_{11} - "уголмежду(вектор(ab), вектор(cC))", переменная x_{13} - " $\angle(dcC)$ ". Выбирается параметр x_{14} выражения x_{13} , не входящий в выражение x_{11} . В нашем примере - d . Выбирается переменная x_{15} , не входящая в исходную теорему. В

нашем примере - переменная e . Переменной x_{16} присваивается равенство переменной x_{15} выражению x_{13} . Решается задача на исследование, посылками которой служат утверждения набора x_9 и равенство x_{16} . Незвестными задачи служат все параметры ее посылок. Также имеются цели "нормтеорема" и "исключ x_{14} ".

После решения задачи в ее списке посылок находится равенство x_{20} , в одной из частей которого расположена переменная x_{15} . В нашем примере - равенство " $e = \angle(bcC)$ ". Переменной x_{23} присваивается другая часть равенства x_{20} . В нашем примере - " $\angle(bcC)$ ". Проверяется, что выражение x_{23} не содержит переменной x_{14} , а результат обработки его оператором "станд" отличается от результат обработки этим оператором выражения x_{11} . Список x_9 разбивается на подсписок x_{24} утверждений, содержащих переменную x_{14} , и подсписок x_{25} остальных утверждений. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что утверждение "существует(x_{14} и(x_{24}))" - следствие утверждений x_{25} . Затем создается импликация с антецедентами x_{25} и консеквентом "равно(x_{11} x_{23})". Она регистрируется в списке вывода.

2. Попытка исключить параметр, не входящий в заменяемое выражение - дизъюнктивный случай.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acB}(\neg(a = B) \ \& \ \neg(c = B) \ \& \ B \in \text{отрезок}(ac) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(aB), \text{вектор}(cB)) = \pi)$$

из теоремы

$$\forall_{abcB}(\neg(a = B) \ \& \ \neg(c = B) \ \& \ l(ab) = l(cB) \ \& \ a \in \text{прямая}(cB) \ \& \ a \in \text{отрезок}(bc) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{точкалуча}(c, B, b) \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(aB), \text{вектор}(cB)) = \angle(baB))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_9 присваивается список антецедентов, переменной x_{10} - пара частей равенства в консеквенте. Переменной x_{11} присваивается та из них, которая представляет собой числовой атом, переменной x_{13} - другая. В нашем примере x_{11} - "уголмежду(вектор(aB), вектор(cB))", переменная x_{13} - " $\angle(baB)$ ". Выбирается параметр x_{14} выражения x_{13} , не входящий в выражение x_{11} . В нашем примере - b . Выбирается переменная x_{15} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная d . Переменной x_{16} присваивается равенство переменной x_{15} выражению x_{13} . Решается задача на исследование, посылками которой служат утверждения набора x_9 и равенство x_{16} . Незвестными задачи служат все параметры ее посылок. Также имеются цели "нормтеорема" и "исключ x_{14} ".

После решения задачи начинаются отличия. В списке посылок задачи выбирается утверждение x_{20} с заголовком "или". В нашем примере это утверждение имеет вид " $\neg(a \in \text{интервал}(bB)) \ \& \ d = 0 \vee d = \pi \ \& \ a \in \text{отрезок}(bB)$ ". Переменной x_{21} присваивается список дизъюнктивных членов утверждения x_{20} . Проверяется, что среди конъюнктивных членов каждого утверждения списка x_{21}

имеет равенство переменной x_{15} некоторому выражению, не содержащему переменной x_{14} . Выбирается некоторый элемент x_{22} списка x_{21} . В нашем примере - " $d = \pi \ \& \ a \in \text{отрезок}(bB)$ ". Переменной x_{23} присваивается список его конъюнктивных членов. В списке x_{23} выбирается равенство x_{24} с переменной x_{15} в одной части и не содержащим переменной x_{14} выражением x_{27} в другой. Переменной x_{28} присваивается список всех утверждений набора x_9 , содержащих переменную x_{14} , переменной x_{29} - список всех утверждений набора x_{23} , содержащих переменную x_{14} . Переменной x_{30} присваивается объединение списков x_{28} и x_{29} . Переменной x_{31} присваивается объединение не вошедших в список x_{28} утверждений набора x_9 с отличными от x_{24} и не вошедшими в список x_{29} утверждениями набора x_{23} . Решается задача на описание с посылками x_{31} и условиями x_{30} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{14} ", "параметры x_{14} ", "исключ". В нашем примере посылки суть " $\neg(a = B)$ ", " $\neg(= B)$ ", " $a \in \text{прямая}(cB)$ ", " a - точка", " c - точка", " B - точка". Условия - " $l(ab) = l(cB)$ ", " $a \in \text{отрезок}(bc)$ ", " b - точка", "точкалуча(c, B, b)", " $a \in \text{отрезок}(bB)$ ". Несущественная неизвестная - b .

Ответ задачи присваивается переменной x_{33} . В нашем примере он имеет вид " $B \in \text{отрезок}(ac)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и создается импликация, антецедентами которой служат утверждения набора x_{31} и конъюнктивные члены утверждения x_{33} , а консеквентом - равенство выражений x_{11} и x_{27} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода. Исходная теорема помечается символом "исключение", однако обработка остальных элементов x_{22} списка x_{21} продолжается до исчерпания этого списка.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Использование равенства, фиксирующего значение определяемого атома, для нахождения самого сложного из определяющих атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aBCD}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ B \text{ - точка} \ \& \ C \text{ - точка} \ \& \ D \text{ - точка} \ \& \ \text{скалумнож}(\text{вектор}(CB), \text{вектор}(CD)) = a \rightarrow a = \cos(\angle(BCD))l(BC)l(CD))$$

из теоремы

$$\forall_{BCD}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ B \text{ - точка} \ \& \ C \text{ - точка} \ \& \ D \text{ - точка} \rightarrow \text{скалумнож}(\text{вектор}(CB), \text{вектор}(CD)) = \cos(\angle(BCD))l(BC)l(CD))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{12} - та из частей равенства в консеквенте, которая представляет собой числовой атом. Проверяется, что оценка его сложности равна оценке сложности консеквента. Переменной x_{14} присваивается другая часть равенства в консеквенте. В нашем примере x_{12} имеет вид "скалумнож(вектор(CB), вектор(CD))", x_{14} - вид " $\cos(\angle(BCD))l(BC)l(CD)$ ". Переменной x_{15} присваивается невырожденный числовой атом выражения x_{14} , имеющий наибольшую оценку сложности среди таких числовых атомов. В нашем примере - " $\angle(BCD)$ ". Проверяется, что оценка сложности атома x_{15} меньше оценки сложности атома x_{12} . Если

x14 неповторно, то проверяется, что x12 тоже неповторно. Выбирается переменная x16, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x17 присваивается результат добавления к списку x8 равенства выражений x12 и x16. Затем создается импликация с антецедентами x17, консеквентом которой служит равенство выражений x16 и x14. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "опратом(x15)".

Индуктивное обобщение теоремы

1. Переход от тождества для операции типа умножения к операции типа степени.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(\neg(c = 0) \ \& \ c - \text{комплексное} \ \& \ a - \text{целое} \rightarrow \arg(c^a) = \text{нормарг}(a \cdot \arg(c)))$$

из теоремы

$$\forall_{cf}(\neg(c = 0) \ \& \ \neg(f = 0) \ \& \ c - \text{комплексное} \ \& \ f - \text{комплексное} \rightarrow \arg(cf) = \text{нормарг}(\arg(c) + \arg(f)))$$

Переменной x9 присваивается список антецедентов, переменной x10 - пара частей равенства в консеквенте. Переменной x11 присваивается та из них, которая представляет собой числовой атом, переменной x13 - другая. В нашем примере x11 - " $\arg(cf)$ ", переменная x13 - " $\text{нормарг}(\arg(c) + \arg(f))$ ". Внутри выражения x11 выбирается вхождение x14 необнуквенного подтерма с двумя корневыми операндами. В нашем примере - подтерма " cf ". Проверяется, что операнды вхождения x14 суть некоторые переменные x15 и x16, отличающиеся друг от друга. В нашем примере - переменные c, f . Переменной x17 присваивается заголовок терма x14. В нашем примере - "Умножение". Справочник "степень" определяет по x17 пару x18 вида (F, m) , где F - символ, определяющий операцию типа "возведения в степень" для операции x17, m - номер операнда операции F , представляющего собой показатель степени. В нашем примере F - символ "Степень", $m = 2$.

Проверяется, что каждая из переменных x15 и x16 имеет единственное вхождение в терм x11. Переменной x19 присваивается результат замены вхождения x14 в терм x11 на переменную x15, переменной x20 - результат замены этого вхождения на переменную x16. В нашем примере x19 имеет вид " $\arg(c)$ ", x20 - вид " $\arg(f)$ ". Переменным x21 и x22 присваиваются, соответственно, вхождение терма x19 в терм x13 и вхождение терма x20 в терм x13. Проверяется, что x21 и x22 суть вхождения операндов одного и того же вхождения x24, имеющего ровно два операнда. Проверяется, что каждая из переменных x15 и x16 имеет единственное вхождение в терм x13. Переменной x25 присваивается символ по вхождению x24. В нашем примере - символ "плюс". Переменной x26 присваивается пара (G, k) , определяемая справочником "степень" для операции x25. В нашем примере G - символ "умножение", $k = 2$.

Переменной x29 присваивается список всех утверждений набора x9, содержащих переменную x15, переменной x30 - список всех утверждений набора x9, содержащих переменную x16. Проверяется, что списки x29 не пересекаются и имеют равные длины. Переменной x31 присваивается список обработанных

оператором "станд" результатов подстановки переменной x_{16} вместо переменной x_{15} в утверждения набора x_{29} . Проверяется, что этот список совпадает со списком обработанных оператором "станд" утверждений набора x_{30} .

Если вхождение x_{24} не корневое, то выбирается переменная x_{33} , не входящая в исходную теорему, и переменной x_{34} присваивается результат замены вхождения x_{14} в терм x_{11} на переменную x_{33} . В нашем примере - на переменную a . Переменной x_{35} присваивается результат замены вхождений вхождений x_{21} и x_{22} в терм x_{13} на термы x_{13} и x_{34} . В нашем примере x_{35} имеет вид "нормарг(нормарг(arg(c) + arg(f)) + arg(a)). Переменной x_{36} присваивается объединение списка x_9 со списком результатов подстановки переменной x_{33} вместо переменной x_{16} в утверждения набора x_{30} . Определяются результат x_{38} упрощения выражения x_{35} относительно посылок x_{36} и результат x_{13} замены вхождения x_{24} в терм x_{13} на терм " $x_{25}(T, x_{34})$ ", где T - подтерм x_{24} . Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" термов x_{38} и x_{39} совпадают. Если это не так, применение приема отменяется. В нашем примере терм x_{38} имеет вид "нормарг(arg(a) + arg(c) + arg(f))", x_{39} отличается от него изменением порядка слагаемых.

Если указанная проверка в случае некорневого вхождения x_{24} оказалась успешной, все переменные начиная с x_{33} снова оказываются не определены. Снова выбирается переменная x_{33} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{35} присваивается результат соединения операцией F переменных x_{33} и x_{15} , причем номер операнда x_{33} равен m . В нашем примере x_{35} имеет вид " c^a ". Переменной x_{36} присваивается результат соединения операцией G переменных x_{33} и выражения x_{19} , причем номер операнда x_{33} равен k . В нашем примере x_{36} имеет вид "arg(c) · a ". Переменной x_{37} присваивается равенство результата замены вхождения x_{14} в терм x_{11} на выражение x_{35} , результату замены вхождения x_{24} в терм x_{13} на выражение x_{36} .

Переменной x_{38} присваивается символ "натуральное". Если при помощи задачи на описание удастся усмотреть обратимость операции x_{17} , то символ x_{38} заменяется на "целое". Переменной x_{39} присваивается результат добавления к не вошедшим в список x_{30} утверждениям набора x_9 утверждения " $x_{38}(x_{33})$ ". Затем создается импликация с антецедентами x_{39} и консеквентом x_{37} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.137 Характеристика "числатомы"

Характеристикой "числатомы(N)" снабжаются тождества, выражающие терм с невырожденными числовыми атомами через численные параметры. N - направление замены.

Склейка теорем

1. Склейка двух теорем, отличающихся склеиваемыми антецедентами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcAK}(\text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{геом}(A) \rightarrow \text{крд}(A, K, 1) = a)$$

из теоремы

$$\forall_{abcAK}(\text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \ \& \ \text{Вектор}(A) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{крд}(A, K, 1) = a)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abcAK}(\text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{крд}(A, K, 1) = a)$$

Напомним, что "геом(x)" означает, что x - точка либо вектор трехмерного пространства.

Переменной x_{10} присваивается консеквент, переменной x_{11} - список антецедентов. В списке вывода выбирается отличая от исходной дополнительная теорема, имеющая ту же характеристику "числатомы(N)", что исходная теорема. Переменной x_{15} присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Проверяется, что длины списков x_{11} и x_{15} равны. Переменной x_{16} присваивается консеквент дополнительной теоремы. Проверяется, что утверждения x_{10} и x_{16} равны. Переменной x_{17} присваивается пересечение списков x_{11} и x_{15} . Проверяется, что он непусто. Переменной x_{18} присваивается разность списков x_{11} и x_{17} , переменной x_{19} - разность списков x_{15} и x_{17} . Проверяется, что обе эти разности одноэлементны. Переменной x_{20} присваивается дизъюнкция элементов этих разностей. В нашем примере - "Вектор(A) \vee A - точка". Переменной x_{21} присваивается результат обработки утверждения x_{20} оператором "нормли" относительно посылок x_{17} . В нашем примере - "геом(A)". Проверяется, что утверждение x_{21} элементарно. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x_{17} и утверждение x_{21} , а консеквентом - x_{10} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. Исходная и дополнительная теоремы помечаются символом "исключение".

Использование дополнительной теоремы для преобразования консеквента

1. Попытка упрощения заменяющего терма, преобразующего его в константу.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_d(d < 0 \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \text{arg}(d) = \pi)$$

из теоремы

$$\forall_{xy}(x < 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ 0 \leq y \rightarrow \text{arg}(x + yi) = \pi + \text{arctg}(y/x))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_d(\neg(d = 0) \ \& \ d - \text{число} \rightarrow 0/d = 0)$$

Переменной x_{10} присваивается входение заменяющей части теоремы. Внутри этого входения рассматривается входение x_{11} неоднобуквенного подтерма. В нашем примере - подтерма " y/x ". Переменной x_{12} присваивается заголовок этого подтерма. В нашем примере - "дробь". Справочник поиска теорем "констнабор" определяет по символу x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{18} присваивается входение заменяющей части дополнительной

теоремы. Проверяется, что эта часть представляет собой логический символ. Оператор "тождвывод" находит результат x19 преобразования вхождения x11 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Переменной x20 присваивается результат обработки импликации x19 оператором "нормтеорема". Проверяется, что консеквент теоремы x20 - равенство, одна из частей которого является константной. Затем теорема x20 регистрируется в списке вывода.

2. Попытка использовать параметрическое определение равенства числовых атомов с заданным заголовком.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bn}(b - \text{set} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \rightarrow n = \text{card}(b) \leftrightarrow \exists_f(l(f) = n \ \& \ \text{Val}(f) = b \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f) \ \& \ f - \text{слово}))$$

из теоремы

$$\forall_n(n - \text{целое} \ \& \ 0 \leq n \rightarrow \text{card}(\{1, \dots, n\}) = n)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \rightarrow \text{card}(a) = \text{card}(b) \leftrightarrow \exists_f(f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = a \ \& \ \text{Val}(f) = b \ \& \ \text{взаимнооднозначно}(f)))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть равенства в консеквенте, переменной x11 - ее заголовок. В нашем примере - символ "мощность". Справочник поиска теорем "определение" определяет по символу "равно" дополнительную теорему, у которой консеквент - эквивалентность для равенства двух выражений с заголовком x11. Переменной x15 присваивается вхождение этого равенства в дополнительную теорему, переменной x16 - вхождение другой части эквивалентности. Проверяется, что по вхождению x16 расположен квантор существования. Переменной x17 присваивается вхождение некоторого операнда вхождения x15. В нашем примере - вхождение выражения "card(a)". Оператор "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x17 в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.138 Характеристика "числвыраз"

Характеристикой "числвыраз(N)" снабжаются эквивалентности, переформулирующие нечисловое отношение через отношение для числовых атомов. N - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Извлечение из эквивалентности, переформулирующей нечисленное отношение в виде соотношения для числовых атомов, импликации для вывода численного соотношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \& \neg(B = C) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC) \rightarrow \angle(ABC) = \pi/2)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \neg(B = C) \& \neg(A = B) \rightarrow \angle(ABC) = \pi/2 \leftrightarrow \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть эквивалентности в консеквенте. Проверяется, что она элементарна. Переменной x11 присваивается заменяющая часть. Проверяется, что она является равенством. Переменной x12 присваивается список антецедентов, переменной x13 - результат добавления к списку x12 утверждения x10. Переменной x14 присваивается результат обработки списка x13 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x11. Создается импликация с антецедентами x14 и консеквентом x11. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Извлечение из эквивалентности, переформулирующей нечисленное отношение в виде равенства двух числовых атомов, импликации для вывода нечисленного отношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \& l(AB) = l(AC) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \rightarrow C \in \text{окружность}(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \rightarrow C \in \text{окружность}(AB) \leftrightarrow l(AB) = l(AC))$$

Переменной x10 присваивается заменяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x11 присваивается заменяющее утверждение. Проверяется, что оно является равенством двух числовых атомов. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Переменной x15 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка x12, пополненного утверждением x11. Обработка ведется относительно параметры утверждения x10. Затем создается импликация с антецедентами x15 и консеквентом x10. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование вспомогательной задачи на описание

1. Попытка альтернативной переформулировки заменяемого утверждения в терминах атомарных подвыражений заменяющего утверждения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = b) \& \neg(a = c) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(ac)) = 0 \leftrightarrow \text{однонаправлены}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(ac)))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \rightarrow \\ \text{уголмежду}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(ac)) = 0 \leftrightarrow \text{точкалуча}(a, b, c))$$

Переменной x10 присваивается заменяемое утверждение. Проверяется, что оно элементарно. Переменной x11 присваивается заменяющее утверждение. Проверяется, что оно является равенством двух числовых атомов. Переменной x12 присваивается список антецедентов. Внутри утверждения x11 выбирается неоднобуквенного подтерма x14. В нашем примере - подтерма "вектор(ab)". Проверяется, что выражение x14 атомарное. Переменной x15 присваивается его заголовок. Переменной x17 присваивается тип значений выражения x14. В нашем примере - "Вектор". Проверяется, что x17 отлично от символа "число". Переменной x18 присваивается список всех атомарных неоднобуквенных подвыражений утверждения x11, имеющих тип x17. Проверяется, что он непуст. В нашем примере этот список состоит из выражений "вектор(ab)", "вектор(ac)". Переменной x19 присваивается список параметров выражений x18. В нашем примере - a, b, c . Проверяется, что эти параметры встречаются в утверждении x11 только внутри вхождений выражений набора x18.

Переменной x20 присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему, длина которого равна длине списка x18. В нашем примере x20 состоит из переменных d, e . Переменной x21 присваивается объединение списка x12 со списком равенств выражений набора x18 соответствующим переменным набора x20. Переменной x23 присваивается список не вошедших в x19 параметров утверждения x10, пополненный переменными x20. В нашем примере x23 - d, e . Решается задача на описание с посылками x21 и единственным условием x10. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x19", "известно x23".

В нашем примере x21 состоит из утверждений " $\neg(a = b)$ ", " $\neg(a = c)$ ", " a - точка", " b - точка", " c - точка", " $\text{вектор}(ab) = d$ ", " $\text{вектор}(ac) = e$ ". Единственное условие - " $\text{точкалуча}(a, b, c)$ ". Неизвестные - a, b, c , известные параметры - d, e .

Ответ присваивается переменной x25. В нашем примере этот ответ имеет вид "однонаправлены(d, e)". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x26 присваивается результат подстановки в утверждение x25 выражений x18 вместо переменных x20. Проверяется, что после обработки оператором "станд" термы x26 и x11 различаются. Тогда создается импликация с антецедентами x12, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x11 и x26. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Замена переменных в теореме

1. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{de}(\neg(d = \text{вектор}0) \ \& \ \neg(e = \text{вектор}0) \ \& \ \text{Вектор}(d) \ \& \ \text{Вектор}(e) \rightarrow \\ \text{уголмежду}(d, e) = 0 \leftrightarrow \text{однонаправлены}(d, e))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ a \text{ — точка} \ \& \ b \text{ — точка} \ \& \ c \text{ — точка} \rightarrow \\ \text{уголмежду(вектор}(ab), \text{вектор}(ac)) = 0 \leftrightarrow \text{однонаправлены(вектор}(ab), \\ \text{вектор}(ac)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{10} - консеквент. Внутри терма x_{10} выбирается вхождение x_{11} неоднобуквенного атомарного подтерма x_{12} . В нашем примере - "вектор(ab)". Переменной x_{13} присваивается заголовок выражения x_{12} , переменной x_{15} - тип его значения. В нашем примере x_{15} - символ "Вектор". Переменной x_{16} присваивается список всех атомарных неоднобуквенных подвыражений утверждения x_{10} , имеющих тип x_{15} . Проверяется, что он непуст. В нашем примере этот список состоит из выражений "вектор(ab)", "вектор(ac)". Переменной x_{17} присваивается список параметров выражений x_{16} . В нашем примере - a, b, c . Проверяется, что эти параметры встречаются в утверждении x_{10} только внутри вхождений выражений набора x_{16} .

Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по символу x_{15} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{20} присваивается вхождение эквивалентности в ее консеквенте. Проверяется, что заголовком левой части данной эквивалентности служит символ x_{15} , а заголовком правой - квантор существования. Переменной x_{21} присваивается вхождение этого квантора, переменной x_{22} - список конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Переменной x_{23} присваивается переменная - корневой операнд левой части эквивалентности. В нашем примере - переменная a . В списке x_{22} находится равенство x_{24} с переменной x_{23} в левой части и заголовком x_{13} правой части. Переменной x_{25} присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x_{16} . В нашем примере - список d, e . Переменной x_{28} присваивается результат замены в утверждении x_{10} подтермов набора x_{16} на соответствующие переменные x_{25} . В нашем примере x_{28} имеет вид "уголмежду(d, e) = 0 \leftrightarrow однонаправлены(d, e)". Переменной x_{29} присваивается список параметров терма x_{29} . Переменной x_{30} присваивается объединение списка не содержащих переменных x_{17} утверждений набора x_8 со списком утверждений вида " $x_{15}(X)$ " для всевозможных переменных X набора x_{25} . Переменной x_{31} присваивается объединение списка содержащих переменные x_{17} утверждений набора x_8 со списком равенств выражений набора x_{16} соответствующим переменным набора x_{25} . Решается задача на описание с посылками x_{30} и условиями x_{31} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{17} ", "параметры x_{17} ", "исключ". Ответ задачи присваивается переменной x_{33} . В нашем примере он имеет вид " $\neg(e = \text{вектор}0) \ \& \ \neg(d = \text{вектор}0)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{34} присваивается объединение списка x_{30} со списком конъюнктивных членов утверждения x_{33} . Создается импликация с антецедентами x_{34} и консеквентом x_{28} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.139 Характеристика "Числвыраз"

Характеристикой "Числвыраз(N)" снабжаются тождества, выражающие численную характеристику операции над нечисловыми объектами через численные характеристики других операций над этими объектами. N - направление замены.

Использование дополнительного тождества для варьирования заменяющей части

1. Попытка сильного упрощения заменяющей части для получения тождества, приводящего к более простым числовым атомам.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(a, b) \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a \cup b) = \text{card}(a) + \text{card}(b))$$

из теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ \text{конечное}(d) \rightarrow \text{card}(c \cup d) = \text{card}(c) + \text{card}(d \setminus c))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ \text{непересек}(b, c) \rightarrow b \setminus c = b)$$

Переменной x_{10} присваивается заменяющее выражение, переменной x_{11} - заменяемое. В нашем примере x_{10} имеет вид "card(c) + card($d \setminus c$)", x_{11} - вид "card($c \cup d$)". Просматриваются заголовки неоднобуквенных подтермов выражения x_{10} , имеющих более одного корневого операнда. По каждому такому заголовку справочники поиска теорем "констнорм", "тожд", "поглощается", "поглощает" определяют кандидаты на дополнительную теорему. По итогам просмотра составляется список x_{12} из пар (теорема - список характеристик).

Внутри заменяющей части равенства в консеквенте исходной теоремы выбирается вхождение x_{14} неоднобуквенного подтерма, имеющего более одного корневого операнда. Переменной x_{15} присваивается его заголовок. В нашем примере x_{14} имеет вид " $d \setminus c$ ". В списке x_{12} выбирается пара для дополнительной теоремы. Проверяется, что одна из частей равенства в консеквенте дополнительной теоремы имеет заголовок x_{15} . Оператор "тождвывод" находит результат x_{22} преобразования вхождения x_{14} в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка варьирования тождества с помощью другого тождества, полученного в том же цикле.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ade}(a - \text{set} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ a \subseteq \text{элементы}(e) \ \& \ d \subseteq \text{элементы}(e) \ \& \ \text{верпространство}(e) \rightarrow \text{вероятность}(a \cup d, e) = -\text{вероятность}(a \cap d, e) + \text{вероятность}(a, e) + \text{вероятность}(d, e))$$

из теоремы

$$\forall_{bcC}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ b \subseteq \text{элементы}(C) \ \& \ c \subseteq \text{элементы}(C) \ \& \\ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{вероятность}(b \cup c, C) = \text{вероятность}(c, C) + \\ \text{вероятность}(b \setminus c, C))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bcC}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ b \subseteq \text{элементы}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \\ \text{вероятность}(b \setminus c, C) = -\text{вероятность}(b \cap c, C) + \text{вероятность}(b, C))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть тождества, переменной x11 - оценка ее сложности. Переменной x12 присваивается заменяющая часть тождества. Переменной x13 присваивается список антецедентов теоремы, переменной x14 - список всех числовых атомов выражения x12, оценка сложности которых равна x11, а параметры включают все параметры терма x10. В нашем примере x14 состоит из единственного атома "вероятность($b \setminus c, C$)". Переменной x16 присваивается некоторый атом списка x14. Внутри заменяющей части исходной теоремы выбирается вхождение x17 подтерма x16.

В списке вывода выбирается дополнительная теорема с характеристикой вида "Числвыраз(N)". Переменной x23 присваивается заменяемое выражение дополнительной теоремы относительно направления замены N . Проверяется, что его длина равна длине атома x16. Переменной x24 присваивается список параметров терма x16. Определяется подстановка S вместо переменных x24, переводящая терм x16 в терм x23. Проверяется, что она переобозначает переменные, не отождествляя их. Оператор "тождвывод" находит результат x26 преобразования вхождения x17 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование текущего тождества для варьирования дополнительной эквивалентности

1. Попытка получения эквивалентности общей стандартизации для случая обращения числового атома заменяемой части в константу.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a) + \text{card}(b) = \\ \text{card}(a \cup b) \leftrightarrow \text{непересек}(a, b))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a \cup b) = \\ - \text{card}(a \cap b) + \text{card}(a) + \text{card}(b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{set} \rightarrow \text{card}(a) = 0 \leftrightarrow a = \emptyset)$$

Характеристика - "Числвыраз(второйтерм)".

Переменной x_{10} присваивается заменяющее выражение, переменной x_{11} - заменяемое. Переменной x_{12} присваивается список антецедентов, переменной x_{13} - список параметров выражения x_{11} . Выбирается невырожденный числовой атом x_{14} выражения x_{10} , содержащий все переменные списка x_{13} . В нашем примере - " $\text{card}(a \cap b)$ ". Переменной x_{15} присваивается заголовок выражения x_{14} . Справочник поиска теорем "числ" определяет по x_{15} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{18} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{18} имеет вид:

$$\forall c(c - \text{set} \rightarrow \text{card}(c) = 0 \leftrightarrow c = \emptyset)$$

Переменной x_{22} присваивается заменяемая часть эквивалентности в консеквенте дополнительной теоремы. Проверяется, что x_{22} - равенство. Переменной x_{25} присваивается та его часть, которая имеет непустой список параметров, переменной x_{24} - вхождение константной части. В нашем примере x_{25} имеет вид " $\text{card}(c)$ ". Переменной x_{26} присваивается список параметров выражений x_{14} и x_{25} . В нашем примере - a, b, c . Определяется подстановка S вместо переменных x_{26} , унифицирующая выражения x_{14} и x_{25} .

Выбирается переменная X , не входящая в исходную теорему, и решается задача на описание, посылками которой служат утверждения списка x_{12} , а единственным условием - равенство выражения x_{11} результату замены в выражении x_{10} всех вхождений терма x_{14} на переменную X . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "одз", "неизвестные X ". Проверяется, что полученный на эту задачу ответ отличен от символа "отказ".

Переменной x_{29} присваивается результат замены всех вхождений выражения x_{14} в терм x_{10} на константный подтерм x_{24} . Переменной x_{30} присваивается результат применения подстановки S к равенству выражений x_{11} и x_{29} . Переменной x_{31} присваивается результат применения этой же подстановки к заменяющей части дополнительной теоремы. Переменной x_{32} присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам исходной и дополнительной теорем. Создается импликация с антецедентами x_{32} , консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x_{30} и x_{31} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.140 Характеристика "числзнач"

Характеристикой "числзнач" снабжаются тождества, в одной части которых расположен невырожденный числовой атом, не встречающийся в противоположной части, не являющийся числовым атомом, но содержащей невырожденные числовые атомы.

Логические следствия теоремы

1. Рассмотрение двух различных конфигураций, дающих одно и то же значение невырожденного числового атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aABC}(a \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ C \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow -l(aA) - l(aB) + l(AC) + l(BC) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(C \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow l(AB) = l(AC) + l(BC))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - консеквент. Переменной x11 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. Переменной x14 присваивается та часть равенства в консеквенте, которая входит в список x11, переменной x15 - другая часть В нашем примере x14 имеет вид " $l(AB)$ ", x15 - вид " $l(AC) + l(BC)$ ". Проверяется, что x15 элементарно. Переменной x16 присваивается оценка сложности выражения x14. Проверяется, что в списке x11 нет выражения, имеющего оценку сложности, большую x14. Переменной x17 присваивается список параметров выражения x15, не вошедших в терм x14. Проверяется, что список x17 непуст. В нашем примере он состоит из единственной переменной C . Переменной x18 присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему, длина которого равна длине списка x17. В нашем примере x18 состоит из переменной a . Переменной x19 присваивается список результатов замены переменных x17 на переменные x18 в тех антецедентах набора x8, которые содержат переменные x17. Переменной x20 присваивается результат замены переменных x17 на x18 в терме x15. Переменной x21 присваивается объединение списков x8 и x19. Создается импликация с антецедентами x21, консеквентом которой служит равенство нулю разности выражений x15 и x20. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Усмотрение равенства числовых атомов, выразимых через равные числовые атомы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcABC}(l(ab) = l(AB) \ \& \ l(bc) = l(BC) \ \& \ c \in \text{отрезок}(ab) \ \& \ C \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow l(AC) = l(ac))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(C \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow l(AC) = -l(BC) + l(AB))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - консеквент. Переменной x11 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. Переменной x14 присваивается та часть равенства в консеквенте, которая входит в список x11, переменной x15 - другая часть В нашем примере x14 имеет вид " $l(AC)$ ", x15 - вид " $-l(BC) + l(AB)$ ". Проверяется, что x15 элементарно. Переменной x16 присваивается список параметров консеквента. Проверяется, что все корневые операнды атомов списка x11 суть переменные, причем каждая переменная списка x16 встречается в консеквенте только внутри некоторого такого атома. Выбирается список x17 не входящих в исходную

теорему переменных, длина которого равна длине списка x16. В нашем примере x16 - список A, B, C ; x17 - список a, b, c . Переменной x18 присваивается список результатов замены переменных x16 на переменные x17 в антецедентах x8. Переменной x19 присваивается список отличных от x14 атомов списка x11. Переменной x20 присваивается результат замены переменных x16 на x17 в атоме x14. Переменной x21 присваивается объединение списков x8 и x18 со списком равенств атомов набора x19 результатам замены в этих атомах переменных x16 на x17. Создается импликация с антецедентами x21, консеквентом которой является равенство выражения x14 выражению x20. Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Попытка повторного применения тождества, разбивающего числовой атом в сумму двух других числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcB}(b \in \text{отрезок}(aB) \ \& \ c \in \text{отрезок}(ab) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow l(aB) = l(ac) + l(bc) + l(bB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(C \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow l(AB) = l(AC) + l(BC))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - консеквент. Переменной x11 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. Переменной x14 присваивается та часть равенства в консеквенте, которая входит в список x11, переменной x15 - другая часть. В нашем примере x14 имеет вид " $l(AB)$ ", x15 - вид " $l(AC) + l(BC)$ ". Проверяется, что x15 элементарно. Проверяется, что x15 - сумма двух слагаемых, принадлежащих списку x11, причем длина списка x11 равна 3. Переменной x16 присваивается вхождение некоторого слагаемого суммы x15 в консеквент теоремы. В нашем примере - вхождение слагаемого " $l(AC)$ ". Оператор "тождвывод" определяет результат x18 преобразования вхождения x16 в исходную теорему при помощи самой исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Использование симметричности заменяемого числового атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ A \in \text{события}(C) \ \& \ B \in \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{вероятность}(A, C) \text{услвероятн}(B, A, C) = \text{вероятность}(B, C) \text{услвероятн}(A, B, C))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ A \in \text{события}(C) \ \& \ B \in \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{вероятность}(A \cap B, C) = \text{вероятность}(A, C) \text{услвероятн}(B, A, C))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Переменной x12 присваивается та часть равенства в консеквенте теоремы, которая представляет собой

невырожденный числовой атом. В нашем примере - "вероятность($A \cap B, C$)". Переменной x_{14} присваивается другая часть равенства. В нашем примере - "вероятность(A, C)услвероятн(B, A, C)". Проверяется, что все параметры выражения x_{14} входят в выражение x_{12} . Переменной x_{15} присваивается список числовых атомов выражения x_{14} . Проверяется, что он имеет не менее двух элементов. Переменной x_{16} присваивается набор лексикографически упорядоченных пар переменных терма x_{12} , перестановка которых не изменяет этого терма (с точностью до изменения порядка операндов коммутативных операций). В нашем примере x_{16} состоит из единственной пары (A, B). В списке x_{16} выбирается некоторая пара x_{17} . Переменной x_{18} присваивается ее первый элемент, переменной x_{19} - второй. В нашем примере x_{18} - A , x_{19} - B . Переменной x_{21} присваивается результат перестановки переменных x_{18} и x_{19} в терме x_{14} . Проверяется, что при обработке оператором "станд" выражений x_{14} и x_{21} возникают различные термы. Переменной x_{22} присваивается равенство выражений x_{14} и x_{21} , переменной x_{23} - список результатов перестановки переменных x_{18} и x_{19} в утверждениях списка x_8 . Переменной x_{25} присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" объединения списка x_8 и x_{23} относительно параметров равенства x_{22} . Создается импликация с антецедентами x_{25} и консеквентом x_{22} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Попытка усмотреть зависимость от отношения двух числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ al(AC) = bl(BC) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \angle(BAC) = \arccos((b - a \cos(\angle(ACB)))/\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\angle(ACB))}))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \angle(BAC) = \arccos((- \cos(\angle(ACB))l(BC) + l(AC)) : \sqrt{l(AC)^2 + l(BC)^2 - 2l(AC)l(BC) \cos(\angle(ACB))}))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов. Переменной x_{12} присваивается та часть равенства в консеквенте теоремы, которая представляет собой невырожденный числовой атом. В нашем примере - " $\angle(BAC)$ ". Переменной x_{14} присваивается другая часть равенства. В нашем примере она имеет вид

$$\arccos((- \cos(\angle(ACB))l(BC) + l(AC)) : \sqrt{l(AC)^2 + l(BC)^2 - 2l(AC)l(BC) \cos(\angle(ACB))}))$$

Переменной x_{15} присваивается список числовых атомов выражения x_{14} . Проверяется, что он имеет не менее двух элементов. Переменной x_{16} присваивается вхождение символа "дробь" в выражение x_{14} . Переменной x_{17} присваивается расположенное внутри x_{16} вхождение символа "плюс", соединенное со вхождением x_{16} только через мультипликативные операции. В нашем примере - вхождение суммы " $- \cos(\angle(ACB))l(BC) + l(AC)$ ". Переменной x_{18} присваивается первое слагаемое суммы x_{17} , переменной x_{19} - второе. Выбирается элемент x_{20} списка x_{15} . В нашем примере - $l(BC)$.

Переменной x_{21} присваивается вхождение выражения x_{20} в терм x_{18} . Проверяется, что каждая надоперация вхождения x_{21} - либо "минус", либо "умножение", либо "степень", причем в последнем случае x_{21} размещено в основании степени. Переменной x_{22} присваивается отличный от x_{20} элемент списка x_{15} . В нашем примере - " $l(AC)$ ". Переменной x_{23} присваивается вхождение выражения x_{22} в терм x_{19} . Проверяется, что каждая надоперация вхождения x_{23} - либо "минус", либо "умножение", либо "степень", причем в последнем случае x_{23} размещено в основании степени. Проверяется, что в каждом слагаемом суммы x_{17} имеется такое вхождение атома x_{20} либо x_{22} , что каждая его надоперация - либо "минус", либо "умножение", либо "степень", причем в последнем случае вхождение размещено в основании степени.

Переменной x_{25} присваивается вхождение операнда дроби x_{16} , отличного от операнда, содержащего x_{17} . Внутри x_{25} выбирается вхождение x_{26} символа "плюс", достижимое из x_{25} только через мультипликативные операции. В нашем примере - вхождение суммы " $l(AC)^2 + l(BC)^2 - 2l(AC)l(BC) \cos(\angle(ACB))$ ". Проверяется, что в каждом слагаемом суммы x_{26} имеется такое вхождение атома x_{20} либо x_{22} , что каждая его надоперация - либо "минус", либо "умножение", либо "степень", причем в последнем случае вхождение размещено в основании степени.

Выбираются переменные X, Y, Z , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b, c . Переменной x_{28} присваивается выражение " XZ ", переменной x_{29} - выражение " YZ ". Переменной x_{30} присваивается результат добавления к списку x_8 утверждений "число(X)", "число(Y)", "число(Z)", " $0 < Z$ ". Переменной x_{31} присваивается результат замены в выражении x_{14} всех вхождений подтерма x_{20} на выражение x_{28} , а вхождений подтерма x_{22} - на выражение x_{29} . Выражение x_{31} упрощается относительно посылок x_{30} при помощи задачи на преобразование, и результат присваивается переменной x_{33} . В нашем примере - " $\arccos((b - a \cos(\angle(ACB))) / \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(\angle(ACB))})$ ". Проверяется, что терм x_{33} не содержит переменной Z . Переменной x_{34} присваивается результат добавления к списку x_8 утверждений "число(X)", "число(Y)", "равно(умножение(Y x_{20}) умножение(X x_{22}))". Создается импликация с антецедентами x_{34} , консеквентом которой служит равенство выражений x_{12} и x_{33} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "числзнач".

6. Попытка преобразования консеквента для получения соотношения с исключенными сложными операциями.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABK}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \\ l(AB)^2 = (\text{крд}(A, K, 1) - \text{крд}(B, K, 1))^2 + (\text{крд}(A, K, 2) - \text{крд}(B, K, 2))^2 + \\ (\text{крд}(A, K, 3) - \text{крд}(B, K, 3))^2)$$

из теоремы

$$\forall_{ABK}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \\ l(AB) = ((\text{крд}(A, K, 1) - \text{крд}(B, K, 1))^2 + (\text{крд}(A, K, 2) - \text{крд}(B, K, 2))^2 + \\ (\text{крд}(A, K, 3) - \text{крд}(B, K, 3))^2)^{1/2})$$

Проверяется отсутствие у теоремы характеристики с заголовком "значпарам". Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается результат обработки консеквента нормализатором "нормчисл" относительно посылок x8. Этот нормализатор реализован на ГЕНОЛОГе и выполняет эквивалентные преобразования так, чтобы исключить сложные операции. В нашем примере он выполняет возведение в квадрат, так что x10 имеет вид $l(AB)^2 = (\text{крд}(A, K, 1) - \text{крд}(B, K, 1))^2 + (\text{крд}(A, K, 2) - \text{крд}(B, K, 2))^2 + (\text{крд}(A, K, 3) - \text{крд}(B, K, 3))^2$. Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" термов x9 и x10 различаются. Переменной x11 присваивается список оценок сложности неоднобуквенных подтермов выражения x10, переменной x12 - список таких оценок для x9. Переменной x13 присваивается разность наборов x11 и x12, переменной x14 - разность наборов x12 и x11 (с учетом кратности элементов). Проверяется, что для любого элемента списка x13 имеется больший его элемент списка x14. Переменной x15 присваивается список конъюнктивных членов утверждения x10. В нем выбирается равенство x16. Создается импликация с антецедентами x8 и консеквентом x16. Она регистрируется в списке вывода.

7. Исключение конечной суммы для числового атома в предположении одинаковости слагаемых.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcde} (d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{разбиение}(b, c) \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ \text{классмножеств}(c) \ \& \ \text{card}(c) = d \ \& \ \forall_a (a \in c \rightarrow e = \text{card}(a)) \rightarrow \text{card}(b) = de)$$

из теоремы

$$\forall_{bc} (b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ \text{разбиение}(b, c) \ \& \ \text{конечные}(c) \ \& \ \text{классмножеств}(c) \rightarrow \text{card}(b) = \sum_{a, a \in c} \text{card}(a))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Переменной x12 присваивается та часть равенства в консеквенте теоремы, которая представляет собой невырожденный числовой атом. В нашем примере - "card(b)". Переменной x14 присваивается другая часть равенства. В нашем примере она имеет вид:

$$\sum_{a, a \in c} \text{card}(a)$$

Внутри выражения x14 находится вхождение x15 символа "суммавсех", первым операндом которого служит вхождение x16 описателя "отображение". Переменной x17 присваивается связывающая приставка описателя, переменной x18 - последний операнд описателя (он определяет значение функции), переменной x19 - предпоследний операнд (он определяет условия на варьируемые переменные). Переменной x20 присваивается результат добавления к списку x8 списка конъюнктивных членов утверждения x19. Проверяется, что x18 - невырожденный числовой атом. Переменной x24 присваивается результат упрощения выражения "класс(x17 x19)" относительно посылок x8. В нашем примере x24 - переменная c. Выбираются переменные X, Y, не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные d, e. Переменной x26 присваивается утверждение "длялюбого(x17 если x19 то равно(x18 Y))". В нашем примере - утверждение $\forall_a (a \in c \rightarrow \text{card}(a) = e)$. Переменной x27 присваивается результат добавления к списку x8 утверждений "число(X)", "число(Y)", "равно(мощность(x24))".

X)", x26. Переменной x28 присваивается равенство выражения x12 результату замены вхождения x15 в терм x14 на выражение XY. Переменной x29 присваивается результат обработки оператором "нормантецеденты" списка x27 относительно параметров терма x28. Создается импликация с антецедентами x29 и консеквентом x28, которая регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "числотобр".

8. Вывод неравенства для суммы двух числовых атомов и третьего атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a\text{-set} \ \& \ b\text{-set} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a \cup b) \leq \text{card}(a) + \text{card}(b))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a\text{-set} \ \& \ b\text{-set} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a \cup b) = -\text{card}(a \cap b) + \text{card}(a) + \text{card}(b))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - консеквент, переменной x11 - список невырожденных числовых атомов терма x10. Переменной x14 присваивается та часть равенства в консеквенте теоремы, которая принадлежит списку x11. Переменной x15 присваивается другая часть. В нашем примере x15 имеет вид " $-\text{card}(a \cap b) + \text{card}(a) + \text{card}(b)$ ". Проверяется, что заголовком выражения x15 служит символ "плюс". Переменной x16 присваивается список слагаемых этого выражения, переменной x17 - пересечение списков x16 и x11. Проверяется, что x17 двухэлементное. В нашем примере оно состоит из выражений "card(a)" и "card(b)". Переменной x18 присваивается разность списков x16 и x11. Проверяется, что она непустая, и переменной x19 присваивается сумма слагаемых x18. Проверяется, что эта сумма неотрицательная. Проверяется, что в списке x17 нет выражения, для которого усматривалось бы, что оно не меньше выражения x14. Создается импликация с антецедентами x8, консеквентом которой служит неравенство "меньшеилиравно(x14 плюс(x17))". Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Вывод равенства объектов путем сравнения двух теорем

1. Использование двух различных соотношений аддитивности для одноименных числовых атомов: усмотрение равенства вторых слагаемых при равенстве сумм и идентичности первых слагаемых.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcC}(l(aC) = l(bC) \ \& \ a \in \text{интервал}(bc) \ \& \ b \in \text{отрезок}(aC) \ \& \ a\text{-точка} \ \& \ b\text{-точка} \ \& \ c\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \rightarrow l(ac) = l(bC))$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(a \in \text{интервал}(bc) \ \& \ a\text{-точка} \ \& \ b\text{-точка} \ \& \ c\text{-точка} \rightarrow l(bc) = l(ab) + l(ac))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ B \in \text{отрезок}(AC) \rightarrow l(AC) = l(AB) + l(BC))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x11 - вхождение той части равенства в консеквенте, которая представляет собой сумму двух слагаемых. Переменной x10 присваивается другая часть равенства, переменной x14 - логический символ по вхождению x10. Проверяется, что оба слагаемых суммы x11 имеют заголовок x14. Переменной x12 присваивается одно из данных слагаемых, переменной x13 - другое. В нашем примере x14 - символ "расстояние". Переменной x15 присваивается список числовых атомов консеквента. Проверяется, что список x15 состоит из трех элементов, причем этими элементами служат подтерм x10 и слагаемые суммы x11. Справочник поиска теорем "сумма" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему, отличную от исходной. Переменной x18 присваивается результат переобозначения связанных переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x18 совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x19 присваивается список антецедентов теоремы x18. Переменной x22 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте теоремы x18, которая имеет заголовок "плюс". Переменной x23 присваивается список слагаемых суммы x22. В этом списке выбирается элемент x24. В нашем примере - " $l(AB)$ ". Переменной x25 присваивается список параметров выражения x24 и подтерма x12. В нашем примере - " a, b, A, B ". Определяется подстановка S вместо переменных x25, унифицирующая терм x24 с подтермом x12. Переменной x27 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям списков x8 и x19, переменной x28 - результат применения данной подстановки к подтерму x10, переменной x29 - результат ее применения к подтерму x21. В нашем примере x28 - " $l(bc)$ ", x29 - " $l(aC)$ ". К списку x27 добавляется равенство выражений x28 и x29. Переменной x30 присваивается результат применения подстановки S к подтерму x13. Рассматривается элемент x31 набора x23, отличный от x24, и переменной x32 присваивается результат применения к нему подстановки S . Создается импликация с антецедентами x27, консеквентом которой служит равенство выражений x30 и x32. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теорем для приемов заданного типа

1. Выражение невырожденного атома с помощью равенств в посылках, задающих значения других числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{разныестороны}(B, D, \text{прямая}(AC)) \ \& \ \text{однасторона}(B, C, \text{прямая}(AD)) \ \& \ \text{составнугол}(A, D, C, B) \ \& \ \angle(BAC) = a \ \& \ \angle(CAD) = b \rightarrow \angle(BAD) = a + b)$$

из теоремы

$$\forall_{abABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{разныестороны}(B, D, \text{прямая}(AC)) \ \&$$

однасторона(B, C , прямая(AD)) & составнугол(A, D, C, B) \rightarrow
 $\angle(BAD) = \angle(BAC) + \angle(CAD)$

Напомним, что "составнугол(A, D, C, B)" представляет собой дополнительное ограничение на четыре точки A, D, C, B , необходимое для того, чтобы угол BAD был равен сумме углов CAD и BAC . Прозти точки уже известно, что D и B лежат по разные стороны от прямой AC , а точки B, C - по одну сторону от прямой AD . Дополнительное ограничение сводится к тому, что либо точка A не лежит на отрезке CD , либо точка B лежит на луче AC .

Переменной $x8$ присваивается список антецедентов. Переменной $x12$ присваивается та часть равенства в консеквенте теоремы, которая представляет собой невырожденный числовой атом. В нашем примере - " $\angle(BAD)$ ". Переменной $x14$ присваивается другая часть равенства. В нашем примере она имеет вид " $\angle(BAC) + \angle(CAD)$ ". Переменной $x15$ присваивается список невырожденных числовых атомов выражения $x14$, параметры которых включаются в параметры терма $x14$. Проверяется, что $x15$ имеет не менее двух элементов. Если в $x15$ имеются два числовых атома, выражающих значения отдельных координат объектов, причем они встречаются только в консеквенте теоремы и только в виде разности, то эти атомы заменяются в списке $x15$ на данную разность.

Выбирается список $x16$ не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка $x15$. В нашем примере $x16$ состоит из переменных a, b . Переменной $x17$ присваивается список равенств выражений набора $x15$ соответствующим переменным набора $x16$. Переменной $x18$ присваивается объединение списка результатов замены в утверждениях набора $x8$ выражений набора $x15$ на соответствующие переменные набора $x16$ со списком $x17$. Переменной $x19$ присваивается результат замены выражений $x15$ на переменные $x16$ в терме $x14$. Создается импликация с антецедентами $x18$, консеквентом которой служит равенство выражений $x12$ и $x19$. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "извлечпарам(второйтерм)".

2. Вынесение в антецеденты определения числового атома заменяющего терма, чтобы получить декомпозирующее равенство.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \ \& \ \text{card}(a \cap b) = c \rightarrow \\ \text{card}(a \cup b) = -c + \text{card}(a) + \text{card}(b))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a \cup b) = \\ - \text{card}(a \cap b) + \text{card}(a) + \text{card}(b))$$

Переменной $x8$ присваивается список антецедентов, переменной $x10$ - консеквент. Переменной $x11$ присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что все параметры антецедентов входят в консеквент. Переменной $x14$ присваивается та часть равенства в консеквенте, которая входит в список $x11$, переменной $x15$ - другая часть. В нашем примере $x14$ имеет вид " $\text{card}(a \cup b)$ ", $x15$ - вид " $-\text{card}(a \cap b) + \text{card}(a) + \text{card}(b)$ ". Переменной $x16$ присваивается список невырожденных числовых атомов терма $x15$,

переменной x17 - список параметров этого термина. В нашем примере x17 состоит из переменных a, b . Проверяется, что каждый параметр встречается в терме x15 только внутри вхождения какого-либо атома списка x16. Выбирается такой атом x18 списка x16, который содержит все переменные x17. В нашем примере - " $\text{card}(a \cap b)$ ". Переменной x19 присваивается оставшая часть списка x16. Проверяется, что она непустая и содержит все переменные списка x17. Проверяется, что термы x19 образуют декомпозицию по переменным термина x14. Выбирается переменная x20, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная c . Переменной x21 присваивается результат добавления к списку x8 равенства выражений x18 и x20, переменной x22 - результат замены в терме x15 вхождений выражения x18 на переменную x20. Создается импликация с антецедентами x21, консеквентом которой служит равенство выражений x14 и x22. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "услнезавис(второйтерм)".

3. Специальная стандартизация временных промежутков.

- (a) Замена отношения включения численных промежутков на равенство.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acd}g(g = [c, d] \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{равндвиж}(a, g) \ \& \ \text{Числотр}(g) \rightarrow \text{длина}(\text{Путь}(a, [c, d])) = (d - c)\text{скорость}(a, g))$$

из теоремы

$$\forall_{acdeg}(e = [c, d] \ \& \ e \subseteq g \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{равндвиж}(a, g) \ \& \ \text{Числотр}(e) \ \& \ \text{Числотр}(g) \rightarrow \text{длина}(\text{Путь}(a, [c, d])) = (d - c)\text{скорость}(a, g))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. В нем находится утверждение x9 с заголовком "содержится", у которого правая часть - переменная x10. В нашем примере x9 имеет вид " $e \subseteq g$ "; x10 - переменная g . Проверяется наличие в списке x8 утверждения "Числотр(x10)". Проверяется, что левая часть утверждения x9 - некоторая переменная x12. В нашем примере - " e ". В списке x8 находится равенство x13, одной из частей которого служит переменная x12, а другой - выражение с заголовком "промежуток". В нашем примере x13 имеет вид " $e = [c, d]$ ". Переменной x16 присваивается результат замены в списке x8 утверждения x9 на равенство переменных x10 и x12. Создается импликация с антецедентами x16, консеквент которой - тот же, что у исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (b) Реализация подпромежутка путем выбора его конечной точки внутри другого промежутка.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}g(g = [c, b] \ \& \ d \in g \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{равндвиж}(a, g) \ \& \ \text{Числотр}(g) \rightarrow \text{длина}(\text{Путь}(a, [c, d])) = (d - c)\text{скорость}(a, g))$$

из теоремы

$$\forall_{acdeg}(e = [c, d] \ \& \ e \subseteq g \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{равндвиж}(a, g) \ \& \ \text{Числотр}(e) \ \& \ \text{Числотр}(g) \rightarrow \text{длина}(\text{Путь}(a, [c, d])) = (d - c)\text{скорость}(a, g))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов. В нем находится утверждение x_9 с заголовком "содержится", у которого в правой части расположена переменная x_{10} . В нашем примере x_9 имеет вид " $e \subseteq g$ ", x_{10} - переменная g . Проверяется наличие в списке x_8 утверждения "Числотр(x_{10})". Проверяется, что в левой части отношения x_9 расположена некоторая переменная x_{12} . В нашем примере - переменная e . В списке x_8 находится равенство x_{13} , у которого в одной части расположена переменная x_{12} , а в другой части - выражение вида " $[T_1, T_2]$ ". В нашем примере x_{13} имеет вид " $e = [c, d]$ ". Проверяется наличие в списке x_8 утверждения "Числотр(x_{12})". Выбирается переменная x_{17} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Переменной x_{18} присваивается результат удаления из списка x_8 утверждений x_9, x_{13}, x_{16} , с последующим добавлением утверждений "число(x_{17})", "равно($x_{10} [T_1 x_{17}]$)", "принадлежит(T_2, x_{10})". Создается импликация с антецедентами x_{18} , консеквент которой - тот же, что у исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- (с) Реализация подпромежутка путем выбора двух внутренних точек промежутка.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acdg}(0 < d - c \ \& \ c \in g \ \& \ d \in g \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{равндвиж}(a, g) \ \& \ \text{Числотр}(g) \rightarrow \text{длина}(\text{Путь}(a, [c, d])) = (d - c)\text{скорость}(a, g))$$

из теоремы

$$\forall_{acdeg}(e = [c, d] \ \& \ e \subseteq g \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{равндвиж}(a, g) \ \& \ \text{Числотр}(e) \ \& \ \text{Числотр}(g) \rightarrow \text{длина}(\text{Путь}(a, [c, d])) = (d - c)\text{скорость}(a, g))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_8 присваивается список антецедентов. В нем находится утверждение x_9 с заголовком "содержится", у которого в правой части расположена переменная x_{10} . В нашем примере x_9 имеет вид " $e \subseteq g$ ", x_{10} - переменная g . Проверяется наличие в списке x_8 утверждения "Числотр(x_{10})". Проверяется, что в левой части отношения x_9 расположена некоторая переменная x_{12} . В нашем примере - переменная e . В списке x_8 находится равенство x_{13} , у которого в одной части расположена переменная x_{12} , а в другой части - выражение вида " $[T_1, T_2]$ ". В нашем примере x_{13} имеет вид " $e = [c, d]$ ". Проверяется наличие в списке x_8 утверждения "Числотр(x_{12})".

Дальше начинаются отличия. Переменной x_{18} присваивается результат удаления из списка x_8 утверждений x_9, x_{13}, x_{16} , с последующим добавлением утверждений "принадлежит(T_1, x_{10})", "принадлежит(T_2, x_{10})", " $0 < T_2 - T_1$ ". Создается импликация с антецедентами x_{18} , консеквент которой - тот же, что у исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Исключение промежуточного числового атома при двукратном применении тождества

1. Исключение промежуточного числового атома при двукратном применении тождества (тождество с двумя атомами).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cgBCD}(\neg(c = B) \& \neg(g = B) \& \neg(B = C) \& \neg(B = D) \& B \in \text{отрезок}(cD) \& B \in \text{отрезок}(gC) \& c\text{-точка} \& g\text{-точка} \& B\text{-точка} \& C\text{-точка} \& D\text{-точка} \rightarrow -\angle(CBD) + \angle(cBg) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A\text{-точка} \& B\text{-точка} \& C\text{-точка} \& D\text{-точка} \& \neg(B = C) \& \neg(B = D) \& \neg(A = B) \& B \in \text{отрезок}(AC) \rightarrow \angle(ABD) = -\angle(CBD) + \pi)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A\text{-точка} \& B\text{-точка} \& C\text{-точка} \& D\text{-точка} \& E\text{-точка} \& \neg(A = E) \& \neg(A = C) \& \neg(A = B) \& \neg(A = D) \& \text{точкалуча}(A, B, C) \& \text{точкалуча}(A, D, E) \rightarrow \angle(BAD) = \angle(CAE))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - консеквент. Переменной x11 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что параметры антецедентов включаются в параметры консеквента. Переменной x14 присваивается операнд равенства в консеквенте, принадлежащий списку x11, переменной x15 - заголовок выражения x14. В нашем примере x14 - " $\angle(ABD)$ ", x15 - символ "угол". Переменной x13 присваивается вхождение отличного от x14 операнда равенства. Справочник поиска теорем "равнчисл" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что среди антецедентов дополнительной теоремы нет равенства. Переменной x18 присваивается результат переобозначения переменных исходной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему, переменной x19 - результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему и в теорему x18. В нашем примере x18 имеет вид:

$$\forall_{abcd}(a\text{-точка} \& b\text{-точка} \& c\text{-точка} \& d\text{-точка} \& \neg(b = c) \& \neg(b = d) \& \neg(a = b) \& b \in \text{отрезок}(ac) \rightarrow \angle(abd) = -\angle(cbd) + \pi)$$

Теорема x19 имеет вид:

$$\forall_{efghi}(e\text{-точка} \& f\text{-точка} \& g\text{-точка} \& h\text{-точка} \& i\text{-точка} \& \neg(e = i) \& \neg(e = g) \& \neg(e = f) \& \neg(e = h) \& \text{точкалуча}(e, f, g) \& \text{точкалуча}(e, h, i) \rightarrow \angle(feh) = \angle(gei))$$

Переменной x20 присваивается вхождение в консеквент теоремы x18, расположенное так же, как вхождение выражения x14 в консеквент исходной теоремы. Переменной x22 присваивается пара частей равенства в консеквенте теоремы x19. Переменной x23 присваивается список параметров, входящих в оба выражения пары x22. В нашем примере - единственная переменная e. Проверяется,

что либо список x23 одноэлементный, либо список x11 двухэлементный. Переменной x24 присваивается подтерм x20. В нашем примере - " $\angle(abd)$ ". Переменной x25 присваивается список параметров выражений пары x22 и выражения x24. В нашем примере - список a, b, d, e, f, g, h, i . Определяется подстановка S вместо переменных x25, унифицирующая терм x14 с первым термом пары x22, а терм x24 - со вторым элементом этой пары. Переменной x27 присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы со списком результатов применения подстановки S к антецедентам теорем x18 и x19. Переменной x28 присваивается вхождение части равенства в консеквенте теоремы x18, отличной от x24. Переменной x29 присваивается равенство подтермов x13 и x28. Переменной x30 присваивается результат применения к x29 подстановки S . В нашем примере - " $-\angle(CBD) + \pi = -\angle(cBg) + \pi$ ".

Проверяется, что список x11 двухэлементный. Переменной x31 присваивается разность списков параметров термов списка x27 и терма x30. В нашем примере - пара " i, A ".

Если список x31 непуст, то решается задача на описание с единственной посылкой "истина" и условиями x27. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x31", "параметры x31", "исключ". Если ответ отличен от символа "отказ", то x27 заменяется на список конъюнктивных членов этого ответа.

Переменной x32 присваивается результат обработки списка x27 процедурой "нормантецеденты" относительно параметров терма x30. Создается импликация с антецедентами x32 и консеквентом x30. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Исключение промежуточного числового атома при двукратном применении тождества (тождество с более чем двумя атомами).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{ghAC} (\neg(g = C) \ \& \ \neg(h = A) \ \& \ \neg(g \in \text{прямая}(hA)) \ \& \ \neg(h \in \text{прямая}(gC)) \ \& \\ & \neg(A \in \text{прямая}(gC)) \ \& \ \neg(C \in \text{прямая}(hA)) \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \\ & A - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{разныестороны}(g, C, \text{прямая}(hA)) \ \& \\ & \text{разныестороны}(h, A, \text{прямая}(gC)) \ \rightarrow \\ & -\angle(gCA) - \angle(hAC) + \angle(ghA) + \angle(hgC) = 0 \end{aligned}$$

из теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{ABC} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \\ & \neg(A = B) \ \rightarrow \ \angle(ABC) = -\angle(ACB) - \angle(BAC) + \pi \end{aligned}$$

и дополнительной теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{ABCDE} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ & \neg(A = E) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ A \in \text{отрезок}(BE) \ \& \\ & A \in \text{отрезок}(CD) \ \rightarrow \ \angle(BAC) = \angle(DAE) \end{aligned}$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - консеквент. Переменной x11 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что параметры антецедентов включаются в параметры консеквента. Переменной x14 присваивается операнд равенства в консеквенте, принадлежащий списку x11, переменной x15 - заголовок выражения x14. В нашем примере x14 - " $\angle(ABC)$ ", x15 - символ "угол". Переменной x13 присваивается вхождение отличного от x14 операнда равенства. Справочник поиска теорем "равнчисл" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что среди антецедентов дополнительной теоремы нет равенства. Переменной x18 присваивается результат переобозначения переменных исходной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему, переменной x19 - результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему и в теорему x18. В нашем примере x18 имеет вид:

$$\forall_{abc}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(a = b) \rightarrow \angle(abc) = -\angle(acb) - \angle(bac) + \pi)$$

Теорема x19 имеет вид:

$$\forall_{defgh}(d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ \neg(d = h) \ \& \ \neg(d = g) \ \& \ \neg(d = f) \ \& \ \neg(d = e) \ \& \ d \in \text{отрезок}(eh) \ \& \ d \in \text{отрезок}(fg) \rightarrow \angle(edf) = \angle(gdh))$$

Переменной x20 присваивается вхождение в консеквент теоремы x18, расположенное так же, как вхождение выражения x14 в консеквент исходной теоремы. Переменной x22 присваивается пара частей равенства в консеквенте теоремы x19. Переменной x23 присваивается список параметров, входящих в оба выражения пары x22. В нашем примере - единственная переменная d . Проверяется, что либо список x23 одноэлементный, либо список x11 двухэлементный. Переменной x24 присваивается подтерм x20. В нашем примере - " $\angle(abc)$ ". Переменной x25 присваивается список параметров выражений пары x22 и выражения x24. В нашем примере - список a, b, c, d, e, f, g, h . Определяется подстановка S вместо переменных x25, унифицирующая терм x14 с первым термом пары x22, а терм x24 - со вторым элементом этой пары. Переменной x27 присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы со списком результатов применения подстановки S к антецедентам теорем x18 и x19. Переменной x28 присваивается вхождение части равенства в консеквенте теоремы x18, отличной от x24. Переменной x29 присваивается равенство подтермов x13 и x28. Переменной x30 присваивается результат применения к x29 подстановки S . В нашем примере - " $-\angle(ACB) - \angle(BAC) + \pi = -\angle(ghB) - \angle(Bgh) + \pi$ ".

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что список x11 имеет более двух элементов. В нашем примере он состоит из трех числовых атомов " $\angle(ABC)$ ", " $\angle(ACB)$ ", " $\angle(BAC)$ ". Согласно приведенной выше проверке, в этом случае список x23 одноэлементный. Переменной x31 присваивается его элемент. В нашем примере - d . Проверяется, что подстановка S подставляет вместо x31 некоторую переменную x32, входящую в список x30. В нашем примере - переменную B . Проверяется, что равенство x30 не содержит подтерма "расстояние(...)", операндом которого служит x32. Проверяется, что равенство x30 соединяет

выражения, имеющие численные значения. Переменной x33 присваивается разность левой и правой частей равенства x30, переменной x34 - результат добавления к списку x27 терма "фикс(x33)".

Решается задача на исследование с посылками x34 и целями "известно", "неизвестные X", "исключ x32", где X - все параметры утверждений x34. После решения из ее посылок извлекается терм вида "фикс(T)". Проверяется, что T не содержит переменной x32. В нашем примере T имеет вид " $-\angle(gCA) - \angle(hAC) + \angle(ghA) + \angle(hgC)$ ". Переменной x38 присваивается равенство выражения T нулю. Список x27 разбивается на подсписок x39 утверждений, содержащих переменную x32, и подсписок x40 остальных утверждений. Решается задача на описание с посылками x40 и условиями x39. Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "упростить", "неизвестные x32", "параметры x32", "антецеденты", "исключ". Ответ присваивается переменной x42. В нашем примере он имеет вид "непересек(прямая(hA), {g, C}) & непересек(прямая(gC), {h, A}) & $\neg(h = A) \& \neg(g = C) \& \text{разныестороны}(h, A, \text{прямая}(gC)) \& \text{разныестороны}(g, C, \text{прямая}(hA))$ ".

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x43 присваивается объединение списка x30 со списком конъюнктивных членов утверждения x42. Создается импликация с антецедентами x43 и консеквентом x38. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Вывод дизъюнкции, определяющей разбор случаев при выражении одного числового атома через другой

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \neg(B = C) \& \neg(B = D) \& \neg(A = B) \& B \in \text{прямая}(AC) \& \neg(A = C) \rightarrow B \in \text{отрезок}(AC) \& \angle(ABD) = -\angle(CBD) + \pi \vee \text{точкалуча}(B, A, C) \& \angle(ABD) = \angle(CBD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \neg(B = C) \& \neg(B = D) \& \neg(A = B) \& B \in \text{отрезок}(AC) \rightarrow \angle(ABD) = -\angle(CBD) + \pi)$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - консеквент. Переменной x11 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что параметры антецедентов включаются в параметры консеквента. Переменной x14 присваивается операнд равенства в консеквенте, принадлежащий списку x11. В нашем примере - терм " $\angle(ABD)$ ". Проверяется, что список x11 двухэлементный. Решается задача на исследование x16 с посылками x8 и целями "известно", "следствие", "неизвестные X", где X - все параметры посылок. Переменной x19 присваивается некоторый существенный антецедент теоремы. В нашем примере - " $B \in \text{отрезок}(AC)$ ". Переменной x20 присваивается список параметров этого антецедента. Среди посылок задачи x16 выбирается утверждение x21, не входящее в список x8, параметры которого образуют список x20. В нашем примере x21 имеет вид " $B \in \text{прямая}(AC)$ ". При помощи комментария "выводимо" к посылке x21 проверяется, что она была выведена с использованием утверждения x19.

Переменной x_{24} присваивается результат замены в списке x_8 утверждения x_{19} на x_{21} . К списку x_{24} добавляются утверждения, необходимые для сопровождения термина x_{21} по о.д.з. Проверяется, что x_{19} не является следствием утверждений x_{24} . Выбираются переменные Y, Z , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b . В списке x_{11} выбирается атом x_{26} , отличный от x_{14} . В нашем примере - " $\angle(CBD)$ ". Переменной x_{27} присваивается результат добавления к списку x_{24} отрицания утверждения x_{19} и равенства выражения x_{26} переменной Z . Решается задача на описание с посылками x_{27} и единственным условием "равно($x_{14} Y$)". Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные Y ", "известно Z ". Ответ присваивается переменной x_{30} . В нашем примере он имеет вид " $a = b$ ". Проверяется, что ответ имеет вида равенства с переменной Y в левой части. Переменной x_{31} присваивается результат подстановки в него выражений x_{14} и x_{26} вместо переменных Y, Z . В нашем примере x_{31} имеет вид " $\angle(ABD) = \angle(CBD)$ ". Решается задача на преобразование с посылками x_{24} , условием которой служит отрицание утверждения x_{19} . Единственная цель - "упростить". Ответ присваивается переменной x_{33} . В нашем примере он имеет вид "точка(B, A, C)". Переменной x_{34} присваивается утверждение "или($x_{19} x_{10}$) и($x_{33} x_{31}$)". Переменной x_{35} присваивается результат обработки списка x_{24} процедурой "нормантецеденты" относительно параметров термина x_{34} . Создается импликация с антецедентами x_{35} и консеквентом x_{34} . Она регистрируется в списке вывода с характеристиками "числнабор(x_{14})" и "дизъюнкция".

Варьирование антецедентов

1. Переформулировка существенного нечисленного антецедента через числовые атомы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ D \text{ — точка} \ \& \ 0 \leq -\angle(BAC) - \angle(CAD) + \pi \ \& \ \text{разныестороны}(B, D, \text{прямая}(AC))) \rightarrow \angle(BAD) = \angle(BAC) + \angle(CAD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ D \text{ — точка} \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{разныестороны}(B, D, \text{прямая}(AC))) \ \& \ \text{однасторона}(B, C, \text{прямая}(AD))) \ \& \ \text{составнугол}(A, D, C, B) \rightarrow \angle(BAD) = \angle(BAC) + \angle(CAD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ D \text{ — точка} \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{разныестороны}(B, D, \text{прямая}(AC))) \ \& \ 0 \leq \pi - \angle(BAC) - \angle(CAD) \rightarrow \text{однасторона}(B, C, \text{прямая}(AD)))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{12} - та часть равенства в консеквенте, которая представляет собой невырожденный числовой атом. В нашем примере - " $\angle(BAD)$ ". Переменной x_{14} присваивается список невырожденных числовых атомов другой части равенства. В нашем примере - " $\angle(BAC)$ ", " $\angle(CAD)$ ". Переменной x_{17} присваивается некоторый существенный антецедент теоремы. В нашем примере - "однасторона($B, C, \text{прямая}(AD)$)".

Переменной x18 присваивается заголовок этого antecedента. Проверяется, что он отличен от символа "не". Справочник поиска теорем "числзнач" определяет по символу x18 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x21 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x21 имеет вид:

$$\forall_{abcd}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \neg(a = d) \ \& \\ \neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \text{разные стороны}(b, d, \text{прямая}(ac)) \ \& \\ 0 \leq \pi - \angle(bac) - \angle(cad) \rightarrow \text{одна сторона}(b, c, \text{прямая}(ad)))$$

Переменной x22 присваивается консеквент теоремы x21, переменной x23 - список его параметров. Определяется подстановка S вместо переменных x23, унифицирующая термы x22 и x17. Переменной x25 присваивается список результатов применения подстановки S к antecedентам теоремы x21, переменной x26 - результат удаления из списка x8 утверждения x17. Проверяется, что список x26 непуст.

Проверяется, что числовые атомы утверждений списка x25 включаются в список x14. Если утверждение не имеет числовых атомов и число его параметров больше 1, то проверяется, что оно является следствием утверждений x26, а затем удаляется из списка x25.

Далее создается импликация, antecedентами которой служат утверждения списков x26 и x25, а консеквент - тот же, что у исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- Использование альтернативы для ослабления antecedента, с последующей склейкой дизъюнкции альтернативных консеквентов в элементарную формулу.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \\ \text{точкалуча}(A, B, C) \rightarrow l(BC) = | - l(AC) + l(AB) |)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(C \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \\ l(AB) = l(AC) + l(BC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{точкалуча}(A, C, B) \rightarrow \\ B \in \text{отрезок}(AC) \ \vee \ C \in \text{отрезок}(AB))$$

Переменной x8 присваивается список antecedентов, переменной x12 - некоторый существенный antecedент. В нашем примере - " $C \in \text{отрезок}(AB)$ ". Проверяется, что утверждение x12 содержит все переменные теоремы и что оно имеет единственный подтерм максимальной сложности. Этот подтерм присваивается переменной x14, а переменной x15 присваивается его заголовок. В нашем примере x14 - " $\text{отрезок}(AB)$ ". Справочник поиска теорем "Альтернатива" определяет по символу x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x18 имеет вид:

$$\forall_{abc}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \text{точкалуча}(a, c, b) \rightarrow b \in \text{отрезок}(ac) \ \vee \ c \in \text{отрезок}(ab))$$

Переменной x19 присваивается список дизъюнктивных членов консеквента теоремы x18. В нем выбирается утверждение x20, содержащее все переменные теоремы x18. В нашем примере - " $b \in \text{отрезок}(ac)$ ". Переменной x21 присваивается список параметров терма x20. Определяется подстановка S вместо переменных x21, унифицирующая термы x20 и x12. Переменной x23 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x18. Проверяется, что каждое утверждение списка x23, полученное из существенного антецедента теоремы x18 и не входящее в список x8, является следствием утверждений x8.

В списке x19 выбирается утверждение x24, отличное от x20. В нашем примере - " $c \in \text{отрезок}(ab)$ ". Переменной x25 присваивается результат применения к x24 подстановки S . Переменной x26 присваивается результат переобозначения переменных исходной теоремы на переменные, не входящие в эту теорему и в теорему x18. В нашем примере x26 имеет вид:

$$\forall_{def}(f \in \text{отрезок}(de) \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \rightarrow l(de) = l(df) + l(ef))$$

Переменной x27 присваивается список антецедентов теоремы x26, переменной x28 - существенный антецедент теоремы x27, номер которого равен номеру антецедента x12 исходной теоремы. В нашем примере x28 имеет вид " $f \in \text{отрезок}(de)$ ". Переменной x29 присваивается список параметров терма x28. Определяется подстановка R вместо переменных x29, унифицирующая термы x28 и x25. Переменной x31 присваивается объединение списка отличных от x12 утверждений набора x8 со списком результатов применения подстановки R к отличным от x28 элементам набора x27. Переменной x32 присваивается результат применения подстановки R к консеквенту теоремы x26. Переменной x33 присваивается дизъюнкция консеквента исходной теоремы и утверждения x32. Переменной x34 присваивается результат обработки этой дизъюнкции оператором "нормили". В нашем примере x34 имеет вид " $l(BC) = |-l(AC) + l(AB)|$ ". Проверяется, что утверждение x34 элементарно. Создается импликация с антецедентами x31 и консеквентом x34. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Попытка замены самого сложного антецедента на более простые.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{fABC}(C - \text{set} \ \& \ C \subseteq A \ \& \ \text{конечное}(B) \ \& \ \text{конечное}(C) \ \& \ \text{Отображение}(f, A, B) \rightarrow \text{card}(C) = \sum_{y, y \in B} \text{card}(\text{слой}(\text{сужение}(f, C), y)))$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ \text{разбиение}(b, c) \ \& \ \text{конечные}(c) \ \& \ \text{классмножеств}(c) \rightarrow \text{card}(b) = \sum_{a, a \in c} \text{card}(a))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{fABC}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ \text{Отображение}(f, A, B) \ \& \ C - \text{set} \ \& \ C \subseteq A \rightarrow \text{разбиение}(C, \text{set}_x(\exists_y(y \in B \ \& \ x = \text{слой}(\text{сужение}(f, C), y))))))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Находится антецедент с наибольшей оценкой сложности и проверяется, что он единственный. Этот антецедент присваивается переменной x13. В нашем примере - антецедент "разбиение(b, c)". Проверяется, что наиболее сложные подтерм утверждения x13 - оно само. Переменной x15 присваивается заголовок терма x13. Справочник поиска теорем "реализация" определяет по x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается вхождение антецедента x13 в теорему. Оператор "выводпосылки" определяет результат последовательного применения дополнительной и исходной теорем при унификации антецедента x18 исходной теоремы с консеквентом дополнительной. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Использование определения для устранения многоместного предиката в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac} (c\text{-set} \ \& \ C\text{-set} \ \& \ C \subseteq \text{Dom}(a) \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq c \ \& \ a\text{-функция} \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ \text{конечное}(C) \rightarrow \text{card}(C) = \sum_{y,y \in c} \text{card}(\text{слой}(\text{сужение}(a, C), y)))$$

из теоремы

$$\forall_{fABC} (C\text{-set} \ \& \ C \subseteq A \ \& \ \text{конечное}(B) \ \& \ \text{конечное}(C) \ \& \ \text{Отображение}(f, A, B) \rightarrow \text{card}(C) = \sum_{y,y \in B} \text{card}(\text{слой}(\text{сужение}(f, C), y)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{fAB} (\text{Отображение}(f, A, B) \leftrightarrow f\text{-функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = A \ \& \ B\text{-set} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq B)$$

Рассматривается вхождение x8 антецедента, имеющего не менее трех корневых операндов. В нашем примере - антецедента "Отображение(f, A, B)". Переменной x9 присваивается заголовок этого антецедента. Справочник поиска теорем "определение" находит по символу x9 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x13 присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x9, переменной x14 - вхождение другой части. Проверяется, что подтерм x14 не является дизъюнкцией, и переменной x15 присваивается список его конъюнктивных членов. Проверяется, что все они элементарны. Проверяется, что утверждения списка x15 не содержат подутверждений с более чем двумя корневыми операндами. Оператор "тождвывод" определяет результат x16 преобразования вхождения x8 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Попытка свести равенство двух одноименных числовых атомов в антецедентах к качественному условию.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc} (\neg(a = b) \ \& \ c \in \text{окружность}(ab) \ \& \ a\text{-точка} \ \& \ b\text{-точка} \ \& \ c\text{-точка} \rightarrow l(bc) = 2 \sin(\angle(bac)/2)l(ab))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ l(AC) = l(BC) \rightarrow l(AB) = 2 \sin(\angle(ACB)/2)l(BC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \rightarrow l(AC) = l(AB))$$

Рассматривается вхождение х8 antecedента исходной теоремы, представляющего собой равенство. В нашем примере - antecedента " $l(AC) = l(BC)$ ". Проверяется, что других равенств в antecedентах нет. Проверяется, что х8 - равенство двух невырожденных числовых атомов, имеющих один и тот же заголовок х11. В нашем примере - символ "расстояние". Справочник поиска теорем "равнчисл" определяет по х11 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что в ее списке antecedентов нет равенства. Оператор "выводпосылки" определяет результат х14 последовательного применения дополнительной и исходной теорем при унификации antecedента х8 исходной теоремы с консеквентом дополнительной. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

6. Попытка перейти к ослабленным отношениям в antecedентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdhK}(b \in \{1, 2, 3\} \ \& \ c \in h \ \& \ d \in h \ \& \ 0 \leq d - c \ \& \ \text{прямоорд}(K) \ \& \ \text{неподв}(K, h) \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Равндвиж}(a, h) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Числотр}(h) \ \& \ \text{мтело}(K) \rightarrow \text{крд}(\text{Место}(a, d), K, b) = (d - c)\text{крд}(\text{Скорость}(a, K, h), K, b) + \text{крд}(\text{Место}(a, c), K, b))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdhK}(0 < d - c \ \& \ b \in \{1, 2, 3\} \ \& \ c \in h \ \& \ d \in h \ \& \ \text{прямоорд}(K) \ \& \ \text{неподв}(K, h) \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Равндвиж}(a, h) \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Числотр}(h) \ \& \ \text{мтело}(K) \rightarrow \text{крд}(\text{Место}(a, d), K, b) = (d - c)\text{крд}(\text{Скорость}(a, K, h), K, b) + \text{крд}(\text{Место}(a, c), K, b))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a < b \rightarrow a \leq b)$$

Переменной х8 присваивается список antecedентов, переменной х10 - консеквент. Выбирается некоторый существенный antecedент х13 с заголовком х14, отличным от символа "не". В нашем примере - antecedент " $0 < d - c$ ". Справочник поиска теорем "ослабление" определяет по символу х14 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что antecedент х13 не используется для сопровождения по о.д.з. других antecedентов и консеквента. Переменной х17 присваивается заголовок консеквента дополнительной теоремы. В нашем примере - символ "меньшеилиравно". Переменной х18 присваивается результат замены заголовка утверждения х13 на символ х17. Переменной х19 присваивается результат замены в списке х8 утверждения х13 на пару утверждений - отрицание утверждения х13 и утверждение х18. В нашем примере - на пару " $\neg(0 < d - c)$ ", " $0 \leq d - c$ ". Проверяется, что утверждение х10 является следствием утверждений х19. Создается импликация, antecedенты которой получают из списка х8 заменой утверждения х13 на х18, а консеквентом служит

x10. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

Исключение равенства в антецедентах путем разрешения относительно уникальной переменной, встречающейся в консеквенте

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{adK}(\text{Вектор}(a) \& \text{Вектор}(d) \& \text{прямоорд}(K) \& \text{вертикапр}(a, K) \& \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \text{скалмнож}(a, d) = \text{крд}(a, K, 3)\text{крд}(d, K, 3))$$

из теоремы

$$\forall_{adefhK}(\text{коорд}(d, K) = (e, f, h) \& \text{Вектор}(a) \& \text{Вектор}(d) \& \text{прямоорд}(K) \& \text{вертикапр}(a, K) \rightarrow \text{скалмнож}(a, d) = h\text{крд}(a, K, 3))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - консеквент. В списке x8 выбирается равенство x11 и переменной x12 присваивается список его параметров. В нашем примере x11 имеет вид "коорд(d, K) = (e, f, h)", x12 - список d, e, f, h, K. Переменной x13 присваивается список тех параметров набора x12, которые встречаются в антецедентах только внутри равенства x11. В нашем примере это параметры e, f, h. В списке x13 выбирается переменная x14, входящая в консеквент. В нашем примере - переменная h. Проверяется, что прочие переменные списка x13 не встречаются в консеквенте. Переменной x16 присваивается список утверждений набора x8, отличных от равенства x11. Решается задача на описание с посылками x16 и единственным условием x11. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x13", "параметры X", где X - отличные от x14 переменные набора x13. Ответ задачи присваивается переменной x17. В нашем примере он имеет вид "h = крд(d, K, 3) & Трехмерн(K)". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x18 присваивается список его конъюнктивных членов. В этом списке находится равенство с переменной x14 в левой части. Переменной x20 присваивается правая часть равенства. Переменной x21 присваивается объединение списка отличных от x11 утверждений набора x8 со список отличных от x19 утверждений набора x18. Переменной x22 присваивается результат подстановки в консеквент x10 вместо переменной x14 выражения x20. Создается импликация с антецедентами x21 и консеквентом x22. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительного тождества для преобразования заменяющего выражения

1. Последовательное выражение числовых атомов в одном и том же контексте.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \neg(B = C) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \rightarrow \angle(BAC) = \arccos((l(AC) - \cos(\angle(ACB))l(BC))/(l(AC)^2 + l(BC)^2 - 2 \cos(\angle(ACB))l(AC)l(BC))^{1/2}))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \neg(A = C) \& \neg(A = B) \rightarrow \angle(BAC) = \arccos((l(AC)^2 + l(AB)^2 - l(BC)^2)/(2l(AB)l(AC))))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow l(BC) = \sqrt{l(AC)^2 + l(BC)^2 - 2 \cos(\angle(BAC))l(AB)l(AC)})$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Переменной x12 присваивается та часть равенства в консеквенте, которая представляет собой числовой атом. В нашем примере - " $\angle(BAC)$ ". Переменной x14 присваивается другая часть. Переменной x15 присваивается список невырожденных числовых атомов выражения x14. В нашем примере - " $l(BC), l(AB), l(AC)$ ". Проверяется, что список x15 непуст. В списке вывода находится дополнительная теорема, отличная от исходной и имеющая характеристику "числзнач". Переменной x19 присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Проверяется, что он совпадает со списком x8. Переменной x20 присваивается консеквент дополнительной теоремы. Переменным x21 присваивается корневая связывающая приставка исходной теоремы. Проверяется, что она совпадает с корневой связывающей приставкой дополнительной теоремы. Переменной x25 присваивается та часть равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая является числовым атомом. В нашем примере - " $l(BC)$ ". Проверяется, что ее заголовок отличен от заголовка атома x12. В списке x15 выбирается числовой атом x27 с тем же заголовком, что у x25. В нашем примере - атом $l(AB)$. Усматривается перестановка S переменных x21, переводящая терм x25 в терм x27. В нашем примере эта перестановка переводит переменные A, B, C в C, A, B . Переменной x29 присваивается отличная от x25 часть равенства в консеквенте дополнительной теоремы. Переменной x30 присваивается список обработанных оператором "станд" результатов применения подстановки S к невырожденным числовым атомам выражения x29. В нашем примере x30 состоит из атомов " $\angle(ACB)$ ", " $l(AC)$ ", " $l(BC)$ ". Проверяется, что x30 не содержит обработанного оператором "станд" атома x12. Переменной x31 присваивается результат применения к выражению x29 подстановки S , переменной x33 - результат замены в выражении x14 всех вхождений атома x27 на выражение x31.

Переменной x34 присваивается равенство атома x12 выражению x33. Переменной x35 присваивается объединение списка x8 со списком результатов применения к утверждения набора x19 подстановки S . При помощи вспомогательной задачи на исследование контролируется непротиворечивость списка x35. Затем создается импликация с антецедентами x35 и консеквентом x34. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка подставить выражение для варьируемого числового атома под описателем "отображение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acdeg}(e = [c, d] \ \& \ e \subseteq g \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{равндвиж}(a, g) \ \& \ \text{Числотр}(e) \ \& \ \text{Числотр}(g) \rightarrow \text{длина}(\text{Путь}(a, [c, d])) = (d - c)\text{скорость}(a, g))$$

из теоремы

$$\forall_{acde}(e = [c, d] \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(e) \rightarrow \text{длина}(\text{Путь}(a, [c, d])) = \int_c^d \text{скорость}(a, t)dt)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{atT}(\text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \ \& \ \text{равндвиж}(a, T) \ \& \ t \in T \rightarrow \text{скорость}(a, T) = \text{скорость}(a, t))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{12} - та часть равенства в консеквенте, которая является невырожденным числовым атомом. В нашем примере - "длина(Путь($a, [c, d]$))". Переменной x_{11} присваивается вхождение другой части равенства. Внутри выхождения x_{11} рассматривается вхождение x_{14} символа "отображение". В нашем примере x_{14} - вхождение подтерма " $\lambda_t(\text{скорость}(a, t), t - \text{число} \ \& \ c \leq t \ \& \ t \leq d)$ ". Переменной x_{15} присваивается связывающая приставка описателя x_{14} , переменной x_{16} - последний операнд описателя (он определяет значение функции). Рассматривается невырожденный числовой атом x_{17} выражения x_{16} . В нашем примере - " $\text{скорость}(a, t)$ ". Проверяется, что параметры атома x_{17} пересекаются со списком x_{15} . Переменной x_{18} присваивается вхождение в исходную теорему выражения x_{17} , расположенное внутри x_{14} . Переменной x_{19} присваивается заголовок атома x_{17} . В нашем примере - " скорость ".

Определяется раздел, к которому относится x_{19} (в нашем примере - "кинематика"), и в этом разделе находится дополнительная теорема, имеющая характеристику "числзнач" либо "равны". Проверяется, что все переменные дополнительной теоремы встречаются среди параметров консеквента. Проверяется, что x_{19} является заголовком какой-либо части равенства в консеквенте дополнительной теоремы. Переменной x_{25} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{25} имеет вид:

$$\forall_{bfg}(\text{мточка}(b) \ \& \ \text{Числотр}(g) \ \& \ \text{равндвиж}(b, g) \ \& \ f \in g \rightarrow \text{скорость}(b, g) = \text{скорость}(b, f))$$

Переменной x_{30} присваивается та часть равенства в консеквенте теоремы x_{25} , которая имеет заголовок x_{19} , переменной x_{29} - другая часть. Проверяется, что выражение x_{29} элементарное. В нашем примере x_{29} - " $\text{скорость}(b, g)$ ", x_{30} - " $\text{скорость}(b, f)$ ". Переменной x_{31} присваивается список параметров терма x_{30} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{31} , переводящая терм x_{30} в x_{17} . Переменной x_{33} присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_{25} . Проверяется, что среди утверждений x_{33} нет равенства, заголовок правой части которого отличался бы от символа "промежуток". Список x_{33} разбивается на подсписок x_{34} утверждений, содержащих переменные x_{15} , и подсписок x_{35} остальных утверждений. Переменной x_{36} присваивается объединение списков x_8 и x_{35} .

Если список x_{34} непуст, то формируется кванторная импликация со связывающей приставкой x_{15} , конъюнктивными членами предпоследнего операнда описателя x_{14} в качестве антецедентов и конъюнкцией утверждений x_{34} в качестве консеквента. Эта импликация присоединяется к списку x_{36} .

Переменной x_{37} присваивается результат применения подстановки S к выражению x_{29} . Проверяется, что x_{37} не имеет невырожденного числового атома,

параметры которого пересекались бы со списком x15. В нашем примере x37 имеет вид "скорость(a, g)".

Переменной x38 присваивается результат замены в консеквенте исходной теоремы вхождения x18 на выражение x37. Создается импликация с антецедентами x36 и консеквентом x38. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "сокращ", а затем - операторами "исключант" и "упрощант". Затем эта импликация регистрируется в списке вывода.

3. Попытка подставить выражение для варьируемого атомарного выражения под описателем "отображение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{acdehK}(e = [c, d] \& e \subseteq h \& c\text{-число} \& d\text{-число} \& \text{прямокоорд}(K) \& \text{неподв}(K, h) \& \text{мточка}(a) \& \text{Равндвиж}(a, h) \& \text{Трехмерн}(K) \& \text{Числотр}(e) \& \text{Числотр}(h) \& \text{мтело}(K) \rightarrow \text{крд}(\text{Место}(a, d), K, 1) = (d - c)\text{крд}(\text{Скорость}(a, K, h), K, 1) + \text{крд}(\text{Место}(a, c), K, 1))$$

из теоремы

$$\forall_{acdeK}(e = [c, d] \& c\text{-число} \& d\text{-число} \& \text{прямокоорд}(K) \& \text{мточка}(a) \& \text{Трехмерн}(K) \& \text{Числотр}(e) \& \text{мтело}(K) \rightarrow \text{крд}(\text{Место}(a, d), K, 1) = \text{крд}(\text{Место}(a, c), K, 1) + \int_c^d \text{крд}(\text{Скорость}(a, K, t), K, 1)dt)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{aKTt}(\text{мточка}(a) \& \text{Числотр}(T) \& \text{неподв}(K, T) \& \text{Равндвиж}(a, T) \& t \in T \rightarrow \text{Скорость}(a, K, T) = \text{Скорость}(a, K, t))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x12 - та часть равенства в консеквенте, которая является невырожденным числовым атомом. В нашем примере - "крд(Место(a, d), $K, 1$)". Переменной x11 присваивается вхождение другой части равенства. Внутри выхождения x11 рассматривается вхождение x14 символа "отображение". В нашем примере x14 - вхождение подтерма " $\lambda_t(\text{крд}(\text{Скорость}(a, K, t), K, 1), t\text{-число} \& c \leq t \& t \leq d)$ ". Переменной x15 присваивается связывающая приставка описателя x14, переменной x16 - последний операнд описателя (он определяет значение функции). Рассматривается невырожденный числовой атом x17 выражения x16. В нашем примере - "крд(Скорость(a, K, t), $K, 1$)". Проверяется, что параметры атома x17 пересекаются со списком x15. Переменной x18 присваивается вхождение в исходную теорему выражения x17, расположенное внутри x14.

Рассматривается расположенное строго внутри вхождения x18 вхождение x19 неоднобуквенного подтерма x21. Переменной x20 присваивается заголовок этого подтерма. В нашем примере x21 имеет вид "Скорость(a, K, t)". Проверяется, что выражение x21 атомарное, и переменной x23 присваивается тип его значения. В нашем примере - символ "Вектор". Переменной x24 присваивается название раздела, к которому относится символ x20. В нашем примере - "кинематика". В этом разделе находится дополнительная теорема, имеющая характеристику "Атомарное(x23)". Проверяется, что все переменные дополнительной

теоремы встречаются среди параметров консеквента. Проверяется, что x_{20} является заголовком какой-либо части равенства в консеквенте дополнительной теоремы. Переменной x_{29} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{29} имеет вид:

$$\forall_{bghf}(\text{мточка}(b) \ \& \ \text{Числотр}(h) \ \& \ \text{неподв}(g, h) \ \& \ \text{Равндвиж}(b, h) \ \& \ f \in h \rightarrow \text{Скорость}(b, g, h) = \text{Скорость}(b, g, f))$$

Переменной x_{34} присваивается та часть равенства в консеквенте теоремы x_{29} , которая имеет заголовок x_{20} , переменной x_{33} - другая часть. Проверяется, что выражение x_{33} элементарное. В нашем примере x_{33} - " $\text{Скорость}(b, g, h)$ ", x_{34} - " $\text{Скорость}(b, g, f)$ ". Переменной x_{35} присваивается список параметров терма x_{34} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{35} , переводящая терм x_{34} в x_{21} . Переменной x_{37} присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам теоремы x_{29} . Проверяется, что среди утверждений x_{37} нет равенства. Список x_{37} разбивается на подсписок x_{38} утверждений, содержащих переменные x_{15} , и подсписок x_{39} остальных утверждений. Переменной x_{40} присваивается объединение списков x_{38} и x_{39} .

Если список x_{38} непуст, то формируется кванторная импликация со связывающей приставкой x_{15} , конъюнктивными членами предпоследнего операнда описателя x_{14} в качестве антецедентов и конъюнкцией утверждений x_{38} в качестве консеквента. Эта импликация присоединяется к списку x_{40} .

Переменной x_{41} присваивается результат применения подстановки S к выражению x_{33} . Проверяется, что x_{41} не имеет атомарное подвыражения типа x_{23} , параметры которого пересекались бы со списком x_{15} . В нашем примере x_{41} имеет вид " $\text{Скорость}(a, K, h)$ ".

Переменной x_{42} присваивается результат замены в консеквенте исходной теоремы вхождения x_{19} на выражение x_{41} . Создается импликация с антецедентами x_{40} и консеквентом x_{42} . Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "сокращ", а затем - операторами "исключант" и "упрощант". Затем эта импликация регистрируется в списке вывода.

Использование теоремы для преобразования дополнительного тождества

1. Использование теоремы для преобразования дополнительного сокращающего тождества.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_z(z - \text{комплексное} \rightarrow |z|^2 = \text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2)$$

из теоремы

$$\forall_z(z - \text{комплексное} \rightarrow \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2} = |z|)$$

и дополнительной теоремы

$$\text{forall}_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 \leq a \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow (a^{1/b})^b = a)$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{10} - консеквент. Переменной x_{11} присваивается список невырожденных числовых атомов терма x_{10} . В нашем примере он состоит из выражений " $\text{Re}(z)$ ", " $\text{Im}(z)$ ", " $|z|$ ". Проверяется, что параметры антецедентов включаются в параметры консеквенте. Переменной x_{14} присваивается та часть равенства в консеквенте, которая принадлежит списку x_{11} . Переменной x_{15} присваивается другая часть равенства. В нашем примере x_{14} - " $|z|$ ", x_{15} - " $\sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2}$ ". Проверяется, что либо оценка сложности терма x_{14} меньше оценки сложности терма x_{15} , либо эти оценки равны, но число имеющих максимальную сложность подтермов терма x_{14} меньше, чем у x_{15} . Переменной x_{16} присваивается заголовок терма x_{15} . В нашем примере - символ "степень". Проверяется, что этот символ некоммутативен. Справочник поиска теорем "сокращдоби" определяет по x_{16} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{20} присваивается вхождение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, некоторый операнд x_{21} которой имеет заголовок x_{16} . В нашем примере x_{21} - вхождение терма " $a^{1/b}$ ". Оператор "тождвывод" определяет результат x_{23} преобразования вхождения x_{21} в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование теоремы для преобразования дополнительной эквивалентности

1. Преобразование дополнительной эквивалентности, переформулирующей равенство числового атома константе через более простые условия.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(c \in \text{отрезок}(ab) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \rightarrow l(ab) = l(bc) \leftrightarrow a = c)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(C \in \text{отрезок}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow l(AC) = l(AB) - l(BC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \rightarrow l(AB) = 0 \leftrightarrow A = B)$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{12} - та часть равенства в консеквенте, которая представляет собой невырожденный числовой атом. Проверяется, что другая часть не содержит символа "дробь". В нашем примере x_{12} - атом " $l(AC)$ ". Переменной x_{14} присваивается заголовок выражения x_{12} , после чего справочник поиска теорем "числ" определяет по x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{18} присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте дополнительной теоремы, которая представляет собой равенство. Переменной x_{19} присваивается вхождение той части равенства, заголовок которой равен x_{14} . В нашем примере - вхождение выражения " $l(AB)$ ". Справочник поиска теорем "тождвывод" определяет результат преобразования вхождения x_{19} в дополнительную теорему при помощи исходной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Попытка варьирования теоремы путем дополнительного построения, позволяющего исключить старую переменную в заменяющей части.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aABC}(\neg(a = C) \& \neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \neg(B = C) \& l(aB) = l(BC) \& A \in \text{прямая}(aC) \& a - \text{точка} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{прямая}(aC) \perp \text{прямая}(AB) \rightarrow l(AB) = \cos(\angle(aBC)/2)l(BC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \neg(B = C) \& \neg(A = C) \& \neg(A = B) \& \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(AB) = \cos(\angle(ABC))l(BC))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x12 - та часть равенства в консеквенте, которая представляет собой невырожденный числовой атом. В нашем примере - " $l(AB)$ ". Переменной x14 присваивается другая часть равенства. В нашем примере - " $\cos(\angle(ABC))l(BC)$ ". Проверяется, что теорема не содержит символов "вариант", "минимум", "максимум", а число переменных ее корневой связывающей приставки меньше 7. Если консеквент теоремы содержит числовой атом с более чем 3 параметрами, то проверяется, что длина корневой связывающей приставки не больше 4. Переменной x15 присваивается результат добавления к списку x8 термина "консеквент(P)", где P - консеквент теоремы.

Решается задача на исследование x16 с посылками x15 и целями "допкадр", "неизвестные X", где X - все параметры утверждений x15. Цель "допкадр" означает, что предпринимается перечисление возможных дополнительных построений в посылках теоремы, каждое из которых ориентировано на исключение из теоремы некоторого выражений. Такие дополнительные построения накапливаются в комментариях (допкадр $A_1A_2A_3$). Здесь A_1 - конъюнкция дополнительных посылок, содержащих новые переменные, A_2 - конъюнкция соотношений, которые могут оказаться полезными при исключении выражений, A_3 - список выражений, которые должны быть исключены из теоремы после ввода новых посылок. У задачи с целью "допкадр" обычно вводится посылка "консеквент(...)", указывающая на консеквент теоремы.

Задача x16 решается при малом уровне обращения (равном 3). После ее решения находится комментарий (допкадр $A_1A_2A_3$) к ее посылкам. В нашем примере терм A_1 имеет вид " $a - \text{точка} \& A \in \text{прямая}(Ca) \& \neg(C = a) \& l(CB) = l(Ba)$ ", терм " A_2 " - вид " $\angle(CBA) = \angle(CBa)/2$ ", список A_3 состоит из переменной A. Проверяется, что A_3 состоит из некоторой переменной x19, являющейся параметром выражения x12 и имеющей единственное вхождение в терм x14. Выбирается переменная x20, не входящая в исходную теорему и в терм A_1 . Переменной x21 присваивается список конъюнктивных членов утверждения A_1 , переменной x22 - объединение списков x8, x21, набора конъюнктивных членов утверждения A_2 и равенства выражений x20, x14.

Решается задача на исследование с посылками x22 и целями "исключ x19", "известно", "неизвестные Y", где Y - все параметры ее посылок. После решения

задачи в ее списке посылок выбирается равенство x_{25} с переменной x_{20} в одной части и не содержащим переменной x_{19} выражением x_{28} в другой. В нашем примере - равенство $\cos(\angle(aBC)/2)l(aB) = b$. Переменной x_{28} присваивается равенство выражений x_{12} и x_{28} . Создается импликация с антецедентами x_8 и x_{21} , консеквентом которой служит равенство x_{29} . Переменной x_{30} присваивается результат обработки этой импликации оператором "нормтеорема". Проверяется, что x_{30} - кванторная импликация, причем количество невырожденных числовых атомов в ее консеквенте не больше, чем у исходной теоремы. Проверяется также, что число переменных корневой связывающей приставки теоремы x_{30} не более чем на единицу превосходит такое число для исходной теоремы. Затем теорема x_{30} регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на описание для вывода следствий теоремы

1. Попытка отождествить аргументы двух одноместных числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ijnA}(\neg(i - j = 0) \ \& \ \forall_a(a \in \{1, \dots, n\} \rightarrow A(a, i) = A(a, j)) \ \& \ i \in \{1, \dots, n\} \ \& \ j \in \{1, \dots, n\} \ \& \ \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \rightarrow \det(A) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ijnA}(\neg(i - j = 0) \ \& \ i \in \{1, \dots, n\} \ \& \ j \in \{1, \dots, n\} \ \& \ \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \rightarrow \det(A) = -\det(\text{транспстлб}(A, i, j)))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{12} - та часть равенства в консеквенте, которая представляет собой невырожденный числовой атом с единственным корневым операндом. В нашем примере - " $\det(A)$ ". Переменной x_{14} присваивается другая часть равенства. В нашем примере - " $-\det(\text{транспстлб}(A, i, j))$ ". Проверяется, что выражение x_{14} имеет единственный числовой атом x_{16} . В нашем примере - " $\det(\text{транспстлб}(A, i, j))$ ". Проверяется, что атомы x_{12} и x_{16} имеют один и тот же заголовок, причем число корневых операндов атома x_{16} равно 1. Переменной x_{18} присваивается корневой операнд атома x_{12} , переменной x_{19} - корневой операнд атома x_{16} . Переменной x_{20} присваивается равенство выражений x_{18} и x_{19} . В нашем примере x_{20} имеет вид " $A = \text{транспстлб}(A, i, j)$ ". Переменной x_{21} присваивается список общих параметров выражений x_{18} и x_{19} . В нашем примере этот список состоит из единственной переменной A . Проверяется, что список x_{21} непуст. Список x_8 разбивается на подсписок x_{22} утверждений, содержащих переменные набора x_{21} , и подсписок x_{23} остальных утверждений. Переменной x_{24} присваивается результат добавления к списку x_{22} равенства x_{20} . Решается задача на описание с посылками x_{25} и условиями x_{24} . Цели задачи - "полный", "прямой ответ", "попыткаспуска", "неизвестные x_{21} ". Ответ задачи присваивается переменной x_{27} . В нашем примере он имеет вид " $\forall_a(a \in \{1, \dots, n\} \rightarrow A(a, j) = A(a, i)) \ \& \ \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \ \& \ \forall_a(a \in \{1, \dots, n\} \rightarrow A(a, i) = A(a, j))$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{28} присваивается набор конъюнктивных членов результата обработки утверждения x_{27} оператором "станд". Проверяется, что если переменная списка x_{21} имеет в утверждении списка x_{28} больше одного вхождения, то каждое ее вхождение в это

утверждение - операнд символа "значение". Переменной x29 присваивается результат замены вхождений атома x16 в консеквент исходной теоремы на атом x12. Создается импликация с антецедентами x23, x28 и консеквентом x29. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.141 Характеристика "Числзнач"

Характеристикой "Числзнач" снабжаются тождества, в одной части которых находится нечисловая переменная, а в другой - выражение ее через невырожденные числовые атомы.

Попытка использовать ранее найденные тождества для численных характеристик двуместных отношений

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{nz}(\neg(z = 0) \ \& \ z - \text{комплексное} \ \& \ n - \text{натуральное} \rightarrow z^n = |z|^n \cos(n \cdot \arg(z)) + |z|^n \sin(n \cdot \arg(z))i)$$

из теоремы

$$\forall_z(z - \text{комплексное} \rightarrow z = |z|(\cos(\arg(z)) + i \sin \arg(z)))$$

и дополнительных теорем

$$\forall_z n(z - \text{комплексное} \ \& \ n - \text{число} \ \& \ 0 < n \rightarrow |z^n| = |z|^n)$$

$$\forall_z n(z - \text{комплексное} \ \& \ n - \text{целое} \ \& \ \neg(z = 0) \rightarrow \arg(z^n) = \text{нормарг}(n \cdot \arg(z)))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x12 - переменная, являющаяся одной из частей равенства в консеквенте. Переменной x13 присваивается другая часть равенства. В нашем примере x12 - переменная z , x13 - выражение " $|z|(\cos(\arg(z)) + i \sin \arg(z))$ ". Переменной x14 присваивается список числовых атомов выражений x13. Проверяется, что каждый атом списка x14 представляет собой одноместную операцию, примененную к переменной z . Переменной x15 присваивается заголовок первого выражения списка x14. В нашем примере - "Модуль". В разделе символа x15 находится первая дополнительная теорема, имеющая характеристику "числзнач". Проверяется, что консеквент этой теоремы - равенство, заголовок одной из частей которого есть x15. Переменной x23 присваивается вхождение корневого операнда этой части. В нашем примере - вхождение выражения z^n . Переменной x21 присваивается вхождение данной части, переменной x22 - вхождение другой части. Проверяется, что операнды вхождения x23 суть различные переменные x24 и x25. В нашем примере - переменные z и n . Проверяется, что первая дополнительная теорема не имеет отличных от x24 и x25 переменных. Переменной x26 присваивается подтерм x23. Переменной x27 присваивается объединение списка антецедентов первой дополнительной теоремы со списком результатов подстановки выражения x26 вместо переменной x12 в утверждения x8. Переменной x28 присваивается результат подстановки выражения x26 вместо переменной x12 в выражение x13.

Переменной x29 присваивается набор, состоящий из единственной пары (подтерм x21 - подтерм x22). Переменной x30 присваивается накопитель дополнительных теорем, в который заносится первая дополнительная теорема. Для заполнения данного накопителя предпринимается просмотр атомов x32 списка x14, начиная со второго.

Переменной x33 присваивается заголовок атома x32. В разделе, к которому относится символ x33, находится теорема x37 с характеристикой "числзнач". Проверяется, что консеквент этой теоремы - равенство, заголовок одной из частей которого есть x33. Переменной x41 присваивается вхождение корневого операнда этой части. Проверяется, что по этому вхождению расположен тот же символ, что по вхождению x23. Переменной x39 присваивается вхождение данной части, переменной x40 - вхождение другой части. Проверяется, что операнды вхождения x41 суть различные переменные x42 и x43. Проверяется, что теорема x37 не имеет отличных от x42 и x43 переменных. Переменной x26 присваивается подтерм x23. Переменной x27 присваивается объединение списка x27 со списком результатов подстановки переменных x24 и x25 вместо переменных x42 и x43 в antecedentes теоремы x37. Переменной x44 присваивается результат такой же подстановки в подтерм x39, а переменной x45 - в подтерм x40. К набору x29 добавляется пара (x44, x45), в к накопителю x30 - теорема x37. Если хотя бы для одного из атомов списка x14 дополнительная теорема x37 не найдена, срабатывание приема отменяется.

По завершении заполнения накопителей x29 и x30 все переменные, начиная с x31, снова оказываются не определены. Переменной x31 присваивается результат замены в выражении x28 подтермов - первых элементов пар списка x29 на вторые элементы этих пар. Создается импликация с antecedентами x27, консеквентом которой служит равенство выражений x26 и x31. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.142 Характеристика "числитель"

Характеристикой "числитель(N)" снабжаются эквивалентности, переформулирующие утверждение через отдельные разряды координат объектов. N - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Перенесение указателя типа в заменяющую часть определения равенства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ghiv}(g - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(h) \ \& \ \text{вертикалнпр}(h, i) \ \& \ \text{Трехмерн}(i) \rightarrow v = gh \leftrightarrow \text{Вектор}(v) \ \& \ g \cdot \text{крд}(h, i, 3) = \text{крд}(v, i, 3) \ \& \ \text{вертикалнпр}(v, i))$$

из теоремы

$$\forall_{ghiv}(g - \text{число} \ \& \ \text{Вектор}(h) \ \& \ \text{Вектор}(v) \ \& \ \text{вертикалнпр}(h, i) \ \& \ \text{Трехмерн}(i) \rightarrow v = gh \leftrightarrow g \cdot \text{крд}(h, i, 3) = \text{крд}(v, i, 3) \ \& \ \text{вертикалнпр}(v, i))$$

Переменной x10 присваивается заменяемая часть, переменной x11 - заменяющая, переменной x12 - список antecedентов. Проверяется, что консеквент теоремы - равенство некоторой переменной x15 выражению x16, не содержащему этой переменной. В нашем примере x15 - переменная v , x16 - выражение " gh " с заголовком "умножвект". Выбирается antecedент x17 длины 2, содержащий переменную x15. В нашем примере - "Вектор(v)". Проверяется, что заголовок

x18 антецедента x17 - название типа значения выражения x16. Создается импликация, антецеденты которой суть отличные от x17 утверждения набора x12, а консеквент - эквивалентность утверждения x10 конъюнкции утверждений x17 и x11. Она регистрируется в списке вывода.

3.143 Характеристика "числкоэфф"

Характеристикой "числкоэфф" снабжаются тождества, связывающие невырожденные числовые атомы с параметрами координат.

Логические следствия теоремы

1. Попытка разрешить не содержащее численных параметров подвыражение с невырожденными числовыми атомами относительно численных параметров.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{efghABCK}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (f, g) \& \text{коорд}(\text{вектор}(AC), K) = (e, h) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{прямокоорд}(K) \rightarrow \cos(\angle(ABC)) = (ef + gh)/(\sqrt{e^2 + h^2} \cdot \sqrt{f^2 + g^2}))$$

из теоремы

$$\forall_{efghABCK}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (f, g) \& \text{коорд}(\text{вектор}(AC), K) = (e, h) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{прямокоорд}(K) \rightarrow \cos(\angle(ABC)) = (ef + gh) = \sqrt{e^2 + h^2} \cdot \sqrt{f^2 + g^2} \cos(\angle(BAC)))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. В нашем примере он состоит из выражения " $\angle(BAC)$ ". Проверяется, что список x10 состоит из единственного выражения x11. Переменной x12 присваивается список численных параметров консеквента. В нашем примере - " e, f, g, h ". Проверяется, что обе части равенства в консеквенте содержат переменные списка x12. Оператор "явчисл" предпринимает попытку сгруппировать все численные параметры в одной части равенства x9, поделив обе части этого равенства на подходящее выражение с ненулевым значением. Проверяется, что получаемое при этом равенство x14 не имеет численных параметров в одной из своих частей. Создается импликация с антецедентами x8 и консеквентом x14, которая регистрируется в списке вывода.

2. Попытка преобразования консеквента для получения соотношения с исключенными сложными операциями.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cefghijkK}(\text{коорд}(e, K) = (g, h, i) \& \text{коорд}(k, K) = (c, f, j) \& \text{Вектор}(e) \& \text{Вектор}(k) \& \text{прямокоорд}(K) \rightarrow (cg + fh + ij)^2 = (c^2 + f^2 + j^2)(g^2 + h^2 + i^2)(\cos(\text{уголмежду}(e, k)))^2)$$

из теоремы

$$\forall_{cefg hijkK}(\text{коорд}(e, K) = (g, h, i) \ \& \ \text{коорд}(k, K) = (c, f, j) \ \& \ \text{Вектор}(e) \ \& \ \text{Вектор}(k) \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \rightarrow cg + fh + ij = \sqrt{c^2 + f^2 + j^2} \sqrt{g^2 + h^2 + i^2} \cos(\text{уголмежду}(e, k)))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается результат обработки равенства x9 нормализатором "нормчисл", предпринимающим попытку исключить сложные операции. В нашем примере нормализатор возводит обе части равенства в квадрат. Хотя при этом утверждение получается более слабое, зато радикалы исключаются. Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" термов x10 и x9 различны. Переменной x11 присваивается список оценок сложности подтермов терма x10, переменной x12 - такой же список для терма x9. Переменной x13 присваивается разность списков x11 и x12, переменной x14 - разность списков x12 и x11. Проверяется, что каждый элемент списка x13 меньше некоторого элемента списка x14. Переменной x15 присваивается список конъюнктивных членов утверждения x10. В нем выбирается равенство x16. Создается импликация с антецедентами x8 и консеквентом x16, которая регистрируется в списке вывода.

Замена переменных в теореме

1. Попытка перехода к соотношению для другого числового атома с исключением одного из объектов теоремы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdeACDK}(\neg(C = D) \ \& \ \neg(A \in \text{прямая}(CD)) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (d, e) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \rightarrow (c + ad + be)^2 = (a^2 + b^2)(\text{расстдопрямой}(A, \text{прямая}(CD)))^2)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDKabcde}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{xy}(ax + by + c = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (d, e) \rightarrow l(AB)^2 = (ad + be + c)^2 / (a^2 + b^2))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - список невырожденных числовых атомов консеквента. В нашем примере - единственный атом $l(AB)$. Проверяется, что список x10 непуст. Переменной x11 присваивается список параметров термов списка x10. В нем выбирается элемент x12. В нашем примере - переменная B . Переменной x13 присваивается результат добавления к списку x8 консеквента теоремы. Решается задача на исследование с посылками x13 и целями "теорвывод", "исключ x12". После решения в списке посылок выбирается численное равенство x16, не содержащее переменной x12. В нашем примере - " $|c + ad + be| / \sqrt{a^2 + b^2} = \text{расстдопрямой}(A, \text{прямая}(CD))$ ". Список x8 разбивается на подсписок x17 утверждений, содержащих переменную x12, и подсписок x18 остальных утверждений.

Решается задача на описание с посылками x18 и условиями x17. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x12", "параметры x12". Ответ задачи присваивается переменной x20. В нашем примере он имеет вид " $\neg(A \in \text{прямая}(CD))$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и не содержит переменной x12. Переменной x21 присваивается объединение списка x18 со списком конъюнктивных членов утверждения x20. Переменной x22 присваивается результат обработки равенства x16 оператором "нормчисл". Затем создается импликация с антецедентами x21 и консеквентом x22. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{afgK}(\text{коорд}(a, K) = (f, g) \ \& \ \text{Вектор}(a) \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \rightarrow \text{длина}(a) = \sqrt{f^2 + g^2})$$

из теоремы

$$\forall_{cdfgK}(\text{коорд}(\text{вектор}(cd), K) = (f, g) \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(cd)) = \sqrt{f^2 + g^2})$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$$

Программа приема практически дословно совпадает с программой одного из ранее рассмотренных приемов. Для удобства чтения повторим ее. Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - консеквент. Внутри терма x10 выбирается вхождение x11 неоднобуквенного атомарного подтерма x12. В нашем примере - "вектор(cd)". Переменной x13 присваивается заголовок выражения x12, переменной x15 - тип его значения. В нашем примере x15 - символ "Вектор". Переменной x16 присваивается список всех атомарных неоднобуквенных подвыражений утверждения x10, имеющих тип x15. Проверяется, что он непуст. В нашем примере этот список состоит из единственного выражения "вектор(cd)". Переменной x17 присваивается список параметров выражений x16. В нашем примере - c, d . Проверяется, что эти параметры встречаются в утверждении x10 только внутри вхождений выражений набора x16.

Справочник поиска теорем "парамопоисаниe" определяет по символу x15 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x20 присваивается вхождение эквивалентности в ее консеквенте. Проверяется, что заголовком левой части данной эквивалентности служит символ x15, а заголовком правой - квантор существования. Переменной x21 присваивается вхождение этого квантора, переменной x22 - список конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Переменной x23 присваивается переменная - корневой операнд левой части эквивалентности. В нашем примере - переменная a . В списке x22 находится равенство x24 с переменной x23 в левой части и заголовком x13 правой части. Переменной x25 присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x16. В нашем примере - список a . Переменной x28 присваивается результат замены в утверждении x10 подтермов

набора x_{16} на соответствующие переменные x_{25} . В нашем примере x_{28} имеет вид "длина(a) = $\sqrt{f^2 + g^2}$ ". Переменной x_{29} присваивается список параметров терма x_{28} . Переменной x_{30} присваивается объединение списка не содержащих переменных x_{17} утверждений набора x_8 со списком утверждений вида " $x_{15}(X)$ " для всевозможных переменных X набора x_{25} . Переменной x_{31} присваивается объединение списка содержащих переменные x_{17} утверждений набора x_8 со списком равенств выражений набора x_{16} соответствующим переменным набора x_{25} . Решается задача на описание с посылками x_{30} и условиями x_{31} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{17} ", "параметры x_{17} ", "исключ". Ответ задачи присваивается переменной x_{33} . В нашем примере он имеет вид "коорд(a, K) = (f, g)". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{34} присваивается объединение списка x_{30} со списком конъюнктивных членов утверждения x_{33} . Создается импликация с антецедентами x_{34} и консеквентом x_{28} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Обобщение теоремы

1. Попытка отбросить несущественный антецедент.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDEK} (\neg(D = E) \& K = (A, B, C) \& \text{коорд}(D, K) = (a, b) \& E \in \text{прямая}(AB) \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \text{прямая}(AC) \parallel \text{прямая}(DE) \& 0 \leq b \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow bl(AC) = l(DE))$$

из теоремы

$$\forall_{abABCDEK} (\neg(D = E) \& \neg(D \in \text{прямая}(AC)) \& K = (A, B, C) \& \text{коорд}(D, K) = (a, b) \& E \in \text{прямая}(AB) \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \text{прямая}(AC) \parallel \text{прямая}(DE) \& 0 \leq b \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow bl(AC) = l(DE))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_{10} - консеквент. Переменной x_{11} присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. консеквента. В списке x_8 выбирается не входящее в список x_{11} утверждение x_{12} с заголовком "не". В нашем примере - " $\neg(D \in \text{прямая}(AC))$ ". Переменной x_{13} присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. остальных антецедентов. В случае полярных координат к списку x_{13} добавляются условия различия начала координат и точки, координаты которой определяются. Проверяется, что утверждение x_{12} не входит в список x_{13} . Переменной x_{14} присваивается отрицание утверждения x_{12} . Переменной x_{15} присваивается результат замены в списке x_8 утверждения x_{12} на x_{14} . При помощи задачи на исследование анализируется противоречивость списка, полученного добавлением утверждений x_{11} к списку x_{15} . Если он противоречив, а противоречивость списка x_{15} не усматривается, то применение приема отменяется. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x_{10} - следствие утверждений x_{15} . При этом разрешается использовать теоремы, уже имеющиеся в списке вывода. Затем создается импликация, получаемая из исходной отбрасыванием антецедента x_{12} . Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

2. Исключение избыточного параметра антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDEK} (\neg(D \in \text{прямая}(AC)) \ \& \ \neg(A \in \text{интервал}(BE)) \ \& \ D - \text{точка} \ \& \\ E - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ (A, B, C) = K \ \& \ E \in \text{прямая}(AB) \ \& \\ \text{точкалуча}(A, B, E) \ \& \ \text{прямая}(AC) \parallel \text{прямая}(DE) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow \\ l(AE) = al(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{abABCDEFK} (D - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \\ \neg(D = E) \ \& \ \neg(D = F) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ F \in \text{прямая}(AC) \ \& \\ \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AB) \ \& \ E \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, E) \ \& \\ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow l(AE) = al(AB))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. В списке x8 находится равенство x10, заголовком одной части которого служит символ x13, являющийся названием некоторых координат, а заголовком другой части - символ "набор". В нашем примере x10 имеет вид "коорд(D, K) = (a, b)". Переменной x14 присваивается список переменных термов x9 и x10. В нашем примере - "a, b, A, B, D, E, K". Если в списке x8 имеется равенство, в левой части которого расположена одна из переменных списка x14, то к этому списку добавляются все переменные данного равенства. В нашем примере добавляется переменная C. Переменной x15 присваивается разность списка параметров антецедентов и списка x14. В нашем примере она состоит из единственной переменной F. Переменной x16 присваивается элемент списка x15. Переменной x17 присваивается список, получаемый из x8 удалением равенства x10. Решается задача на исследование с посылками x17 и целями "исключ x16", "известно", "неизвестные X", "антецеденты". Напомним, что цель "антецеденты" указывает на режим редактирования списка антецедентов теоремы. Она предотвращает появление избыточных посылок. По окончании решения задачи переменной x20 присваивается результат добавления равенства x10 к списку не имеющих заголовка "актив" посылок. Проверяется, что переменная x16 в утверждениях набора x20 не встречается. Создается импликация с антецедентами x20 и консеквентом x9, которая регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительного тождества для преобразования консеквента

1. Попытка использования тождества, выражающего сложный числовой атом через более простые.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefghiK} (\neg(f = g) \ \& \ \neg(h = i) \ \& \ \text{коорд}(h, K) = (d, e) \ \& \\ \text{коорд}(\text{прямая}(fg), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \\ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \\ i - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(fg) - \text{касательная к окружность}(hi) \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \rightarrow \\ (c + ad + be)^2 = (a^2 + b^2)l(hi)^2)$$

из теоремы

$$\forall_{abcdeACDK}(\neg(C = D) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (d, e) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \rightarrow (c + ad + be)^2 = (a^2 + b^2)\text{расстдопрямой}(A, \text{прямая}(CD))^2)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) - \text{касательная к окружность}(CD) \rightarrow \text{расстдопрямой}(C, \text{прямая}(AB)) = l(CD))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - список невырожденных числовых атомов консеквента. В нашем примере он состоит из единственного атома "расстдопрямой(A, прямая(CD))". В списке x10 выбирается атом x11, и переменной x12 присваивается его заголовок. Справочник поиска теорем "числатом" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается направление замены для дополнительной теоремы, при которой та часть равенства в консеквенте, которая имеет заголовок x12, оказывается заменяемой. В нашем примере x18 - "второйтерм". Переменной x19 присваивается вхождение атома x11 в консеквент исходной теоремы, причем проверяется, что такое вхождение единственное. Оператор "тождвывод" находит результат x20 преобразования вхождения x19 при помощи дополнительной теоремы, применяемой в направлении x18. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка проварьировать числовой атом консеквента с помощью определения через него другого выражения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcefgK}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(ab), K) = (f, g) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(ac), K) = (e, h) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \rightarrow ef + gh = \sqrt{e^2 + h^2} \cdot \sqrt{f^2 + g^2} \cos(\text{уголмежду}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(ac))))$$

из теоремы

$$\forall_{efghABCK}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(AB), K) = (f, g) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(AC), K) = (e, h) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \rightarrow ef + gh = \sqrt{e^2 + h^2} \cdot \sqrt{f^2 + g^2} \cos(\angle(BAC)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{уголмежду}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(AC)) = \angle(BAC))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент, переменной x10 - список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что этот список состоит из единственного атома x11. В нашем примере - " $\angle(BAC)$ ". Переменной x12 присваивается список численных параметров консеквента. В нашем примере - "e, f, g, h". Проверяется, что обе части равенства

в консеквенте имеют параметры списка x12. Переменной x15 присваивается вхождение атома x11 в консеквент теоремы. Переменной x16 присваивается заголовок этого атома. В нашем примере - "угол". Справочник поиска теорем "опратом" определяет по символу x16 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x21 преобразования вхождения x15 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Переменной x22 присваивается список антецедентов теоремы x21, переменной x23 - ее консеквент. Проверяется, что каждое нечисловое атомарное подвыражение терма x23 встречается в антецедентах x22. Переменной x24 присваивается результат обработки списка x22 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x23. Затем создается импликация с антецедентами x24 и консеквентом x23, которая и регистрируется в списке вывода.

Использование тождества для варьирования дополнительной теоремы

1. Подстановка значения числового атома, определяемого теоремой, в уравнение для координат множества объектов, упоминаемого в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefghiK}(\neg(f = g) \& \neg(h = i) \& \text{коорд}(h, K) = (d, e) \& \text{коорд}(\text{прямая}(fg), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \& x - \text{число} \& y - \text{число}) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& f - \text{точка} \& g - \text{точка} \& h - \text{точка} \& i - \text{точка} \& \text{прямая}(fg) - \text{касательная к окружности}(hi) \& \text{прямкоорд}(K) \rightarrow \text{коорд}(\text{окружность}(hi), K) = \text{set}_{lm}(-2dl - 2me - (c + ad + be)^2 / (a^2 + b^2) + d^2 + e^2 + l^2 + m^2 = 0 \& l - \text{число} \& m - \text{число}))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdefghiK}(\neg(f = g) \& \neg(h = i) \& \text{коорд}(h, K) = (d, e) \& \text{коорд}(\text{прямая}(fg), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \& x - \text{число} \& y - \text{число}) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& f - \text{точка} \& g - \text{точка} \& h - \text{точка} \& i - \text{точка} \& \text{прямая}(fg) - \text{касательная к окружности}(hi) \& \text{прямкоорд}(K) \rightarrow (c + ad + be)^2 = (a^2 + b^2)l(hi)^2)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abABK}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& \text{прямкоорд}(K) \& \neg(A = B) \& \text{коорд}(A, K) = (a, b) \rightarrow \text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) = \text{set}_{xy}((x - a)^2 + (y - b)^2 = l(AB)^2 \& x - \text{число} \& y - \text{число}))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что он состоит из единственного элемента T . В нашем примере - " $l(hi)$ ". Переменной x11 присваивается список всех неоднобуквенных элементарных подвыражений антецедентов, имеющих своими значениями множества, причем таких, что в антецедентах отсутствуют равенства для координат этих множеств. Проверяется, что список x11 одноэлементный, и переменной x12 присваивается его элемент. В нашем примере - " $окружность(hi)$ ". Переменной x13 присваивается результат добавления к списку x10 выражения x12. К этому списку добавляются все выражения для координат, встречающиеся в равенствах списка x8, а также невырожденные числовые атомы, для которых в списке x8 имеется равенство

их некоторой переменной. В нашем примере x13 будет состоять из выражений "l(hi)", "окружность(hi)", "коорд(h, K)", "коорд(прямая(fg), K)".

Справочник поиска теорем "уравнмножество" определяет по заголовку выражения x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x16 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную. В нашем примере x16 имеет вид

$$\forall_{jknpq}(n - \text{точка} \ \& \ p - \text{точка} \ \& \ \text{прямокоорд}(q) \ \& \ \neg(n = p) \ \& \ \text{коорд}(n, q) = (j, k) \rightarrow \text{коорд}(\text{окружность}(np), q) = \text{set}_{lm}((l - j)^2 + (m - k)^2 = l(np)^2 \ \& \ l - \text{число} \ \& \ m - \text{число}))$$

Проверяется, что все переменные корневой связывающей приставки теоремы x16 являются параметрами ее консеквента. Переменной x18 присваивается входение той части равенства в консеквенте теоремы x16, которая является обозначением координат, переменной x21 - список параметры этой части. Переменной x19 присваивается входение другой части равенства. В нашем примере x21 состоит из переменных n, p, q . Переменной x22 присваивается список антецедентов теоремы x16. Переменной x23 присваивается список координатных выражений, для которых в списке x22 имеются равенства. В нашем примере - единственное выражение "коорд(n, q)". Переменной x24 присваивается список невырожденных числовых атомов подтерма x19. В нашем примере - единственный атом $l(np)$. Если в списке x22 имеется равенство невырожденному числовому атому переменной, входящей в подтерм x19, то такой атом тоже заносится в список x24.

Переменной x25 присваивается список, образованный первым операндом входения x18, а также элементами списков x23 и x24. В нашем примере x25 состоит из выражений "окружность(np)", "коорд(n, q)", "l(np)". Переменной x26 присваивается список параметров термов x25. В нашем примере - " n, p, q ". Процедура "подбор" определяет подстановку S вместо переменных x26, переводящую термы набора x25 в некоторые термы набора x13, с точностью до изменения порядка операндов в коммутативных символах. В нашем примере вместо переменных n, p, q подставляются переменные h, i, K . Переменной x29 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям x22, переменной x30 - результат применения этой подстановки к консеквенту теоремы x16.

Выбирается переменная x31, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная j . Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения списка x8 и консеквент исходной теоремы, а единственным условием - равенство элемента T списка x10 переменной x31. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x31", "известно Y", "упростить". Здесь Y - список параметров консеквента исходной теоремы, не входящих в терм T . Ответ задачи присваивается переменной x34. В нашем примере он имеет вид: " $j = |c+ad+be|/\sqrt{a^2 + b^2}$ ". Проверяется, что x34 - равенство с переменной x31 в левой части. Переменной x35 присваивается правая часть. Переменной x37 присваивается результат замены всех входений терма T в утверждение x30 на выражение x35. Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения x8 и x29, а консеквент - x37. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Попытка исключения переменной, встречающейся в невырожденном числовом атоме консеквента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDEK}(\neg(D = E) \& \neg(D \in \text{прямая}(AC)) \& K = (A, B, C) \& \text{коорд}(D, K) = (a, b) \& E \in \text{прямая}(AB) \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \text{прямая}(AC) \parallel \text{прямая}(DE) \& 0 \leq b \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow bl(AC) = l(DE))$$

из теоремы

$$\forall_{abABCDEFK}(D - \text{точка} \& F - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \text{систкоорд}(K) \& \neg(D = E) \& \neg(D = F) \& K = (A, B, C) \& F \in \text{прямая}(AC) \& \text{прямая}(DF) \parallel \text{прямая}(AB) \& E \in \text{прямая}(AB) \& \text{точкалуча}(A, C, F) \& \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(AC) \& \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow l(AF) = bl(AC))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент, переменной x10 - список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что этот список непуст. В нашем примере он содержит атомы "l(AF)", "l(AC)". Переменной x11 присваивается список параметров атомов x10. В списке x8 находится равенство x12, имеющее в одной из своих частей выражение с заголовком x15, представляющим собой название координат, а в другой части - выражение с заголовком "набор". В нашем примере x12 имеет вид "коорд(D, K) = (a, b)", x15 - символ "коорд". Переменной x16 присваивается список параметров равенства x12. Если в x8 имеется равенство, одна из частей которого - переменная списка x16, а другая имеет заголовок "набор", то список параметров такого равенства добавляется к списку x16. В нашем примере x16 становится равно "a, b, D, K, A, B, C". Переменной x17 присваивается разность списков x11 и x16. Проверяется, что она состоит из единственной переменной x18. В нашем примере - из переменной F. Решается задача на исследование, посылки которой суть отличные от x12 утверждения набора x8, а также терм "фикс(x9)". Цели задачи - "известно", "антецеденты", "исключ x18", "неизвестные X", где X - все параметры посылок. По окончании решения составляется список x22 всех посылок задачи, не имеющих своим заголовком символ "актив". Проверяется, что этот список не имеет термов с переменной x18. В списке x22 находится терм x23 с заголовком "фикс". В нашем примере - "фикс(bl(AC) = l(DE))". Переменной x24 присваивается корневой операнд терма x23, переменной x25 - результат удаления из x22 терма x23. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x25 и равенство x12, а консеквентом - утверждение x24. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка вывода условия равенства заданных разрядов координат двух объектов с исключением вспомогательных параметров.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefgABCDEK}(\neg(g = E) \& \neg(g \in \text{прямая}(AB)) \& K = (A, B, C, D) \& \text{коорд}(g, K) = (d, e, f) \& \text{коорд}(E, K) = (a, b, c) \& g - \text{точка} \& E - \text{точка} \&$$

прямая(gE) \parallel прямая(AB) & однасторона(g, C , прямая(AB)) & систкоорд(K) \rightarrow
 $b = e$)

из теоремы

$\forall_{abcABCDEHK}(\neg(E = H) \& K = (A, B, C, D) \& \text{коорд}(E, K) = (a, b, c) \&$
 $H \in \text{прямая}(AB) \& E - \text{точка} \& H - \text{точка} \& \text{прямая}(AC) \parallel \text{прямая}(EH) \&$
 $\text{однасторона}(C, E, \text{прямая}(AB)) \& \text{систкоорд}(K) \rightarrow bl(AC) = l(EH))$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент, переменной x_{10} - список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что этот список непуст. В нашем примере он содержит атомы " $l(AC)$ ", " $l(EH)$ ". Переменной x_{11} присваивается список численных переменных консеквента. Проверяется, что он состоит из единственной переменной x_{12} , имеющей единственное вхождение в консеквент. В нашем примере x_{12} - переменная b . В списке x_8 находится равенство x_{13} , имеющее в одной из своих частей выражение T_1 с заголовком x_{16} , представляющим собой название координат, а в другой части - выражение T_2 с заголовком "набор". В нашем примере x_{13} имеет вид "коорд(E, K) = (a, b, c)", x_{16} - символ "коорд". Проверяется, что переменная x_{12} является операндом терма T_2 , а вторым операндом терма T_1 служит некоторая переменная x_{18} . В нашем примере - переменная K . Переменной x_{19} присваивается одноэлементный набор, состоящий из переменной x_{18} . Если в списке x_8 имеется равенство с переменной x_{18} в качестве одной из своих частей, то все параметры данного равенства добавляются к списку x_{19} . В нашем примере x_{19} состоит из переменных K, A, B, C, D . Переменной x_{20} присваивается список всех атомов набора x_{10} , параметры которых не включаются в набор x_{19} . Проверяется, что этот список состоит из единственного элемента x_{22} . В нашем примере - из элемента " $l(EH)$ ". Переменной x_{21} присваивается первый операнд терма T_1 . В нашем примере - " E ". Выбирается параметр x_{23} выражения x_{22} , не входящий в список x_{19} и отличный от x_{21} . В нашем примере - параметр H . Проверяется, что либо среди утверждений набора x_8 нет ни одного, содержащего одновременно переменные x_{21} и x_{23} , либо переменная x_{21} входит в терм x_{22} . Проверяется, что каждая переменная исходной теоремы, не входящая в список x_{19} и в консеквент x_9 , встречается в каком-либо антецеденте одновременно с переменной x_{21} .

Переменной x_{24} присваивается список параметров утверждений x_8 , не входящих в список x_{19} . В нашем примере x_{24} имеет вид " a, b, c, E, H ". Проверяется, что список x_{24} непуст, и переменной x_{25} присваивается список такой же длины, образованный переменными, не входящими в исходную теорему. В нашем примере x_{25} имеет вид " d, e, f, g, h ". Переменной x_{26} присваивается список результатов замены переменных x_{24} на переменные x_{25} во всех антецедентах теоремы, содержащих переменные x_{24} . Переменной x_{27} присваивается результат замены переменных x_{24} на x_{25} в выражении x_{22} . В нашем примере он имеет вид " $l(gh)$ ". Переменной x_{28} присваивается результат объединения списков x_8 и x_{26} , с последующим добавлением равенства выражений x_{22} и x_{27} . Переменной x_{29} присваивается равенство переменной x_{12} соответствующей переменной списка x_{25} . В нашем примере - равенство " $b = e$ ". Проверяется, что x_{29} вытекает из объединения списка x_{28} с консеквентом теоремы и с результатом замены в консеквенте переменных x_{24} на x_{25} .

Переменной x30 присваивается та переменная списка x25, которая соответствует переменной x23 списка x24. В нашем примере - переменная h . Решается задача на исследование с посылками x28 и целями "антецеденты", "неизвестные X ", "усиление", "исключ x23 x30". Здесь X - все параметры антецедентов. По окончании решения список посылок задачи присваивается переменной x33. Проверяется, что переменные x23 и x30 не входят в параметры утверждений x33. Переменной x35 присваивается список всех утверждений набора x33, не имеющих заголовка "актив". Создается импликация с антецедентами x35 и консеквентом x29. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Склейка двух теорем

1. Склейка двух импликаций, отличающихся альтернативными антецедентами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDEFK} (D - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \\ \neg(D = E) \ \& \ \neg(D = F) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ F \in \text{прямая}(AC) \ \& \\ \text{прямая}(DF) \ \parallel \ \text{прямая}(AB) \ \& \ E \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{точкалуча}(A, C, F) \ \& \\ \text{прямая}(DE) \ \parallel \ \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow l(AF) = bl(AC))$$

из теоремы

$$\forall_{abABCDEFK} (D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \\ \neg(D = F) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ E \in \text{прямая}(AB) \ \& \\ \text{точкалуча}(A, B, E) \ \& \ \text{прямая}(DE) \ \parallel \ \text{прямая}(AC) \ \& \ F \in \text{прямая}(AC) \ \& \\ \text{точкалуча}(A, C, F) \ \& \ \text{прямая}(DF) \ \parallel \ \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow \\ l(AF) = bl(AC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abABCDEFK} (D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \\ \neg(D = F) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ E \in \text{прямая}(AC) \ \& \\ A \in \text{отрезок}(BF) \ \& \ \text{прямая}(DE) \ \parallel \ \text{прямая}(AB) \ \& \ F \in \text{прямая}(AB) \ \& \\ \text{точкалуча}(A, C, E) \ \& \ \text{прямая}(DF) \ \parallel \ \text{прямая}(AC) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow \\ l(AE) = bl(AC))$$

Переменной x9 присваивается консеквент теоремы, переменной x10 - список ее антецедентов. В списке вывода находится дополнительная теорема с характеристикой "числокоэфф", отличная от текущей, у которой набор антецедентов x14 и консеквент x15 имеют такую же длину, как у текущей теоремы. Проверяется, что корневые связывающие приставки x16 и x17 исходной и дополнительной теорем одинаковы.

Переменной x19 присваивается консеквент дополнительной теоремы, переменной x20 - список параметров консеквентов обеих теорем. В нашем примере x20 - список " b, A, C, E, F ". Определяется подстановка S вместо переменных x20, переводящая каждый из консеквентов двух теорем в другой. Переменной x22 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям списка x14, переменной x23 - пересечение списков x22 и x10, переменной x24 - разность списков x22 и x23, переменной x25 - разность списков

x10 и x23. Проверяется, что списки x24 и x25 одноэлементные. Переменной x26 присваивается дизъюнкция их элементов. В нашем примере x26 - " $A \in \text{отрезок}(BE) \vee \text{точкалуча}(A, B, E)$ ". При помощи задачи на доказательство проверяется, что x26 - следствие утверждений x23. Создается импликация с антецедентами x23 и консеквентом x9. Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. При этом исходная и дополнительная теоремы помечаются символом "исключение".

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Получение эквивалентности, преобразующей неравенство для координат в неравенство для невырожденных числовых атомов (случай неповторного терма).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDK}(\neg(A = D) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ \text{полкоорд}(D, K) = (a, b) \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{разныестороны}(C, D, \text{прямая}(AB)) \ \& \ \text{прямоорд}(K) \rightarrow b < 0 \leftrightarrow 0 < \angle(BAD))$$

из теоремы

$$\forall_{abABCDK}(\text{прямоорд}(K) \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ \text{разныестороны}(C, D, \text{прямая}(AB)) \ \& \ \text{полкоорд}(D, K) = (a, b) \rightarrow \angle(BAD) = -b)$$

Переменной x8 присваивается непустой список антецедентов, переменной x9 - консеквент, переменной x10 - список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что этот список состоит из единственного элемента x11. В нашем примере - " $\angle(BAD)$ ". Переменной x12 присваивается список численных параметров консеквента. В нашем примере - b . Переменной x13 присваивается пара частей равенства в консеквенте. Проверяется, что хотя бы одна из них не содержит переменных x12. В списке x13 выбирается выражение x14, содержащее параметр списка x12. В нашем примере - выражение " $-b$ ". Переменной x15 присваивается другое выражение пары x13. В нашем примере - " $\angle(BAD)$ ". Переменной x16 присваивается результат добавления к списку x8 утверждений, необходимых для сопровождения консеквента по о.д.з. Проверяется, что из x16 не усматривается ни неотрицательность, ни неположительность выражения x14. Поочередно переменной x17 присваиваются утверждения "меньшеилиравно(0 x14)", "меньшеилиравно(x14 0)", "меньше(0 x14)", "меньше(x14 0)", "равно(x14 0)". В нашем примере x17 имеет вид " $0 < -b$ ". Переменной x19 присваивается результат упрощения утверждения x17 относительно посылок x8 задачей на преобразование. В нашем примере он имеет вид " $b < 0$ ". Проверяется, что терм x19 имеет непустой список параметров и что среди антецедентов x8 имеются лишь такие равенства для координат объектов, в которых эти объекты суть точки. Проверяется, что терм x19 неповторный. Переменной x20 присваивается результат замены ненулевой части отношения x17 на терм x15. В нашем примере - " $0 < \angle(BAD)$ ". Переменной x22 присваивается результат упрощения терма x20 относительно посылок x8. Создается импликация с антецедентами x8, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x19 и x22. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "вспомописание(второйтерм)".

2. Получение эквивалентности, преобразующей неравенство для координат в неравенство для невырожденных числовых атомов (случай терма с повторными вхождениями переменных).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cdfghjkABC}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& g = (A, f, h) \& \text{коорд}(B, g) = (c, d) \& \text{коорд}(C, g) = (j, k) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{прямокоорд}(g) \rightarrow 0 < cj + dk \leftrightarrow 0 < -\angle(BAC) + \pi/2)$$

из теоремы

$$\forall_{abcdgjkABC}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \text{коорд}(A, g) = (a, b) \& \text{коорд}(B, g) = (c, d) \& \text{коорд}(C, g) = (j, k) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{прямокоорд}(g) \rightarrow \cos(\angle(BAC)) = ((c - a)(j - a) + (d - b)(k - b)) / (\sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2} \cdot \sqrt{(j - a)^2 + (k - b)^2}))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается непустой список antecedентов, переменной x9 - консеквент, переменной x10 - список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что этот список состоит из единственного элемента x11. В нашем примере - " $\angle(BAC)$ ". Переменной x12 присваивается список численных параметров консеквента. В нашем примере - a, b, c, d, j, k . Переменной x13 присваивается пара частей равенства в консеквенте. Проверяется, что хотя бы одна из них не содержит переменных x12. В списке x13 выбирается выражение x14, содержащее параметр списка x12. В нашем примере - выражение " $((c - a)(j - a) + (d - b)(k - b)) / (\sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2} \cdot \sqrt{(j - a)^2 + (k - b)^2})$ ". Переменной x15 присваивается другое выражение пары x13. В нашем примере - " $\cos \angle(BAC)$ ". Переменной x16 присваивается результат добавления к списку x8 утверждений, необходимых для сопровождения консеквента по о.д.з. Проверяется, что из x16 не усматривается ни неотрицательность, ни неположительность выражения x14. Поочередно переменной x17 присваиваются утверждения "меньшеилиравно(0 x14)", "меньшеилиравно(x14 0)", "меньше(0 x14)", "меньше(x14 0)", "равно(x14 0)". В нашем примере x17 имеет вид " $0 < ((c - a)(j - a) + (d - b)(k - b)) / (\sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2} \cdot \sqrt{(j - a)^2 + (k - b)^2})$ ". Переменной x19 присваивается результат упрощения утверждения x17 относительно посылки x8 задачей на преобразование. В нашем примере он имеет вид " $0 < (c - a)(j - a) + (d - b)(k - b)$ ". Проверяется, что терм x19 имеет непустой список параметров и что среди antecedентов x8 имеются лишь такие равенства для координат объектов, в которых эти объекты суть точки.

Дальше начинаются различия. Проверяется, что терм x19 небесповторный. Переменной x20 присваивается список всех его параметров, имеющих в нем более одного вхождения. В нашем примере - список " a, b ". В списке x8 выбирается равенство x21, в левой части которого расположено обозначение координат, а в правой части - выражение с заголовком "набор". В нашем примере x21 имеет вид " $\text{коорд}(A, g) = (a, b)$ ". Проверяется, что операнды правой части равенства x21 суть различные переменные, и переменной x24 присваивается список этих переменных. Проверяется, что он включает в себя список x20. Проверяется, что

второй операнд левой части равенства x21 - некоторая переменная x25. В нашем примере - переменная g . Проверяется отсутствие в списке x8 равенства, одной из частей которого служила бы переменная x25. Переменной x26 присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого на единицу больше длины списка x24. В нашем примере x26 состоит из переменных " e, f, h ". Переменной x27 присваивается равенство переменной x25 терму "набор(x26)". В нашем примере - равенство " $g = (e, f, h)$ ". Переменной x28 присваивается переменная - первый операнд левой части равенства x21. В нашем примере - переменная A . Переменной x29 присваивается объединение списка отличных от x21 утверждений набора x8 со списком равенств нулю переменных x24 и с утверждениями "равно(x28 X)", x27. Здесь X - первая переменная списка x26. В нашем примере - переменная e .

Переменной x30 присваивается результат замены ненулевой части отношения x17 на терм x15. В нашем примере - " $0 < \cos \angle(BAC)$ ". Переменной x32 присваивается результат упрощения терма x30 относительно посылок x8. Создается импликация с антецедентами x29, консеквентом которой служит эквивалентность утверждений x19 и x32. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "вспомогательная(второйтерм)".

3. Получение импликации, выводящей соотношение для координат из соотношения для числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{defghiK} (\neg(d = \text{вектор}0) \ \& \ \neg(i = \text{вектор}0) \ \& \ \text{коорд}(d, K) = (f, g) \ \& \ \text{коорд}(i, K) = (e, h) \ \& \ \text{уголмежду}(d, i) < \pi/2 \ \& \ \text{Вектор}(d) \ \& \ \text{Вектор}(i) \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \rightarrow 0 < ef + gh)$$

из теоремы

$$\forall_{defghiK} (\neg(d = \text{вектор}0) \ \& \ \neg(i = \text{вектор}0) \ \& \ \text{коорд}(d, K) = (f, g) \ \& \ \text{коорд}(i, K) = (e, h) \ \& \ \text{Вектор}(d) \ \& \ \text{Вектор}(i) \ \& \ \text{прямокоорд}(K) \rightarrow \cos(\text{уголмежду}(d, i)) = (ef + gh) / (\sqrt{e^2 + h^2} \cdot \sqrt{f^2 + g^2}))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается непустой список антецедентов, переменной x9 - консеквент, переменной x10 - список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что этот список состоит из единственного элемента x11. В нашем примере - "уголмежду(d, i)". Переменной x12 присваивается список численных параметров консеквента. В нашем примере - e, f, g, h . Переменной x13 присваивается пара частей равенства в консеквенте. Проверяется, что хотя бы одна из них не содержит переменных x12. В списке x13 выбирается выражение x14, содержащее параметр списка x12. В нашем примере - выражение " $(ef + gh) / (\sqrt{e^2 + h^2} \cdot \sqrt{f^2 + g^2})$ ". Переменной x15 присваивается другое выражение пары x13. В нашем примере - " $\cos(\text{уголмежду}(d, i))$ ". Переменной x16 присваивается результат добавления к списку x8 утверждений, необходимых

для сопровождения консеквента по о.д.з. Проверяется, что из x_{16} не усматривается ни неотрицательность, ни неположительность выражения x_{14} . Поочередно переменной x_{17} присваиваются утверждения "меньшеилиравно(0 x_{14})", "меньшеилиравно(x_{14} 0)", "меньше(0 x_{14})", "меньше(x_{14} 0)", "равно(x_{14} 0)". В нашем примере x_{17} имеет вид " $0 < (ef + gh) / (\sqrt{e^2 + h^2} \cdot \sqrt{f^2 + g^2})$ ". Переменной x_{19} присваивается результат упрощения утверждения x_{17} относительно посылок x_8 задачей на преобразование. В нашем примере он имеет вид " $0 < ef + gh$ ". Проверяется, что терм x_{19} имеет непустой список параметров.

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что выражение x_{15} имеет единственный числовой атом x_{21} , причем этот атом не является переменной. В нашем примере x_{21} - "уголмежду(d, i)". Выбирается переменная x_{22} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{23} присваивается результат замены ненулевой части отношения x_{17} на терм x_{15} . В нашем примере - " $\cos(\text{уголмежду}(d, i))$ ". Переменной x_{25} присваивается результат упрощения терма x_{23} относительно посылок x_8 . В нашем примере - " $0 < -\text{уголмежду}(d, i) + \pi/2$ ". Проверяется, что терм x_{21} встречается внутри утверждения x_{25} однократно, и переменной x_{27} присваивается результат замены его внутри x_{25} на переменную x_{22} . В нашем примере получаем " $0 < -a + \pi/2$ ". Решается задача на описание с посылками x_8 и условиями x_{27} , "число(x_{22})". Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "неизвестные x_{22} ". Ответ присваивается переменной x_{30} . В нашем примере он имеет вид " $a < \pi/2 \ \& \ a - \text{число}$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и не имеет связанных переменных. Переменной x_{31} присваивается результат подстановки атома x_{21} вместо переменной x_{22} в утверждение x_{30} , переменной x_{32} - результат добавления к списку x_8 утверждения x_{31} . Создается импликация с антецедентами x_{32} и консеквентом x_{19} . Она обрабатывается оператором "норм-теорема" и регистрируется в списке вывода.

3.144 Характеристика "числовой атом"

Характеристикой "числовой атом" снабжаются тождества для невырожденных числовых атомов.

Логические следствия теоремы

1. Попытка стандартизации исходной теоремы для исключения понятия, не входящего в антецеденты.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDEF} (\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(E = F) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ E \in \text{окружность}(CD) \ \& \ F \in \text{окружность}(AB) \ \& \ F \in \text{окружность}(CD) \ \& \\ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \\ \text{разныестороны}(A, C, \text{прямая}(EF)) \rightarrow \\ 2l(AC) = \sqrt{4l(AB)^2 - l(EF)^2} + \sqrt{4l(CD)^2 - l(EF)^2})$$

из теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{ABCDEF}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ & F - \text{точка} \ \& \ \neg(E = F) \ \& \ \neg(A = F) \ \& \ \neg(A = E)\neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \\ & F \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(CD) \ \& \\ & F \in \text{окружность}(CD) \ \& \ C \in \text{плоскость}(AEF) \ \& \\ & \text{разныестороны}(A, C, \text{прямая}(EF)) \rightarrow \\ & 2l(AC) = \sqrt{4l(AB)^2 - l(EF)^2} + \sqrt{4l(CD)^2 - l(EF)^2} \end{aligned}$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - результат обработки исходной теоремы оператором "нормтеорема". Проверяется, что в новом списке антецедентов отсутствуют некоторые понятия, встречавшиеся в старом списке x8. Затем теорема x9 регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

2. Попытка отождествления двух числовых атомов и разрешения равенства относительно единственного оставшегося числового атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ \angle(ABD) = \angle(CBD) \ \& \\ & B \in \text{отрезок}(AC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \\ & \angle(CBD) = \pi/2) \end{aligned}$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ B \in \text{отрезок}(AC) \rightarrow \angle(ABD) + \angle(DBC) = \pi)$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента, параметры которых включаются в параметры консеквента. Проверяется, что число элементов списка x10 равно двум. В нашем примере - " $\angle(ABD)$ ", " $\angle(DBC)$ ". Переменной x11 присваивается первый атом списка x10, переменной x12 - второй. Проверяется, что заголовки термов x11 и x12 равны и что консеквент не имеет численных параметров. Выбирается переменная x13, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Проверяется, что атомы списка x10 не встречаются в антецедентах теоремы. Переменной x15 присваивается результат замены вхождений атомов списка x10 в терм x9 на переменную x13. В нашем примере - " $a + a = \pi$ ". Решается задача на описание с посылками x8 и условиями "число(x13)", x15. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x13", "упростить". Ответ присваивается переменной x17. В нашем примере он имеет вид " $a = \pi/2$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ" и содержит переменную x13. Переменной x18 присваивается результат подстановки в утверждение x17 выражения x12 вместо переменной x13. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения набора x8 и равенство атомов x11, x12, а консеквентом - утверждение x18. Переменной x19 присваивается результат обработки этой импликации оператором "нормтеорема". Проверяется, что консеквент импликации x19 содержит невырожденный числовой атом, после чего теорема x19 регистрируется в списке вывода.

3. Попытка отождествления двух точек.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{AC}(\neg(A = C) \ \& \ A \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \rightarrow \text{угол между(вектор}(AC), \text{вектор}(AC)) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \text{угол между(вектор}(AB), \text{вектор}(AC)) = \angle(BAC))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Проверяется, что длина корневой связывающей приставки теоремы не превосходит 6. Переменной x9 присваивается консеквент. В списке антецедентов рассматриваются два утверждения с заголовком "точка", операндами которых служат переменные. Первая из этих переменных присваивается переменной x14, вторая - переменной x15. В нашем примере x14 - B, x15 - C. Проверяется отсутствие антецедента "не(равно(x14 x15))". Проверяется также отсутствие в теореме подтерма "фигура(...)", содержащего обе переменные x14 и x15. Проверяется, что либо консеквент имеет невырожденный числовой атом, содержащий одновременно x14 и x15, либо отождествление переменных x14 и x15 отождествляет два различных невырожденных числовых атома консеквента. Переменной x16 присваивается список результатов замены в антедентах теоремы переменной x14 на переменную x15. Переменной x17 присваивается результат замены в консеквенте переменной x14 на x15. Переменной x18 присваивается результат обработки списка x16 оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x17. Если в теореме не встречается символ "вектор", то проверяется, что среди утверждений списка x18 нет группы связанных между собой зависимостью от общей переменной утверждений о принадлежности отрезкам либо лучам, накрывающей все параметры списка x18. Проверяется, что при помощи задачи на доказательство не удастся усмотреть различие точек x14 и x15. Если утверждение x17 - равенство, то все его ненулевые члены группируются в левой части и упрощаются. Переменной x19 присваивается результат обработки утверждения x17 нормализатором "стандчисл", переменной x20 - результат обработки списка x18 нормализатором "нормантецеденты" относительно параметров терма x19. При помощи задачи на исследование объединение списка x20 с утверждениями, необходимыми для сопровождения терма x19 по о.д.з., проверяются на непротиворечивость.

Создается импликация с антецедентами x20 и консеквентом x19. Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому разрешается использовать теоремы, уже имеющиеся в списке вывода, и результат присваивается переменной x21. Проверяется, что x21 - кванторная импликация, не имеющая связанных переменных в консеквенте. Проверяется отсутствие у x21 антецедента, представляющего собой отрицание равенства с суммой в левой части. Затем x21 регистрируется в списке вывода.

4. Попытка отождествления двух числовых атомов для сокращения соотношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{defg}(\neg(d = e) \ \& \ l(de) = l(ef) \ \& \ e \in \text{отрезок}(df) \ \& \ d \text{ — точка} \ \& \ e \text{ — точка} \ \& \ f \text{ — точка} \ \& \ g \text{ — точка} \rightarrow -2l(ef)^2 - 2l(eg)^2 + l(dg)^2 + l(fg)^2 = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{defg}(f - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e \in \text{отрезок}(df) \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \rightarrow l(dg)^2l(ef) + l(fg)^2l(de) = (l(de)l(ef) + l(eg)^2)(l(de) + l(ef))$$

Переменной x8 присваивается непустой список антецедентов, переменной x9 - консеквент, переменной x10 - список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что длина списка x10 не менее 3. В нашем примере x10 состоит из атомов "l(dg)", "l(ef)", "l(fg)", "l(de)", "l(eg)". Переменной x11 присваивается список таких атомов набора x10, что существует вхождение их в терм x9, расположенное только внутри подтермов с заголовками "плюс", "минус", "умножение", "равно", либо в основаниях степеней. В нашем примере x11 совпадает с x10. Проверяется, что список x11 имеет не менее 4 элементов. Проверяется, что число антецедентов, не используемых для сопровождения по о.д.з. других антецедентов и консеквента, не превосходит 4.

Переменной x12 присваивается разность левой и правой частей консеквента. Переменной x13 присваивается результат обработки ее нормализатором раскрытия скобок "стандплюс". Проверяется, что выражение x13 является суммой не менее чем 3 слагаемых. Переменной x14 присваивается список этих слагаемых. В нашем примере x14 состоит из выражений "l(dg)²l(ef)", "l(fg)²l(de)", "-l(de)²l(ef)", "-l(ef)²l(de)", "-l(eg)²l(de)", "-l(eg)²l(ef)". Переменной x15 присваивается первый элемент списка x14, переменной x16 - второй. Рассматривается элемент x17 списка x11, имеющий такое вхождение в терм x15, которое расположено только внутри подтермов с заголовками "умножение", "минус" и в основаниях степеней. В нашем примере - "l(ef)". Рассматривается отличный от x17 элемент x18 списка x11, имеющий такое вхождение в терм x16, которое расположено только внутри подтермов с заголовками "умножение", "минус" и в основаниях степеней. В нашем примере x18 - атом "l(de)". Проверяется, что каждое из выражений списка x14 имеет вхождение хотя бы одного из атомов x17, x18, расположенное только внутри подтермов с заголовками "умножение", "минус" и в основаниях степеней.

Переменной x20 присваивается результат замены вхождений выражения x17 в терм x13 на выражение x18. Переменной x21 присваивается результат обработки выражения x20 оператором "видумножение". В нашем примере x21 имеет вид "(-2l(de)² - 2l(eg)² + l(dg)² + l(fg)²)l(de)". Переменной x23 присваивается набор сомножителей терма x21, после отбрасывания корневого минуса, если он имелся. Проверяется, что этот набор неодноэлементный. Проверяется наличие в нем терма x24, равного x18 либо представляющего собой степень с основанием x18. Проверяется, что единственный из элементов списка x23 имеет заголовок "плюс". Переменной x25 присваивается произведение элементов списка x23, отличных от x24. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x8 и "равно(x17 x18)", "не(равно(x18 0))", а консеквентом является равенство нулю выражения x25. Переменной x26 присваивается результат обработки этой импликации оператором "нормтеорема". Проверяется, что x26 - кванторная импликация. Переменной x27 присваивается ее консеквент, переменной x28 - список антецедентов. Проверяется, что среди этих антецедентов есть равенство. Проверяется, что каждый невырожденный числовой атом терма x27 имеет в нем лишь одно вхождение. Затем теорема x26 регистрируется в списке вывода.

5. Использование соотношения для усмотрения пропорциональности двух числовых атомов из пропорциональности двух других числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcABC}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ 0 \leq b \ \& \ 0 \leq c \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ bl(AC) = cl(AB) \ \& \ \angle(BAC) = a \ \& \ a - \text{число} \rightarrow bl(BC) = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos a} l(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow 2l(AB)l(AC) \cos \angle(BAC) = l(AB)^2 + l(AC)^2)$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается непустой список антецедентов, переменной x9 - консеквент, переменной x10 - список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что длина списка x10 не менее 3. В нашем примере x10 состоит из атомов "l(AB)", "l(AC)", " $\angle(BAC)$ ", "l(BC)". Переменной x11 присваивается список таких атомов набора x10, что существует вхождение их в терм x9, расположенное только внутри подтермов с заголовками "плюс", "минус", "умножение", "равно", либо в основаниях степеней. В нашем примере x11 состоит из атомов "l(AB)", "l(AC)", "l(BC)".

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что x11 состоит из 3 элементов. Переменной x12 присваивается обработанная нормализатором раскрытия скобок "стандплюс" разность левой и правой частей консеквента. Переменной x13 присваивается список слагаемых выражения x12. Проверяется, что в нем не менее 3 элементов. В нашем примере x13 содержит выражения " $-l(AB)^2$ ", " $-l(AC)^2$ ", " $l(BC)^2$ ", " $2 \cos \angle(BAC)l(AB)l(AC)$ ".

Просматриваются выражения T списка x13. Для каждого из них определяется сумма степеней, с которыми атомы набора x11 встречаются среди сомножителей выражения T . Проверяется, что все эти суммы равны, и их общее значение присваивается переменной x14. Проверяется, что значение x14 больше 1. В нашем примере оно равно 2. Проверяется, что все атомы списка x11 неотрицательны. Выбираются переменные X, Y, Z, V , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b, c, d . Переменной x17 присваивается тройка выражений YX, ZX, VX . В нашем примере - ba, ca, da . Переменной x18 присваивается результат замены в выражении x12 тройки атомов x11 на тройку произведений x17. В нашем примере x18 имеет вид " $2 \cos \angle(BAC)(ba)(ca) - (ba)^2 - (ca)^2 + (da)^2$ ". Переменной x19 присваивается результат добавления к списку x8 утверждений "число(X)", "число(Y)", "число(Z)", "число(V)", " $0 \leq Y$ ", " $0 \leq Z$ ", " $0 \leq V$ ", " $0 < X$ ". Переменной x20 присваивается одна из переменных Y, Z, V . В нашем примере - переменная d . Переменной x21 присваивается список всех утверждений набора x19, не содержащих переменной x20. Переменной x22 присваивается результат добавления к не вошедшим в список x21 утверждений набора x19 равенства выражения x18 нулю.

Решается задача на описание с посылками x21 и условиями x22. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x20", "упростить". В нашем примере посылки суть "A - точка", "B - точка", "C - точка", " $\neg(A = C)$ ", " $\neg(A = B)$ ", "a - число", "b - число", "c - число", " $0 \leq b$ ", " $0 \leq c$ ", " $0 < a$ ". Условия - "d - число", " $0 \leq d$ ", " $2 \cos \angle(BAC)(ba)(ca) - (ba)^2 - (ca)^2 + (da)^2 = 0$ ". Неизвестная - d. Ответ задачи присваивается переменной x24. В нашем примере он имеет вид " $d = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle(BAC)}$ ". Проверяется, что ответ не содержит переменной X и представляет собой равенство с переменной x20 в левой части. Переменной x25 присваивается правая часть равенства. Переменной x26 присваивается пара переменных, получаемая исключением из тройки Y, Z, V переменной x20. В нашем примере - пара b, c. Переменной x27 присваивается пара числовых атомов списка x11, соответствующих переменным пары x26. В нашем примере - атомы $l(AB), l(AC)$. Переменной x28 присваивается равенство произведения первого элемента пары x26 на второй элемент пары x27 произведению второго элемента пары x26 на первый элемент пары x27. В нашем примере - равенство " $bl(AC) = cl(AB)$ ". Переменной x29 присваивается результат добавления к списку x8 равенства x28, а также указаний на численные значения и на неотрицательность для переменных пары x26. Если выражение x25 содержит невырожденные числовые атомы, то они переобозначаются в x25 на новые переменные, а к списку x29 добавляются равенства этих числовых атомов соответствующим переменным. Переменной x30 присваивается атом списка x11, соответствующий переменной x20. В нашем примере - " $l(BC)$ ". Переменной x31 присваивается равенство произведения первой переменной пары x26 на выражение x30 произведению выражения x25 на первый элемент пары x27. В нашем примере x31 имеет вид " $bl(BC) = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle(BAC)}al(AB)$ ". Создается импликация с антецедентами x29 и консеквентом x31. Она регистрируется в списке вывода с характеристикой "пропорция(...)".

6. Развязка условия принадлежности в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abT}(b \subseteq T \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{равндвиж}(a, T) \ \& \ \text{Числотр}(b) \ \& \ \text{Числотр}(T) \rightarrow \text{скорость}(a, b) = \text{скорость}(a, T))$$

из теоремы

$$\forall_{atT}(\text{мточка}(a) \ \& \ \text{Числотр}(T) \ \& \ \text{равндвиж}(a, T) \ \& \ t \in T \rightarrow \text{скорость}(a, T) = \text{скорость}(a, t))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. В списке x8 рассматривается условие принадлежности x10 с переменной x11 в левой части и переменной x12 в правой. В нашем примере - " $t \in T$ ". Переменной x13 присваивается пара частей равенства в консеквенте. Переменной x14 присваивается элемент пары x13, содержащий переменную x11, переменной x15 - другой элемент пары x13. Проверяется, что он содержит переменную x12. В нашем примере x14 - " $\text{скорость}(a, t)$ ", x15 - " $\text{скорость}(a, T)$ ". Проверяется, что каждая из переменных x11 и x12 имеет в консеквенте лишь одно вхождение. Проверяется, что x11 не входит в антецеденты, отличные от x10. Выбирается переменная x16, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b. Переменной x17 присваивается результат замены в выражении x15

переменной x12 на x16. Переменной x18 присваивается равенство выражений x17 и x15. Переменной x19 присваивается список результатов замены переменной x12 на x16 в антецедентах, отличных от x10. Переменной x20 присваивается результат добавления к списку отличных от x10 утверждений набора x8 списка x19 и включения "содержится(x16 x12)". При помощи задачи на доказательство проверяется, что утверждение "существует(x11 принадлежит(x11 x16))" - следствие утверждений x20. Затем создается импликация с антецедентами x20 и консеквентом x18. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

7. Усмотрение сохранения значения выражения при варьировании параметра.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdestABT}(c = \text{Место}(a, e) \ \& \ d = \text{Место}(a, e) \ \& \ A = \text{Место}(a, t) \ \& \ B = \text{Место}(b, t) \ \& \ e \in T \ \& \ t \in T \ \& \ \text{гибкаясвязь}(a, b, s, T) \ \& \ \text{мточка}(a) \ \& \ \text{мточка}(b) \ \& \ \text{Числотр}(T) \rightarrow l(AB) = l(cd))$$

из теоремы

$$\forall_{abstAB}(\text{мточка}(a) \ \& \ \text{мточка}(b) \ \& \ \text{Числотр}(T) \ \& \ \text{гибкаясвязь}(a, b, s, T) \ \& \ t \in T \ \& \ A = \text{Место}(a, t) \ \& \ B = \text{Место}(b, t) \rightarrow l(AB) = \text{длина}(s))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. В списке x8 рассматривается условие принадлежности x10 с переменной x11 в левой части и правой частью x12, не содержащей x11. В нашем примере - "t ∈ T", переменная x11 - t, выражение x12 - T. Переменной x13 присваивается список антецедентов, содержащих переменную x11 и отличных от x10. В нашем примере x13 состоит из равенств "A = Место(a, t)", "B = Место(b, t)". Проверяется, что каждое утверждение списка x13 - равенство, левая часть которого не содержит x11. Переменной x14 присваивается список левых частей равенств x13, переменной x16 - список параметров выражений x14. В нашем примере - A, B. Проверяется, что список x16 непуст и не содержит параметров выражения x12. Переменной x19 присваивается та часть равенства в консеквенте теоремы, которая не содержит переменных x16, переменной x20 - часть, содержащая эти переменные. В нашем примере x19 - "длина(s)", x20 - "l(AB)". Переменной x21 присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x16. В нашем примере - c, d. Дополнительно выбирается новая переменная x22. В нашем примере - e. Переменной x23 присваивается список результатов замены переменных x16 на x21 в антецедентах исходной теоремы, не содержащих переменной x11 и содержащих переменную набора x16. Переменной x24 присваивается список результатов замены переменных x16 на переменные x21 и переменной x11 на x22 в утверждениях списка x13. Переменной x25 присваивается объединение списка x8 со списками x23, x24 и утверждением "принадлежит(x22 x12)". Переменной x26 присваивается результат замены переменных x16 на x21 в выражении x20. Затем создается импликация с антецедентами x25 и консеквентом "равно(x20 x26)". Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "сокращ" и регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Рассмотрение вариантов пропорциональности пар числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABCDE}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ B \in \text{прямая}(AD) \ \& \ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC) \ \& \ C \in \text{прямая}(AE) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(BC)) \ \& \ al(CE) = bl(BD) \rightarrow al(AC) = bl(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ B \in \text{прямая}(AD) \ \& \ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC) \ \& \ C \in \text{прямая}(AE) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(BC)) \rightarrow l(AB)l(CE) = l(AC)l(BD))$$

Проверяется наличие характеристики "пропорция(...)". Переменной x8 присваивается список антецедентов. Проверяется, что консеквент - равенство, в каждой части которого имеется ровно 2 сомножителя. Переменной x10 присваивается пара сомножителей левой части, переменной x11 - пара сомножителей правой части. Проверяется, что каждое выражение пар x10, x11 неоднобуквенное. Переменной x12 присваивается список числовых атомов консеквента. Проверяется, что он четырехэлементный и включается в объединение списков x10, x11. Выбираются переменные X, Y, не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b. Выбираются элемент x15 пары x10 и элемент x16 пары x11. Переменной x17 присваивается равенство произведения X на x15 произведению Y на x16. В нашем примере x17 имеет вид "al(CE) = bl(BD)". Переменным x18 и x19 присваиваются оставшиеся элементы пар x10 и x11. Переменной x20 присваивается равенство произведения X на x19 произведению Y на x18. В нашем примере - "al(AC) = bl(AB)". Создается импликация, антецеденты которой получаются добавлением к списку x8 утверждений "число(X)", "число(Y)" и равенства x17. Консеквентом служит равенство x20. Эта импликация регистрируется в списке вывода. Допускаются только характеристики с заголовками "смпропорц" и "пропорция".

2. Использование соотношения со сложным числовым атомом для определения его значения через коэффициенты соотношения пропорциональности для двух других числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefgABC}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \ \& \ l(BC) = a \ \& \ a = fc/(de) \ \& \ l(AC) = bc/(de) \rightarrow \angle(ABC) = \arcsin(bg/df))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$$

Переменной x_8 присваивается непустой список antecedентов, переменной x_9 - консеквент, переменной x_{10} - список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что длина списка x_{10} не менее 2. В нашем примере x_{10} состоит из атомов " $l(AB)$ ", " $l(AC)$ ", " $\angle(ABC)$ ", " $l(BC)$ ". Выбирается элемент x_{11} списка x_{10} , оценка сложности которого больше оценки сложности любого другого элемента этого списка. В нашем примере - " $\angle(ABC)$ ". Проверяется, что консеквент имеет единственный подтерм x_{14} максимальной сложности. В нашем примере - " $\sin(\angle(ABC))$ ". Переменной x_{15} присваивается вхождение атома x_{11} в терм x_{14} . Проверяется, что вне x_{15} терм x_{14} не содержит переменных.

Выбирается переменная x_{16} , не входящая в теорему. В нашем примере - переменная a . Проверяется, что терм x_{14} имеет единственное вхождение в консеквент x_9 , и переменной x_{18} присваивается результат замены этого вхождения на переменную x_{16} . В нашем примере - " $l(AC) = al(BC)$ ". Решается задача на описание с посылками x_8 и условиями "число(x_{16})", x_{18} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "неизвестные x_{16} ", "упростить". Ответ присваивается переменной x_{20} . В нашем примере он имеет вид " $a = l(AC)/l(BC)$ ". Проверяется, что x_{20} - равенство с переменной x_{16} в левой части. Выбирается переменная x_{21} , не входящая в исходную теорему и отличная от x_{16} . В нашем примере - b . Переменной x_{22} присваивается результат добавления к списку x_8 утверждений "равно(x_{14} x_{16})" и x_{20} . Решается задача на описание с посылками x_{22} и условиями "число(x_{21})", "равно(x_{11} x_{21})". Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "упростить", "известно x_{16} ", "неизвестные x_{21} ". Ответ присваивается переменной x_{25} . В нашем примере он имеет вид " $b = \arcsin a$ ". Проверяется, что ответ - равенство с переменной x_{21} в левой части. Переменной x_{26} присваивается правая часть равенства x_{25} , а переменной x_{27} - правая часть равенства x_{20} . Проверяется, что заголовком выражения x_{27} служит символ "дробь", и переменной x_{28} присваивается список невырожденных числовых атомов этого выражения. В нашем примере - " $l(AC), l(BC)$ ". Проверяется, что длина списка x_{28} равна 2. Переменной x_{29} присваивается список сомножителей числителя дроби x_{27} , переменной x_{30} - список сомножителей знаменателя. Выбирается элемент x_{31} списка x_{29} . Если x_{31} - степень, то переменной x_{32} присваивается основание степени, а переменной x_{33} - показатель. Иначе переменной x_{32} присваивается само выражение x_{31} , а переменной x_{33} - 1. Проверяется, что x_{32} входит в список x_{28} . Аналогично, выбирается элемент x_{34} списка x_{30} . Если x_{34} - степень, то переменной x_{35} присваивается основание степени, а переменной x_{36} - показатель. Иначе переменной x_{35} присваивается само выражение x_{34} , а переменной x_{36} - 1. Проверяется, что x_{35} входит в список x_{28} и отлично от x_{32} . В нашем примере x_{31} - $l(AC)$, x_{34} - $l(BC)$.

Проверяется, что значения x_{33} и x_{36} равны. В нашем примере они равны 1. Проверяется, что каждое отличное от x_{31} выражение списка x_{29} и каждое отличное от x_{34} выражение списка x_{30} не имеет невырожденных числовых атомов. Выбираются переменные T, U, V, W, X, Y, Z , не входящие в теорему. В нашем примере - a, b, c, d, e, f, g . Переменной x_{38} присваивается равенство выражения x_{35} переменной T . В нашем примере - " $l(BC) = a$ ". Переменной x_{39} присваивается объединение списка x_8 с утверждениями " $T = YV/(ZX)$ ", "равно(x_{32} $UV/(WX)$)", "число(U)", "число(V)", "число(W)", "число(X)", "число(Y)", "число(Z)", x_{38} . Переменной x_{40} присваивается выражение "дробь(умножение(R степень((UZ) x_{33})) умножение(Q степень(YW x_{33})))". Здесь R - отличные от x_{31} элементы

списка x29, Q - отличные от x34 элементы списка x30. В нашем примере x40 имеет вид $(bg)^1/(fd)^1$. Переменной x41 присваивается результат подстановки в равенство x25 выражений x11 и x40 вместо переменных x21 и x16. Переменной x43 присваивается результат упрощения правой части равенства x41 относительно посылок x39. В нашем примере - $\arcsin(bg/(df))$. К списку x39 добавляются условия отличия от 0 значений переменных Z, X, W, Y . Затем создается импликация с антецедентами x3, консеквентом которой служит результат замены правой части равенства x41 на x43. Эта импликация регистрируется в списке вывода.

3. Фиксация значения числового атома через непосредственно идентифицируемое равенство в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \angle(BAC) = a \rightarrow \sin al(AC) = \sin \angle(ABC)l(BC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \rightarrow \sin \angle(BAC)l(AC) = \sin \angle(ABC)l(BC))$$

Проверяется отсутствие характеристики "числатом". Переменной x8 присваивается непустой список антецедентов, переменной x9 - консеквент, переменной x10 - список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что длина списка x10 не менее 2. В нашем примере x10 состоит из атомов " $\angle(BAC)$ ", " $l(AC)$ ", " $\angle(ABC)$ ", " $l(BC)$ ". Проверяется отсутствие равенства в антецедентах теоремы. Выбирается элемент x11 списка x10. В нашем примере - $\angle(BAC)$. Выбирается переменная x12, не входящая в теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x13 присваивается результат добавления к списку x8 равенства атома x11 переменной x12. Переменной x15 присваивается результат замены вхождения атома x11 в утверждение x9 на переменную x12. Создается импликация с антецедентами x13 и консеквентом x15, которая регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "фикспарам".

4. Фиксация отношения числовых атомов через соотношение пропорциональности в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ dl(bc) = el(ac) \rightarrow \sin(\angle(acb) + \angle(bac))e = \sin(\angle(bac))d)$$

из теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \rightarrow \sin(\angle(acb) + \angle(bac))l(bc) = \sin(\angle(bac))l(ac))$$

Переменной x8 присваивается непустой список антецедентов, переменной x9 - консеквент, переменной x10 - список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что длина списка x10 не менее 3. В нашем примере x10

состоит из атомов " $\angle(acb)$ ", " $\angle(bac)$ ", " $l(bc)$ ", " $l(ac)$ ". Переменной x_{11} присваивается список сомножителей левой части консеквента, переменной x_{12} - список сомножителей правой части. Переменной x_{13} присваивается пересечение списков x_{11} и x_{10} , переменной x_{14} - пересечение списков x_{12} и x_{10} . Проверяется, что эти пересечения одноэлементны. Переменной x_{15} присваивается элемент списка x_{13} , переменной x_{16} - элемент списка x_{14} . В нашем примере x_{15} имеет вид " $l(bc)$ ", x_{16} - вид " $l(ac)$ ". Проверяется, что каждый из атомов x_{15} , x_{16} встречается в консеквенте лишь один раз. Проверяется, что хотя бы один из атомов x_{15} , x_{16} имеет ненулевое значение. Выбираются переменные X, Y , не входящие в теорему. В нашем примере - переменные d, e . Переменной x_{18} присваивается равенство произведения переменной X на атом x_{15} произведению переменной Y на атом x_{16} . Переменной x_{20} присваивается результат замены в консеквенте теоремы атомов x_{15} , x_{16} на переменные Y, X соответственно. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения x_8 и равенство x_{18} , а консеквентом - утверждение x_{20} . Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "пропорцатомы".

5. Выражение одного числового атома с помощью посылки, дающей явное значение другого.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abd}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ l(ab) = d \ \& \ d - \text{число} \rightarrow \text{скалумнож}(\text{вектор}(ba), \text{вектор}(ba)) = d^2)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \rightarrow \text{скалумнож}(\text{вектор}(ba), \text{вектор}(ba)) = l(ab)^2)$$

Переменной x_9 присваивается консеквент, переменной x_{10} - список антецедентов. Переменной x_{11} присваивается список числовых атомов консеквента. Проверяется, что он имеет длину 2. В нашем примере x_{11} состоит из выражений " $\text{скалумнож}(\text{вектор}(ba), \text{вектор}(ba))$ ", " $l(ab)$ ". Проверяется, что все термы списка x_{11} неоднобуквенные. Проверяется, что x_{11} не совпадает с парой частей равенства в консеквенте, причем каждый атом списка x_{11} встречается в консеквенте лишь один раз. Переменной x_{12} присваивается список типов значений первых корневых операндов атомов x_{11} . В нашем примере - пара "Вектор", "точка". Проверяется, что элементы пары x_{12} различны.

Выбираются переменные X, Y , не входящие в теорему. В нашем примере - c, d . Переменной x_{14} присваивается результат добавления к списку антецедентов x_{10} консеквента x_9 . Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{15} присваивается результат добавления к списку x_{14} равенства первого атома пары x_{11} переменной X , переменной x_{16} - одноэлементный набор, состоящий из равенства второго атома пары x_{11} переменной Y , переменной x_{17} - X , переменной x_{18} - Y . Во втором случае переменной x_{15} присваивается результат добавления к списку x_{14} равенства второго атома пары x_{11} переменной Y , переменной x_{16} - одноэлементный набор, состоящий из равенства первого атома пары x_{11} переменной X , переменной x_{17} - Y , переменной x_{18} - X . В нашем примере рассматривается второй случай. Решается задача на описание с

посылками x15 и условиями x16. Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "неизвестные x18", "известно x17", "одз", "упростить". В нашем примере посылки суть "a – точка", "b – точка", "скалумнож(вектор(ba), вектор(ba)) = l(ab)²", "l(ab) = d". Условие - "скалумнож(вектор(ba), вектор(ba)) = c". Неизвестная - c, известный параметр - d. Ответ задачи присваивается переменной x20. В нашем примере он имеет вид "c = d²". Проверяется, что x20 - равенство. Переменной x21 присваивается результат подстановки в x20 вместо переменной x18 соответствующего атома пары x11. Переменной x22 присваивается результат исключения консеквента из списка x15 и добавления всех утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. терма x21. Создается импликация с антецедентами x22 и консеквентом x21. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "извлечпарам(второйтерм)".

6. Прием для контроля противоречивых подслучаев.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \\ l(AB) = a \ \& \ l(AC) = b \ \& \ \angle(BAC) = c \ \& \ l(BC) = d \ \& \\ \neg(2ab \cos c - a^2 - b^2 + d^2 = 0) \rightarrow \text{ложь})$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \\ 2l(AB)l(AC) \cos(\angle(BAC)) = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)$$

Переменной x8 присваивается непустой список антецедентов, переменной x9 - консеквент, переменной x10 - список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что длина списка x10 не меньше 3 и меньше 5. Проверяется, что длина корневой связывающей приставки теоремы меньше 5. Проверяется, что оценка сложности консеквента превышает оценку сложности атомов набора x10 не более чем на 5. Проверяется, что различные атомы списка x10 имеют различные списки параметров. Проверяется, что среди антецедентов теоремы нет равенства.

Переменной x11 присваивается список не входящих в теорему переменных, длина которого равна длине набора x10. В нашем примере x10 состоит из атомов "l(AB)", "l(AC)", "∠(BAC)", "l(BC)". Список x11 состоит из переменных a, b, c, d. Переменной x12 присваивается результат замены в консеквенте x9 атомов списка x10 на соответствующие переменные списка x11. Переменной x13 присваивается равенство нулю разности частей равенства x12. Переменной x15 присваивается результат обработки равенства x13 нормализаторами общей стандартизации в о.д.з. этого равенства. Переменной x16 присваивается объединение списка x8 со списком равенств атомов набора x10 соответствующим переменным набора x11, к которому добавлено отрицание утверждения x15. Создается импликация с антецедентами x16 и консеквентом "ложь", которая регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "контроль".

Использование дополнительной теоремы для реализации сложного антецедента

1. Попытка реализации условия эквивалентности углов в антецедентах.

Напомним, что в решателе углы считаются эквивалентными, если они либо равны, либо составляют в сумме π .

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(\neg(a = c) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(d = e) \ \& \ b \in \text{прямая}(ad) \ \& \\ e \in \text{прямая}(ac) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \\ e - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(ac) \perp \text{прямая}(de) \ \& \ \text{прямая}(ad) \perp \text{прямая}(bc) \rightarrow \\ l(ae)l(bc) = l(ab)l(de))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEFG} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ F - \text{точка} \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(E = F) \ \& \ \neg(D = F) \ \& \\ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(BC) \ \& \\ \text{прямая}(DF) \perp \text{прямая}(EF) \ \& \ \text{эквуглы}(\angle(BAC), \angle(EDF)) \rightarrow \\ l(AC)l(EF) = l(BC)l(DF))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ E \in \text{прямая}(AC) \ \& \\ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = E) \rightarrow \text{эквуглы}(\angle(DAE), \angle(BAC)))$$

Переменной x_9 присваивается вхождение антецедента, имеющего заголовок "эквуглы". Проверяется, что оба корневых операнда этого антецедента имеют заголовок "угол". Рассматриваются две конкретных теоремы из базы теорем, заголовком консеквента которых служит символ "эквуглы". Одна из этих теорем связана с двумя пересекающимися прямыми, другая - с двумя вписанными углами, опирающимися на общую хорду. Наша дополнительная теорема - первая из этих теорем. Оператор "выводпосылки" определяет результат x_{14} последовательного применения дополнительной и исходной теорем при унификации консеквента дополнительной теоремы с антецедентом x_9 исходной теоремы. Находится результат обработки теоремы x_{14} оператором "нормтеорема" и исключающим избыточные антецеденты оператором "исклант". Этот результат регистрируется в списке вывода.

2. Попытка переформулировки антецедента в более простых понятиях.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \\ \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(cd) \rightarrow \text{скалмнож}(\text{вектор}(ab), \text{вектор}(cd)) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD} (D - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ \text{вектор}(AB) \perp \\ \text{вектор}(CD) \rightarrow \text{скалмнож}(\text{вектор}(AB), \text{вектор}(CD)) = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD} (\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \\ \text{вектор}(AB) \perp \text{вектор}(CD) \leftrightarrow \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD))$$

Переменной x8 присваивается вхождение некоторого антецедента теоремы. В нашем примере - антецедента "вектор(AB) \perp вектор(CD)". Переменной x9 присваивается заголовок антецедента. В нашем примере - символ "перпендикулярно". Справочники поиска теорем "упрощэв", "уменьшение" находят по символу x9 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x15 преобразования вхождения x8 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Проверяется, что при этом унификация переводила переменные исходной теоремы снова в переменные. Теорема x15 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Варьирование равенства числовых атомов в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ce fgh}(\neg(c = h) \ \& \ \neg(e = f) \ \& \ \neg(e = h) \ \& \ \neg(f = g) \ \& \ \neg(f = h) \ \& \ \neg(\text{прямая}(eg) = \text{прямая}(fh)) \ \& \ \angle(chf) = \angle(gfh) \ \& \ f \in \text{отрезок}(eg) \ \& \ h \in \text{отрезок}(ce) \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \rightarrow l(ef) = l(eh))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(AC)) \ \& \ \angle(ACB) = \angle(BAC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow l(AB) = l(BC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ B \in \text{отрезок}(AC) \rightarrow \angle(ABD) = \pi - \angle(CBD))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. В списке x8 выбирается равенство x10 двух невырожденных числовых атомов. В нашем примере - " $\angle(ACB) = \angle(BAC)$ ". Переменной x11 присваивается пара частей равенства x10. Проверяется, что других равенств среди антецедентов нет. Переменной x12 присваивается первый элемент пары x11, переменной x13 - второй. Проверяется, что оба элемента имеют один и тот же заголовок x14. Справочник поиска теорем "варьир" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет не более одного существенного антецедента. Переменной x17 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x17 имеет вид:

$$\forall_{abcd}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(b = d) \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ b \in \text{отрезок}(ac) \rightarrow \angle(abd) = \pi - \angle(cbd))$$

Переменной x18 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему и в теорему x17. В нашем примере x18 имеет вид:

$$\forall_{efgh}(e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ \neg(f = g) \ \& \ \neg(f = h) \ \& \ \neg(e = f) \ \& \ f \in \text{отрезок}(eg) \rightarrow \angle(efh) = \pi - \angle(gfh))$$

Переменной x20 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте теоремы x17, которая имеет заголовок x14, переменной x21 - вхождение другой

части. Переменной x_{23} присваивается вхождение той части равенства в консеквенте теоремы x_{18} , которая имеет заголовок x_{14} , переменной x_{24} - вхождение другой части. Переменной x_{25} присваивается подтерм x_{20} , переменной x_{26} - подтерм x_{23} . Переменной x_{27} присваивается список параметров термов x_{25} и x_{26} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{27} , унифицирующая термы x_{12} и x_{25} , а одновременно - термы x_{13} и x_{26} . Переменной x_{29} присваивается невырожденный числовой атом подтерма x_{21} , переменной x_{30} - невырожденный числовой атом подтерма x_{24} . В нашем примере x_{29} - " $\angle(cbd)$ ", x_{30} - " $\angle(gh)$ ". Переменной x_{31} присваивается результат применения подстановки S к равенству выражений x_{29} и x_{30} . Переменной x_{32} присваивается список результатов применения подстановки S к отличным от x_{10} antecedentes исходной теоремы, а также к antecedentes теорем x_{17} и x_{18} . К этому списку добавляется равенство x_{31} . Переменной x_{33} присваивается результат применения подстановки S к консеквенту x_9 . Создается импликация с antecedентами x_{32} и консеквентом x_{33} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Сведение равенства числовых атомов, более сложных, чем встречающиеся в консеквенте, к более простым числовым атомам.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(a = e) \ \& \ l(ab) = l(ae) \ \& \\ l(ac) = l(ad) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \\ \text{точкалуча}(a, b, c) \ \& \ \text{точкалуча}(a, d, e) \ \rightarrow \ l(bd) = l(ce))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEFGF}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ F - \text{точка} \ \& \ \neg(D = F) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \\ \angle(BAC) = \angle(EDF) \ \& \ l(AB) = l(DE) \ \& \ l(AC) = l(DF) \ \rightarrow \ l(BC) = l(EF))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ \neg(A = E) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \ \& \\ \text{точкалуча}(A, D, E) \ \rightarrow \ \angle(BAD) = \angle(CAE))$$

Переменной x_8 присваивается вхождение antecedента теоремы, являющегося равенством двух выражений с одним и тем же заголовком x_9 . В нашем примере x_8 - вхождение равенства " $\angle(BAC) = \angle(EDF)$ ". Переменной x_{10} присваивается список antecedентов. Переменной x_{11} присваивается левая часть равенства x_8 , переменной x_{13} - правая. Проверяется, что эти части суть числовые атомы. Проверяется, что оценка сложности консеквента теоремы меньше оценки сложности равенства x_8 . Справочник поиска теорем "равнчисл" определяет по символу x_9 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{17} присваивается список antecedентов дополнительной теоремы. Проверяется, что оценка сложности конъюнкции этих antecedентов меньше оценки сложности консеквента дополнительной теоремы. Оператор "выводпосылки" определяет результат последовательного применения дополнительной и исходной теорем

при унификации консеквента дополнительной теоремы с антецедентом x_8 исходной теоремы. Этот результат обрабатывается процедурой "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Сведение равенства числовых атомов к качественным ограничениям, фиксирующим значения этих атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(D = F) \ \& \\ l(AB) = l(DE) \ \& \ l(AC) = l(DF) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \\ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \ \& \\ \text{прямая}(DE) \perp \text{прямая}(DF) \rightarrow l(BC) = l(EF))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ F - \text{точка} \ \& \ \neg(D = F) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \\ \angle(BAC) = \angle(EDF) \ \& \ l(AB) = l(DE) \ \& \ l(AC) = l(DF) \rightarrow l(BC) = l(EF))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow \angle(BAC) = \pi/2)$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_8 присваивается вхождение антецедента теоремы, являющегося равенством двух выражений с одним и тем же заголовком x_9 . В нашем примере x_8 - вхождение равенства " $\angle(BAC) = \angle(EDF)$ ". Переменной x_{10} присваивается список антецедентов. Переменной x_{11} присваивается левая часть равенства x_8 , переменной x_{13} - правая. Проверяется, что эти части суть числовые атомы.

Дальше начинаются отличия. Справочник поиска теорем "числатом" определяет по символу x_9 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{18} присваивается левая часть равенства в консеквенте дополнительной теоремы, переменной x_{19} - правая часть. В нашем примере x_{18} - " $\angle(BAC)$ ", x_{19} - " $\pi/2$ ". Проверяется, что выражение x_{19} не содержит переменных. Переменной x_{20} присваивается список параметров выражения x_{18} . Проверяется, что в нем содержатся все переменные дополнительной теоремы. Определяется подстановка S вместо переменных x_{20} , переводящая выражение x_{18} в выражение x_{11} . Определяется также подстановка R вместо переменных x_{20} , переводящая выражение x_{18} в выражение x_{13} . Переменной x_{23} присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Проверяется, что в нем нет равенства. Переменной x_{24} присваивается список результатов применения к утверждениям набора x_{23} подстановки S , переменной x_{25} - подстановки R . Переменной x_{26} присваивается объединение списка отличных от x_8 антецедентов исходной теоремы со списками x_{24} и x_{25} . Создается импликация с антецедентами x_{26} и тем же консеквентом, что у исходной теоремы. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

6. Попытка расшифровки по определению более чем двуместного отношения в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(B = C) \& \neg(D \in \text{прямая}(BC)) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(CD) \& \text{прямая}(AD) \parallel \text{прямая}(BC) \rightarrow 2l(AB)^2 + 2l(AD)^2 - l(AC)^2 - l(BD)^2 = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& d - \text{точка} \& \text{прямая}(ab) \parallel \text{прямая}(cd) \& \text{прямая}(ad) \parallel \text{прямая}(bc) \& \text{четырёхугольник}(abcd) \rightarrow 2l(ab)^2 + 2l(ad)^2 - l(ac)^2 - l(bd)^2 = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow \text{четырёхугольник}(ABCD) \leftrightarrow \neg(B = C) \& \neg(A \in \text{прямая}(BC)) \& \neg(D \in \text{прямая}(AB)) \& \neg(D \in \text{прямая}(BC)) \& \text{однасторона}(A, D, \text{прямая}(BC)) \& \text{однасторона}(C, D, \text{прямая}(AB)))$$

Переменной x8 присваивается вхождение антецедента, имеющего более 2 корневых операндов. В нашем примере этот антецедент - "четырёхугольник(abcd)". Переменной x9 присваивается заголовок данного антецедента. Справочник поиска теорем "определение" находит по символу x9 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x13 присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x9, переменной x15 - список конъюнктивных членов противоположной части эквивалентности. Проверяется, что все утверждения набора x15 элементарны. Оператор "тождвывод" определяет результат x16 преобразования вхождения x8 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается операторами "нормтеорема" и "сокращаент", после чего регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

1. Попытка анализа контекста теоремы для получения соотношений, не содержащих промежуточных параметров.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(BC)^2 = l(AB)^2 + l(AC)^2)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \neg(A = C) \& \neg(A = B) \& \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \& D \in \text{прямая}(BC) \& \text{прямая}(AD) \perp \text{прямая}(BC) \rightarrow l(BD)l(CD) = l(AD)^2)$$

Проверяется отсутствие характеристики "равны". Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается результат добавления утверждения x9 к списку x8. Решается задача на исследование x12 с посылками x10. Цели задачи - "теорвывод", "неизвестные X", где X - все параметры посылок. Проверяется, что после решения список посылок задачи x12 не содержит константы "ложь". В списке посылок этой задачи выбирается равенство x14, не входящее в список x10 и не имеющее параметров, отсутствующих в утверждениях набора x8. В нашем примере x14 имеет вид $-l(AB)^2 - l(AC)^2 + l(BC)^2 = 0$. Проверяется, что не все параметры утверждений x8 встречаются в равенстве x14. Переменной x15 присваивается список параметров утверждений x8, не встречающихся в равенстве x14. В нашем примере - единственная переменная D. Переменной x16 присваивается список антецедентов исходной теоремы, содержащих параметр списка x15. Переменной x17 присваивается остаток антецедентов. Проверяется, что список x17 непуст. Переменной x18 присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x15 на конъюнкцию утверждений x16. При помощи задачи на доказательство проверяется, что x18 - следствие утверждений набора x17.

Решается задача на исследование с посылками x17 и целями "теорвывод", "неизвестные Y", где Y все параметры ее посылкою. Проверяется, что после решения равенство x14 не встречается в списке посылок этой задачи.

Переменной x20 присваивается результат обработки равенства x14 оператором "стандчисл" относительно посылок x17. В нашем примере происходит перегруппировка слагаемых между частями этого равенства, чтобы исключить слагаемые со знаком "минус". Создается импликация с антецедентами x17 и консеквентом x20. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попыта анализа контекста теоремы для получения нечисловых предикатов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ \angle(ABD) = \angle(CBD) \ \& \\ B \in \text{отрезок}(AC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \\ D - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(AC) \perp \text{прямая}(BD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ \angle(ABD) = \angle(CBD) \ \& \\ B \in \text{отрезок}(AC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \\ D - \text{точка} \rightarrow \angle(CBD) = \pi/2)$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается результат добавления утверждения x9 к списку x8. Решается задача на исследование x12 с посылками x10. Цели задачи - "теорвывод", "неизвестные X", где X - все параметры посылок. Проверяется, что после решения список посылок задачи x12 не содержит константы "ложь".

Переменной x14 присваивается объединение списка x8 со списком посылок задачи x12, имеющих заголовок "актив". Решается задача на исследование x15 с

посылками x_{14} и целями "теорвывод", "неизвестные Y ", где Y - все переменные посылок. После решения задачи x_{15} в списке посылок задачи x_{12} выбирается утверждение x_{18} , не входящее в список посылок задачи x_{15} . Проверяется, что все параметры утверждения x_{18} содержатся в параметрах утверждений набора x_8 . В нашем примере x_{18} - "прямая(AC) \perp прямая(BD)". Проверяется, что заголовок утверждения x_{18} отличен от символов "актив", "равно", "меньшеилиравно", "меньше". Создается импликация с антецедентами x_8 и консеквентом x_{18} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Попытка анализа контекста теоремы для вывода равенств невырожденных числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(D = F) \ \& \ \neg(E = F) \ \& \ l(AC) = l(DF) \ \& \ \angle(ACB) = \angle(DFE) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC) \ \& \ \text{прямая}(DE) \perp \text{прямая}(EF) \rightarrow l(EF) = l(BC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEF}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \neg(D = F) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(E = F) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC) \ \& \ \text{прямая}(DE) \perp \text{прямая}(EF) \ \& \ l(AC) = l(DF) \ \& \ \angle(ACB) = \angle(EFD) \rightarrow l(AB) = l(DE))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Переменной x_{10} присваивается результат добавления утверждения x_9 к списку x_8 . Решается задача на исследование x_{12} с посылками x_{10} . Цели задачи - "теорвывод", "неизвестные X ", где X - все параметры посылок. Проверяется, что после решения список посылок задачи x_{12} не содержит константы "ложь".

Переменной x_{14} присваивается объединение списка x_8 со списком посылок задачи x_{12} , имеющих заголовки "актив". Решается задача на исследование x_{15} с посылками x_{14} и целями "теорвывод", "неизвестные Y ", где Y - все переменные посылок.

Дальше начинаются отличия. После решения задачи x_{15} в списке посылок задачи x_{12} выбирается равенство x_{18} , не входящее в список посылок задачи x_{15} . В нашем примере - равенство " $l(EF) = l(BC)$ ". Проверяется, что x_{18} - равенство двух невырожденных числовых атомов. Проверяется, что в списке посылок задачи x_{15} нет двух равенств, из которых по транзитивности вытекает равенство x_{18} . Затем создается импликация с антецедентами x_8 и консеквентом x_{18} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Попытка варьирования теоремы путем дополнительного построения, позволяющего исключить старую переменную.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(\text{прямая}(BC) = \text{прямая}(CD)) \ \& \ \angle(ACB) = \angle(ACD) \ \& \ A \in \text{прямая}(BD) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow l(AD)l(BC) = l(AB)l(CD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(A = E) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ B \in \text{прямая}(AD) \ \& \ \text{прямая}(DE) \parallel \text{прямая}(BC) \ \& \ C \in \text{прямая}(AE) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AE) = \text{прямая}(AD)) \rightarrow l(AB)l(DE) = l(AD)l(BC))$$

Здесь выводится свойство биссектрисы угла треугольника из соотношения пропорциональности отрезков, связанных с параллельными прямыми.

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается результат добавления терм "консеквент(x9)" к списку x8. Решается задача на исследование x11 с посылками x10 и целями "допкадр", "неизвестные X", где X - все параметры посылок. Цель "допкадр" указывает, что задача решается с целью определить дополнительные построения в антецедентах, позволяющие исключить из теоремы различные выражения. К посылкам такой задачи обычно дообавляется терм "консеквент(...)", ссылающийся на консеквент теоремы. Для усмотрения дополнительных построений служат специальные приемы, вводящие комментарии "допкадр A₁ A₂ A₃" к посылкам задачи. Здесь A₁ - конъюнкция дополнительных антецедентов, содержащих новые переменные (т.е. собственно дополнительное построение), A₂ - конъюнкция соотношений, которые могут оказаться полезными при исключении выражений, A₃ - список выражений, которые должны быть исключены из теоремы после ввода новых антецедентов. В нашем примере после решения задачи x11 переменной x13 присваивается комментарий "допкадр A₁ A₂ A₃", у которого A₁ - утверждение " $\angle(DEC) = \angle(ECD) \ \& \ \neg(E = D) \ \& \ \neg(E = C) \ \& \ \neg(D = C)$ ", A₂ - утверждение " $l(DE) = l(DC)$ ", A₃ - набор, образованный однобуквенным термом E. Прием, который предложил данное построение, ввел равнобедренный треугольник CDE с вершиной D, добавив условие равенства углов при его основании. Такое построение позволяет частично снять "нагрузку" на точку E, выразив расстояние DE через CD. Для окончательного исключения точки E останется лишь воспользоваться равенством углов при параллельных прямых и секущей, получив в итоге, что прямая CA - биссектриса треугольника BCD. Впрочем, это будет происходить уже в другой задаче (см. ниже).

Срабатывание приема, предложившего дополнительное построение, было инициировано усмотрением посылки с расстоянием DE, не имеющей других вхождений переменной E, наличием точки C, не лежащей на прямой DE и такой, что прямая CE уже рассматривается в задаче, а также проверкой отсутствия проходящей через точку C прямой, параллельной прямой DE. Задача x11 решается до очень малого уровня. Ее действия ограничиваются лишь вводом комментариев "допкадр". Приемы, создающие такие комментарии, можно найти в

разделе "Логические приемы и структуры данных" - "Вспомогательные приемы вывода теорем" - "Дополнительные построения в антецедентах" оглавления приемов ГЕНОЛОГа.

Продолжим описания действий приема вывода теоремы. После выделения указанного выше комментария "допкадр $A_1 A_2 A_3$ " переменной x_{14} присваивается список конъюнктивных членов утверждения A_1 , переменной x_{15} - набор A_3 . Переменной x_{17} присваивается объединение списков x_8 , x_{14} , списка конъюнктивных членов утверждения A_2 . К этому объединению добавляется консеквент x_9 . Проверяется, что набор x_{15} образован однобуквенным термом - некоторой переменной x_{16} . В нашем примере - переменной E . Решается задача на исследование x_{18} с посылками x_{17} и целями "исключ x_{16} ", "известно", "неизвестные Y ", где Y - параметры ее посылок. Посылка x_9 помечается в задаче x_{18} примечанием "экв".

По окончании решения задачи x_{18} в ее списке посылок выбирается равенство x_{20} с примечанием "экв", т.е. фактически преобразованный консеквент x_9 . Проверяется, что утверждение x_{20} не содержит переменной x_{16} . В нашем примере x_{20} имеет вид " $l(AD)l(BC) = l(AB)l(CD)$ ".

Вводится пустой накопитель x_{22} альтернативных наборов антецедентов новой теоремы. Переменной x_{23} присваивается объединение списков x_8 и x_{14} , после чего решается задача на исследование x_{24} с посылками x_{23} и целями "исключ x_{16} ", "известно", "антецеденты", "неизвестные Z ", где Z - все параметры посылок задачи. Если в процессе решения задачи имел место разбор случаев и возникали альтернативные версии V списка антецедентов, то они регистрируются в комментариях "частичный ответ V " к посылкам задачи x_{24} . По окончании решения задачи проверяется наличие комментариев "частичный ответ V ". Если они имеются, то в накопитель x_{22} переносятся все списки V . Если таких комментариев нет, то x_{22} полагается состоящим из единственного списка посылок задачи x_{24} , не имеющих заголовка "актив". В нашем примере комментариев "частичный ответ" не было.

После того, как накопитель x_{22} заполнен, все переменные начиная с x_{23} снова становятся не определенными. Переменной x_{23} присваивается некоторый элемент накопителя x_{22} . Далее предпринимается попытка отбросить из списка x_{23} избыточные антецеденты. Рассматриваются утверждения списка x_{23} вида "не(Q)", не являющиеся условиями различия прямых и не используемые для сопровождения по о.д.з., и предпринимается попытка доказательства равенства x_{20} из списка x_{23} , в котором "не(Q)" заменено на Q . В случае успеха утверждение "не(Q)" отбрасывается.

Далее проверяется, что переменная x_{16} отсутствует в утверждениях списка x_{23} . Переменной x_{24} присваивается результат пополнения списка x_{23} утверждениями, необходимыми для сопровождения по о.д.з. Создается импликация с антецедентами x_{24} и консеквентом x_{20} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

5. Попытка варьирования теоремы путем дополнительного построения, позволяющего исключить старые числовые атомы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aABC}(\neg(a = A) \& \neg(a = B) \& \neg(A = B) \& \neg(B = C) \& B \in \text{прямая}(aA) \& a - \text{точка} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{прямая}(aA) \perp \text{прямая}(BC) \rightarrow 4(-l(AC)^2 + l(BC)^2)l(aA)^2 + (-l(aA)^2 - l(AC)^2 + l(aC)^2)^2 = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \neg(B = C) \& \neg(A = B) \& \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC) \rightarrow l(AC)^2 = l(AB)^2 + l(BC)^2)$$

Здесь выводится соотношение для высоты треугольника и длин его сторон из теоремы Пифагора.

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается результат добавления терм "консеквент(x9)" к списку x8. Решается задача на исследование x11 с посылками x10 и целями "допкадр", "неизвестные X", где X - все параметры посылок. В нашем примере после решения задачи x11 переменной x13 присваивается комментарий "допкадр A₁ A₂ A₃", у которого A₁ - утверждение "a - точка & a ∈ прямая(AB) & ¬(a = A) & ¬(a = B)", A₂ - утверждение "актив(l(Aa)) & l(BC)² + l(Ba)² = l(Ca)²", A₃ состоит из выражений l(AB), l(Ba). Прием, который создал такой комментарий, использовал уже имеющийся прямой угол прямоугольного треугольника для присоединения еще одного прямоугольного треугольника. Устраняться должны длины лежащих на одной прямой и имеющих общий конец катетов.

Переменной x14 присваивается список конъюнктивных членов утверждения A₁, переменной x15 - набор A₃. Переменной x17 присваивается объединение списков x8, x14, списка конъюнктивных членов утверждения A₂. К этому объединению добавляется консеквент x9.

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что x15 не является одноэлементным набором, образованным однобуквенным термом - какой-либо переменной. Переменной x18 присваивается список числовых атомов, входящих в утверждения набора x17. Проверяется, что все они невырожденные. В нашем примере x18 состоит из атомов "l(Aa)", "l(BC)", "l(Ba)", "l(Ca)", "l(AC)", "l(AB)". Переменной x19 присваивается разность списков x18 и x15. В нашем примере - "l(Aa)", "l(BC)", "l(Ca)", "l(AC)". Переменной x20 присваивается список атомов набора x19, встречающихся в утверждениях x17 более одного раза. Проверяется, что список x20 одноэлементный, и переменной x21 присваивается его элемент. В нашем примере - выражение l(BC). Выбирается список x22 не входящих в утверждения x17 переменных, длина которого равна длине списка x19. В нашем примере - переменные b, c, d, e. Переменной x23 присваивается элемент списка x22, соответствующий элементу x21 списка x19. В нашем примере - переменная c. Переменной x24 присваивается объединение списка x17 со списком равенств отличных от x21 атомов x19 соответствующим переменным списка x22.

Решается задача на описание x_{25} с посылками x_{24} , единственным условием которой служит равенство атома x_{21} переменной x_{23} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "упростить", "косвнеизв", "неизвестные x_{23} ", "известно P ", где P - все отличные от x_{23} переменные списка x_{22} . Цель "косвнеизв" означает, что достаточно получить неявное описание неизвестных. Ответ задачи присваивается переменной x_{26} . В нашем примере он имеет вид " $4(-e^2 + c^2)b^2 + (-b^2 - e^2 + d^2)^2 = 0$ ". Проверяется, что x_{26} - равенство. Переменной x_{27} присваивается результат подстановки в это равенство выражений x_{19} вместо переменных x_{22} . Переменной x_{28} присваивается объединение списков x_8 и x_{14} . Создается импликация с антецедентами x_{28} и консеквентом x_{27} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

6. Попытка анализа контекста теоремы для вывода дополнительных соотношений, позволяющих в сочетании с исходным соотношением выразить сложный числовой атом через параметры антецедента - равенства для простых атомов (умножение соотношений пропорциональности).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ al(AB)l(AC) = bl(BC)^2 \ \& \\ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \\ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow a \sin(2\angle(ABC)) = 2b)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \\ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Переменной x_{10} присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. В нашем примере - " $l(AC)$ ", " $\angle(ABC)$ ", " $l(BC)$ ". Переменной x_{11} присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x_{10} . В нашем примере - a, b, c . Переменной x_{12} присваивается результат добавления к списку x_8 консеквента x_9 и равенств атомов x_{10} соответствующим переменным x_{11} . Решается задача на исследование x_{13} со списком посылок x_{12} и целями "теорвывод", "неизвестные X ", "известно", где X - все параметры атомов x_{10} , т.е. в нашем примере A, B, C .

Оператор "пропорцатомы" усматривает, что x_9 - соотношение пропорциональности для двух числовых атомов, причем переменным x_{15} и x_{16} присваиваются эти атомы, а переменным x_{17} и x_{18} - коэффициенты при них. В качестве списка посылок оператор использует набор x_8 . В нашем примере x_{15} - $l(AC)$, x_{16} - $l(BC)$, x_{17} - 1, x_{18} - $\sin(\angle(ABC))$. Переменной x_{19} присваивается список невырожденных числовых атомов, встречающихся в коэффициентах x_{17} и x_{18} . В нашем примере - единственный атом $\angle(ABC)$. Проверяется, что список x_{15} одноэлементный, причем оценка сложности его элемента больше оценок сложности атомов x_{15} и x_{16} .

В списке посылок задачи x_{13} после ее решения выбирается равенство x_{21} . В нашем примере - " $l(AB) = c \cos b$ ". Переменной x_{22} присваивается результат подстановки в x_{13} атомов x_{10} вместо переменных x_{11} . В нашем примере -

" $l(AB) = l(BC) \cos(\angle(ABC))$ ". Проверяется, что x_{22} не совпадает с консеквентом x_9 . Оператор "пропорцатомы" усматривается, что x_{22} - соотношение пропорциональности для атомов x_{23} и x_{24} с коэффициентами x_{25} и x_{26} . В нашем примере $x_{23} - l(AB)$, $x_{24} - l(BC)$, $x_{25} - 1$, $x_{26} - \cos(\angle(ABC))$. Проверяется, что список невырожденных числовых атомов коэффициентов x_{25} и x_{26} совпадает со списком x_{19} , причем оценки сложности атомов x_{23} и x_{24} меньше оценки сложности элемента списка x_{19} .

Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{27} присваивается атом x_{23} , переменной x_{28} - коэффициент x_{25} , переменной x_{29} - атом x_{24} , переменной x_{30} - коэффициент x_{26} . Во втором случае переменной x_{27} присваивается атом x_{24} , переменной x_{28} - коэффициент x_{26} , переменной x_{29} - атом x_{23} , переменной x_{30} - коэффициент x_{25} . В нашем примере рассматривается первый случай. Проверяется, что либо оба атома x_{15} , x_{27} ненулевые, либо оба атома x_{16} , x_{29} ненулевые. Проверяется, что атомы x_{15} , x_{27} отличны от атомов x_{16} , x_{29} . Проверяется также, что либо атомы x_{15} , x_{27} различны, либо атомы x_{16} , x_{29} различны. Выбираются переменные P, Q , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b . Переменной x_{32} присваивается равенство произведения выражений P , x_{15} , x_{27} произведению выражений Q , x_{16} , x_{29} . Переменной x_{33} присваивается равенство произведения выражений P , x_{18} , x_{30} произведению выражений Q , x_{17} , x_{28} . В нашем примере x_{32} имеет вид " $al(AC)l(AB) = bl(BC)l(BC)$ ", x_{33} - вид " $a \sin(\angle(ABC)) \cos(\angle(ABC)) = b \cdot 1 \cdot 1$ ".

Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения набора x_8 и утверждения "число(P)", "число(Q)", x_{32} . Консеквентом является равенство x_{33} . Переменной x_{34} присваивается результат обработки данной импликации оператором "Нормтеорема", которому передается опция "числовойатом". Проверяется, что x_{34} - кванторная импликация, имеющая в своем консеквенте единственное вхождение невырожденного числового атома. Затем x_{34} регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "числовойатом".

7. Попытка анализа контекста теоремы для вывода дополнительных соотношений, позволяющих в сочетании с исходным соотношением выразить сложный числовой атом через параметры антецедента - равенства для простых атомов (сложение соотношений пропорциональности).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABC} (\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ al(AB) + al(AC) = bl(BC) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow a\sqrt{2} \sin(\pi/4 + \angle(ABC)) = b)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Переменной x_{10} присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. В нашем примере - " $l(AC)$ ", " $\angle(ABC)$ ", " $l(BC)$ ". Переменной x_{11}

присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x_{10} . В нашем примере - a, b, c . Переменной x_{12} присваивается результат добавления к списку x_8 консеквента x_9 и равенств атомов x_{10} соответствующим переменным x_{11} . Решается задача на исследование x_{13} со списком посылок x_{12} и целями "теорвывод", "неизвестные X ", "известно", где X - все параметры атомов x_{10} , т.е. в нашем примере A, B, C .

Оператор "пропорцатомы" усматривает, что x_9 - соотношение пропорциональности для двух числовых атомов, причем переменным x_{15} и x_{16} присваиваются эти атомы, а переменным x_{17} и x_{18} - коэффициенты при них. В качестве списка посылок оператор использует набор x_8 . В нашем примере $x_{15} - l(AC)$, $x_{16} - l(BC)$, $x_{17} - 1$, $x_{18} - \sin(\angle(ABC))$. Переменной x_{19} присваивается список невырожденных числовых атомов, встречающихся в коэффициентах x_{17} и x_{18} . В нашем примере - единственный атом $\angle(ABC)$. Проверяется, что список x_{15} одноэлементный, причем оценка сложности его элемента больше оценок сложности атомов x_{15} и x_{16} .

В списке посылок задачи x_{13} после ее решения выбирается равенство x_{21} . В нашем примере - " $l(AB) = c \cos b$ ". Переменной x_{22} присваивается результат подстановки в x_{13} атомов x_{10} вместо переменных x_{11} . В нашем примере - " $l(AB) = l(BC) \cos(\angle(ABC))$ ". Проверяется, что x_{22} не совпадает с консеквентом x_9 . Оператор "пропорцатомы" усматривает, что x_{22} - соотношение пропорциональности для атомов x_{23} и x_{24} с коэффициентами x_{25} и x_{26} . В нашем примере $x_{23} - l(AB)$, $x_{24} - l(BC)$, $x_{25} - 1$, $x_{26} - \cos(\angle(ABC))$. Проверяется, что список невырожденных числовых атомов коэффициентов x_{25} и x_{26} совпадает со списком x_{19} , причем оценки сложности атомов x_{23} и x_{24} меньше оценки сложности элемента списка x_{19} .

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что пары атомов x_{15} , x_{16} и x_{23} , x_{24} имеют единственный общий элемент, и этот элемент присваивается переменной x_{28} . В нашем примере - $l(BC)$. Если x_{28} совпадает с x_{15} , то переменной x_{29} присваивается атом x_{16} , переменной x_{30} - коэффициент x_{18} , переменной x_{31} - коэффициент x_{17} . Иначе переменной x_{29} присваивается атом x_{15} , переменной x_{30} - коэффициент x_{17} , переменной x_{31} - коэффициент x_{18} . В нашем примере имеет место второй случай. Если x_{28} совпадает с x_{23} , то переменной x_{32} присваивается атом x_{24} , переменной x_{33} - коэффициент x_{26} , переменной x_{34} - коэффициент x_{25} . Иначе переменной x_{32} присваивается атом x_{23} , переменной x_{33} - коэффициент x_{25} , переменной x_{34} - коэффициент x_{26} . В нашем примере имеет место второй случай. Проверяется, что коэффициенты x_{30} и x_{33} ненулевые.

Выбираются переменные P, Q , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b . Переменной x_{38} присваивается равенство суммы произведений выражений P , x_{29} и P , x_{32} произведению выражений Q , x_{28} . В нашем примере x_{38} имеет вид " $al(AC) + al(AB) = bl(BC)$ ". Переменной x_{39} присваивается результат добавления к списку x_8 утверждений "число(P)", "число(Q)", x_{38} . Переменной x_{40} присваивается равенство суммы произведений выражений P , x_{31} , x_{33} и P , x_{30} , x_{34} произведению выражений Q , x_{33} , x_{30} . В нашем примере x_{40} имеет вид " $a \sin(\angle(ABC)) \cdot 1 + a \cdot 1 \cdot \cos(\angle(ABC)) = b \cdot 1 \cdot 1$ ".

Создается импликация с антецедентами x39 и консеквентом x40. Переменной x41 присваивается результат обработки ее оператором "Нормтеорема", которому передается опция "числовойатом". Проверяется, что x41 - кванторная импликация, имеющая в своем консеквенте единственное вхождение невырожденного числового атома. Затем x41 регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "числовойатом".

8. Попытка вывести соотношение с дополнительным числовым атомом и исключить из него старый атом.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \& \neg(B = C) \& \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)) \& \angle(ABD) = \angle(CBD) \& D \in \text{прямая}(AC) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow l(BD)^2 l(CD) + l(CD)^2 l(AD) = l(BC)^2 l(AD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \neg(B = C) \& \neg(A = B) \& \angle(ABD) = \angle(DBC) \& D \in \text{прямая}(AC) \& \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)) \rightarrow l(AB)l(CD) = l(AD)l(BC))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается результат добавления утверждения x9 к списку x8. Решается задача на исследование x12 с посылками x10. Цели задачи - "теорвывод", "неизвестные X", где X - все параметры посылок. Проверяется, что после решения список посылок задачи x12 не содержит константы "ложь".

Переменной x14 присваивается список числовых атомов консеквента. В нашем примере - " $l(AB)$ ", " $l(CD)$ ", " $l(AD)$ ", " $l(BC)$ ". В списке посылок задачи x12 после ее решения находится равенство x15, имеющее только невырожденные числовые атомы, причем список x16 этих атомов не включается в x14. В нашем примере x15 имеет вид

$$(l(AC)l(AD) - l(AB)^2)(-l(AD) + l(AC)) + l(BD)^2 l(AC) - l(BC)^2 l(AD) = 0$$

Реализуется цикл коррекций равенства x15. Просматриваются равенства x17 списка посылок задачи x12, отличные от x15 и такие, что в одной из частей равенства расположен атом x20 списка x16, не входящие в список x14, а в другой части - некоторое выражение x21. Переменной x22 присваивается список числовых атомов выражения x21. Проверяется, что он не содержит атома x20, но содержится в объединении списков x14 и x16. Проверяется, что каждый атом списка x22, не принадлежащий списку x14, встречается в равенстве x15. После этого предпринимается замена вхождений атома x20 в равенство x15 на выражение x21. Указанные замены продолжаются до тех пор, пока это возможно. В нашем примере x15 приобретает вид:

$$((l(AD) + l(CD))l(AD) - l(AB)^2)(-l(AD) + (l(AD) + l(CD))) + l(BD)^2 (l(AD) + l(CD)) - l(BC)^2 l(AD) = 0$$

После цикла коррекций равенства x15 все переменные начиная с x17 снова оказываются не определены. Переменной x17 присваивается список числовых

атомов равенства x_{15} . Проверяется, что он включает в себя список x_{14} . Выбирается переменная x_{18} , не входящая в посылки задачи x_{12} . В нашем примере - переменная a . Переменной x_{19} присваивается некоторый элемент списка x_{14} . В нашем примере - $l(AB)$. Переменной x_{21} присваивается результат замены в консеквенте x_9 вхождений атома x_{19} на переменную x_{18} . В нашем примере - " $al(CD) = l(AD)l(BC)$ ". Решается задача на описание x_{23} , посылки которой - те же, что у задачи x_{12} после ее решения, а условия - утверждения "число(x_{18})" и x_{21} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "упростить", "неизвестные x_{18} ". Ответ присваивается переменной x_{24} . В нашем примере он имеет вид " $a = l(AD)l(BC)/l(CD)$ ". Проверяется, что x_{24} - равенство с переменной x_{18} в левой части и некоторым выражением x_{25} в правой. Переменной x_{27} присваивается результат замены вхождений атома x_{19} в равенстве x_{15} на выражение x_{25} . В нашем примере имеем:

$$((l(AD) + l(CD))l(AD) - (l(AD)l(BC)/l(CD))^2)(-l(AD) + (l(AD) + l(CD))) + l(BD)^2(l(AD) + l(CD)) - l(BC)^2l(AD) = 0$$

Решается задача на описание x_{28} с посылками x_8 и единственным условием x_{27} . Цели задачи - "одз", "редакция". Ответ присваивается переменной x_{29} . В нашем примере он имеет вид:

$$\neg(C = D) \& l(BD)^2l(CD) + l(CD)^2l(AD) - l(BC)^2l(AD) = 0$$

Переменной x_{30} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{29} . В списке x_{30} выбирается равенство x_{31} . Создается импликация с антецедентами x_8 и консеквентом x_{31} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

9. Анализ контекста теоремы для получения дополнительного соотношения, связывающего новый числовой атом со старыми.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \neg(B = C) \& \neg(C = D) \& l(AC) = l(BC) \& D \in \text{прямая}(AB) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \rightarrow \angle(ACD) = \angle(BCD) \& 2\angle(ACD) = \angle(ACB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \neg(B = C) \& \neg(C = D) \& l(AC) = l(BC) \& D \in \text{прямая}(AB) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \rightarrow \angle(ACD) = \angle(BCD))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Переменной x_{10} присваивается результат добавления утверждения x_9 к списку x_8 . Решается задача на исследование x_{12} с посылками x_{10} . Цели задачи - "теорвывод", "неизвестные X ", где X - все параметры посылок. Проверяется, что после решения список посылок задачи x_{12} не содержит константы "ложь".

Переменной x_{14} присваивается список числовых атомов консеквента. В нашем примере - " $\angle(ACD)$ ", " $\angle(BCD)$ ". В списке посылок задачи x_{12} после

ее решения находится равенство x15, параметры которого включаются в список параметров утверждений x8. В нашем примере - равенство " $2\angle(ACD) = \angle(ACB)$ ". Переменной x16 присваивается список числовых атомов равенства x15. Проверяется, что он не включается в список x14, но имеет с ним общий элемент. Переменной x17 присваивается разность списков x16 и x14. Проверяется, что она состоит из единственного атома x18. В нашем примере - " $\angle(ACB)$ ". Проверяется, что комментарий "выводимо" к посылке x15 задачи x12 содержит ссылку на консеквент x9. Создается импликация с антецедентами x8, консеквентом которой служит конъюнкция старого консеквента x9 с равенством x15. Эта импликация регистрируется в списке вывода с характеристиками "конъюнкция", "допсвязь x18".

10. Варьирование параметра для получения соотношения с двумя самыми сложными числовыми атомами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aABC}(\neg(a = B) \ \& \ \neg(a = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow 2 \cos(\angle(BAC))l(AB)l(AC) - l(AB)^2 - l(AC)^2 + l(aB)^2 + l(aC)^2 = 2 \cos(\angle(BaC))l(aB)l(aC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow 2l(AB)l(AC) \cos(\angle(BAC)) = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Проверяется, что x9 - равенство, и переменной x10 присваивается список его невырожденных числовых атомов. В нашем примере - " $l(AB)$ ", " $l(AC)$ ", " $\angle(BAC)$ ", " $l(BC)$ ". Проверяется, что длина списка x10 не менее 3. В списке x10 выбирается атом x11 и переменной x12 присваивается список его параметров. Проверяется, что длина этого списка равна 3. В нашем примере x11 - " $\angle(BAC)$ ". Проверяется, что число параметров каждого из остальных атомов списка x10 меньше 3. Проверяется, что все корневые операнды атома x11 суть переменные. В списке x12 выбирается переменная x13. В нашем примере - переменная A . Переменной x14 присваивается остаток списка x12. В нашем примере - B, C . В списке x10 выбирается атом x15, параметры которого включаются в список x14. В нашем примере - атом $l(BC)$. Проверяется, что атом x15 имеет единственное вхождение в терм x9.

Выбирается переменная x16, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x17 присваивается результат замены в исходной теореме переменной x13 на переменную x16. В нашем примере x17 имеет вид:

$$\forall_{aBC}(a - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(a = C) \ \& \ \neg(a = B) \rightarrow 2l(aB)l(aC) \cos(\angle(BaC)) = l(aB)^2 + l(aC)^2 - l(BC)^2)$$

Переменной x18 присваивается объединение списков антецедентов исходной теоремы и теоремы x17. Переменной x19 присваивается консеквент теоремы x17. Выбирается переменная x20, отличная от x16 и не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Переменной x21 присваивается вхождение атома x15 в терм x9, переменной x22 - вхождение этого атома в терм

x19. Переменной x23 присваивается результат замены вхождения x21 в терм x9 на переменную x20, переменной x24 - результат замены вхождения x22 в терм x19 на эту же переменную x20. Переменной x25 присваивается объединение списка x18 с утверждениями x23, x24 и "число(x20)". Решается задача на исследование x26 с посылками x25 и целями "известно", "неизвестные X", "исключ x20", где X - все параметры посылок. После ее решения в списке посылок находится равенство x28, не содержащее переменной x20, но имеющее вхождение атома x11. В нашем примере x28 имеет вид:

$$\frac{2 \cos(\angle(BAC))l(AB)l(AC) - l(AB)^2 - l(AC)^2 + l(aB)^2 + l(aC)^2}{2 \cos(\angle(BaC))l(aB)l(aC)}$$

Переменной x29 присваивается результат замены в атоме x11 переменной x13 на переменную x16. В нашем примере - " $\angle(BaC)$ ". Проверяется, что выражение x29 встречается в равенстве x28. Проверяется также, что все параметры терма x28 встречаются среди параметров утверждений набора x18. Создается импликация с антецедентами x18 и консеквентом x28. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

11. Попытка выразить уникальный числовой атом выведенного соотношения через другие числовые атомы, не содержащие заданного параметра выражаемого атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\frac{\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \angle(ABD) = \angle(DBC) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)) \rightarrow l(BD) = \sqrt{l(AB)l(BC)(l(AC) + l(AB) + l(BC))(l(AB) + l(BC) - l(AC))/(l(AB) + l(BC))})}{\text{из теоремы}}$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \angle(ABD) = \angle(DBC) \ \& \ D \in \text{прямая}(AC) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)) \rightarrow l(AB)l(CD) = l(AD)l(BC))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается результат добавления утверждения x9 к списку x8. Решается задача на исследование x12 с посылками x10. Цели задачи - "теорвывод", "неизвестные X", где X - все параметры посылок. Проверяется, что после решения список посылок задачи x12 не содержит константы "ложь".

После решения задачи x12 в ее списке посылок находится равенство x14, не входящее в список x10 и не имеющее параметров, не встречающихся среди антецедентов исходной теоремы. Проверяется, что это равенство содержит все параметры антецедентов. В нашем примере x14 имеет вид

$$(l(AC)l(AD) - l(AB)^2)(-l(AD) + l(AC)) + l(BD)^2l(AC) - l(BC)^2l(AD) = 0$$

Проверяется, что посылка x14 имеет комментарий "следствие", т.е. была добавлена при выводе следствий. Переменной x17 присваивается список невырожденных числовых атомов равенства x14. В нашем примере - " $l(AC)$ ", " $l(AD)$ ",

" $l(AB)$ ", " $l(BD)$ ", " $l(BC)$ ". Проверяется, что хотя бы один из атомов x_{17} встречается в консеквенте x_9 . В списке x_{17} выбирается атом x_{18} , имеющий единственное вхождение в равенстве x_{14} . В нашем примере - " $l(BD)$ ". Среди параметров атома x_{18} выбирается переменная x_{19} . В нашем примере - переменная D . Переменной x_{20} присваивается список отличных от x_{18} атомов набора x_{17} , содержащих переменную x_{19} . В нашем примере - единственный атом $l(AD)$.

Рассматривается список S всех равенств в посылках задачи x_{12} , не содержащих атома x_{18} , но содержащих какой-либо атом списка x_{20} . Если этот список не короче списка x_{20} , то рассматривается список Q всех невырожденных числовых атомов равенств набора S , содержащих переменную x_{19} . Проверяется, что Q не включается в список x_{20} и не длиннее списка x_{20} .

Переменной x_{21} присваивается список невырожденных числовых атомов посылок задачи x_{12} , не содержащих переменной x_{19} и не имеющих параметров, отсутствующих в равенстве x_{14} . В нашем примере x_{21} состоит из атомов " $l(AC)$ ", " $l(AB)$ ", " $l(BC)$ ". Проверяется, что список x_{21} непуст. Переменной x_{22} присваивается список переменных, не встречающихся в исходной задаче, длина которого на единицу больше длины списка x_{21} . Переменной x_{23} присваивается начало списка x_{22} , переменной x_{24} - его окончание. В нашем примере x_{23} - переменная a , x_{24} - b, c, d . Переменной x_{25} присваивается объединение списка посылок задачи x_{12} с равенствами атомов x_{21} соответствующим переменным набора x_{24} . К x_{25} добавляются также утверждения " $\text{число}(X)$ " для всех переменных списка x_{24} . Решается задача на описание с посылками x_{25} , условиями которой служат утверждения " $\text{равно}(x_{18} \ x_{23})$ " и " $\text{число}(x_{23})$ ". Цели задачи - " полный ", " явное ", " прямойответ ", " $\text{неизвестные } x_{23}$ ", " $\text{известно } x_{24}$ ". Ответ присваивается переменной x_{28} . В нашем примере он имеет вид " $a = \sqrt{cd(b+c+d)(c+d-b)}/(c+d)$ ". Проверяется, что x_{28} - равенство с переменной x_{23} в левой части. Переменной x_{29} присваивается результат подстановки в равенство x_{28} выражения x_{18} вместо переменной x_{23} и выражений x_{21} вместо переменных x_{24} . Создается импликация с антецедентами x_8 и консеквентом x_{29} . Она регистрируется в списке вывода.

12. Вывод следствий после дополнительного построения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{efABCD}(l(AB) = l(CD) \ \& \ e \in \text{прямая}(AD) \ \& \ f \in \text{прямая}(AD) \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(eB) \perp \text{прямая}(AD) \ \& \ \text{прямая}(fC) \perp \text{прямая}(AD) \ \& \ \text{трапеция}(ABCD) \rightarrow l(eA) = l(fD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(l(AB) = l(CD) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{трапеция}(ABCD) \rightarrow \angle(BAD) = \angle(ADC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE F}(\text{трапеция}(ABCD) \rightarrow E \in \text{прямая}(AD) \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(BE) \perp \text{прямая}(AD) \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ F \in \text{прямая}(AD) \ \& \ \text{прямая}(CF) \perp \text{прямая}(AD))$$

Переменной x_8 присваивается список antecedентов, переменной x_9 - консеквент. Переменной x_{10} присваивается список заголовков подтермов antecedентов, имеющих в своем antecedенте максимальную ненулевую сложность. В нашем примере x_{10} состоит из символов "расстояние", "трапеция". В списке x_{10} выбирается символ x_{11} . В нашем примере - "трапеция". Справочник поиска теорем "допкадр" определяет по x_{11} указанную выше дополнительную теорему. Заметим, что она представляет собой лишь шаблон для дополнительного построения. В данном случае - для проведения в трапеции двух высот. Переменной x_{14} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не встречающиеся в исходной теореме. В нашем примере x_{14} имеет вид:

$$\forall_{abcdef}(\text{трапеция}(abcd) \rightarrow e \in \text{прямая}(ad) \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(be) \perp \text{прямая}(ad) \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ f \in \text{прямая}(ad) \ \& \ \text{прямая}(cf) \perp \text{прямая}(ad))$$

Переменной x_{15} присваивается список antecedентов теоремы x_{14} , переменной x_{16} - список параметров этих antecedентов. Проверяется, что antecedенты не имеют связанных переменных. Оператор "подборзначений" определяет подстановку S вместо переменных x_{16} , переводящую утверждения набора x_{15} в некоторые утверждения набора x_8 . При этом переменной x_{18} присваивается список утверждений набора x_8 , в которые фактически были переведены утверждения набора x_{15} . Проверяется, что все параметры утверждений списка x_8 встречаются в утверждениях списка x_{18} . Переменной x_{19} присваивается результат применения подстановки S к консеквенту теоремы x_{14} . В нашем примере x_{19} имеет вид:

$$e \in \text{прямая}(AD) \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(Be) \perp \text{прямая}(AD) \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ f \in \text{прямая}(AD) \ \& \ \text{прямая}(Cf) \perp \text{прямая}(AD)$$

Переменной x_{20} присваивается список параметров утверждения x_{19} , не входящих в antecedенты x_8 . В нашем примере - e, f . Проверяется, что список x_{20} непуст. Переменной x_{21} присваивается объединение списка x_8 с конъюнктивными членами утверждений x_9 и x_{19} . Решается задача на исследование x_{22} с посылками x_{21} и целями "известно", "Смтеор", "теорема", "неизвестные X ", где X - параметры ее посылки.

Переменной x_{23} присваивается объединение списка результатов применения подстановки S к утверждениям набора x_{15} с конъюнктивными членами утверждения x_{19} . Решается задача на исследование x_{24} с antecedентами x_{23} и целями "известно", "теорема", "Смтеор", "неизвестные Y ", где Y - параметры ее посылки. Переменной x_{26} присваивается разность списков посылок задачи x_{22} и задачи x_{24} , полученных после решения этих задач.

Создается список x_{27} принадлежащих набору x_{26} равенств двух числовых атомов, содержащих переменную списка x_{20} и не содержащих переменных, не входящих в утверждения x_{21} . При занесении в список x_{27} эти равенства обрабатываются оператором "станд". Если в списке x_{26} имеются два равенства, из которых по транзитивности может быть получено равенство указанного вида, то последнее тоже заносится в список x_{27} .

Переменной x_{28} присваивается объединение списка x_8 со списком конъюнктивных членов утверждения x_{19} . Для каждого утверждения x_{29} списка x_{27} создается импликация с антецедентами x_{28} и консеквентом x_{29} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

13. Попытка усмотрения альтернативного равенства числовых атомов в теореме, выводящей равенство одной пары атомов из равенства другой.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ l(AC) = l(BC) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ D\text{-точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \rightarrow \angle(CBD) = \angle(CAD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ l(AC) = l(BC) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A\text{-точка} \ \& \ B\text{-точка} \ \& \ C\text{-точка} \ \& \ D\text{-точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \rightarrow \angle(BDC) = \angle(ADC))$$

Проверяется наличие у теоремы характеристики "равны". Переменной x_8 присваивается вхождение антецедента, представляющего собой равенство двух числовых атомов x_{11} и x_{13} с одинаковым заголовком x_9 . В нашем примере рассматривается антецедент " $l(AC) = l(BC)$ ". Выбираются переменные X, Y , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b . Переменной x_{16} присваивается список антецедентов. Проверяется, что в нем имеется лишь одно равенство. Переменной x_{17} присваивается вхождение консеквента, переменной x_{18} - пара частей P, Q равенства x_{17} . Переменной x_{19} присваивается список утверждений набора x_{16} , отличных от равенства x_8 . Переменной x_{20} присваивается результат добавления к списку x_{19} утверждений "актив(x_{11})", "актив(x_{13})", " $P = X$ ", " $Q = Y$ ". Решается задача на исследование x_{21} с посылками x_{20} и целями "теорвывод", "неизвестные Z ", "известно". Здесь Z - отличные от X, Y параметры посылок.

После решения задачи x_{21} проверяется отсутствие в ее посылках константы "ложь". В этих посылках выбирается равенство x_{23} , правая часть x_{24} которого не содержит переменных Z , содержит переменную X и не содержит переменной Y . В нашем примере x_{23} имеет вид " $\angle(CBD) = -a + \pi/2$ ". Переменной x_{25} присваивается результат замены в равенстве x_{24} переменной X на переменную Y . В списке посылок задачи x_{21} находится равенство x_{26} с правой частью x_{25} . В нашем примере - равенство " $\angle(CAD) = -b + \pi/2$ ". Переменной x_{27} присваивается равенство левых частей равенств x_{23} и x_{26} . Проверяется, что x_{27} - равенство двух невырожденных числовых атомов, не входящих в консеквент исходной теоремы. Создается импликация с антецедентами x_{16} и консеквентом x_{27} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование вспомогательной задачи на описание

1. Попытка выразить один числовой атом через другие.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(A\text{—точка} \ \& \ B\text{—точка} \ \& \ C\text{—точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \angle(BAC) = \arccos((-l(BC)^2 + l(AB)^2 + l(AC)^2)/(2l(AB)l(AC))))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A\text{—точка} \ \& \ B\text{—точка} \ \& \ C\text{—точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow 2l(AB)l(AC) \cos(\angle(BAC)) = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента, не связанных в нем внешними кванторами и описателями. Проверяется, что длина списка x10 не менее 2. В нашем примере x10 состоит из атомов "l(AB)", "l(AC)", " $\angle(BAC)$ ", "l(BC)". Проверяется, что консеквент - равенство. В списке x10 выбирается атом x12, имеющий единственное вхождение в это равенство и не являющийся одной из его частей. В нашем примере - " $\angle(BAC)$ ". Выбирается переменная x13, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a. Переменной x14 присваивается вхождение атома x13 в терм x9. Проверяется, что либо x14 расположено только внутри подтермов с заголовками "равно", "плюс", "минус", "умножение", "дробь", "степень", либо оценки сложности отличных от x12 атомов списка x10 меньше оценки сложности атома x12. Переменной x15 присваивается результат замены вхождения x14 в терм x9 на переменную x13. В нашем примере - " $2l(AB)l(AC) \cos a = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2$ ". Переменной x16 присваивается пара утверждений "число(x13)", x15. Если из списка антецедентов усматривается, что x12 неотрицательно, то к x16 добавляется неравенство "меньшеилиравно(0 x12)". Если заголовок атома x12 - символ "угол", то к x16 добавляется неравенство "меньшеилиравно(0 плюс(пи минус(x13)))". В нашем примере оба указанные неравенства добавляются.

Решается задача на описание с посылками x8 и условиями x16. Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "стандравно", "неизвестные x13", "упростить", "равно". Ответ присваивается переменной x18. В нашем примере он имеет вид:

$$\begin{aligned} & -1 \leq (-l(BC)^2 + l(AB)^2 + l(AC)^2)/(2l(AB)l(AC)) \ \& \\ & (-l(BC)^2 + l(AB)^2 + l(AC)^2)/(2l(AB)l(AC)) \leq 1 \ \& \\ & a = \arccos((-l(BC)^2 + l(AB)^2 + l(AC)^2)/(2l(AB)l(AC))) \end{aligned}$$

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Среди его конъюнктивных членов находится равенство x19 с переменной x13 в левой части. Проверяется, что среди надтермов вхождения x14 имеется терм с заголовком, отличным от символов "равно", "минус", "умножение". Ниже будет приведен прием, программа которого вплоть до данного момента совпадает с программой данного приема, но для которого указанное ограничение на надтермы отсутствует.

Проверяется, что правая часть равенства x19 отлична от атома x12. Переменной x20 присваивается равенство атома x12 этой правой части. Создается импликация с антецедентами x8 и консеквентом x20. Она регистрируется в списке вывода и сопровождается характеристиками "числперем", "числзнач". Характеризатор может добавить характеристику "числатом".

2. Попытка выразить единственный числовой атом через комплекснозначные атомы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_z(z - \text{комплексное} \rightarrow \text{Re}(z) = (z + \text{сопряженное}(z))/2)$$

из теоремы

$$\forall_z(z - \text{комплексное} \rightarrow z + \text{сопряженное}(z) = 2\text{Re}(z))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента, не связанных в нем внешними кванторами и описателями. Проверяется, что список x10 одноэлементный, и переменной x11 присваивается его элемент. Проверяется наличие в терме x9 комплекснозначного атомарного выражения, отличного от x11. Проверяется, что x11 не является одной из частей равенства в консеквенте и имеет единственное вхождение в консеквент. Выбирается переменная x13, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x15 присваивается результат замены атома x11 в терме x9 на переменную x13. Переменной x16 присваивается пара утверждений "число(x13)", x15. Если из списка x8 усматривается неотрицательность атома x11, то к паре x16 добавляется неравенство "меньшеилиравно(0 x11)".

Решается задача на описание с посылками x8 и условиями x16. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "стандранно", "неизвестные x13", "упростить", "равно". Ответ присваивается переменной x18. В нашем примере он имеет вид " $(z + \text{сопряженное}(z)) - \text{число} \& a = (z + \text{сопряженное}(z))/2$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и среди его конъюнктивных членов выбирается равенство x19 с переменной x13 в левой части. Переменной x20 присваивается равенство атома x11 правой части равенства x19. Создается импликация с антецедентами x8 и консеквентом x20. Она регистрируется в списке вывода.

3. Усмотрение равенства числовых атомов, выразимых через равные числовые атомы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\begin{aligned} &\forall_{abcABCDE}(\neg(a = b) \& \neg(a = c) \& \neg(b = c) \& \neg(A = B) \& \neg(C = D) \& \\ &\neg(C = E) \& \neg(D = E) \& \angle(aAb) = \angle(CAD) \& a \in \text{окружность}(AB) \& \\ &b \in \text{окружность}(AB) \& c \in \text{окружность}(AB) \& C \in \text{окружность}(AB) \& \\ &D \in \text{окружность}(AB) \& E \in \text{окружность}(AB) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& \\ &c - \text{точка} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \\ &\text{разныестороны}(c, A, \text{прямая}(ab)) \& \text{разныестороны}(E, A, \text{прямая}(CD)) \rightarrow \\ &\angle(CED) = \angle(acb)) \end{aligned}$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \neg(D = E) \& \neg(C = E) \& \neg(C = D) \& \neg(A = B) \& C \in \text{окружность}(AB) \&$$

$D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \text{разныестороны}(E, A, \text{прямая}(CD)) \rightarrow 2\angle(CED) + \angle(CAD) = 2\pi$

Начало программы приема совпадает с началом программы приема, предшествовавшего предыдущему. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Переменной x_{10} присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента, не связанных в нем внешними кванторами и описателями. Проверяется, что длина списка x_{10} не менее 2. В нашем примере x_{10} состоит из атомов " $\angle(CED)$ ", " $\angle(CAD)$ ". Проверяется, что консеквент - равенство. В списке x_{10} выбирается атом x_{12} , имеющий единственное вхождение в это равенство и не являющийся одной из его частей. В нашем примере - " $\angle(CED)$ ". Выбирается переменная x_{13} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{14} присваивается вхождение атома x_{13} в терм x_9 . Проверяется, что либо x_{14} расположено только внутри подтермов с заголовками "равно", "плюс", "минус", "умножение", "дробь", "степень", либо оценки сложности отличных от x_{12} атомов списка x_{10} меньше оценки сложности атома x_{12} . Переменной x_{15} присваивается результат замены вхождения x_{14} в терм x_9 на переменную x_{13} . В нашем примере - " $2a + \angle(CAD) = 2\pi$ ". Переменной x_{16} присваивается пара утверждений "число(x_{13})", x_{15} . Если из списка антецедентов усматривается, что x_{12} неотрицательно, то к x_{16} добавляется неравенство "меньшеилиравно(0 x_{12})". Если заголовок атома x_{12} - символ "угол", то к x_{16} добавляется неравенство "меньшеилиравно(0 плюс(пи минус(x_{13})))". В нашем примере оба указанные неравенства добавляются.

Решается задача на описание с посылками x_8 и условиями x_{16} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "стандартно", "неизвестные x_{13} ", "упростить", "равно". Ответ присваивается переменной x_{18} . В нашем примере он имеет вид " $a = -\angle(CAD)/2 + \pi$ ".

Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Среди его конъюнктивных членов находится равенство x_{19} с переменной x_{13} в левой части.

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что список x_{10} двухэлементный. Переменной x_{20} присваивается его элемент, отличный от x_{12} . В нашем примере - " $\angle(CAD)$ ". Список параметров атома x_{12} присваивается переменной x_{21} . В нашем примере - C, D, E . Проверяется, что в списке x_{21} нет такой переменной, которая входила бы во все антецеденты исходной теоремы, имеющие больше двух параметров. Проверяется, что список параметров атома x_{20} имеет не более 3 элементов. Переменной x_{22} присваивается список переменных, не входящих в исходную теорему, длина которого равна длине списка x_{21} . В нашем примере - a, b, c . Переменной x_{23} присваивается объединение списка x_8 со списком результатов замены в антецедентах исходной теоремы переменных x_{21} на переменные x_{22} . Переменной x_{24} присваивается результат такой же замены переменных в атоме x_{12} , а переменной x_{25} - в атоме x_{20} . Переменной x_{26} присваивается результат добавления к списку x_{23} равенства выражений x_{20} и x_{25} . Создается импликация с антецедентами x_{26} , консеквентом которой служит равенство атомов x_{12} и x_{24} . Переменной x_{27} присваивается результат обработки этой импликации оператором "нормтеорема". Проверяется, что теорема x_{27} имеет менее 9 переменных. Затем она регистрируется в списке вывода.

Использование текущего тождества для варьирования дополнительной теоремы

1. Использование неравенства для числового атома, упоминаемого в тождестве для суммы.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(c \in \text{прямая}(ab)) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \rightarrow 0 < -\angle(acb) - \angle(bac) + \pi)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \angle(ABC) + \angle(BCA) + \angle(BAC) = \pi)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow 0 < \angle(ABC))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Проверяется, что x9 - равенство, и переменной x10 присваивается список его невырожденных числовых атомов. В нашем примере - " $\angle(ABC)$ ", " $\angle(BCA)$ ", " $\angle(BAC)$ ". Проверяется, что длина списка x10 не менее 3. В списке x10 выбирается атом x11 имеющий единственное вхождение в терм x9. Переменной x13 присваивается это вхождение. В нашем примере x11 - " $\angle(ABC)$ ". Переменной x14 присваивается вхождение, операндом которого служит x13. Проверяется, что по этому вхождению расположен символ "плюс". Проверяется, что x14 - вхождение одной из частей равенства x9. Переменной x16 присваивается заголовок атома x11. В нашем примере - символ "угол". Проверяется отсутствие у теоремы существенных антецедентов. Справочник поиска теорем "числоценка" определяет по символу x16 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x19 имеет вид:

$$\forall_{abc}(\neg(a = b) \ \& \ c \in \text{прямая}(ab) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \rightarrow 0 < \angle(abc))$$

Переменной x20 присваивается список антецедентов теоремы x19. Проверяется, что среди этих антецедентов нет неравенств. Переменной x24 присваивается та часть неравенства в консеквенте теоремы x19, которая имеет заголовок x16. В нашем примере - " $\angle(abc)$ ". Переменной x25 присваивается список параметров термов x11 и x25. В нашем примере - a, b, c, A, B, C . Определяется подстановка S вместо переменных x25, унифицирующая термы x11 и x24. Переменной x27 присваивается вхождение той части равенства x9, которая отлична от x14. Переменной x28 присваивается разность подтерма x27 и суммы, полученной из x14 отбрасыванием слагаемого x13. Переменной x29 присваивается результат применения к x28 подстановки S , переменной x30 - результат применения этой подстановки к консеквенту теоремы x19. Переменной x32 присваивается результат замены на x29 того корневого операнда неравенства x30, который имеет заголовок x16. В нашем примере x32 имеет вид " $0 < \pi - \angle(bca) - \angle(bac)$ ".

Переменной х33 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям списков х8 и х20. Создается импликация с антецедентами х33 и консеквентом х32. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка подставить константное значение числового атома без добавления условий на числовые атомы в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcB}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = B) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(ac) \ \& \ \text{разныестороны}(B, c, \text{прямая}(ab)) \ \& \ \text{однасторона}(b, B, \text{прямая}(ac)) \rightarrow \angle(caB) = \pi/2 + \angle(baB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{разныестороны}(B, D, \text{прямая}(AC)) \ \& \ \text{однасторона}(B, C, \text{прямая}(AD)) \ \& \ \text{составнугол}(A, D, C, B) \rightarrow \angle(BAD) = \angle(BAC) + \angle(CAD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow \angle(BAC) = \pi/2)$$

Напомним, что "составнугол(A, D, C, B)" - дополнительное ограничение на четыре точки A, D, C, B , необходимое для того, чтобы угол DAB был равен сумме углов DAC и CAB . Предполагаются выполненными прочие указанные в теореме условия. Дополнение сводится к требованию, чтобы либо точка A не лежала на отрезке CD , либо точка B лежала на луче AC .

Переменной х9 присваивается консеквент, переменной х10 - список антецедентов. Выбирается невырожденный числовой атом х11 консеквента х9. Переменной х12 присваивается его заголовок. В нашем примере х11 - " $\angle(CAD)$ ". Переменной х13 присваивается вхождение атома х11 в исходную теорему, расположенное в консеквенте. Проверяется, что других вхождений в теорему атом х11 не имеет. Справочник поиска теорем "числатом" определяет по символу х12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной х18 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок х12, переменной х19 - вхождение другой части. Проверяется, что подтерм х19 константный. Переменной х20 присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Проверяется, что они не содержат невырожденных числовых атомов. Оператор "тождвывод" определяет результат х22 преобразования вхождения х13 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. При помощи задачи на исследование проверяется непротиворечивость антецедентов теоремы х22. Далее теорема х22 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Попытка наложить ограничение на значения одного из числовых атомов для вывода нечислового отношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& \neg(B = C) \& \angle(ACB) + \angle(BAC) = \pi/2 \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \rightarrow \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \neg(A = C) \& \neg(B = C) \& \neg(A = B) \rightarrow \angle(ABC) + \angle(BCA) + \angle(BAC) = \pi)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \neg(B = C) \& \neg(A = B) \& \angle(ABC) = \pi/2 \rightarrow \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC))$$

Начало программы приема совпадает с началом программы одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его.

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Проверяется, что x9 - равенство, и переменной x10 присваивается список его невырожденных числовых атомов. В нашем примере - " $\angle(ABC)$ ", " $\angle(BCA)$ ", " $\angle(BAC)$ ". Проверяется, что длина списка x10 не менее 3. В списке x10 выбирается атом x11 имеющий единственное вхождение в терм x9. Переменной x13 присваивается это вхождение. В нашем примере x11 - " $\angle(ABC)$ ". Переменной x14 присваивается вхождение, операндом которого служит x13. Проверяется, что по этому вхождению расположен символ "плюс". Проверяется, что x14 - вхождение одной из частей равенства x9. Переменной x16 присваивается заголовок атома x11. В нашем примере - символ "угол".

Дальше начинаются отличия. Справочник поиска теорем "числсвязь" определяет по символу x16 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x19 имеет вид:

$$\forall_{abc}(a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& \neg(b = c) \& \neg(a = b) \& \angle(abc) = \pi/2 \rightarrow \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(bc))$$

Переменной x20 присваивается список антецедентов теоремы x19. Среди них выбирается утверждение x21, в котором рассматривается вхождение x22 символа x16. В нашем примере x21 - утверждение " $\angle(abc) = \pi/2$ ". Переменной x23 присваивается подтерм x22. В нашем примере - " $\angle(abc)$ ". Переменной x24 присваивается список параметров терма x23. Определяется подстановка S вместо переменных x24, унифицирующая термы x23 и x11. Переменной x26 присваивается вхождение той части равенства x9, которая отлична от x14. Переменной x27 присваивается разность подтерма x26 и результата удаления из суммы x14 слагаемого x13. В нашем примере - " $\pi - (\angle(BCA) + \angle(BAC))$ ". Переменной x28 присваивается результат замены в утверждении x21 вхождения x22 на выражение x27. Переменной x29 присваивается объединение списка x8 со списком результатов применения подстановки S к отличным от x21 элементам списка x20. К этому объединению добавляется утверждение x28. Переменной x30 присваивается результат применения подстановки S к консеквенту теоремы x19. Создается импликация с антецедентами x29 и консеквентом x30. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Использование соотношения, связывающего два невырожденных числовых атома, для варьирования другого соотношения с числовыми атомами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \& \neg(C = D) \& \neg(C = E) \& \neg(D = E) \& C \in \text{окружность}(AB) \& D \in \text{окружность}(AB) \& E \in \text{окружность}(AB) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \text{однасторона}(A, E, \text{прямая}(CD)) \rightarrow l(CD) = 2 \sin(\angle(CED))l(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \neg(D = E) \& \neg(C = E) \& \neg(A = B) \& \neg(C = D) \& C \in \text{окружность}(AB) \& D \in \text{окружность}(AB) \& E \in \text{окружность}(AB) \& \text{однасторона}(A, E, \text{прямая}(CD)) \rightarrow 2\angle(CED) = \angle(CAD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \neg(A = B) \& C \in \text{окружность}(AB) \& D \in \text{окружность}(AB) \rightarrow l(CD) = 2l(AB) \sin(\angle(CAD)/2))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. В нашем примере - " $\angle(CED)$ ", " $\angle(CAD)$ ". Проверяется, что список x10 двухэлементный и оценки сложности его элементов равны. Проверяется, что антецеденты имеют единственный подтерм максимальной сложности, и переменной x12 присваивается его заголовок. В нашем примере этим подтермом является "окружность(AB)", а x12 - символ "окружность". Создается список x13 пар (атом списка x10 - его выражение через другой атом этого списка). При получении этих пар равенство x9 разрешается относительно одного из атомов при помощи задачи на описание. В нашем примере x13 состоит из пар ($\angle(CED)$, $\angle(CAD)/2$), ($\angle(CAD)$, $2\angle(CED)$).

Проверяется, что список x13 непуст. Для поиска дополнительной теоремы просматриваются все теоремы того раздела, к которому относится символ x12, за исключением теорем текущей ячейки вывода. Отбираются лишь теоремы с характеристикой "числовой атом", содержащие символ x12 и имеющие в консеквенте вхождение заголовка одного из атомов пары x10. В нашем примере дополнительная теорема указана выше. Переменной x20 присваивается консеквент дополнительной теоремы, переменной x21 - список ее антецедентов. Проверяется, что он не длиннее списка x8. Переменной x22 присваивается список параметров утверждений x21. Проверяется, что все параметры консеквента x20 содержатся в списке x22. Определяется подстановка S вместо переменных x22, переводящая утверждения x21 в некоторые утверждения списка x8. Допускается изменение порядка операндов коммутативных символов.

Переменной x25 присваивается элемент списка x13. В нашем примере - второй элемент. Переменной x26 присваивается первый элемент пары x25. В нашем примере - " $\angle(CAD)$ ". Переменной x27 присваивается вхождение заголовка

атома x_{26} в утверждение x_{20} . Переменной x_{28} присваивается результат применения подстановки S к подтерму x_{27} . Проверяется, что после обработки оператором "станд" термы x_{26} и x_{28} совпадают. Проверяется, что подтерм x_{27} имеет единственное вхождение в консеквент x_{20} . Переменной x_{29} присваивается результат замены вхождения x_{27} в равенство x_{20} на второй элемент пары x_{25} и одновременного применения подстановки S к остальной части этого равенства. Создается импликация с антецедентами x_8 и консеквентом x_{29} . Переменной x_{30} присваивается результат обработки ее оператором "нормтеорема". Проверяется, что теорема x_{30} не является частным случаем дополнительной теоремы, после чего она регистрируется в списке вывода.

Попытка использования дополнительного тождества для преобразования консеквента

1. Попытка подставить константное значение числового атома с добавлением условий на числовые атомы в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcDE}(\neg(b = c) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ l(ab) = l(bc) \ \& \ l(ac) = l(bc) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \\ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ \text{окружность}(DE)\text{описана около фигура}(abc) \rightarrow \sqrt{3}l(DE) = l(bc))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \\ \text{окружность}(DE)\text{описана около фигура}(ABC) \rightarrow 2 \sin(\angle(ABC))l(DE) = l(AC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ l(AB) = l(BC) \ \& \\ l(AB) = l(AC) \rightarrow \angle(ABC) = \pi/3)$$

Начало программы приема совпадает с началом программы одного из предыдущих приемов. Для удобства чтения повторим его. Переменной x_9 присваивается консеквент, переменной x_{10} - список антецедентов. Выбирается невырожденный числовой атом x_{11} консеквента x_9 . Переменной x_{12} присваивается его заголовок. В нашем примере x_{11} - " $\angle(ABC)$ ". Переменной x_{13} присваивается вхождение атома x_{11} в исходную теорему, расположенное в консеквенте. Проверяется, что других вхождений в теорему атом x_{11} не имеет. Справочник поиска теорем "числатом" определяет по символу x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{18} присваивается вхождение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x_{12} , переменной x_{19} - вхождение другой части. Проверяется, что подтерм x_{19} константный. Переменной x_{20} присваивается список антецедентов дополнительной теоремы.

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что антецеденты дополнительной теоремы имеют невырожденные числовые атомы. Проверяется, что консеквент имеет единственный подтерм максимальной сложности, и этот подтерм присваивается переменной x_{22} . В нашем примере - " $\sin(\angle(ABC))$ ". Проверяется, что

x11 - единственный невырожденный числовой атом терма x22, причем оценка его сложности больше оценок сложности антецедентов дополнительной теоремы. Оператор "тождвывод" определяет результат x26 преобразования вхождения x13 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. При помощи задачи на исследование проверяется непротиворечивость антецедентов теоремы x26. Определяется результат обработки теоремы x26 оператором "нормтеорема", который регистрируется в списке вывода.

2. Попытка отождествления двух числовых атомов в выводимом равенстве.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ l(AB) = l(AC) \ \& \ A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \rightarrow 2\angle(ABC) + \angle(BAC) = \pi)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \angle(ABC) + \angle(BCA) + \angle(BAC) = \pi)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ C \text{ — точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ l(AB) = l(BC) \rightarrow \angle(BAC) = \angle(BCA))$$

Переменной x9 присваивается консеквент, переменной x10 - список антецедентов. Переменной x11 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. В нашем примере - " $\angle(ABC)$ ", " $\angle(BCA)$ ", " $\angle(BAC)$ ". Проверяется, что список x11 имеет не менее двух элементов. В этом списке выбираются два различных элемента x13 и x15 с одинаковым заголовком. В нашем примере - атомы " $\angle(ABC)$ " и " $\angle(BCA)$ ". Справочник поиска теорем "равнчисл" определяет по заголовку этих атомов указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что количество равенств в ее антецедентах меньше 2. Переменной x18 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не встречающиеся в исходной теореме. В нашем примере x18 имеет вид:

$$\forall_{abc}(a \text{ — точка} \ \& \ b \text{ — точка} \ \& \ c \text{ — точка} \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ l(ab) = l(bc) \rightarrow \angle(bac) = \angle(bca))$$

Переменной x19 присваивается пара частей равенств в консеквенте теоремы x18. Переменной x20 присваивается список параметров атомов пары x19 и атомов x13, x15. В нашем примере - a, b, c, A, B, C . Определяется подстановка S вместо переменных x20, унифицирующая первый элемент пары x19 с атомом x13, а второй - с атомом x15. Переменной x22 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и теоремы x18. Переменной x23 присваивается результат применения подстановки S к консеквенту теоремы x18, переменной x24 - к консеквенту исходной теоремы. Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения x22 и результат обработки оператором "станд" утверждения x23. Условием служит

результат обработки оператором "станд" утверждения x24. Цели задачи - "редакция", "прямойответ". Ответ присваивается переменной x27. В нашем примере он имеет вид " $2\angle(ABC) - \pi + \angle(BAC) = 0$ ". Проверяется, что ответ отличен от логической константы "истина". Затем создается импликация с антецедентами x22 и консеквентом x27. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Использование известного константного значения сложной операции для усмотрения значения сложного числового атома из соотношения для простых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ 2l(AC) = l(BC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow \angle(ABC) = \pi/6)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$$

и дополнительной теоремы

$$\sin(\pi/6) = 1/2$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Проверяется, что x9 - равенство, и переменной x10 присваивается список его невырожденных числовых атомов. В нашем примере - "(AC)", " $\angle(ABC)$ ", " $l(BC)$ ". Проверяется, что длина списка x10 не менее 2. В списке x10 выбирается самый сложный атом x11. В нашем примере - " $\angle(ABC)$ ". Проверяется, что консеквент имеет единственный подтерм x14 максимальной сложности. В нашем примере - " $\sin(\angle(ABC))$ ". Переменной x15 присваивается вхождение атома x11 в терм x14. Проверяется, что вне вхождения x15 терм x14 переменных не имеет. Выбирается переменная x16, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Проверяется, что терм x14 имеет единственное вхождение в консеквент x9, и переменной x18 присваивается результат замены этого вхождения на переменную x16. В нашем примере - " $l(AC) = al(BC)$ ".

Решается задача на описание с посылками x8 и условиями "число(x16)", x18. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x16", "упростить". Ответ присваивается переменной x20. В нашем примере этот ответ имеет вид " $a = l(AC)/l(BC)$ ". Проверяется, что x20 - равенство с переменной x16 в левой части. Справочники поиска теорем "констцелое", "констдробь" определяют по заголовку p терма x14 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она представляет собой бескванторное равенство, заголовок левой части которого - символ p . Переменной x23 присваивается правая часть равенства. Решается задача на описание, посылки которой суть утверждения списка x8 и равенство терма x14 выражению x23. Условия - "число(x16)", "равно(x11 x16)". Цели задачи - "полный", "явное", "неизвестные x16", "известно". Ответ присваивается переменной x26. В нашем примере - " $a = \pi/6$ ". Проверяется, что x26 - равенство с переменной x16 в левой части. Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения списка x8 и равенство правой части

равенства x_{20} выражению x_{23} . Консеквентом служит равенство атома x_{11} правой части равенства x_{26} . Переменной x_{28} присваивается результат обработки этой импликации оператором "нормтеорема". Список антецедентов теоремы x_{28} проверяется на непротиворечивость с помощью задачи на исследование, после чего она регистрируется в списке вывода.

4. Использование известного константного значения сложной операции для усмотрения равенства простых числовых атомов из значения сложного числового атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \angle(ABC) = \pi/4 \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(AC) = l(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(AC) = \text{tg}(\angle(ABC))l(AB))$$

и дополнительной теоремы

$$\text{tg}(\pi/4) = 1$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Проверяется, что x_9 - равенство, и переменной x_{10} присваивается список его невырожденных числовых атомов. В нашем примере - " $l(AC)$ ", " $\angle(ABC)$ ", " $l(AB)$ ". Проверяется, что длина списка x_{10} не менее 2. В списке x_{10} выбирается самый сложный атом x_{11} . В нашем примере - " $\angle(ABC)$ ". Проверяется, что консеквент имеет единственный подтерм x_{14} максимальной сложности. В нашем примере - " $\text{tg}(\angle(ABC))$ ". Переменной x_{15} присваивается вхождение атома x_{11} в терм x_{14} . Проверяется, что вне вхождения x_{15} терм x_{14} переменных не имеет. Выбирается переменная x_{16} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Проверяется, что терм x_{14} имеет единственное вхождение в консеквент x_9 , и переменной x_{18} присваивается результат замены этого вхождения на переменную x_{16} . В нашем примере - " $l(AC) = al(AB)$ ".

Решается задача на описание с посылками x_8 и условиями "число(x_{16})", x_{18} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "неизвестные x_{16} ", "упростить". Ответ присваивается переменной x_{20} . В нашем примере этот ответ имеет вид " $a = l(AC)/l(AB)$ ". Проверяется, что x_{20} - равенство с переменной x_{16} в левой части. Справочники поиска теорем "констцелое", "констдробь" определяют по заголовку p терма x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она представляет собой бескванторное равенство, заголовок левой части которого - символ p . Переменной x_{23} присваивается правая часть равенства. Решается задача на описание, посылки которой суть утверждения списка x_8 и равенство терма x_{14} выражению x_{23} . Условия - "число(x_{16})", "равно(x_{11} x_{16})". Цели задачи - "полный", "явное", "неизвестные x_{16} ", "известно". Ответ присваивается переменной x_{26} . В нашем примере - " $a = \pi/4$ ". Проверяется, что x_{26} - равенство с переменной x_{16} в левой части.

Дальше начинаются отличия. Создается импликация, антецеденты которой суть утверждения списка x8 и равенство выражения x11 правой части равенства x26. Консеквентом служит равенство атома правой части равенства x20 выражению x23. Переменной x28 присваивается результат обработки этой импликации оператором "Нормтеорема", которому передается опция "числовойатом". Проверяется, что x28 - кванторная импликация с равенством двух невырожденных числовых атомов в консеквенте. При помощи задачи на исследование проверяется непротиворечивость антецедентов импликации x28. Затем она регистрируется в списке вывода.

5. Попытка проварьировать самый сложный числовой атом.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(b = d) \ \& \ b \in \text{отрезок}(ac) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(ac) \perp \text{прямая}(ad) \rightarrow l(ab) = -\cos(\angle(cbd))l(bd))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(AB) = \cos(\angle(ABC))l(BC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ B \in \text{отрезок}(AC) \rightarrow \angle(ABD) = -\angle(CBD) + \pi)$$

Переменной x9 присваивается консеквент, переменной x10 - список антецедентов. Переменной x11 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. В нашем примере - "l(AB)", "∠(ABC)", "l(BC)". В списке x11 выбирается атом x12 с наибольшей оценкой сложности. В нашем примере - "∠(ABC)". Проверяется, что он имеет единственное вхождение в консеквент. Переменной x14 присваивается заголовок атома x12. В нашем примере - символ "угол". Справочник поиска теорем "варьир" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x18 присваивается вхождение той части равенства в ее консеквенте, которая имеет заголовок x14. В консеквенте исходной теоремы находится вхождение x20 атома x12. Оператор "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождения x20 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Переменной x22 присваивается результат обработки теоремы x21 оператором "нормтеорема". Проверяется, что число переменных теоремы x22 не больше чисел переменных исходной и дополнительной теорем. Затем она регистрируется в списке вывода.

6. Попытка расшифровки по определению самого сложного числового атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(\text{вероятность}(a, c) = 0) \ \& \ a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \& \ a \in \text{события}(c) \ \& \ b \in \text{события}(c) \ \& \ \text{верпространство}(c) \ \& \ \text{незавсобытия}((b, a), c) \rightarrow \text{вероятность}(a \cap b, c) = \text{вероятность}(a, c)\text{вероятность}(b, c))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(\text{вероятность}(B, C) = 0) \ \& \ Aa - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ A \in \text{события}(C) \ \& \\ B \in \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \ \& \ \text{незавсобытия}((A, B), C) \rightarrow \\ \text{услвероятн}(A, B, C) = \text{вероятность}(A, C))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ \neg(\text{вероятность}(A, C)) \ \& \ B \in \text{события}(C) \ \& \\ A \in \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{услвероятн}(B, A, C) = \\ \text{вероятность}(A \cap B, C) / \text{вероятность}(A, C))$$

Переменной x9 присваивается консеквент, переменной x10 - список антецедентов. Переменной x11 присваивается список числовых атомов консеквента. В нашем примере - "услвероятн(A, B, C)", "вероятность(A, C)". Проверяется, что длина списка x11 не менее 2. В этом списке выбирается атом x12, имеющий сложность, большую сложности остальных атомов этого списка. В нашем примере - "услвероятн(A, B, C)". Проверяется, что этот атом имеет единственное вхождение x14 в исходную теорему. Переменной x15 присваивается его заголовок. Справочник поиска теорем "числатом" определяет по символу x15 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику с заголовком "определение". Оператор "тождвывод" определяет результат x21 преобразования вхождения x14 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "числовой атом", после чего регистрируется в списке вывода.

7. Попытка использования двух соотношений для исключения тригонометрической функции угла.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{defgh}(\neg(d = e) \ \& \ \neg(d = f) \ \& \ \neg(d = g) \ \& \ \neg(d = h) \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \\ f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ \text{точкалуча}(d, e, f) \ \& \ \text{точкалуча}(d, g, h) \rightarrow \\ (l(de)l(df) - l(dg)l(dh))(l(df)l(dg) - l(de)l(dh)) = l(fh)^2l(de)l(dg) - l(eg)^2l(df)l(dh))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \\ 2l(AB)l(AC) \cos(\angle(BAC)) = l(AB)^2 + l(AC)^2 - l(BC)^2)$$

Эта же самая теоремы вступает в данном примере и как первая дополнительная. Роль второй дополнительной играет теорема:

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(A = E) \ \& \\ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \text{точкалуча}(A, B, C) \ \& \ \text{точкалуча}(A, D, E) \rightarrow \\ \angle(BAD) = \angle(CAE))$$

Внутри консеквента x8 исходной теоремы рассматривается вхождение x9 символа "угол". Переменной x10 присваивается вхождение, непосредственным операндом которого является x9. Проверяется, что по вхождению x10 расположен символ "синус" либо "косинус". Проверяется, что внутри консеквента вхождение x10 расположено только в подтермах с заголовками "умножение", "плюс", "минус", "равно". В нашем примере x10 - вхождение выражения $\cos(\angle(BAC))$.

Переменной x11 присваивается список операндов вхождения x9. В нашем примере - B, A, C . Проверяется, что все эти операнды суть переменные. Переменной x12 присваивается накопитель пар (теорема - список ее характеристик). Первоначально в этот накопитель заносится единственная пара, образованная исходной теоремой и ее списком характеристик.

Просматривается раздел "геометрия" базы теорем. В этом разделе просматриваются стартовые теоремы x17 ячеек вывода, имеющие характеристику "числовойатом". Проверяется наличие в консеквенте теоремы x17 вхождения x21 синуса либо косинуса от выражения "угол(...)", причем такого, что каждый его надтерм, расположенный в консеквенте, имеет заголовок "умножение", "плюс", "минус" либо "равно". Проверяется, что теорема x17 не содержит символа "площадь", после чего пара, образованная данной теоремой и ее списком характеристик, заносится в накопитель x12.

По завершении заполнения накопителя x12 все переменные начиная с переменной x14 снова оказываются не определены. В нашем примере x12 имеет 6 пар, соответствующих исходной теореме и теоремам:

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$$

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(AB) = \cos(\angle(ABC))l(BC))$$

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \rightarrow \sin(\angle(BAC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$$

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \text{окружность}(DE) \text{описана около фигура}(ABC) \rightarrow 2 \sin(\angle(ABC))l(DE) = l(AC))$$

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \ \text{прямая}(CE) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(CD) = 2l(AC) \sin(\angle(DCE)))$$

Переменной x14 присваивается список ссылок на 6 простейших теорем, выражающих условия равенства двух углов либо равенства пи их суммы: углы, получающиеся различным выбором направляющих точек на двух лучах, вертикальные углы, смежные углы, вписанные углы с общей хордой (2 случая), углы при параллельных прямых и секущей (2 случая).

В списке x12 выбирается некоторая пара x15. В нашем примере - пара для исходной теоремы. Переменной x16 присваивается первый элемент этой пары. Он является первой дополнительной теоремой приема вывода. В нашем примере эта теорема совпадает с исходной. Переменной x18 присваивается вхождение в консеквент первой дополнительной теоремы той же тригонометрической функции угла, что и x10. В нашем примере x18 совпадает с x10. Переменной x19

присваивается результат переобозначения переменных первой дополнительной теоремы на переменные, не встречающиеся в исходной теореме. В нашем примере x_{19} имеет вид:

$$\forall_{abc}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = b) \rightarrow 2l(ab)l(ac) \cos(\angle(bac)) = l(ab)^2 + l(ac)^2 - l(bc)^2)$$

Проверяется, что x_{10} - слагаемое либо множитель слагаемого одной из частей равенства x_8 . Переменной x_{20} присваивается коэффициент при этом слагаемом, переменной x_{21} - набор прочих слагаемых частей равенства x_8 , сгруппированных в части, противоположной x_{10} . В нашем примере x_{20} - " $2l(AB)l(AC)$ ", x_{21} состоит из " $l(AB)^2, l(AC)^2, -l(BC)^2$ ".

Переменной x_{22} присваивается вхождение в теорему x_{19} , соответствующее вхождению x_{18} в первую дополнительную теорему. В нашем примере - вхождение выражения $\cos(\angle(bac))$. Переменной x_{23} присваивается коэффициент при слагаемом содержащем x_{22} , переменной x_{24} - набор прочих слагаемых частей консеквента теоремы x_{19} , сгруппированных в части, противоположной x_{22} . В нашем примере x_{23} - " $2l(ab)l(ac)$ ", x_{24} состоит из " $l(ab)^2, l(ac)^2, -l(bc)^2$ ".

Переменной x_{25} присваивается элемент списка x_{14} - ссылка на вторую дополнительную теорему. В нашем примере она указана выше. Переменной x_{28} присваивается результат переобозначения переменных второй дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему и теорему x_{19} . В нашем примере x_{28} имеет вид:

$$\forall_{defgh}(d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ \neg(d = h) \ \& \ \neg(d = f) \ \& \ \neg(d = e) \ \& \ \neg(d = g) \ \& \ \text{точкалуча}(d, e, f) \ \& \ \text{точкалуча}(d, g, h) \rightarrow \angle(edg) = \angle(fdh))$$

Переменной x_{29} присваивается консеквент теоремы x_{28} . Рассматривается список вхождений в x_{29} символов "угол", и переменной x_{30} присваивается набор подтермов для этих вхождений. В нашем примере - " $\angle(edg), \angle(fdh)$ ". Переменной x_{31} присваивается терм "набор(T_1T_2)", где T_1 - подтерм x_9 , T_2 - первый операнд вхождения x_{22} . В нашем примере x_{31} - терм "набор($\angle(BAC), \angle(bac)$)". Переменной x_{32} присваивается список параметры терма x_{31} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{32} , унифицирующая терм x_{31} с термом "набор(x_{30})". Переменной x_{34} присваивается объединение списков антецедентов исходной теоремы и теоремы x_{19} . Переменной x_{35} присваивается объединение набора результатов применения подстановки S к утверждениям x_{34} со списком антецедентов теоремы x_{28} . Переменной x_{36} присваивается результат применения подстановки S к выражению x_{20} , переменной x_{37} - применения ее к сумме выражений x_{21} , переменной x_{38} - результат применения ее к выражению x_{23} , переменной x_{39} - результат применения ее к сумме выражений x_{24} . Если по вхождению x_{10} расположен косинус, а утверждение x_{29} содержит символ "пи", то знак выражения x_{36} изменяется на противоположный.

Переменной x_{40} присваивается разность произведения выражений x_{36} , x_{39} и произведения выражений x_{37} , x_{38} . Переменной x_{41} присваивается равенство нулю обработанного нормализатором раскрывания скобок "стандплюс" выражения x_{40} . Переменной x_{42} присваивается результат обработки выражений x_{41} нормализатором "стандчисл". В нашем примере x_{42} имеет вид:

$$(l(de)l(df) - l(dg)l(dh))(l(df)l(dg) - l(de)l(dh)) = \\ - (l(eg)^2l(df)l(dh) - l(fh)^2l(de)l(dg))$$

Посылками обращений к нормализаторам служат утверждения списка x35. Для проверки непротиворечивости этого списка решается вспомогательная задача на исследование. Создается импликация с антецедентами x35 и консеквентом x42. Переменной x43 присваивается результат обработки ее оператором "норм-теорема". Проверяется, x43 -кванторная импликация, причем число x44 вхождений в ее консеквент символов "синус", "косинус" хотя бы на 2 меньше суммарного числа вхождений таких символов в консеквенты исходной теоремы и теоремы x19. Проверяется, что длина корневой связывающей приставки теоремы x43 меньше 7, а если x44 отлично от 0, то меньше 5. Затем теорема x43 регистрируется в списке вывода с характеристикой "числовойатом".

8. Попытка использовать тождество, выражающее один из числовых атомов через несколько других, для перехода к равному количеству других числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = b) \& \neg(a = c) \& \neg(b = c) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \rightarrow \\ \sin(\angle(acb) + \angle(bac))l(bc) = \sin(\angle(bac))l(ac))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \neg(B = C) \& \neg(A = B) \& \\ \neg(A = C) \rightarrow \sin(\angle(BAC))l(AC) = \sin(\angle(ABC))l(BC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \neg(A = C) \& \neg(B = C) \& \\ \neg(A = B) \rightarrow \angle(ABC) = -\angle(ACB) - \angle(BAC) + \pi)$$

Переменной x9 присваивается консеквент, переменной x10 - список антецедентов. Переменной x11 присваивается список числовых атомов консеквента. В нашем примере - " $\angle(BAC), l(AC), \angle(ABC), l(BC)$ ". Проверяется, что длина списка x11 не менее 2. В этом списке выбирается атом x12, сложность которого не меньше сложности других атомов. В нашем примере - " $\angle(BAC)$ ". Проверяется, что атом x13 имеет единственное вхождение в консеквент x9. Переменной x16 присваивается заголовок атома x13. В нашем примере - "угол". Справочник поиска теорем "числопред" определяет по x16 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x19 имеет вид:

$$\forall_{abc}(a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& \neg(a = c) \& \neg(b = c) \& \neg(a = b) \rightarrow \\ \angle(abc) = -\angle(acb) - \angle(bac) + \pi)$$

Переменной x21 присваивается вхождение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x16, переменной x22 - вхождение другой части. Переменной x23 присваивается подтерм x21, переменной

x24 - список его параметров. Проверяется, что в список x24 входят все переменные корневой связывающей приставки теоремы x19. Переменной x25 присваивается конкатенация списка x24 со списком параметров терма x13. Определяется подстановка вместо переменных x25, унифицирующая термы x13 и x23. Переменной x27 присваивается результат замены подтерма x13 терма x9 на подтерм x22. Переменной x28 присваивается результат применения подстановки S к терму x27. Переменной x29 присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и теоремы x19. Проверяется, что число невырожденных числовых атомов в равенстве x28 равно длине списка x11. Создается импликация с антецедентами x29 и консеквентом x28. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

9. Варьирование элементов, встречающихся в существенных антецедентах лишь внутри заданного терма.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABC}(\neg(A = B) \ \& \ a \in \text{прямая}(AB) \ \& \ b \in \text{прямая}(AB) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow \\ l(AB)S(\text{фигура}(abC)) = l(ab)S(\text{фигура}(ABC)))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \rightarrow \\ 2S(\text{фигура}(ABC)) = l(AB)l(CD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ A \in \text{прямая}(CD) \ \& \ B \in \text{прямая}(CD) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \\ \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(CD))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x11 присваивается список существенных антецедентов теоремы. В нашем примере - "прямая(AB) \perp прямая(CD), D \in прямая(AB)". Переменной x12 присваивается список таких неконстантных неоднобуквенных подтермов T утверждений x11, что каждый их параметр встречается в утверждениях x11 только внутри вхождений подтерма T . В нашем примере x12 состоит из единственного терма "прямая(AB)". В списке x12 выбирается неповторный терм x13. Переменной x14 присваивается заголовок этого терма. Справочник поиска теорем "равны" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x17 присваивается ее консеквент. Проверяется, что все переменные дополнительной теоремы встречаются в терме x17. Переменной x18 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не встречающиеся в исходной теореме. В нашем примере x18 имеет вид:

$$\forall_{abcd}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ a \in \text{прямая}(cd) \ \& \ b \in \text{прямая}(cd) \ \& \ \neg(a = b) \rightarrow \text{прямая}(ab) = \text{прямая}(cd))$$

Переменной x_{19} присваивается список антецедентов теоремы x_{18} , переменной x_{23} - такая часть равенства в консеквенте теоремы x_{18} , которая не встречается в антецедентах. Переменной x_{24} присваивается другая часть равенства. В нашем примере x_{23} - "прямоугольная(ab)", x_{24} - "прямоугольная(cd)". Проверяется, что x_{24} встречается в антецедентах, причем списки параметров выражений x_{23} и x_{24} не пересекаются. Переменной x_{25} присваивается список параметров термина x_{24} .

Определяется подстановка S вместо переменных x_{25} , переводящая выражение x_{24} в выражение x_{13} . Проверяется, что S просто переобозначает переменные, не отождествляя их. Определяется подстановка R вместо переменных x_{25} , переводящая терм x_{24} в терм x_{23} . Переменной x_{28} присваивается объединение списка x_8 со списком результатов применения подстановки S к утверждениям x_{19} . Переменной x_{29} присваивается список переменных, в которые подстановка S переводит переменные x_{25} . Переменной x_{30} присваивается результат подстановки в x_9 вместо переменных x_{29} тех термов, на которые подстановка R заменяла соответствующие переменные списка x_{25} . В нашем примере x_{25} - c, d ; x_{29} - A, B ; x_{30} - равенство $2S(\text{фигура}(abC)) = l(ab)l(CD)$.

Рассматривается параметр x_{31} консеквента x_9 исходной теоремы, имеющей в этом консеквенте единственное вхождение, причем такой, что он имеет также единственное вхождение в терм x_{30} . В нашем примере x_{31} - переменная D . Переменной x_{32} присваивается результат добавления в список x_{28} утверждений x_{30} и x_9 . Решается задача на исследование x_{33} с посылками x_{32} и целями "известно", "исключ x_{31} ", "неизвестные X ", где X - все параметры посылок. После решения данной задачи в ее списке посылок рассматривается равенство x_{35} , не содержащее переменной x_{31} и имеющее комментарий "сравно". Этот комментарий указывает, что посылка была создана приемом, исключаящим параметр x_{31} . В нашем примере x_{35} имеет вид $l(AB)S(\text{фигура}(abC)) = l(ab)S(\text{фигура}(ABC))$.

Вводится пустой накопитель x_{37} . Для его заполнения решается задача на исследование x_{38} с посылками x_{28} и целями "исключ x_{31} ", "известно", "антецеденты", "неизвестные Y ", где Y - все параметры ее посылок. Если после решения задачи x_{38} появляются комментарии посылки "частичный ответ Q ", указывающие наборы утверждений Q - возможные варианты ответов, то в накопитель x_{37} заносятся все такие наборы Q . Иначе x_{37} полагается состоящим из единственного набора всех посылок задачи x_{38} , не имеющих заголовка "актив". В нашем примере имеет место второй случай.

После заполнения накопителя x_{37} все переменные начиная с x_{38} снова оказываются не определенными. В списке x_{38} выбирается элемент x_{38} . В нашем примере он представляет собой список утверждений "A - точка", "B - точка", "C - точка", " $\neg(A = B)$ ", "a - точка", "b - точка", "a inпрямоугольная(AB)", "b inпрямоугольная(AB)". Предпринимается попытка удалить из списка x_{38} не используемые для сопровождения по о.д.з. отрицания (кроме отрицания равенства прямых), такие, что без них истинность утверждения x_{35} сохраняется. При этом используются задачи на доказательство, в которых указанное отрицание "не(P)" заменено на P .

Проверяется, что переменная x_{31} не встречается в утверждениях списка x_{38} . Переменной x_{39} присваивается результат добавления к списку x_{38} всех утвер-

ждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. как самиз утверждений x38, так и утверждения x35. Создается импликация с антецедентами x39 и консеквентом x35. она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

10. Попытка сильного упрощения подвыражения числового атома, встречающегося в консеквенте.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcC}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ c \subseteq b \ \& \ b \in \text{события}(C) \ \& \ c \in \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{вероятность}(c, C) = \text{вероятность}(b, C) \ \& \ \text{услвероятн}(c, b, C))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{set} \ \& \ B - \text{set} \ \& \ A \in \text{события}(C) \ \& \ B \in \text{события}(C) \ \& \ \text{верпространство}(C) \rightarrow \text{вероятность}(A \cap B, C) = \text{вероятность}(A, C) \ \& \ \text{услвероятн}(B, A, C))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ c \subseteq b \rightarrow b \cap c = c)$$

Проверяется отсутствие у теоремы характеристики "числатом". Переменной x9 присваивается консеквент, переменной x10 - список антецедентов. Переменной x11 присваивается невырожденный числовой атом консеквента. В нашем примере - "вероятность(A∩B, C)". Переменной x12 присваивается вхождение этого атома в консеквент теоремы. Внутри вхождение x12 выбирается вхождение x13 неоднобуквенного подтерма, и переменной x14 присваивается заголовок этого подтерма. В нашем примере x13 - вхождение подтерма "A∩B". Справочник поиска теорем "поглощает" определяет по x14 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "тождвывод" находит результат x19 преобразования вхождения x13 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. Этот результат обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Обобщение теоремы

1. Попытка отбросить избыточное отрицание равенства в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(d - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ l(ab) = l(ae) \ \& \ l(ac) = l(ad) \ \& \ a \in \text{отрезок}(be) \ \& \ a \in \text{отрезок}(cd) \rightarrow l(bc) = l(de))$$

из теоремы

$$\forall_{abcde}(d - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ \neg(a = e) \ \& \ l(ab) = l(ae) \ \& \ l(ac) = l(ad) \ \& \ a \in \text{отрезок}(be) \ \& \ a \in \text{отрезок}(cd) \rightarrow l(bc) = l(de))$$

Прием уже встречался ранее в связи с другими характеристиками. Для удобства чтения повторим его описание. Среди антецедентов теоремы выбирается

утверждение x_{10} вида " $\neg(x = t)$ ", где x - переменная, не встречающаяся в выражении t . В нашем примере - " $\neg(a = e)$ ". Проверяется, что данное утверждение не является сопровождающим по о.д.з. для консеквента либо других антецедентов. Создается список x_{17} , полученный из набора антецедентов теоремы заменой утверждения x_{10} на равенство $x = t$ и добавлением всех утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. отличных от x_{10} антецедентов. Предпринимается попытка доказать, что консеквент теоремы является следствием утверждений x_{17} . После этого создается результирующая теорема, полученная из исходной отбрасыванием антецедента x_{10} и добавлением утверждений, недостающих для сопровождения по о.д.з. остальных антецедентов.

2. Попытка отбросить избыточное отрицание принадлежности в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(d - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ \neg(a = d) \ \& \ \neg(b = d) \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ l(ab) = l(ad) \ \& \ \angle(abd) = \angle(adc) \ \& \ \text{биссектриса}(bacd) \rightarrow l(ac) = l(ad))$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(\neg(b = d) \ \& \ \neg(c \in \text{прямая}(ad)) \ \& \ l(ab) = l(ad) \ \& \ \angle(abd) = \angle(adc) \ \& \ \text{биссектриса}(bacd) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \rightarrow l(ac) = l(ad))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов. В этом списке находится утверждение x_{10} , имеющее вид " $\neg(x \in t)$ ", где x - переменная, не встречающаяся в выражении t . В нашем примере - " $c \in \text{прямая}(ad)$ ". Проверяется, что данное утверждение не является сопровождающим по о.д.з. для консеквента либо других антецедентов. Создается список x_{17} , полученный из набора антецедентов теоремы заменой утверждения x_{10} на утверждение $x \in t$ и добавлением всех утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. отличных от x_{10} антецедентов. Предпринимается попытка доказать, что консеквент теоремы является следствием утверждений x_{17} . После этого создается результирующая теорема, полученная из исходной отбрасыванием антецедента x_{10} и добавлением утверждений, недостающих для сопровождения по о.д.з. остальных антецедентов.

3. Развязка параметров антецедентов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcfghij}(\neg(b = f) \ \& \ \neg(c = f) \ \& \ \neg(c = h) \ \& \ \neg(f = h) \ \& \ \neg(f = i) \ \& \ \neg(f = j) \ \& \ \neg(h = j) \ \& \ c \in \text{прямая}(bf) \ \& \ j \in \text{прямая}(fi) \ \& \ \text{биссектриса}(ifbg) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ i - \text{точка} \ \& \ j - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(bf) \perp \text{прямая}(ch) \ \& \ \text{прямая}(fi) \perp \text{прямая}(hj) \ \& \ \text{точкалуча}(f, g, h) \rightarrow l(hj) = l(ch))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(B = D) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \text{биссектриса}(BACD) \ \& \ \text{прямая}(BD) \perp \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{прямая}(CD) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow l(BD) = l(CD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bcfghij}(\neg(b = f) \ \& \ \neg(c = f) \ \& \ \neg(f = g) \ \& \ \neg(f = h) \ \& \ \neg(f = i) \ \& \ \neg(f = j) \ \& \ \text{биссектриса}(ifbg) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ i - \text{точка} \ \& \ j - \text{точка} \ \& \ \text{точкалуча}(f, b, c) \ \& \ \text{точкалуча}(f, g, h) \ \& \ \text{точкалуча}(f, i, j) \rightarrow \text{биссектриса}(j f c h))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов. Выбирается существенный антецедент x11, и переменной x12 присваивается его заголовок. В нашем примере x11 - "биссектриса($BACD$)". Справочник поиска теорем "варопер" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x15 присваивается характеристика дополнительной теоремы, имеющая заголовок "варопер". В нашем примере - "варопер(chj)". Переменной x16 присваивается список параметров термина x15, переменной x17 - консеквент дополнительной теоремы, переменной x18 - список параметров консеквента. Определяется подстановка S вместо переменных x18, переводящая терм x17 в терм x11. Переменной x20 присваивается набор термов, подставляемых подстановкой S вместо переменных набора x16. В нашем примере - C, D, B . Проверяется, что все термы списка x20 однобуквенные и состоят из переменных. Переменной x21 присваивается набор этих переменных. Переменной x22 присваивается набор заголовков антецедентов дополнительной теоремы, имеющих переменные набора x16. Проверяется существование имеющего переменную набора x21 и отличного от x11 существенного антецедента исходной теоремы, заголовок которого не принадлежит списку x22. Переменной x23 присваивается вхождение антецедента x11 в исходную теорему. Оператор "выводсылки" определяет результат x24 последовательного применения дополнительной и исходной теорем при унификации консеквента дополнительной теоремы с антецедентом x23 исходной. Переменной x25 присваивается результат обработки антецедентов теоремы x24 оператором "нормантецеденты" относительно параметров консеквента этой теоремы. Создается импликация, получаемая из x24 заменой ее антецедентов на утверждения x25. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы.

4. Попытка ослабления антецедентов с помощью синтезатора "ослабл".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ghAC}(\neg(g = h) \ \& \ \neg(g = C) \ \& \ \neg(h = A) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(\text{прямая}(gC) = \text{прямая}(hA)) \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{разныестороны}(g, C, \text{прямая}(hA)) \ \& \ \text{разныестороны}(h, A, \text{прямая}(gC)) \rightarrow \\ - \angle(gCA) - \angle(hAC) + \angle(ghA) + \angle(hgC) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ghAC}(\neg(g = C) \ \& \ \neg(h = A) \ \& \ \neg(h \in \text{прямая}(gC)) \ \& \ \neg(A \in \text{прямая}(gC)) \ \& \ g - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{разныестороны}(g, C, \text{прямая}(hA)) \ \& \ \text{разныестороны}(h, A, \text{прямая}(gC)) \rightarrow \\ - \angle(gCA) - \angle(hAC) + \angle(ghA) + \angle(hgC) = 0)$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов. Конъюнкция этих антецедентов обрабатывается синтезатором "ослабл". Синтезатор имеет эвристический характер и перечисляет версии ослабления подмножеств антецедентов. Переменной x_{11} присваивается конъюнкция ослабляемых антецедентов, переменной x_{12} - ослабляющее утверждение. Проверка того, что переход к новой версии антецедентов сохраняет истинность теоремы, проводится отдельно от данного синтезатора. В нашем примере x_{11} - " $\neg(h \in \text{прямая}(gC)) \ \& \ \neg(A \in \text{прямая}(gC))$ ", x_{12} - " $\neg(\text{прямая}(hA) = \text{прямая}(gC))$ ". Переменной x_{14} присваивается список конъюнктивных членов утверждения x_{11} , переменной x_{15} - разность списков x_8 и x_{14} . Проверяется, что набор x_{15} непуст. Переменной x_{16} присваивается результат добавления к списку x_{15} утверждения x_{12} . Переменной x_{17} присваивается консеквент исходной теоремы. К списку x_{16} добавляются все утверждения, необходимые для сопровождения этого консеквента по о.д.з. Для каждого утверждения P списка x_{14} при помощи задачи на доказательство проверяется, что из утверждений x_{16} и $\neg(P)$ следует истинность консеквента x_{17} . Затем создается импликация с антецедентами x_{16} и консеквентом x_{17} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Вывод теоремы путем доказательства гипотезы

1. Усмотрение однозначной определенности объекта при замене одного из антецедентов на консеквент.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)) \ \& \\ l(AB)l(CD) = l(AD)l(BC) \ \& \ D \in \text{отрезок}(AC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \\ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \angle(ABD) = \angle(CBD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(\text{прямая}(AB) = \text{прямая}(BC)) \ \& \\ \angle(ABD) = \angle(CBD) \ \& \ D \in \text{отрезок}(AC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \\ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow l(AB)l(CD) = l(AD)l(BC))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Переменной x_{12} присваивается оценка сложности конъюнкции антецедентов. Переменной x_{14} присваивается антецедент, оценка сложности которого равна x_{12} . В нашем примере - " $\angle(ABD) = \angle(CBD)$ ". Проверяется, что других антецедентов такой же сложности нет. Решается задача на исследование с посылками x_8 и единственной целью "неизвестные X ", где X - список параметров посылок. После ее решения переменной x_{17} присваивается объединение списка отличных от x_{14} утверждений набора x_8 со списком всех посылок, не входящих в x_8 , не имеющих заголовка "актив" и не содержащих символа "равно". Выбирается некоторый параметр x_{18} утверждения x_{14} , входящий в консеквент x_9 . В нашем примере - D . Переменной x_{19} присваивается результат добавления к списку x_{17} утверждений x_{14} , после чего набор x_{19} разбивается на поднабор x_{20} утверждений, содержащих переменную x_{18} , и поднабор x_{21} остальных утверждений. Переменной x_{22} присваивается результат навешивания квантора существования по x_{18} на конъюнкцию утверждений x_{20} . При помощи задачи на доказательство проверяется, что x_{22} - следствие утверждений x_{21} .

Выбирается переменная x_{24} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{25} присваивается результат добавления к списку x_{17} утверждения x_9 . Переменной x_{26} присваивается список результатов замены переменной x_{18} на x_{24} в тех утверждениях набора x_{25} , которые содержат переменную x_{18} . В нашем примере x_{26} состоит из утверждений " a – точка", " $a \in \text{прямая}(AC)$ ", " $a \in \text{отрезок}(AC)$ ", " $l(AB)l(Ca) = l(Aa)l(BC)$ ". Переменной x_{27} присваивается результат добавления к x_{25} утверждений x_{26} . При помощи задачи на доказательство устанавливается, что равенство переменных x_{18} и x_{24} является следствием утверждений x_{27} . Затем создается импликация с антецедентами x_{25} и консеквентом x_{14} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Усмотрение двух альтернативных контекстов теоремы и использование оценки числового атома для замещения антецедента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \& \neg(C = D) \& \neg(C = E) \& \neg(D = E) \& C \in \text{окружность}(AB) \& D \in \text{окружность}(AB) \& E \in \text{окружность}(AB) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& 0 \leq -\pi/2 + \angle(CED) \rightarrow 2\angle(CED) + \angle(CAD) = 2\pi)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \neg(D = E) \& \neg(C = E) \& \neg(C = D) \& \neg(A = B) \& C \in \text{окружность}(AB) \& D \in \text{окружность}(AB) \& E \in \text{окружность}(AB) \& \text{разныестороны}(E, A, \text{прямая}(CD)) \rightarrow 2\angle(CED) + \angle(CAD) = 2\pi)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& E - \text{точка} \& \neg(D = E) \& \neg(C = E) \& \neg(C = D) \& \neg(A = B) \& C \in \text{окружность}(AB) \& D \in \text{окружность}(AB) \& E \in \text{окружность}(AB) \& \text{однасторона}(A, E, \text{прямая}(CD)) \rightarrow 2\angle(CED) = \angle(CAD))$$

Переменной x_9 присваивается консеквент, переменной x_{10} - список антецедентов. В списке вывода среди стартовых теорем текущей ячейки вывода выбирается дополнительная теорема, отличная от исходной. Переменной x_{14} присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Проверяется, что его длина равна длине списка x_{10} . Переменной x_{15} присваивается корневая связывающая приставка исходной теоремы, переменной x_{16} - дополнительной теоремы. Проверяется, что длины этих связывающих приставок равны. В списке x_{14} выбирается утверждение x_{17} , заголовок которого отличен от заголовков утверждений списка x_{10} . В нашем примере - " $\text{однасторона}(A, E, \text{прямая}(CD))$ ". В списке x_{10} выбирается утверждение x_{18} , заголовок которого отличен от заголовков утверждений списка x_{14} . В нашем примере - " $\text{разныестороны}(E, A, \text{прямая}(CD))$ ". Переменной x_{19} присваивается результат удаления утверждения x_{18} из списка x_{10} , переменной x_{20} - результат удаления утверждения x_{17} из списка x_{14} . Проверяется, что список x_{20} непуст, и переменной x_{21} присваивается список его параметров. Проверяется, что все переменные утверждений списка x_{19} и

все параметры утверждения x_{18} включаются в x_{21} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{21} , переводящая конъюнкцию утверждений x_{20} в конъюнкцию утверждений x_{19} . Переменной x_{23} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_{18} . Переменной x_{24} присваивается дизъюнкция утверждений x_{23} и x_{17} . Переменной x_{25} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_9 , обработанный оператором "стандупорядочение". При помощи задачи на доказательство проверяется, что дизъюнкция x_{24} является следствием утверждений x_{20} .

Последовательно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_{27} присваивается 1, а переменной x_{28} - утверждение x_{25} . Во втором случае переменной x_{27} присваивается 2, а переменной x_{28} - консеквент дополнительной теоремы. В нашем примере имеет место второй случай. Переменной x_{29} присваивается числовой атом утверждения x_{28} , имеющий в этом утверждении единственное вхождение. В нашем примере - " $\angle(CED)$ ". Выбирается переменная x_{31} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{32} присваивается результат замены атома x_{29} в утверждении x_{28} на переменную x_{31} . В нашем примере - " $2a = \angle(CAD)$ ". Решается задача на описание x_{34} с посылками x_{20} и условиями x_{32} , "число(x_{31})". Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{31} ", "равно", "упростить". Ответ присваивается переменной x_{35} . В нашем примере - " $a = \angle(CAD)/2$ ". Проверяется, что этот ответ отличен от символа "отказ", и среди его конъюнктивных членов выбирается равенство x_{36} с переменной x_{31} в левой части. Переменной x_{37} присваивается правая часть равенства.

Дальше программа приема разветвляется. Одна из ветвей связана с рассмотрением нижних оценок атомов, другая - с рассмотрением верхних. Ветви совершенно аналогичны, и мы рассмотрим лишь вторую, имеющую место в нашем примере.

Синтезатор "верхняяоценка" определяет верхнюю оценку x_{38} выражения x_{29} и верхнюю оценку x_{40} выражения x_{37} . В нашем примере $x_{38} = \pi$, $x_{40} = \pi/2$. Проверяется, что оценки x_{38} и x_{40} различны, причем усматривается, что x_{40} меньше, чем x_{38} . Переменной x_{43} присваивается неравенство "меньше($x_{40} x_{29}$)". В нашем примере - $\pi/2 < \angle(CED)$.

Предпринимается попытка ослабить неравенство x_{43} . Для этого рассматривается эквивалентность результата замены в утверждении x_{25} всех вхождений подтерма x_{29} на x_{40} результату такой же замены в консеквенте дополнительной теоремы. Если из списка утверждений x_{20} усматривается истинность данной эквивалентности, то знак неравенства в терме x_{23} заменяется на нестрогий.

Переменной x_{44} присваивается результат добавления к списку x_{20} неравенства x_{43} . Создается импликация с антецедентами x_{44} , консеквентом которой при $x_{27} = 1$ служит консеквент дополнительной теоремы, иначе - утверждение x_{25} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Склейка двух теорем

1. Склейка двух импликаций, отличающихся альтернативными антецедентами.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \\ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \ D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \rightarrow \\ l(CD) = 2 \sin(\angle(CED))l(AB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \\ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \ D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ \text{однасторона}(A, E, \text{прямая}(CD)) \ \rightarrow \ l(CD) = 2 \sin(\angle(CED))l(AB))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \\ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \ D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ \text{разныестороны}(E, A, \text{прямая}(CD)) \ \rightarrow \ l(CD) = 2 \sin(\angle(CED))l(AB))$$

Переменной x_9 присваивается консеквент теоремы, переменной x_{10} - список ее антецедентов. В списке вывода находится дополнительная теорема x_{12} , отличная от текущей, у которой набор антецедентов x_{14} , консеквент x_{15} и связывающая приставка x_{17} имеют такую же длину, как у текущей теоремы. В нашем случае эта теорема указана выше. В списке x_{14} выбирается утверждение x_{18} , заголовок которого отличен от заголовков утверждений списка x_{10} . В нашем примере - "разныестороны($E, A, \text{прямая}(CD)$)". В списке x_{10} выбирается утверждение x_{19} , заголовок которого не встречается у утверждений списка x_{14} . В нашем примере - "однасторона($A, E, \text{прямая}(CD)$)". Переменной x_{20} присваивается результат удаления утверждения x_{19} из списка x_{10} , переменной x_{21} - результат удаления утверждения x_{18} из списка x_{14} . Проверяется, что список x_{21} непуст. Переменной x_{22} присваивается список параметров утверждений x_{20} . Проверяется, что утверждения списка x_{20} не имеют связанных переменных, а все параметры утверждения x_{19} включаются в список x_{22} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{22} , переводящая конъюнкцию утверждений x_{20} в конъюнкцию утверждений x_{21} . Переменной x_{24} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_{19} , переменной x_{25} - дизъюнкция утверждений x_{24} и x_{18} . В нашем примере - "однасторона($A, E, \text{прямая}(CD)$) \vee разныестороны($E, A, \text{прямая}(CD)$)". Переменной x_{26} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_9 . Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" утверждений x_{26} и x_{15} совпадают. При помощи задачи на доказательство проверяется, что дизъюнкция x_{25} является следствием утверждений x_{21} . Создается импликация с антецедентами x_{20} и консеквентом x_9 . Она регистрируется в списке вывода как обобщение исходной теоремы. При этом исходная и дополнительная теоремы помечаются символом "исключение".

2. Склейка двух утверждений о равенстве числовых атомов, выведенных из тождеств для пары числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdeABCDE}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(c = e) \ \& \ \neg(d = e) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \angle(ced) = \angle(CED) \ \& \ c \in \text{окружность}(ab) \ \& \ d \in \text{окружность}(ab) \ \& \ e \in \text{окружность}(ab) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \ D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \rightarrow \angle(CAD) = \angle(cad))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(D = E) \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \ D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ 0 \leq -\angle(CED) + \pi/2 \rightarrow 2\angle(CED) = \angle(CAD))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDE}(\neg(D = E) \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \ D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ 0 \leq -\pi/2 + \angle(CED) \rightarrow 2\angle(CED) + \angle(CAD) = 2\pi)$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент, переменной x10 - список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что список x10 двухэлементный. В нашем примере - " $\angle(CED), \angle(CAD)$ ". Проверяется, что число переменных теоремы не превосходит 5. В списке вывода выбирается дополнительная теорема, отличная от исходной и имеющая тот же список переменных, что исходная теорема. Переменной x13 присваивается список антецедентов дополнительной теоремы, переменной x14 - ее консеквент. Переменной x15 присваивается список невырожденных числовых атомов утверждения x14. Проверяется, что он двухэлементный и состоит из тех же атомов, что и список x10. Переменной x16 присваивается разность списков x13 и x8, переменной x17 - разность списков x8 и x13. Проверяется, что обе разности одноэлементные. Переменной x18 присваивается элемент первой разности, переменной x19 - второй. В нашем примере x18 имеет вид " $0 \leq -\pi/2 + \angle(CED)$ ", x19 - " $0 \leq -\angle(CED) + \pi/2$ ". Переменной x20 присваивается дизъюнкция утверждений x18 и x19. Переменной x21 присваивается разность списков x8 и x17, т.е. фактически пересечение списков x13 и x10. Проверяется, что эта разность непустая. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x20 - следствие утверждений x21. Переменной x23 присваивается один из атомов пары x10, переменной x24 - другой. В нашем примере x23 - " $\angle(CAD)$ ", x24 - " $\angle(CED)$ ". Проверяется, что каждое из утверждений x9, x14 удается явно разрешить относительно атома x23.

Переменной x25 присваивается список переменных исходной теоремы, переменной x26 - список не входящих в x25 переменных, длина которого равна длине списка x25. Переменной x27 присваивается список результатов замены переменных x25 на x26 в утверждениях списка x13. Переменной x28 присваивается результат такой же замены в утверждении x14, переменной x29 - результат данной замены в выражении x23, переменной x30 - в выражении x24. В нашем примере

х28 имеет вид " $2\angle(ced) + \angle(cad) = 2\pi$ ", х29 - вид " $\angle(cad)$ ", х30 - вид " $\angle(cad)$ ". Переменной х31 присваивается объединение списков х8, х27 с утверждениями х9, х28 и равенством выражений х24, х30. Проверяется, что равенство выражений х23 и х29 - следствие утверждений х31. Переменной х33 присваивается объединение списка х21 со списком результатов замены в утверждениях х21 переменных х25 на х26, к которому добавляется равенство выражений х24 и х30. Создается импликация с антецедентами х33, консеквентом которой служит равенство выражений х23 и х29. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Склейка двух отличающихся единственным антецедентом импликаций при помощи третьей импликации.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{abcdehij} (\neg(a = b) \ \& \ \neg(c = e) \ \& \ \neg(d = e) \ \& \ \neg(h = j) \ \& \ \neg(i = j) \ \& \\ & c \in \text{окружность}(ab) \ \& \ d \in \text{окружность}(ab) \ \& \ e \in \text{окружность}(ab) \ \& \\ & h \in \text{окружность}(ab) \ \& \ i \in \text{окружность}(ab) \ \& \ j \in \text{окружность}(ab) \ \& \\ & a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \\ & i - \text{точка} \ \& \ j - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(ce) \ \parallel \ \text{прямая}(hj) \ \& \\ & \text{прямая}(de) \ \parallel \ \text{прямая}(ij) \ \rightarrow \ l(hi) = l(cd) \end{aligned}$$

из теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{abcdehij} (\neg(a = b) \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ \neg(i = j) \ \& \ \neg(h = j) \ \& \ i - \text{точка} \ \& \\ & j - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ \neg(d = e) \ \& \ \neg(c = e) \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \\ & c - \text{точка} \ \& \ \angle(ced) = \angle(hji) \ \& \ c \in \text{окружность}(ab) \ \& \ d \in \text{окружность}(ab) \ \& \\ & e \in \text{окружность}(ab) \ \& \ h \in \text{окружность}(ab) \ \& \ i \in \text{окружность}(ab) \ \& \\ & j \in \text{окружность}(ab) \ \rightarrow \ l(hi) = l(cd) \end{aligned}$$

и дополнительных теорем

$$\begin{aligned} & \forall_{abcdehij} (\neg(a = b) \ \& \ \neg(c = e) \ \& \ \neg(d = e) \ \& \ \neg(h = j) \ \& \ \neg(i = j) \ \& \\ & \angle(ced) + \angle(hji) = \pi \ \& \ c \in \text{окружность}(ab) \ \& \ d \in \text{окружность}(ab) \ \& \\ & e \in \text{окружность}(ab) \ \& \ h \in \text{окружность}(ab) \ \& \ i \in \text{окружность}(ab) \ \& \\ & j \in \text{окружность}(ab) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \\ & e - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ i - \text{точка} \ \& \ j - \text{точка} \ \rightarrow \ l(hi) = l(cd) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \forall_{ABCDEF} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ & F - \text{точка} \ \& \ \neg(E = F) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(D = E) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \\ & \text{прямая}(AB) \ \parallel \ \text{прямая}(DE) \ \& \ \text{прямая}(BC) \ \parallel \ \text{прямая}(EF) \ \rightarrow \\ & \angle(ABC) = \angle(DEF) \ \vee \ \angle(ABC) + \angle(DEF) = \pi \end{aligned}$$

Переменной х8 присваивается список антецедентов, переменной х9 - консеквент. В списке вывода выбирается первая дополнительная теорема, имеющая характеристику "числовой атом" и отличная от исходной теоремы. Проверяется, что корневые связывающие приставки исходной и первой дополнительной теорем совпадают. Переменной х13 присваивается список антецедентов первой дополнительной теоремы. Переменной х14 присваивается разность списков х13 и х8, переменной х15 - разность списков х8 и х13. Проверяется, что обе разности одноэлементные. Переменной х16 присваивается консеквент первой дополнительной

теоремы. Переменной x17 присваивается дизъюнкция элементов списков x14 и x15. В нашем примере - " $\angle(ced) + \angle(hji) = \pi \vee \angle(ced) = \angle(hji)$ ". Переменной x18 присваивается пересечение списков x8 и x13. Поверяется, что оно непустое. Переменной x20 присваивается результат упрощения дизъюнкци x17 относительно посылок x18. В нашем примере - " $\pi + \angle(ced) + \angle(hji) = 0 \vee \angle(ced) = \angle(hji)$ ". Проверяется, утверждения x9 и x16 совпадают, а утверждение x20 имеет заголовок "или". Проверяется, что x17 - дизъюнкция равенств. Переменной x21 присваивается список невырожденных числовых атомов утверждения x20. В нашем примере - " $\angle(ced), \angle(hji)$ ". Переменной x22 присваивается список логических символов, являющихся заголовками атомов x21. В нашем примере - единственный символ "угол". В списке x22 выбирается элемент x23. Справочник поиска теорем "числа" определяет по x23 указанную выше вторую дополнительную теорему. Переменной x26 присваивается результат переобозначения переменных второй дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x26 совпадает со второй дополнительной теоремой. Переменной x29 присваивается консеквент теоремы x26, переменной x30 - список параметров термов x17 и x29. Определяется подстановка S вместо переменных x30, унифицирующая термы x17 и x29. Переменной x32 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям списка x18 и к антецедентам теоремы x26. Переменной x33 присваивается результат применения подстановки S к утверждению x9. Создается импликация с антецедентами x32 и консеквентом x33. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

4. Использование двух равенств с двум числовыми атомами для исключения их общего атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{eABCDE} (\neg(e = C) \ \& \ \neg(e = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(C = E) \ \& \\ & \neg(D = E) \ \& \ e \in \text{окружность}(AB) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ & D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \\ & B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ & \text{разныестороны}(e, E, \text{прямая}(CD)) \rightarrow \angle(CeD) + \angle(CED) = \pi \end{aligned}$$

из теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{ABCDE} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ & \neg(D = E) \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ & D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ & \text{разныестороны}(E, A, \text{прямая}(CD)) \rightarrow 2\angle(CED) + \angle(CAD) = 2\pi \end{aligned}$$

и дополнительной теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{ABCDE} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \\ & \neg(D = E) \ \& \ \neg(C = E) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ & D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \\ & \text{однасторона}(A, E, \text{прямая}(CD)) \rightarrow 2\angle(CED) = \angle(CAD) \end{aligned}$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент, переменной x10 - список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что список x10 двухэлементный. В нашем примере - " $\angle(CED), \angle(CAD)$ ".

Проверяется отсутствие равенства среди антецедентов. В списке вывода выбирается дополнительная теорема, отличная от исходной и являющаяся одной из старотвых теорем ячейки вывода. Проверяется наличие у нее характеристики "числовой атом". Проверяется, что списки антецедентов и корневые связывающие приставки исходной и дополнительной теорем имеют одинаковые длины. Переменной x_{13} присваивается результат переоборзначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не встречающиеся в исходной теореме. В нашем примере x_{13} имеет вид:

$$\begin{aligned} & \forall_{abcde}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \\ & \neg(d = e) \ \& \ \neg(c = e) \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \neg(c = d) \ \& \ c \in \text{окружность}(ab) \ \& \\ & d \in \text{окружность}(ab) \ \& \ e \in \text{окружность}(ab) \ \& \\ & \text{однасторона}(a, e, \text{прямая}(cd)) \rightarrow 2\angle(ced) = \angle(cad) \end{aligned}$$

Переменной x_{14} присваивается список антецедентов теоремы x_{13} , переменной x_{15} - ее консеквент. Переменной x_{16} присваивается список невырожденных числовых атомов терма x_{15} . В нашем примере - $\angle(ced), \angle(cad)$. Проверяется, что список x_{16} двухэлементный, причем набор заголовков атомов x_{10} отличается от набора заголовков атомов x_{16} лишь возможным изменением порядка. Переменной x_{17} присваивается один из атомов пары x_{10} , переменной x_{18} - другой. В нашем примере x_{17} - $\angle(CAD)$, x_{18} - $\angle(CED)$. Переменной x_{19} присваивается разность списков параметров термов x_{18} и x_{17} . Проверяется, что она непуста. В нашем примере эта разность состоит из единственной переменной E . Переменной x_{20} присваивается список антецедентов набора x_8 , имеющих не менее двух параметров и не содержащих переменных списка x_{19} . В нашем примере - " $\neg(C = D)$ ", " $\neg(A = B)$ ", " $C \in \text{окружность}(AB)$ ", " $D \in \text{окружность}(AB)$ ". Проверяется, что все не вошедшие в список x_{19} переменные корневой связывающей приставки исходной теоремы суть параметры утверждений x_{20} . Переменной x_{21} присваивается один из атомов пары x_{16} , переменной x_{22} - другой атом. В нашем примере x_{21} - $\angle(cad)$, x_{22} - $\angle(ced)$. Переменной x_{23} присваивается разность списков параметров термов x_{22} и x_{19} . В нашем примере она состоит из единственной переменной e . Проверяется, что длины списков x_{23} и x_{19} равны.

Переменной x_{24} присваивается список утверждений набора x_{14} , имеющих не менее двух параметров и не содержащих переменных набора x_{23} . В нашем примере x_{24} состоит из утверждений " $\neg(a = b)$ ", " $\neg(c = d)$ ", " $c \in \text{окружность}(ab)$ ", " $d \in \text{окружность}(ab)$ ". Проверяется, что длины списков x_{20} и x_{24} равны. Переменной x_{24} присваивается результат добавления к списку x_{20} атома x_{17} , а переменной x_{26} - результат добавления к списку x_{24} атома x_{21} . Переменной x_{27} присваивается список параметров термов набора x_{26} . В нашем примере - a, b, c, d . Определяется подстановка S вместо переменных x_{27} , переводящая термы x_{26} в некоторые термы списка x_{25} . Проверяется, что вместо различных переменных она подставляет различные выражения. Переменной x_{30} присваивается объединение списка x_8 со списком результатов применения подстановки S к элементам разности списков x_{14} и x_{24} . Переменной x_{31} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_{15} .

Выбирается переменная x_{32} , не входящая в утверждения набора x_{30} и в утверждения x_9, x_{31} . В нашем примере - переменная a . Переменной x_{33} присваивается результат замены всех вхождений атома x_{17} в утверждение x_9 на переменную

x32. В нашем примере - " $2\angle(CED) + a = 2\pi$ ". Решается задача на описание, посылками которой служат утверждения x30, а условиями - утверждения списка x33 и утверждение "число(x32)". Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "равно", "неизвестные x32". Ответ присваивается переменной x36. В нашем примере он имеет вид " $a = 2(-\angle(CED) + \pi)$ ". Проверяется, что x36 - равенство с переменной x32 в левой части. Переменной x37 присваивается правая часть. Переменной x38 присваивается результат замены всех вхождений атома x17 в утверждение x31 на выражение x37. В нашем примере - " $2\angle(CeD) = 2(-\angle(CED) + \pi)$ ". Создается импликация с антецедентами x30 и консеквентом x38. Переменной x39 присваивается результат обработки этой импликации оператором "нормтеорема". В списке конъюнктивных членов утверждения x39 выбирается элемент x40. Если этот элемент - кванторная импликация, то припомощи задачи на исследование ее список антецедентов проверяется на непротиворечивость. Затем он обрабатывается оператором "нормантецеденты", и преобразованная таким образом импликация переприсваивается переменной x40. Далее теорема x40 регистрируется в списке вывода.

Замена переменных в теореме

1. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bc}(\text{Вектор}(b) \ \& \ \text{Вектор}(c) \ \& \ \text{однонаправлены}(b, c) \rightarrow \text{длина}(b + c) = \text{длина}(b) + \text{длина}(c))$$

из теоремы

$$\forall_{adA}(\neg(d = A) \ \& \ a \text{ — точка} \ \& \ d \text{ — точка} \ \& \ A \text{ — точка} \ \& \ \text{точкалуча}(A, d, a) \rightarrow \text{длина}(\text{вектор}(Aa) + \text{вектор}(Ad)) = \text{длина}(\text{вектор}(Aa)) + \text{длина}(\text{вектор}(Ad)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A \text{ — точка} \ \& \ B \text{ — точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x10 - расположенное в консеквенте теоремы неоднобуквенного подтерма x11, представляющего собой атомарное выражение. В нашем примере x11 - "вектор(Aa)". Переменной x12 присваивается консеквент теоремы, переменной x13 - заголовок выражения x11. Переменной x15 присваивается тип значения выражений с заголовком x13. В нашем примере - символ "Вектор". Проверяется, что символ x15 отличен от символов "число", "множество", "слово". Переменной x16 присваивается список атомарных подвыражений консеквента, имеющих тип x15. В нашем примере - "вектор(Aa)" и "вектор(Ad)". Переменной x17 присваивается список параметров термов набора x16.

Далее начинается цикл коррекции утверждения x12 на случай наличия в нем невырожденных числовых атомов, не связанных с атомарными выражениями x16. В нашем примере таких нет, однако если они есть, предпринимается попытка выразить их через атомарные выражения x16. Составляется список x18

невырожденных числовых атомов этого утверждения, не содержащих подвыражений списка x_{16} . Если список x_{18} непуст и его параметры включаются в список x_{17} , то проверяется, что переменные списка x_{17} встречаются в терме x_{12} только внутри вхождений выражений списков x_{16} , x_{18} . Тогда выбирается список x_{19} не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x_{16} , а также список x_{20} не входящих в исходную теорему и в список x_{19} переменных, длина которого равна длине списка x_{18} . Переменной x_{21} присваивается объединение списка x_8 со списком равенств выражений x_{16} соответствующим переменным списка x_{19} . Переменной x_{22} присваивается список равенств числовых атомов x_{18} соответствующим переменным списка x_{20} . Решается задача на описание с посылками x_{21} и условиями x_{22} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямой ответ", "нормтеорема", "неизвестные x_{20} ", "известно x_{19} ". Ответ присваивается переменной x_{24} . Если он отличен от символа "отказ", то переменной x_{25} присваивается список конъюнктивных членов ответа. Проверяется, что в этом списке для каждой переменной списка x_{20} имеется равенство, выражающее ее через некоторое выражение. Переменной x_{26} присваивается список таких выражений. Переменной x_{27} присваивается список результатов подстановки атомарных выражений x_{16} вместо переменных x_{19} в выражения x_{26} . Определяется результат x_{29} замены в терме x_{12} всех числовых атомов списка x_{18} на соответствующие выражения списка x_{26} , после чего переменной x_{12} переприсваивается утверждение x_{29} .

По завершении указанной попытки коррекции утверждения x_{12} все переменные начиная с x_{18} снова оказываются не определены. Проверяется, что все переменные списка x_{17} встречаются в утверждении x_{12} только внутри вхождений атомарных выражений x_{16} .

Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по символу x_{15} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что ээ консеквент - эквивалентность, заголовком левой части которой служит символ x_{15} . Переменной x_{21} присваивается вхождение правой части данной эквивалентности. Проверяется, что она представляет собой квантор существования. Переменной x_{22} присваивается список конъюнктивных членов подкванторного утверждения, переменной x_{23} - единственная переменная связывающей приставки квантора. В списке x_{22} выбирается равенство x_{24} с переменной x_{23} в левой части. В нашем примере - " $a = \text{вектор}(AB)$ ". Проверяется, что заголовком правой части данного равенства служит символ x_{13} . Выбирается список x_{25} не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x_{16} . В нашем примере - список b, c . Переменной x_{28} присваивается результат замены в утверждении x_{12} атомарных выражений x_{16} на соответствующие переменные x_{25} . В нашем примере - " $\text{длина}(b + c) = \text{длина}(b) + \text{длина}(c)$ ".

Переменной x_{29} присваивается список параметров утверждения x_{28} . Переменной x_{30} присваивается объединение утверждений набора x_8 , параметры которых включаются в список x_{29} , с утверждениями вида " $x_{15}(X)$ " для всех переменных X списка x_{25} . Переменной x_{31} присваивается объединение утверждений набора x_8 , параметры которых не включаются в список x_{29} , с равенствами атомарных выражений x_{16} соответствующим переменным списка x_{25} . Переменной x_{32} присваивается разность параметров утверждений x_{31} и параметров утверждений x_{28} . Решается задача на описание с посылками x_{30} и

условиями х31. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные х32", "параметры х32", "исключ". В нашем примере посылки суть "Вектор(b)", "Вектор(c)". Условия суть " $\neg(d = A)$ ", " a - точка", " d - точка", " A - точка", "точкалуча(A, d, a)", "вектор(Aa) = b ", "вектор(Ad) = c ". Неизвестные суть a, d, A . Ответ присваивается переменной х34. В нашем примере он имеет вид " $\neg(c = \text{вектор}0) \ \& \ \text{одна} \ \text{на} \ \text{правлены}(b, c)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной х35 присваивается объединение списка х30 со списком конъюнктивных членов утверждения х34. создается импликация с антецедентами х35 и консеквентом х28. Она обрабатывается оператором "норм-теорема" и регистрируется в списке вывода.

Вывод квазипротоколов

1. Вывод дизъюнкции для разбора случаев, позволяющего выписать соотношение для заданных числовых атомов.

В качестве примера рассмотрим создание квазипротокола

$$\forall_{abAC}(\text{актив}(l(bA)) \ \& \ \text{актив}(l(aC)) \ \& \ \text{актив}(l(ab)) \ \& \ \text{актив}(l(AC)) \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \neg(a = C) \ \& \ \neg(b = A) \ \& \ a \text{ - точка} \ \& \ b \text{ - точка} \ \& \ A \text{ - точка} \ \& \ C \text{ - точка} \ \& \ \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(aC) \ \& \ \text{прямая}(aC) \parallel \text{прямая}(bA) \rightarrow \text{разныестороны}(A, C, \text{прямая}(ab)) \vee \text{однасторона}(A, C, \text{прямая}(ab)))$$

из теоремы

$$\forall_{abAC}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = C) \ \& \ \neg(b = A) \ \& \ a \text{ - точка} \ \& \ b \text{ - точка} \ \& \ A \text{ - точка} \ \& \ C \text{ - точка} \ \& \ \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(aC) \ \& \ \text{прямая}(aC) \parallel \text{прямая}(bA) \ \& \ \text{однасторона}(A, C, \text{прямая}(ab)) \rightarrow (-l(bA) + l(aC))^2 + l(ab)^2 = l(AC)^2)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abAC}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(a = C) \ \& \ \neg(b = A) \ \& \ a \text{ - точка} \ \& \ b \text{ - точка} \ \& \ A \text{ - точка} \ \& \ C \text{ - точка} \ \& \ \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(aC) \ \& \ \text{прямая}(aC) \parallel \text{прямая}(bA) \ \& \ \text{разныестороны}(A, C, \text{прямая}(ab)) \rightarrow (l(bA) + l(aC))^2 + l(ab)^2 = l(AC)^2)$$

Переменной х8 присваивается список антецедентов, переменной х9 - консеквент. В текущем списке вывода находится дополнительная теорема с характеристикой "числовойатом", отличная от исходной теоремы. Проверяется, что корневые связывающие приставки исходной и дополнительной теорем одинаковы. Переменной х13 присваивается список антецедентов дополнительной теоремы, переменной х14 - разность списков х13 и х8, переменной х15 - разность списков х8 и х13. Проверяется, что обе разности одноэлементные. Переменной х16 присваивается консеквент дополнительной теоремы, переменной х17 - дизъюнкция элементов списков х14 и х15. В нашем примере - " $\text{разныестороны}(A, C, \text{прямая}(ab)) \vee \text{однасторона}(A, C, \text{прямая}(ab))$ ". Переменной х18 присваивается пересечение списков х8 и х13. Проверяется, что оно непусто. Переменной х20 присваивается результат упрощения дизъюнкции х17 относительно посылок х18 при помощи задачи на преобразование. В нашем примере - константа "истина". Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" консеквентов исходной и дополнительной теорем различны. Переменной х21 присваивается список конъюнктивных членов утверждения х20. Проверяется, что все они элементарны.

Переменной x22 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента x9, переменной x23 - список невырожденных числовых атомов консеквента x16. Проверяется, что оба списка содержат одни и те же атомы. Переменной x24 присваивается объединение списка утверждений "актив(P)" для всевозможных числовых атомов P набора x22 со списками x18 и x21. Создается импликация с антецедентами x24 и консеквентом x17, которая регистрируется в списке вывода с характеристиками "дизъюнкция" и "теоремаприема".

3.145 Характеристика "числопред"

Характеристикой "числопред(N)" снабжаются эквивалентности, выражающие утверждение через параметры координат. N - направление замены.

Логические следствия теоремы

1. Переход к импликации, усматривающей свойство объекта.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefEK}(\text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(f + ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ (a + c)(4acf + bde - ae^2 - cd^2 - fb^2) < 0 \ \& \ 0 < 4ac - b^2 \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \rightarrow \text{эллипс}(E))$$

из теоремы

$$\forall_{EKabcdef}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(E, K) = \text{set}_{xy}(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \rightarrow \text{эллипс}(E) \leftrightarrow b^2 - 4ac < 0 \ \& \ (a + c)(4acf + bde - ae^2 - cd^2 - fb^2) < 0)$$

Характеристика - "числопред(второйтерм)".

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x11 - заменяемая часть эквивалентности, переменной x12 - заменяющая. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x8 и утверждение x12, а консеквентом - x11. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Переход к импликации, выводящей соотношение для параметров уравнения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdxyABCK}(\neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \ \& \ \text{коорд}(C, K) = (x, y) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow (c - a)(y - b) - (d - b)(x - a) = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{ABCKabcdxy}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \ \& \ \text{коорд}(C, K) = (x, y) \rightarrow C \in \text{прямая}(AB) \leftrightarrow (c - a)(y - b) = (d - b)(x - a))$$

Характеристика - "числопред(второйтерм)".

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x11 - заменяемая часть эквивалентности, переменной x12 - заменяющая. Переменной x15 присваивается результат упрощения утверждения x12 при помощи вспомогательной задачи на преобразование с посылками x8 и x11. Затем создается импликация с антецедентами x8, x11 и консеквентом x15. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3. Переход к импликации, выводящей из отрицания утверждения соотношение для параметров уравнения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdxyABCK} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \ \& \ \text{коорд}(C, K) = (x, y) \ \& \ \neg(C \in \text{прямая}(AB)) \rightarrow \neg((c-a)(y-b) - (d-b)(x-a) = 0))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCKabcdxy} (A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \ \& \ \text{коорд}(C, K) = (x, y) \rightarrow C \in \text{прямая}(AB) \leftrightarrow (c-a)(y-b) = (d-b)(x-a))$$

Характеристика - "числопред(второйтерм)".

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x11 - заменяемая часть эквивалентности, переменной x12 - заменяющая. Переменной x15 присваивается результат упрощения отрицания утверждения x12 при помощи вспомогательной задачи на преобразование с посылками x8 и "не(x11)". Затем создается импликация с антецедентами x8, "не(x11)" и консеквентом x15. Она регистрируется в списке вывода.

Замена переменных в теореме

1. Использование явного параметрического описания рассматриваемых объектов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcefprqACK} (\neg(A = C) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(AC), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ \text{коорд}(\text{вектор}(ef), K) = (p, q) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{прямая}(AC) \parallel \text{вектор}(ef) \leftrightarrow ap + bq = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abcABCKpq} (a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(AC), K) = \text{set}_{xy}(ax + by + c = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (p, q) \rightarrow \text{прямая}(AC) \parallel B \leftrightarrow ap + bq = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$$

Характеристика - "числопред(второйтерм)".

Переменной x8 присваивается список антецедентов. В нем выбирается утверждение x9 вида $P(X)$, где P - предикатный символ, X - переменная. В нашем примере x9 имеет вид "Вектор(B)". Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по символу P указанную выше дополнительную теорему. Переменной x14 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x14 имеет вид:

$$\forall_d(\text{Вектор}(d) \leftrightarrow \exists_{ef}(e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ d = \text{вектор}(ef)))$$

Переменной x16 присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте теоремы x14, которая имеет заголовок P . Переменной x18 присваивается первый операнд вхождения x16. Проверяется, что этот операнд - переменная. В нашем примере - переменная d . Переменной x17 присваивается вхождение противоположной части эквивалентности. Проверяется, что она представляет собой квантор существования. Переменной x19 присваивается список конъюнктивных членов подкваторного утверждения. В этом списке находится равенство x20 с переменной x18 в одной части и некоторым выражением x23 в другой. Проверяется, что теорема x14 не имеет антецедентов. Переменной x24 присваивается список результатов подстановки выражения x23 вместо переменной X в отличные от x9 утверждения списка x8. Переменной x25 присваивается результат такой же подстановки в консеквент исходной теоремы. Переменной x24 присваивается объединение списка x24 со списком отличных от x20 элементов набора x19. Создается импликация с антецедентами x26 и консеквентом x25. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- Использование параметрического описания для исключения стандартного обозначения объектов данного типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdpqBK}(\text{коорд}(d, K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (p, q) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ \text{Прямая}(d) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(B) \rightarrow d \parallel B \leftrightarrow ap + bq = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abcABCKpq}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(AC), K) = \text{set}_{xy}(ax + by + c = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (p, q) \rightarrow \text{прямая}(AC) \parallel B \leftrightarrow ap + bq = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_A(\text{Прямая}(A) \leftrightarrow \exists_{BC}(B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A = \text{прямая}(BC)))$$

Характеристика - "числопред(второйтерм)".

Переменной x_8 присваивается список антецедентов. В этом списке находится равенство x_{11} , в левой части находится обозначение координат x_{12} некоторого объекта x_{13} , обозначенного выражением, отличным от переменной. В нашем примере x_{11} имеет вид "коорд(прямая(AC), K) = $\text{set}_{xy}(ax + by + c = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число})$ ", x_{12} - символ "коорд", x_{13} - выражение "прямая(AC)". Переменной x_{14} присваивается вхождение заменяемой части эквивалентности в консеквенте исходной теоремы. Внутри него рассматривается вхождение x_{15} выражения x_{13} . Переменной x_{16} присваивается символ по вхождению x_{15} . В нашем примере - "прямая". Справочник поиска теорем "называть" определяет по x_{16} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{19} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не встречающиеся в исходной теореме. В нашем примере x_{19} имеет вид:

$$\forall_d(\text{Прямая}(d) \leftrightarrow \exists_{ef}(e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ \neg(e = f) \ \& \ d = \text{прямая}(ef)))$$

Переменной x_{21} присваивается вхождение правой части эквивалентности в консеквенте дополнительной теоремы. Проверяется, что x_{21} - квантор существования. Переменной x_{22} присваивается его связывающая приставка, переменной x_{23} - список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. В списке x_{23} находится равенство x_{24} , заголовок правой части которого - символ x_{16} . Переменной x_{25} присваивается эта правая часть. Определяется подстановка S вместо переменных x_{22} , унифицирующая термы x_{25} и 13 . Переменной x_{28} присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям x_{23} . Переменной x_{29} присваивается список антецедентов теоремы x_{19} . Переменной x_{30} присваивается объединение списка x_{29} с утверждениями, необходимыми для сопровождения по о.д.з. левой части консеквента теоремы x_{19} , к которому добавляется сама эта левая часть. Решается задача на описание с посылками x_{30} и условиями x_{28} . Цели задачи - "полный", "попыткаспуска", "прямойответ", "неизвестные X ", где X - список параметров терма x_{13} . В нашем примере посылки - " $d - \text{set}$ ", "Прямая(d)"; условия - " $A - \text{точка}$ ", " $C - \text{точка}$ ", " $\neg(A = C)$ ", " $A \in d$ "; неизвестные - A, C . Ответ задачи присваивается переменной x_{32} . В нашем примере он имеет вид " $C \in d \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ A \in d$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной x_{33} присваивается список конъюнктивных членов этого ответа. Проверяется, что глубины вхождений неизвестных задачи в утверждения x_{33} (с точностью до отбрасывания корневого отрицания) равны 1. Переменной x_{34} присваивается объединение списка антецедентов исходной теоремы с левой частью эквивалентности в консеквенте теоремы x_{19} . Переменной x_{35} присваивается корневой операнд указанной левой части. В нашем примере - d . Переменной x_{36} присваивается результат замены вхождения x_{15} в консеквент исходной теоремы на выражение x_{35} . В нашем примере - " $d \parallel B \leftrightarrow ap + bq = 0$ ". Предпринимается замена на выражение d всех вхождений терма x_{13} в утверждения списка x_{34} . Переменной x_{37} присваивается результат обработки списка x_{34} оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x_{36} . Затем создается импликация с антецедентами x_{37} и консеквентом x_{36} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование дополнительной теоремы для варьирования текущей теоремы

1. Попытка получения импликации, выводящей ограничение на параметры при усмотрении различия объектов.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefhijkGK}(\text{коорд}(\text{прямая}(hi), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(jk), K) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0 \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ i - \text{точка} \ \& \ j - \text{точка} \ \& \ k - \text{точка} \ \& \ \neg(j = k) \ \& \ \neg(h = i) \ \& \ G \in \text{прямая}(hi) \ \& \ G \in \text{прямая}(jk) \ \& \ \neg(\text{прямая}(hi) = \text{прямая}(jk)) \rightarrow \neg(ae - bd = 0))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdefhijkK}(\neg(h = i) \ \& \ \neg(j = k) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(hi), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(jk), K) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0 \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ i - \text{точка} \ \& \ j - \text{точка} \ \& \ k - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{прямая}(hi) \parallel \text{прямая}(jk) \leftrightarrow ae - bd = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABEFG}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \neg(E = F) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \parallel \text{прямая}(EF) \ \& \ G \in \text{прямая}(AB) \ \& \ G \in \text{прямая}(EF) \rightarrow \text{прямая}(AB) = \text{прямая}(EF))$$

Характеристика - "числопред(второйтерм)".

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x11 - заменяемая часть, переменной x12 - заголовок заменяемой части. В нашем примере - символ "параллельны". Проверяется, что заменяемая часть неоднобуквенная, и переменной x13 присваивается заголовок ее первого операнда. В нашем примере - символ "прямая". Проверяется, что остальные операнды имеют тот же заголовок. Справочник "разныеточки" определяет заголовок x14 проверочного оператора, усматривающего различие значений выражений с заголовком x13. В нашем случае x14 - символ "разныепрямые". Проверяется, что x14 отлично от 0. В разделе, к которому относится символ x12, выбирается дополнительная теорема с заголовком "равны". Переменной x20 присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. В этом списке находится утверждение x21 с заголовком x12. Проверяется, что длины термов x11 и x21 равны. Переменной x22 присваивается список корневых операндов утверждения x21.

Переменной x23 присваивается консеквент дополнительной теоремы. Проверяется, что он представляет собой равенство, и переменной x24 присваивается пара частей этого равенства. Проверяется, что списки x22 и x24 состоят из одних и тех же элементов. Переменной x25 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x25 совпадает с дополнительной теоремой.

Переменной x26 присваивается список антецедентов теоремы x26. В этом списке выбирается утверждение x27 с заголовком x12. Проверяется, что его длина равна длине утверждения x21. Переменной x28 присваивается список параметров утверждения x27. Определяется подстановка S вместо переменных x28, переводящая утверждение x27 в утверждение x11. Переменной x30 присваивается консеквент теоремы x25. Проверяется, что его список параметров включается в список x28. Переменной x31 присваивается результат применения подстановки S к утверждению x30. Переменной x32 присваивается список результатов применения подстановки S к отличным от x27 утверждениям списка x26. Переменной x33 присваивается объединение списков x8 и x32, к которому добавляется отрицание утверждения x31. Переменной x34 присваивается отрицание заменяющей части исходной теоремы. Переменной x35 присваивается результат обработки списка x33 оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждения x34. Затем создается импликация с антецедентами x35 и консеквентом x34. Она регистрируется в списке вывода.

2. Попытка использования тождества, выражающего координаты одного объекта через координаты других.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{defghpqr}(\text{коорд}(g, h) = (d, e, f) \ \& \ \text{коорд}(v, h) = (p, q, r) \ \& \ \text{Вектор}(g) \ \& \ \text{Вектор}(v) \ \& \ \text{Трехмерн}(h) \rightarrow v = -g \leftrightarrow p = -d \ \& \ q = -e \ \& \ r = -f)$$

из теоремы

$$\forall_{abcpruvK}(\text{Трехмерн}(K) \ \& \ \text{Вектор}(u) \ \& \ \text{Вектор}(v) \ \& \ \text{коорд}(u, K) = (a, b, c) \ \& \ \text{коорд}(v, K) = (p, q, r) \rightarrow u = v \leftrightarrow a = p \ \& \ b = q \ \& \ c = r)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{AabcK}(\text{Вектор}(A) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b, c) \rightarrow \text{коорд}(-A, K) = (-a, -b, -c))$$

Характеристика - "числопред(второйтерм)".

Переменной x10 присваивается заменяющая часть эквивалентности в консеквенте исходной теоремы. В нашем примере - правая часть. Переменной x11 присваивается вхождение антецедента, представляющего собой равенство для координатного набора. В нашем примере - антецедента "коорд(u, K) = (a, b, c)". Переменной x12 присваивается заголовок левой части равенства, переменной x13 - правая часть равенства. В нашем примере x12 - символ "коорд", x13 - выражение (a, b, c). Проверяется, что параметры терма x13 включаются в параметры терма x10. Справочник поиска теорем "опредкоорд" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "выводпосылки" присваивает переменной x16 результат последовательного применения дополнительной и исходной теорем при унификации консеквента дополнительной теоремы с антецедентом x11 исходной теоремы. Теорема x16 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование текущей теоремы для усиления дополнительного параметрического описания

1. Попытка получения импликации, дающей общий вид уравнения для множества точек, удовлетворяющего заданному ограничению.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{defjkrstwz}(\neg(j = k) \ \& \ \neg(w = z) \ \& \ t = (q, r, s) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(jk), t) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0 \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число}) \ \& \ w \in \text{плоскость}(qrs) \ \& \ z \in \text{плоскость}(qrs) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ j - \text{точка} \ \& \ k - \text{точка} \ \& \ w - \text{точка} \ \& \ z - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(jk) \parallel \text{прямая}(wz) \ \& \ \text{систкоорд}(t) \rightarrow \exists_b(\text{коорд}(\text{прямая}(wz), t) = \text{set}_{np}(b + dn + ep = 0 \ \& \ n - \text{число} \ \& \ p - \text{число}) \ \& \ b - \text{число}))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdefhijkK}(\neg(h = i) \ \& \ \neg(j = k) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(hi), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(jk), K) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0 \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ i - \text{точка} \ \& \ j - \text{точка} \ \& \ k - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \text{прямая}(hi) \parallel \text{прямая}(jk) \leftrightarrow ae - bd = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{MNAВСК}(\neg(M = N) \ \& \ K = (A, B, C) \ \& \ M \in \text{плоскость}(ABC) \ \& \ N \in \text{плоскость}(ABC) \ \& \ M - \text{точка} \ \& \ N - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow \exists_{abc}(\neg(a^2 + b^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(MN), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число}))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x11 - заменяемая часть эквивалентности в консеквенте теоремы. В списке x8 находится равенство x12, в одной из частей которого расположено обозначение координат, а в другой - описатель "класс". Вхождение первой части присваивается переменной x13, вхождение второй - переменной x14. В нашем примере x12 имеет вид "коорд(прямая(hi), K) = set_{xy}(c + ax + by = 0 & x - число & y - число)", x13 - вхождение левой части, x14 - правой. Переменной x15 присваивается символ по вхождению x13. В нашем примере - "коорд". Переменной x16 присваивается заголовок первого операнда вхождения x13. Проверяется, что этот заголовок - логический символ. В нашем примере - символ "прямая". Проверяется, что первый операнд вхождения x13 встречается в утверждении x11.

Справочник поиска теорем "общий" определяет по x16 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x19 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x19 имеет вид:

$$\forall_{wzqrst}(\neg(w = z) \ \& \ t = (q, r, s) \ \& \ w \in \text{плоскость}(qrs) \ \& \ z \in \text{плоскость}(qrs) \ \& \ w - \text{точка} \ \& \ z - \text{точка} \ \& \ \text{mbor}(t) \rightarrow \exists_{glm}(\neg(g^2 + l^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(wz), t) = \text{set}_{np}(m + gn + lp = 0 \ \& \ n - \text{число} \ \& \ p - \text{число}) \ \& \ g - \text{число} \ \& \ l - \text{число} \ \& \ m - \text{число}))$$

Переменной x_{20} присваивается вхождение консеквента теоремы x_{19} . Проверяется, что этот консеквент - квантор существования. Переменной x_{21} присваивается список антецедентов теоремы x_{19} , переменной x_{22} - список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования. В списке x_{22} находится равенство x_{23} , в одной из частей которого расположено выражение с заголовком x_{15} , в другой - описатель "класс". Переменной x_{24} присваивается вхождение первой части, переменной x_{25} - второй. В нашем примере x_{23} имеет вид "коорд(прямая(wz), t) = $set_{np}(m + gn + lp = 0 \ \& \ n - \text{число} \ \& \ p - \text{число})$ ". Переменной x_{26} присваивается список переменных равенства x_{12} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{26} , унифицирующая равенства x_{12} и x_{23} . Переменной x_{28} присваивается связывающая приставка квантора x_{20} . Переменной x_{29} присваивается список результатов применения подстановки S к отличным от x_{12} элемертам списка x_8 . Переменной x_{30} присваивается список тех утверждений набора x_{29} , которые имеют параметр списка x_{28} , переменной x_{31} - остальная часть списка x_{29} . Переменной x_{32} присваивается объединение списков x_{31} и x_{21} , переменной x_{33} - объединение списков x_{32} и x_{22} . Проверяется, что каждое утверждение списка x_{30} , не входящее в список x_{22} , является следствием утверждений x_{33} . Для проверки используются проверочные операторы.

Переменной x_{34} присваивается результат применения подстановки S к утверждению x_{11} . Переменной x_{35} присваивается результат добавления утверждения x_{34} к списку x_{32} . Переменной x_{36} присваивается результат применения подстановки S к заменяющей части исходной теоремы. Переменной x_{37} присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x_{28} на конъюнкцию утверждений набора x_{22} и конъюнктивных членов утверждения x_{36} . Создается импликация с антецедентами x_{35} и консеквентом x_{37} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Варьирование антецедентов

1. Попытка определения уравнения для координат множества точек, рассматриваемых в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{defklmnB}(n = (k, l, m) \ \& \ \text{коорд}(B, n) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0 \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число}) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \text{Прямая}(B) \ \& \ \text{систкоорд}(n) \rightarrow B \parallel \text{прямая}(kl) \leftrightarrow d = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abcdefhiBK}(\neg(h = i) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0 \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число}) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(hi), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \text{Прямая}(B) \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ i - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow B \parallel \text{прямая}(hi) \leftrightarrow ae - bd = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCK}(\text{систкоорд}(K) \ \& \ K = (A, B, C) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}(y = 0 \ \& \ x - \text{число}))$$

Переменной x8 присваивается вхождение antecedента теоремы, представляющего собой равенство с описателем "класс" в правой части. Переменной x9 присваивается вхождение левой части равенства, переменной x10 - заголовок этой части. Проверяется, что x10 - название координат. В нашем примере x9 - вхождение выражения "коорд(прямая(hi), K)", x10 - символ "коорд". Переменной x11 присваивается заголовок первого операнда вхождения x9. В нашем примере - символ "прямая". Справочник поиска теорем "уравнмножество" определяет по x11 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x14 присваивается список antecedентов дополнительной теоремы. Проверяется, что в этом списке нет равенства, в левой части которого расположено обозначение координат какого-либо объекта или множества объектов. Переменной x15 присваивается вхождение равенства - консеквента дополнительной теоремы. Проверяется, что в правой части этого равенства расположен описатель "класс", длина связывающей приставки которого равна длине связывающей приставке описателя - правой части равенства x8. Оператор "тождвывод" определяет результат x16 преобразования вхождения x9 в исходную теорему при помощи дополнительной теоремы. В нашем примере x16 имеет вид:

$$\forall_{abcdefklmnB}(\neg(k = l) \ \& \ \text{коорд}(B, n) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0 \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число}) \ \& \ \text{set}_{gj}(j = 0 \ \& \ g - \text{число}) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \text{Прямая}(B) \ \& \ k - \text{точка} \ \& \ l - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(n) \ \& \ n = (k, l, m) \rightarrow B \parallel \text{прямая}(kl) \leftrightarrow ae - bd = 0)$$

Переменной x17 присваивается вхождение antecedента теоремы x16, представляющего собой равенство с описателями "класс" в обеих частях. Переменной x18 присваивается вхождение левого описателя, переменной x19 - его связывающая приставка. Переменной x20 присваивается вхождение правого описателя, переменной x21 - его связывающая приставка. Переменной x22 присваивается результат замены переменных списка x21 на переменные x19 в утверждении под описателем x20. В нашем примере - " $c + ag + bj = 0 \ \& \ g - \text{число} \ \& \ j - \text{число}$ ". Переменной x23 присваивается конъюнкция двух кванторов общности с одной и той же кванторной приставкой x19. Antecedентами первого из них служат конъюнктивные члены утверждения под описателем x18, antecedентами второго - конъюнктивные члены утверждения x22. Консеквентом первого служит утверждение x22, консеквентом второго - утверждение под описателем x18. В нашем примере x23 имеет вид:

$$\forall_{gj}(j = 0 \ \& \ g - \text{число} \rightarrow c + ag + bj = 0 \ \& \ g - \text{число} \ \& \ j - \text{число}) \ \& \ \forall_{gj}(c + ag + bj = 0 \ \& \ g - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \rightarrow j = 0 \ \& \ g - \text{число})$$

Переменной x24 присваивается результат удаления из списка antecedентов теоремы x16 antecedента x17. Переменной x25 присваивается список параметров утверждения x23. Проверяется, что он непуст. Список x24 разбивается на подсписок x26 утверждений, содержащих переменные набора x25, и подсписок x27 остальных утверждений. Решается задача на описание с посылками x27, условиями которой служат утверждения списка x26 и утверждение x23. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", неизвестные x25". Ответ присваивается переменной x31. В нашем примере он имеет вид " $a = 0 \ \& \ c = 0 \ \& \ \neg(b = 0) \ \& \ b - \text{число}$ ". Проверяется, что этот ответ отличен от

символа "отказ". Переменной x32 присваивается результат замены в теореме x16 антецедентов x17 на утверждение x31. Затем теорема x32 обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

- Использование дополнительной теоремы для реализации уравнения в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{defgijklpqrB}(\text{коорд}(B, r) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0 \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число}) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \text{Прямая}(B) \ \& \ p - \text{точка} \ \& \ q - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(r) \ \& \ \neg(p = q) \ \& \ \text{коорд}(p, r) = (g, j) \ \& \ \text{коорд}(q, r) = (k, l) \rightarrow B \parallel \text{прямая}(pq) \leftrightarrow (l - j)e - (g - k)d = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abcdefhiBK}(\neg(h = i) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0 \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число}) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(hi), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \text{Прямая}(B) \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ i - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow B \parallel \text{прямая}(hi) \leftrightarrow ae - bd = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABabcdK}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (c, d) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}((d - b)x + (a - c)y + cb - ad = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$$

Переменной x8 присваивается вхождение антецедента, представляющего собой равенство с описателем "класс" в одной части и обозначением координат в другой. В нашем примере x8 - антецедент "коорд(прямая(hi), K) = set_{xy}(c + ax + by = 0 & x - число & y - число)". Переменной x12 присваивается заголовок выражения, координаты которого рассматриваются. В нашем примере - "прямая". Справочник поиска теорем "уравнмножество" определяет по x12 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "выводпосылки" находит результат x15 последовательного применения дополнительной и исходной теорем при унификации антецедента x8 исходной теоремы с консеквентом дополнительной. Переменной x16 присваивается список антецедентов теоремы x15, переменной x17 - ее консеквент. Переменной x18 присваивается результат обработки списка x16 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x17. Создается импликация с антецедентами x18 и консеквентом x17, которая регистрируется в списке вывода.

3.146 Характеристика "числоценка"

Характеристикой "числоценка" снабжаются простые импликации, дающие неравенство для невырожденных числовых атомов.

Логические следствия теоремы

1. Попытка отбросить отрицание равенства в антецедентах и перейти от строгого неравенства в консеквенте к нестрогому.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \\ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \rightarrow \\ 0 \leq l(AC) - l(CD))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(C = D) \ \& \\ \neg(A = B) \ \& \ \neg(A = D) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \rightarrow \\ 0 < l(AC) - l(CD))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Проверяется, что x9 имеет заголовок "меньше". В списке x8 находится отрицание равенства x10. В нашем примере - " $\neg(A = D)$ ". Переменной x11 присваивается список утверждений, используемых для сопровождения по о.д.з. консеквента и отличных от x10 антецедентов. Проверяется, что x10 не является следствием утверждений x11. Переменной x12 присваивается результат замены в списке x8 утверждения x10 на его отрицание. Переменной x13 присваивается результат изменения заголовка консеквента x9 на символ "меньшеилиравно". При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x13 - следствие посылок x12. Создается импликация, антецедентами которой являются отличные от x10 утверждения набора x8, а консеквентом - x13. Она регистрируется в списке вывода.

2. Контрапозиция неравенств, если консеквент имеет единственный числовой атом, а антецедент - два.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(A \in \text{прямая}(BC)) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \\ C - \text{точка} \ \& \ 0 \leq -\pi/2 + \angle(ACB) \rightarrow 0 < l(AB) - l(BC))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(B = C) \ \& \ \neg(A \in \text{прямая}(BC)) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \\ C - \text{точка} \ \& \ l(AB) \leq l(BC) \rightarrow \angle(ACB) < \pi/2)$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Проверяется, что x9 - неравенство, имеющее единственный числовой атом. Проверяется, что среди антецедентов имеется единственное неравенство x12. Проверяется, что число невырожденных числовых атомов утверждения x12 равно 2. Проверяется, что среди существенных антецедентов исходной теоремы, отличных от x12, нет ни одного, заголовок которого отличался бы от символа "не". Переменной x15 присваивается список антецедентов, отличных от x12. Переменной x16 присваивается результат упрощения отрицания неравенства x9 относительно посылок x15, переменной x18 - результат упрощения отрицания неравенства x12 относительно тех же посылок. Создается импликация,

антецеденты которой получены заменой в списке х8 утверждения х12 на х16, а консеквентом служит х18. Эта импликация обрабатывается оператором "норм-теорема" и регистрируется в списке вывода.

Использование задачи на описание для получения новой теоремы

1. Попытка использовать встречное неравенство для исключения числового атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(B = C) \& \neg(A \in \text{прямая}(BC)) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& l(AB) \leq l(BC) \rightarrow \angle(ACB) < \pi/2)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \neg(A = B) \& \neg(B = C) \& \neg(A = C) \& l(AB) \leq l(BC) \rightarrow \angle(ACB) \leq \angle(BAC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(\neg(a = b) \& \neg(C \in \text{прямая}(ab)) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \rightarrow 0 < -\angle(acb) - \angle(bac) + \pi)$$

Переменной х8 присваивается список антецедентов, переменной х9 - консеквент. Переменной х10 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. В нашем примере - $\angle(ACB), \angle(BAC)$. В списке х10 выбирается атом х11; переменной х12 присваивается его заголовок. В нашем примере х11 - $\angle(BAC)$. Выбирается переменная х13, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной х15 присваивается результат замены вхождений атома х11 в консеквент на переменную х13. В нашем примере - " $\angle(ACB) \leq a$ ". Решается задача на описание с посылками х8 и условиями "число(х13)", х15. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные х13". Ответ присваивается переменной х17. В нашем примере - " $a - \text{число} \& \angle(ACB) \leq a$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной х18 присваивается список отличных от "число(х13)" конъюнктивных членов ответа. Проверяется, что этот список одноэлементный и состоит из некоторого неравенства х19. Переменной х20 присваивается вхождение той части неравенства х19, которая представляет собой переменную х13. Переменной х22 присваивается другая часть. В нашем примере - " $\angle(ACB)$ ". Справочник поиска теорем "числпарам" определяет по символу х12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной х25 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере этот результат совпадает с дополнительной теоремой.

Переменной х26 присваивается список антецедентов теоремы х25, переменной х27 - ее консеквент. Рассматривается некоторый числовой атом х28 утверждения х27, имеющий заголовок х12. В нашем примере - " $\angle(acb)$ ". Переменной х29 присваивается список параметров атома х28. Определяется подстановка S вместо переменных х29, унифицирующая атомы х28 и х11. Переменной х31 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям

списка x_{26} , переменной x_{33} - результат применения этой подстановки к утверждению x_{27} и последующей обработки оператором "станд". Переменной x_{34} присваивается результат обработки оператором "станд" консеквента x_9 исходной теоремы. В нашем примере x_{33} имеет вид " $0 < -\angle(ACB) - \angle(BAC) + \pi$ ", x_{34} - вид " $\angle(ACB) \leq \angle(BAC)$ ". Переменной x_{35} присваивается список невырожденных числовых атомов утверждения x_{33} . Проверяется, что все они входят в утверждение x_{34} . Переменной x_{36} присваивается результат обработки оператором "станд" атома x_{11} . В нашем примере - " $\angle(BAC)$ ". Переменной x_{38} присваивается результат замены всех вхождений терма x_{36} в утверждение x_{33} на переменную x_{13} . В нашем примере - " $0 < -\angle(ACB) - a + \pi$ ". Решается задача на описание с посылками x_{31} и условиями "число(x_{13})", x_{38} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{13} ". Ответ присваивается переменной x_{40} . В нашем примере он имеет вид " $a - \text{число} \ \& \ a < -\angle(ACB) + \pi$ ". Проверяется, что ответ x_{40} отличен от символа "отказ", и переменной x_{41} присваивается список его конъюнктивных членов, отличных от "число(x_{13})". Проверяется, что это список одноэлементный, и переменной x_{42} присваивается его элемент. Проверяется, что x_{42} - неравенство. Переменной x_{43} присваивается вхождение той его части, которая представляет собой переменную x_{13} . Переменной x_{45} присваивается другая часть. Проверяется, что если x_{20} - левая часть неравенства, то x_{43} - правая, и наоборот. Если хотя бы одно из неравенств x_{19} , x_{42} строгое, то переменной x_{46} присваивается символ "меньше", иначе - символ "меньшеилиравно". Если x_{20} - левая часть неравенства, то переменной x_{47} присваивается неравенство " $x_{46}(x_{45} \ x_{22})$ ", иначе - " $x_{46}(x_{22} \ x_{45})$ ". В нашем примере - " $\angle(ACB) < -\angle(ACB) + \pi$ ". Переменной x_{48} присваивается объединение списков x_8 и x_{31} .

Предпринимается попытка явного разрешения неравенства x_{47} относительно числового атома. Переменной x_{49} присваивается список невырожденных числовых атомов терма x_{47} . Проверяется, что он состоит из единственного атома x_{50} . Переменной x_{52} присваивается результат замены в неравенстве x_{47} всех вхождений атома x_{50} на переменную x_{13} . Решается задача на описание с посылками x_{48} и условиями "число(x_{13})", x_{52} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{13} ". Ответ присваивается переменной x_{54} . Проверяется, что он отличен от символа "отказ". Результат замены в нем переменной x_{13} на выражение x_{50} переписывается переменной x_{47} . В нашем примере x_{47} приобретает вид " $\angle(ACB) - \text{число} \ \& \ \angle(ACB) < \pi/2$ ".

После указанной попытки все переменные начиная с x_{49} снова оказываются не определены. Создается импликация с антецедентами x_{48} и консеквентом x_{47} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

2. Попытка использовать тождество для исключения числового атома.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ l(AB) < l(BC) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(BC) \rightarrow \angle(ACB) < \pi/4)$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ l(AB) < l(BC) \rightarrow \angle(ACB) < \angle(BAC))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(AC) \rightarrow \angle(ACB) + \angle(ABC) = \pi/2)$$

Начало программы приема совпадает с началом программы предыдущего приема. Для удобства чтения повторим его. Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Переменной x10 присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. В нашем примере - $\angle(ACB)$, $\angle(BAC)$. В списке x10 выбирается атом x11; переменной x12 присваивается его заголовок. В нашем примере x11 - $\angle(BAC)$. Выбирается переменная x13, не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x15 присваивается результат замены вхождений атома x11 в консеквент на переменную x13. В нашем примере - " $\angle(ACB) < a$ ". Решается задача на описание с посылками x8 и условиями "число(x13)", x15. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x13". Ответ присваивается переменной x17. В нашем примере - " $a - \text{число} \ \& \ \angle(ACB) < a$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x18 присваивается список отличных от "число(x13)" конъюнктивных членов ответа. Проверяется, что этот список одноэлементный и состоит из некоторого неравенства x19. Переменной x20 присваивается вхождение той части неравенства x19, которая представляет собой переменную x13. Переменной x22 присваивается другая часть. В нашем примере - " $\angle(ACB)$ ".

Дальше начинаются небольшие отличия. Справочник поиска теорем "числатомы" определяет по символу x12 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x25 присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере этот результат имеет вид:

$$\forall_{abc}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ \neg(a = c) \ \& \ \neg(a = b) \ \& \ \text{прямая}(ab) \perp \text{прямая}(ac) \rightarrow \angle(acb) + \angle(abc) = \pi/2)$$

Переменной x26 присваивается список антецедентов теоремы x25, переменной x27 - ее консеквент. Рассматривается некоторый числовой атом x28 утверждения x27, имеющий заголовок x12. В нашем примере - " $\angle(acb)$ ". Переменной x29 присваивается список параметров атома x28. Определяется подстановка S вместо переменных x29, унифицирующая атомы x28 и x11. Переменной x31 присваивается список результатов применения подстановки S к утверждениям списка x26, переменной x33 - результат применения этой подстановки к утверждению x27 и последующей обработки оператором "станд". Переменной x34 присваивается результат обработки оператором "станд" консеквента x9 исходной теоремы. В нашем примере x33 имеет вид " $\angle(ACB) + \angle(BAC) = \pi/2$ ", x34 - вид " $\angle(ACB) < \angle(BAC)$ ". Переменной x35 присваивается список невырожденных числовых атомов утверждения x33. Проверяется, что все они входят в утверждение x34. Переменной x36 присваивается результат обработки оператором "станд" атома x11. В нашем примере - " $\angle(BAC)$ ". Переменной x38 присваивается результат замены всех вхождений термина x36 в утверждение x33

на переменную x_{13} . В нашем примере - " $\angle(ACB) + a = \pi/2$ ". Решается задача на описание с посылками x_{31} и условиями "число(x_{13})", x_{38} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{13} ". Ответ присваивается переменной x_{40} . В нашем примере он имеет вид " $a = -\angle(ACB) + \pi/2$ ". Проверяется, что ответ x_{40} отличен от символа "отказ", и переменной x_{41} присваивается список его конъюнктивных членов, отличных от "число(x_{13})". Проверяется, что это список одноэлементный, и переменной x_{42} присваивается его элемент. Проверяется, что x_{42} - равенство с переменной x_{13} в левой части. Переменной x_{43} присваивается другая часть. Переменной x_{44} присваивается результат подстановки в неравенство x_9 выражения x_{43} вместо переменной x_{13} . Переменной x_{45} присваивается объединение списков x_8 и x_{31} . В нашем примере x_{44} имеет вид " $\angle(ACB) < -\angle(ACB) + \pi/2$ ".

Предпринимается попытка явного разрешения неравенства x_{44} относительно числового атома. Переменной x_{46} присваивается список невырожденных числовых атомов терма x_{44} . Проверяется, что он состоит из единственного атома x_{47} . Переменной x_{49} присваивается результат замены в неравенстве x_{44} всех вхождений атома x_{47} на переменную x_{13} . Решается задача на описание с посылками x_{45} и условиями "число(x_{13})", x_{49} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "упростить", "неизвестные x_{13} ". Ответ присваивается переменной x_{51} . Проверяется, что он отличен от символа "отказ". Результат замены в нем переменной x_{13} на выражение x_{47} переписывается переменной x_{44} . В нашем примере x_{47} приобретает вид " $\angle(ACB) - \text{число} \ \& \ \angle(ACB) < \pi/4$ ".

После указанной попытки все переменные начиная с x_{46} снова оказываются не определены. Для проверки непротиворечивости утверждений x_{45} решается вспомогательная задача на исследование. Затем создается импликация с антецедентами x_{45} и консеквентом x_{44} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Специальное преобразование теоремы для приемов заданного типа

1. Извлечение импликации для усмотрения противоречия при контроле подслучая - случай единственного числового атома в консеквенте.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aABC} (\neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \angle(ABC) = a \ \& \ a < 0 \rightarrow \text{ложь})$$

из теоремы

$$\forall_{ABC} (\neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \rightarrow 0 \leq \angle(ABC))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Переменной x_{10} присваивается список невырожденных числовых атомов консеквента. Проверяется, что он одноэлементный, и переменной x_{11} присваивается его элемент. В нашем примере - $\angle(ABC)$. Выбирается переменная x_{12} , не встречающаяся в исходной теореме. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{14} присваивается результат замены вхождений терма x_{11} в утверждение x_9 на

переменную x_{12} . В нашем примере x_{14} имеет вид " $0 \leq a$ ". Решается задача на описание, посылками которой служат утверждение "число(x_{12})" и утверждения списка x_8 , а единственным условием - отрицание утверждения x_{14} . Задача имеет единственную цель "редакция". Ответ присваивается переменной x_{17} . В нашем примере он имеет вид $a < 0$. Переменной x_{18} присваивается результат обработки списка x_8 оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждений x_8 . Переменной x_{19} присваивается результат добавления к x_{18} утверждений "равно(x_{11} x_{12})" и x_{17} . Затем создается импликация с антецедентами x_{19} и консеквентом "ложь". Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "контроль".

2. Извлечение импликации для усмотрения противоречия при контроле подслучая - случай двух числовых атомов в консеквенте.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ 0 < -\angle(ACB) + \angle(BAC) \ \& \ l(AB) = a \ \& \ l(BC) = b \ \& \ 0 \leq a - b \rightarrow \text{ложь})$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \angle(ACB) < \angle(BAC) \rightarrow l(AB) < l(BC))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Переменной x_{10} присваивается список числовых атомов консеквента. Проверяется, что он двухэлементный и все его элементы - невырожденные атомы. Выбираются переменные X, Y , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные a, b . Переменной x_{13} присваивается отрицание результата замены в утверждении x_9 всех вхождений первого из атомов x_{10} на X , а второго - на Y . В нашем примере x_{13} имеет вид " $\neg(a < b)$ ". Переменной x_{15} присваивается результат упрощения терма x_{13} в его о.д.з. при помощи задачи на преобразование. В нашем примере - " $0 \leq a - b$ ". Переменной x_{16} присваивается результат обработки списка x_8 оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждений x_8 . Переменной x_{17} присваивается результат добавления к утверждениям x_{18} равенства первого атома пары x_{10} переменной X , а второго - переменной Y . Создается импликация с антецедентами x_{17} и консеквентом "ложь". Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "контроль".

Использование дополнительной теоремы для реализации сложного антецедента

1. Контрапозиция и реализация неравенства.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{adefhD}(\neg(e = f) \ \& \ \neg(h = D) \ \& \ a \in \text{окружность}(ef) \ \& \ d \in \text{окружность}(ef) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(hD) - \text{касательная к окружность}(ef) \rightarrow \neg(D \in \text{интервал}(ad)))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdD}(\neg(b = c) \ \& \ a \in \text{окружность}(bc) \ \& \ d \in \text{окружность}(bc) \ \& \\ D \in \text{интервал}(ad) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \\ D - \text{точка} \rightarrow 0 < -l(bD) + l(bc))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCD}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \\ \neg(C = D) \ \& \ \text{прямая}(CD) - \text{касательная к окружность}(AB) \rightarrow \\ 0 \leq l(AC) - l(AB))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент. Проверяется, что среди антецедентов нет строгих неравенств, а консеквент является строгим неравенством. Переменной x11 присваивается список существенных антецедентов теоремы. Переменной x12 присваивается список всех параметров консеквента, имеющих единственное вхождение в консеквент и единственное вхождение в антецеденты x11. Проверяется, что этот список одноэлементный, и переменной x13 присваивается его элемент. В нашем примере x13 - переменная D . Переменной x15 присваивается результат упрощения относительно посылок x8 отрицания консеквента x9. В нашем примере - " $0 \leq -l(bc) + l(bD)$ ". Переменной x17 присваивается элемент списка x11, содержащий переменную x13. В нашем примере - " $D \in \text{интервал}(ad)$ ". Переменной x18 присваивается импликация, полученная из исходной теоремы заменой антецедента x17 на утверждение x15, а консеквента - на отрицание утверждения x17. Переменной x19 присваивается вхождение антецедента x15 в теорему x18. Переменной x20 присваивается список числовых атомов утверждения x9. Проверяется, что этот список двухэлементный, причем оба его элемента имеют один и тот же заголовок x21. В нашем примере - символ "расстояние". Справочник поиска теорем "Числатомы" определяет по x21 указанную выше дополнительную теорему. Оператор "выводпосылки" находит результат x24 последовательного применения дополнительной теоремы и теоремы x18, при котором антецедент x19 теоремы x18 унифицируется с консеквентом дополнительной теоремы. Переменной x25 присваивается результат обработки теоремы x24 оператором "нормтеорема". Проверяется, что x25 - кванторная импликация. Переменной x27 присваивается импликация, получаемая из x25 обработкой оператором "нормантецеденты" ее антецедентов относительно параметров консеквента. Наконец, теорема x27 регистрируется в списке вывода.

Реализация антецедента дополнительной теоремы

1. Реализация антецедента дополнительной теоремы, устанавливающей свойство понятия, определяемого в данной ячейке вывода.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdD}(\neg(b = c) \ \& \ a \in \text{окружность}(bc) \ \& \ d \in \text{окружность}(bc) \ \& \\ D \in \text{интервал}(ad) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \\ \neg(D \in \text{окружность}(bc)))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdD}(\neg(b = c) \& a \in \text{окружность}(bc) \& d \in \text{окружность}(bc) \& \\ D \in \text{интервал}(ad) \& a - \text{точка} \& b - \text{точка} \& c - \text{точка} \& d - \text{точка} \& D - \text{точка} \rightarrow \\ 0 < -l(bD) + l(bc))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{aAB}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& 0 < -l(aA) + l(AB) \rightarrow \neg(a \in \text{окружность}(AB)))$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент - некоторое неравенство. Переменной x10 присваивается список числовых атомов консеквента. Проверяется, что он не менее чем двухэлементный. Переменной x11 присваивается список параметров консеквента. Среди характеристик стартовой теоремы текущей ячейки вывода находится элемент "определение(P)". Переменной x14 присваивается заголовок терма P . В нашем примере имеем характеристику "определение(окружность(AB))", x14 - символ "окружность". В исходной теореме рассматривается вхождение x15 символа x14 в некоторый антецедент. Проверяется, что все остальные подтермы исходной теоремы, имеющие заголовок "окружность", равны подтерму x15. Переменной x16 присваивается подтерм x15. В нашем примере - "окружность(bc)". Переменной x17 присваивается терм "набор(x9 x16)". В нашем примере он имеет вид "набор($0 < -l(bD) + l(bc)$, окружность(bc))".

В списке вывода находится дополнительная теорема с характеристикой "свойства(x14(...))". Переменной x21 присваивается вхождение символа x14 в консеквент дополнительной теоремы. Рассматривается вхождение x22 антецедента дополнительной теоремы, заголовок которого равен заголовку консеквента исходной теоремы. В нашем примере этот антецедент имеет вид " $0 < -l(aA) + l(AB)$ ". Переменной x23 присваивается терм "набор($R T$)", где R - подтерм x22, T - подтерм x21. В нашем примере x23 имеет вид "набор($-l(aA) + l(AB)$, окружность(AB))". Переменной x24 присваивается список параметров терма x23. Проверяется, что он содержит все переменные дополнительной теоремы. Определяется подстановка S вместо переменных x24, переводящая терм x23 в терм x17. Переменной x26 присваивается список результатов применения подстановки S к отличным от x22 антецедентам дополнительной теоремы. Переменной x27 присваивается результат применения подстановки S к консеквенту дополнительной теоремы. Создается импликация с антецедентами x8, x26 и консеквентом x27. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

3.147 Характеристика "числсвязь"

Характеристикой "числсвязь" снабжаются тождества без невырожденных числовых атомов, содержащие параметры уравнения для координат множества точек.

Использование задачи на описание для получения новой теоремы

1. Попытка уменьшения числа параметров одного из уравнений с помощью параметрического описания консеквента.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{defABCDK}(\neg(A = D) \& \neg(B = C) \& \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0 \& u - \text{число} \& v - \text{число}) \& d - \text{число} \& e - \text{число} \& f - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \text{прямая}(AD) \perp \text{прямая}(BC) \& \text{прямкоорд}(K) \rightarrow \exists_a(\text{коорд}(\text{прямая}(AD), K) = \text{set}_{xy}(a + ex - dy = 0 \& x - \text{число} \& y - \text{число}) \& a - \text{число}))$$

из теоремы

$$\forall_{abcdefABCDK}(\neg(A = D) \& \neg(B = C) \& \text{коорд}(\text{прямая}(AD), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \& x - \text{число} \& y - \text{число}) \& \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0 \& u - \text{число} \& v - \text{число}) \& a - \text{число} \& b - \text{число} \& c - \text{число} \& d - \text{число} \& e - \text{число} \& f - \text{число} \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& D - \text{точка} \& \text{прямая}(AD) \perp \text{прямая}(BC) \& \text{прямкоорд}(K) \rightarrow ad + be = 0)$$

Переменной x8 присваивается список антецедентов, переменной x9 - консеквент, представляющий собой равенство. В списке x8 рассматривается равенство x10 с обозначением координат в одной части и описателем "класс" в другой. Переменной x11 присваивается вхождение обозначения координат, переменной x12 - вхождение описателя. В нашем примере x10 имеет вид

$$\text{коорд}(\text{прямая}(AD), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \& x - \text{число} \& y - \text{число})$$

Переменной x13 присваивается символ по вхождению x11. В нашем примере - символ "коорд". Переменной x14 присваивается описатель x12. Переменной x15 присваивается список параметров этого описателя. В нашем примере - a, b, c . Переменной x16 присваивается пересечение списка x15 с списком параметров консеквента x9. В нашем примере - a, b . Проверяется, что список x16 непуст. Переменной x17 присваивается список параметров консеквента x9. В нашем примере - a, b, d, e . Переменной x18 присваивается список антецедентов x8, параметры которых включаются в список x17. В нашем примере - " $a - \text{число}$ ", " $b - \text{число}$ ", " $d - \text{число}$ ", " $e - \text{число}$ ". Проверяется, что список x18 непуст. Она подразбивается на список x19 утверждений, содержащих переменную списка x16, и список x20 остальных утверждений. Переменной x21 присваивается результат добавления к списку x20 терма "фиктпосылка(X)", где X - список всех параметров утверждений x8. Решается задача на описание с посылками x21 и условиями x19, x9. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "вспо-параметр", "неизвестные x16". Ответ присваивается переменной x24. В нашем примере он имеет вид " $\exists_g(g - \text{число} \& a = eg \& b = -dg)$ ". Проверяется, что заголовок терма x24 - квантор существования. Переменной x25 присваивается связывающая приставка этого квантора, переменной x26 - список конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Переменной x27 присваивается список всех элементов набора x26, не содержащих параметра списка x16. Переменной x28 присваивается список правых частей равенств набора x26, в левой части которых расположена переменная списка x16. Проверяется, что длины списков x28 и x16 равны. Переменной x29 присваивается объединение списка x27 со списком результатов подстановкой термов x28 вместо переменных x16 в утверждения набора x8. Решается задача на исследование x30 с посылками x29 и целями "нормкласс", "известно", "теорвывод", "неизвестные Y ", где Y - объединение заности списков x15 и x16 со списком x25. В нашем примере Y состоит

из переменных s, g, a . После решения задачи x30 в ее списке посылок находится равенство x31, одна из частей которого равна подтерму x11. Переменной x34 присваивается другая часть. В нашем примере x31 имеет вид

$$\text{коорд}(\text{прямая}(AD), K) = \text{set}_{xy}(a + ex - dy = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число})$$

Переменной x35 присваивается пересечение списка параметров выражения x34 со списком неизвестных задачи x30. В нашем примере - единственная переменная a . Проверяется, что список x35 короче списка x15, причем каждая его переменная имеет единственное вхождение в терм x34. Переменной x36 присваивается список всех элементарных посылок задачи x30, содержащих переменную списка x35 и не содержащих неизвестных задачи x30, не входящих в список x35. В нашем примере - единственная посылка " a —число". Переменной x37 присваивается результат навешивания квантора существования по переменным x35 на конъюнкцию утверждений набора x36 и утверждения x31. Список x8 разбивается на подсписок x38 утверждений, содержащих переменную списка x15, и подсписок x39 остальных утверждений. Переменной x40 присваивается результата навешивания квантора существования по переменным x15 на конъюнкцию утверждений x38. При помощи задачи на доказательство устанавливается, что x40 - следствие утверждений x39. Создается импликация, антецедентами которой служат отличные от x10 утверждения набора x8, а консеквентом - x37. Она обрабатывается операторами "нормтеорема" и "Исключитель", после чего регистрируется в списке вывода.

Варьирование антецедентов

1. Использование дополнительной теоремы для реализации уравнения в антецедентах.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{defgijklpqrstB}(\text{коорд}(B, t) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0 \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число}) \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \text{Прямая}(B) \ \& \ B \parallel \text{прямая}(pq) \ \& \ p - \text{точка} \ \& \ q - \text{точка} \ \& \ r - \text{точка} \ \& \ s - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(t) \ \& \ \neg(p = q) \ \& \ r \in \text{прямая}(pq) \ \& \ s \in \text{прямая}(pq) \ \& \ \text{коорд}(r, t) = (g, j) \ \& \ \text{коорд}(s, t) = (k, l) \ \& \ \neg(r = s) \rightarrow (l - j)e - (g - k)d = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{abcdefhiBK}(\neg(h = i) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = \text{set}_{uv}(f + du + ev = 0 \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число}) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(hi), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \text{Прямая}(B) \ \& \ h - \text{точка} \ \& \ i - \text{точка} \ \& \ B \parallel \text{прямая}(hi) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \rightarrow ae - bd = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ABCDabcdK}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{прямая}(AB) \ \& \ D \in \text{прямая}(AB) \ \& \ \text{коорд}(C, K) = (a, b) \ \& \ \text{коорд}(D, K) = (c, d) \ \& \ \neg(C = D) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xy}((d - b)x + (a - c)y + cb - ad = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$$

Переменной x_8 присваивается вхождение антецедента, представляющего собой равенство некоторого обозначения координат описателю "класс". Переменной x_9 присваивается вхождение обозначения координат, переменной x_{10} - вхождение описателя. В нашем примере x_8 - вхождение антецедента

$$\text{коорд}(\text{прямая}(hi), K) = \text{set}_{xy}(c + ax + by = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число})$$

Переменной x_{12} присваивается заголовок первого операнда вхождения x_9 . В нашем примере - символ "прямая". Справочник поиска теорем "уравмножество" определяет по символу x_{12} указанную выше дополнительную теорему. Оператор "выводпосылки" находит результат x_{15} последовательного применения дополнительной и исходной теорем при унификации антецедента x_8 исходной теоремы с консеквентом дополнительной теоремы. Переменной x_{16} присваивается список антецедентов теоремы x_{15} , переменной x_{17} - ее консеквент. Находится результат x_{18} обработки оператором "нормантецеденты" списка x_{16} относительно параметров утверждения x_{17} . Создается импликация с антецедентами x_{18} и консеквентом x_{17} , которая регистрируется в списке вывода.

Переход к стандартному обозначению варьируемой переменной по ее типу

1. Использование стандартного обозначения для объектов специального типа.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcfghpqBK}(\neg(b = c) \ \& \ \neg(e^2 + g^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (p, q) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(bc), K) = \text{set}_{jk}(\exists_i(j = f + ei \ \& \ k = h + gi \ \& \ i - \text{число})) \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ B \parallel \text{прямая}(bc) \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(B) \rightarrow gp - eq = 0)$$

из теоремы

$$\forall_{defghpqBK}(\neg(e^2 + g^2 = 0) \ \& \ \text{коорд}(d, K) = \text{set}_{jk}(\exists_i(j = f + ei \ \& \ k = h + gi \ \& \ i - \text{число})) \ \& \ \text{коорд}(B, K) = (p, q) \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ \text{Прямая}(d) \ \& \ d \parallel B \ \& \ \text{систкоорд}(K) \ \& \ \text{Вектор}(B) \rightarrow gp - eq = 0)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_A(\text{Прямая}(A) \leftrightarrow \exists_{BC}(B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ A = \text{прямая}(BC)))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. В списке x_8 выбирается утверждение x_{10} длины 2, заголовком которого служит некоторый символ x_{11} , а операндом - переменная x_{12} . В нашем примере x_{10} имеет вид "Прямая(d)". Справочник поиска теорем "обознач" определяет по символу x_{11} указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что дополнительная теорема не имеет антецедентов. Переменной x_{15} присваивается результат переобозначения ее переменных на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{15} имеет вид:

$$\forall_a(\text{Прямая}(a) \leftrightarrow \exists_{bc}(b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ \neg(b = c) \ \& \ a = \text{прямая}(bc)))$$

Переменной x_{16} присваивается вхождение консеквента теоремы x_{15} . Переменной x_{17} присваивается корневой операнд левой части консеквента, переменной

x18 - список конъюнктивных членов утверждения под квантором существования в правой части консеквента. В нашем примере x17 - переменная a . В списке x18 находится равенство x19 с переменной x17 в левой части. Переменной x20 присваивается правая часть равенства x19. В нашем примере - "прямая(bc)". Переменной x21 присваивается объединение списка результатов подстановки выражения x20 вместо переменной x12 в отличные от x10 antecedentes исходной теоремы со списком отличных от x19 утверждений списка x18. Переменной x22 присваивается результат подстановки выражения x20 вместо переменной x12 в утверждение x9. Создается импликация с antecedентами x21 и консеквентом x22. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Варьирование дополнительной теоремы с использованием текущей

1. Преобразование параметрического описания для уравнения множества точек в явное задание этого уравнения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{abcdefghijpqrswx} (\neg(a = p) \ \& \ \neg(q = r) \ \& \ w = h(b + c) + i(d + f) + j(e + q) \ \& \\ & x = h^2 + i^2 + j^2 \ \& \ \text{коорд}(p, s) = (b, d, e) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(qr), s) = \\ & \text{set}_{tuv}(t - \text{число} \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((h, i, j), (c + t, f + u, \\ & g + v))) \ \& \ a \in \text{прямая}(qr) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \\ & i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ p - \text{точка} \ \& \ q - \text{точка} \ \& \ r - \text{точка} \ \& \\ & \text{прямая}(ap) \perp \text{прямая}(qr) \ \& \ \text{прямкоорд}(s) \rightarrow \text{коорд}(\text{прямая}(ap), s) = \\ & \text{set}_{lmn}(l - \text{число} \ \& \ m - \text{число} \ \& \ n - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((l - b, m - d, \\ & n - e), (hw - x(b + c), iw - x(d + f), jw - x(e + g)))) \end{aligned}$$

из теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{abcdefghkqpqrABCDK} (\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \\ & \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (a + x, \\ & b + y, c + z))) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{uvw}(u - \text{число} \ \& \ v - \text{число} \ \& \\ & w - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((p, q, r), (g + u, h + v, k + w))) \ \& \ a - \text{число} \ \& \\ & b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \\ & h - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \ \& \ p - \text{число} \ \& \ q - \text{число} \ \& \ r - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \\ & B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \ \& \\ & \text{прямкоорд}(K) \rightarrow dp + eq + fr = 0 \end{aligned}$$

и дополнительной теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{abcdehijklBCK} (\neg(a = s) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \text{коорд}(s, K) = (b, d, e) \ \& \\ & \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \\ & \text{пропорцнаборы}((j, k, l), (c + x, h + y, i + z))) \ \& \ a \in \text{прямая}(BC) \ \& \ c - \text{число} \ \& \\ & h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \ \& \ l - \text{число} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \\ & s - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \exists_m(\text{коорд}(a, K) = \\ & (jm - c, km - h, lm - i) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(as), K) = \text{set}_{pqr}(p - \text{число} \ \& \ q - \text{число} \ \& \\ & r - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((p - b, q - d, r - e), (jm - b - c, km - d - h, \\ & lm - e - i))) \ \& \ m - \text{число})) \end{aligned}$$

Переменной x8 присваивается список antecedентов, переменной x9 - консеквент, представляющий собой равенство. В списке x8 рассматривается равенство x10 с

обозначением координат в левой части и описателем "класс" в правой. В нашем примере x10 имеет вид:

коорд(прямая(AB), K) = set_{xyz}(x – число & y – число & z – число & пропорцнаборы($(d, e, f), (a + x, b + y, c + z)$))

Переменной x11 присваивается заголовок левой части равенства x10. В нашем примере - символ "коорд". В списке x8 находится отличное от x10 равенство x12, заголовок левой части которой - символ x11, а правая часть - описатель "класс". В нашем примере x12 имеет вид:

коорд(прямая(CD), K) = set_{uvw}(u – число & v – число & w – число & пропорцнаборы($(p, q, r), (g + u, h + v, k + w)$))

Переменной x13 присваивается список переменных равенств x10 и x12. Проверяется, что он содержит все переменные исходной теоремы. Переменной x14 присваивается раздел, к которому относится символ x11. В нашем примере - "системыкоординат". Переменной x15 присваивается раздел, подразделом которого является x14. В нашем примере - "аналгеометрия". В разделе x15 находится дополнительная теорема с характеристикой "координаты". В нашем примере она указана выше. Переменной x21 присваивается консеквент дополнительной теоремы. Проверяется, что он содержит символ "класс" и символ x11. Переменной x22 присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x22 имеет вид:

$\forall_{ijklmnstEFGMRST}(\neg(i = M) \& \neg(R = S) \& \text{коорд}(M, T) = (j, m, n) \& \text{коорд}(\text{прямая}(RS), T) = \text{set}_{NPQ}(N - \text{число} \& P - \text{число} \& Q - \text{число} \& \text{пропорцнаборы}((E, F, G), (l + N, s + P, t + Q))) \& i \in \text{прямая}(RS) \& l - \text{число} \& s - \text{число} \& t - \text{число} \& E - \text{число} \& F - \text{число} \& G - \text{число} \& i - \text{точка} \& M - \text{точка} \& R - \text{точка} \& S - \text{точка} \& \text{Трехмерн}(T) \rightarrow \exists_H(\text{коорд}(i, T) = (EH - l, FH - s, GH - t) \& \text{коорд}(\text{прямая}(iM), T) = \text{set}_{IJL}(I - \text{число} \& J - \text{число} \& L - \text{число} \& \text{пропорцнаборы}((I - j, J - m, L - n), (EH - j - l, FH - m - s, GH - n - t))) \& H - \text{число}))$

Переменной x23 присваивается вхождение консеквента теоремы x22. Проверяется, что этот консеквент - квантор существования. Переменной x24 присваивается его связывающая приставка. Проверяется, что она одноэлементная, и переменной x25 присваивается ее элемент. В нашем примере - переменная H . Переменной x26 присваивается список конъюнктивных членов утверждения под квантором x23. В этом списке находится равенство x27, заголовок правой части которого - символ x11, а заголовок правой части - символ "класс". В списке x26 находится также равенство x28, заголовок левой части которого - символ x11, а заголовок правой - символ "набор". Переменной x29 присваивается список антецедентов теоремы x22. В нем находится равенство x30, заголовок левой части которого - символ x11, а заголовок правой части - символ "класс".

Определяется подстановка S вместо переменных x13, переводящая терм x10 в терм x27, а терм x12 - в терм x30. Переменной x32 присваивается объединение списка результатов применения подстановки S к отличным от x10 антецедентам

исходной теоремы со списком отличных от х30 элементов набора х29. Переменной х33 присваивается результат применения подстановки S к утверждению х9. Решается задача на описание с посылками х32 и единственным условием х33. Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "одз", "упростить", "неизвестные х25". Ответ присваивается переменной х35. В нашем примере он имеет вид " $H = (jE + lE + mF + nG + sF + tG)/(E^2 + F^2 + G^2)$ ". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ", и переменной х36 присваивается список его конъюнктивных членов. Проверяется наличие в этом списке равенства с переменной х25 в левой части. Переменной х38 присваивается объединение списков х32 и х36. Переменной х39 присваивается результат обработки набора х38 оператором "нормантецеденты" относительно параметров равенства х27. Создается импликация с антецедентами х39 и консеквентом х27. Она обрабатывается сначала оператором "нормтеоремы", выполняющим ориентрованное на формульный редактор переобозначение переменных, а затем - оператором "Нормтеорема" с опцией "сокращ". Далее эта теорема регистрируется в списке вывода.

2. Преобразование параметрического описания для уравнения множества точек в явное задание этого уравнения и определение координат точки.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{abcdefghijklmnpqtu} (\neg(a = l) \ \& \ \neg(m = n) \ \& \ t = h(b + c) + i(d + f) + j(e + q) \ \& \\ & u = h^2 + i^2 + j^2 \ \& \ \text{коорд}(l, p) = (b, d, e) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(mn), p) = \\ & \text{set}_{qrs}(q - \text{число} \ \& \ r - \text{число} \ \& \ s - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((h, i, j), (c + q, f + r, \\ & g + s))) \ \& \ a \in \text{прямая}(mn) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \\ & i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ l - \text{точка} \ \& \ m - \text{точка} \ \& \ n - \text{точка} \ \& \\ & \text{прямая}(al) \perp \text{прямая}(mn) \ \& \ \text{прямкоорд}(p) \rightarrow \text{коорд}(a, p) = (-c + ht/u, \\ & -f + it/u, -g + jt/u) \end{aligned}$$

из теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{abcdefghkqpqrABCDK} (\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \\ & \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((d, e, f), (a + x, \\ & b + y, c + z))) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{uvw}(u - \text{число} \ \& \ v - \text{число} \ \& \\ & w - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((p, q, r), (g + u, h + v, k + w))) \ \& \ a - \text{число} \ \& \\ & b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \\ & h - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \ \& \ p - \text{число} \ \& \ q - \text{число} \ \& \ r - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \\ & B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \ \& \\ & \text{прямкоорд}(K) \rightarrow dp + eq + fr = 0 \end{aligned}$$

и дополнительной теоремы

$$\begin{aligned} & \forall_{abcdehijkltsBCK} (\neg(a = s) \ \& \ \neg(B = C) \ \& \ \text{коорд}(s, K) = (b, d, e) \ \& \\ & \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число} \ \& \\ & \text{пропорцнаборы}((j, k, l), (c + x, h + y, i + z))) \ \& \ a \in \text{прямая}(BC) \ \& \ c - \text{число} \ \& \\ & h - \text{число} \ \& \ i - \text{число} \ \& \ j - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \ \& \ l - \text{число} \ \& \ a - \text{точка} \ \& \\ & s - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \exists_m(\text{коорд}(a, K) = \\ & (jm - c, km - h, lm - i) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(as), K) = \text{set}_{pqr}(p - \text{число} \ \& \ q - \text{число} \ \& \\ & r - \text{число} \ \& \ \text{пропорцнаборы}((p - b, q - d, r - e), (jm - b - c, km - d - h, \\ & lm - e - i))) \ \& \ m - \text{число})) \end{aligned}$$

Программа приема, вплоть до создания завершающей импликации, совпадает с программой предыдущего приема. Исходная и дополнительная теоремы те же самые, и значения программных переменных те же, что в предыдущем примере. Отличие состоит в способе формирования завершающей импликации. В данном случае создается импликация с антецедентами $x39$ и консеквентом $x28$. Как и ранее, она сначала обрабатывается оператором "нормтеоремы", а затем - оператором "Нормтеорема" с опцией "сокращ". Результат регистрируется в списке вывода.

3.148 Характеристика "эквуглы"

Характеристикой "эквуглы" снабжаются эквивалентности двух равенств невырожденных числовых атомов.

Логические следствия теоремы

1. Получение импликации для вывода одного равенства двух числовых атомов из другого.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ABC}(\neg(A = B) \& \neg(A = C) \& l(AB) = l(BC) \& A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \rightarrow \angle(BAC) = \angle(ACB))$$

из теоремы

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \Delta(ABC) \rightarrow l(AB) = l(BC) \leftrightarrow \angle(BAC) = \angle(BCA))$$

Переменной $x9$ присваивается список антецедентов. Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения $x9$, к которым добавлены утверждения, необходимые для сопровождения консеквента по о.д.з., а также одна из частей эквивалентности в консеквенте. Консеквентом новой импликации служит другая часть эквивалентности. Импликация обрабатывается операторами "нормтеорема" и "исклант", после чего регистрируется в списке вывода.

3.149 Характеристика "элементарно"

Характеристикой "элементарно" снабжаются кванторные импликации без существенных антецедентов, имеющие элементарный консеквент.

Логические следствия теоремы

1. Варьирование примера с помощью перенесения константных членов в другую часть двуместного отношения.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_c(c - \text{число} \rightarrow c - 1 < c)$$

из теоремы

$$\forall_c(c - \text{число} \rightarrow c < c + 1)$$

Переменной x_8 присваивается консеквента, переменной x_9 - список антецедентов. Проверяется, что x_8 имеет два корневых операнда, и переменной x_{10} присваивается заголовок утверждения x_8 . Если x_8 - равенство, то переменной x_{10} переприсваивается тип значения частей этого равенства. В нашем примере x_{10} - символ "меньше". Справочник "перегруппировка" определяет по x_{10} тройку (A, B, C) , означающую, что возможна перегруппировка A -членов операндов отношения x_{10} из одной части в другую с изменением знака B , причем C - единица операции A . В нашем примере A - символ "плюс", B - символ "минус", C - 0. Переменной x_{13} присваивается входжение корневого операнда утверждения x_8 , имеющего заголовок A . В нашем примере - операнда $c + 1$. Переменной x_{14} присваивается входжение константного операнда входжения x_{13} . Переменной x_{15} присваивается входжение отличного от x_{13} корневого операнда утверждения x_8 . Проверяется, что операнд x_{15} однобуквенный. Переменной x_{16} присваивается результат исключения операнда x_{14} операции x_{13} , переменной x_{17} - результат соединения операций A подтерма x_{15} и подтерма x_{14} , у которого изменен знак B . Выражение x_{17} обрабатывается нормализаторами общей стандартизации относительно посылок x_9 . Переменной x_{18} присваивается результат замены операндов отношения x_8 на выражения x_{16} и x_{17} , с учетом их первоначального размещения. Затем создается импликация с антецедентами x_9 и консеквентом x_{18} , которая регистрируется в списке вывода.

2. Вывод приема усмотрения отрицания равенства в случае небесповторного консеквента, имеющего своим заголовком отрицание.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ a < b \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \neg(a = b))$$

из теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow \neg(a < a))$$

Переменной x_8 присваивается консеквента, переменной x_9 - список антецедентов. Проверяется, что x_8 имеет заголовок "не" и небесповторно. Выбирается параметр x_{10} утверждения x_8 , имеющий в этом утверждении более одного входжения. В нашем примере - параметр a . Выбирается переменная x_{11} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная b . Переменной x_{14} присваивается результат замены второго входжения переменной x_{10} в x_8 на переменную x_{11} . В нашем примере - $\neg(a < b)$. Переменной x_{15} присваивается результат добавления к списку x_9 корневого операнда терма x_{14} , к которому присоединяются все утверждения, необходимые для сопровождения терма x_{14} по о.д.з. Создается импликация с антецедентами x_{15} , консеквентом которой является отрицание равенства выражений x_{10} и x_{11} . Она регистрируется в списке вывода.

3. Усмотрение существования объекта.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\exists_a(\neg(a = \emptyset) \ \& \ a - \text{set})$$

из теоремы

$$\forall_{cd}(d - \text{слово} \rightarrow \neg(\{c; d\} = \emptyset))$$

Переменной x_8 присваивается консеквент. Если x_8 имеет вид отрицания, то переменной x_9 присваивается вхождение утверждения под этим отрицанием, иначе - корневое вхождение утверждения x_8 . Переменной x_{10} присваивается вхождение операнда вхождения x_9 , переменной x_{11} - сам этот операнд. В нашем примере - " $\{c; d\}$ ". Проверяется, что x_{11} - не переменная, и переменной x_{12} присваивается заголовок выражения x_{11} . В нашем примере - символ "перечень". Переменной x_{14} присваивается тип значения выражений с заголовком x_{12} . В нашем примере - символ "множество". Выбирается переменная x_{15} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{16} присваивается результат замены вхождения x_{10} в терм x_8 на переменную x_{15} . В нашем примере x_{16} имеет вид " $\neg(a = \emptyset)$ ". Проверяется, что утверждение x_{16} неповторно. Создается импликация, антецеденты которой те же, что у исходной теоремы, а консеквентом служит результат навешивания квантора существования по переменной x_{15} на конъюнкцию утверждений " $x_{14}(x_{15})$ " и x_{16} . Эта импликация обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода с характеристикой "нормсуществует".

4. Вывод теоремы для параметризованного подбора значения неизвестной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(\exists_c(a = \{c\}) \rightarrow \neg(a = \emptyset) \ \& \ a - \text{set})$$

из теоремы

$$\forall_c(\neg(\{c\} = \emptyset))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - вхождение консеквента. Если консеквент имеет вид отрицания, то переменной x_{10} присваивается вхождение операнда вхождения x_9 , иначе - само вхождение x_9 . Переменной x_{11} присваивается список вхождений операндов вхождения x_{10} . В этом списке выбирается элемент x_{13} . В нашем примере - вхождение выражения " $\{c\}$ ". Проверяется, что выражение x_{13} неоднобуквенное, а прочие элементы списка x_{11} - вхождения однобуквенных термов. Выбирается переменная x_{14} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{15} присваивается результат замены в подтерме x_9 вхождения x_{13} на переменную x_{14} . В нашем примере - " $\neg(a = \emptyset)$ ". Проверяется, что утверждение x_{15} неповторно. Переменной x_{17} присваивается список параметров подтерма x_{13} , имеющих единственное вхождение в консеквенте теоремы. В нашем примере он состоит из единственной переменной c . Проверяется, что список x_{17} непуст. Список x_8 разбивается на подсписок x_{18} утверждений, содержащих переменную набора x_{17} , и подсписок x_{19} остальных утверждений. Если заголовок утверждения x_{15} - название типа объектов, то проверяется, что в наборе x_{18} нет утверждения с таким заголовком. Переменной x_{20} присваивается результат добавления к списку x_{19} квантора существования по переменным x_{17} , навешенного на конъюнкцию утверждений x_{18} и утверждения "равно($x_{14} \ x_{16}$)". Если

заголовок утверждения x_{15} не является названием типа объектов, то определяется тип T значения подтерма x_{13} . В нашем примере - "множество". Затем переменной x_{15} переписывается конъюнкция утверждения x_{15} и утверждения " $T(x_{14})$ ". В нашем примере x_{15} приобретает вид " $\neg(a = \emptyset) \ \& \ a - \text{set}$ ". Проверяется, что все параметры утверждений набора x_{20} встречаются в списке параметров утверждения x_{15} . Затем создается импликация с антецедентами x_{20} и консеквентом x_{15} . Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой " $\text{смзнач}(x_{14})$ ".

Обобщение теоремы

1. Обобщение по транзитивности простой импликации, используемой в проверочном операторе (развязка операндов).

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \ \& \ a - \text{set} \ \& \ b \subseteq a \rightarrow b \cap c \subseteq a)$$

из теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{set} \ \& \ c - \text{set} \rightarrow b \cap c \subseteq b)$$

Переменной x_8 присваивается консеквент, переменной x_9 - список антецедентов. Если заголовок утверждения x_8 - символ "не", то переменной x_{10} присваивается заголовок корневого операнда терма x_8 , иначе - заголовок самого этого терма. В нашем примере - символ "содержится". При помощи справочника "транзитивно" устанавливается, что x_{10} - транзитивное двуместно отношение. Переменной x_{11} присваивается вхождение символа x_{10} в терм x_8 , переменной x_{12} - список операндов вхождения x_{11} . Проверяется, что эти операнды различны, но имеют общий параметр. Выбирается переменная x_{13} , не входящая в исходную теорему. В нашем примере - переменная a . Переменной x_{14} присваивается тип значения первого операнда отношения x_{10} . В нашем примере - символ "множество". Далее рассматриваются два случая:

- (a) Утверждение x_8 не имеет заголовка "не". Поочередно рассматриваются два подслучая. В первом из них переменной x_{15} присваивается утверждение " $x_{10}(x_{13} \ P)$ ", а переменной x_{16} - утверждение " $x_{10}(x_{13} \ Q)$ ". Во втором случае переменной x_{15} присваивается утверждение " $x_{10}(Q \ x_{13})$ ", а переменной x_{16} - утверждение " $x_{10}(P \ x_{13})$ ". Здесь P - первый элемент списка x_{12} , Q - второй элемент этого списка. В нашем примере рассматривается второй подслучай. В каждом подслучае рассматриваются еще два подслучая. В первом из них переменной x_{17} присваивается утверждение x_{15} , а переменной x_{18} - утверждение x_{16} . Во втором подслучае переменной x_{17} присваивается отрицание утверждения x_{16} , а переменной x_{18} - отрицание утверждения x_{15} . В нашем примере имеет место первый из этих подслучаев. Проверяется, что параметры терма x_{17} включаются в список параметров терма x_{18} . Затем создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x_9 и утверждения " $x_{14}(x_{13})$ ", x_{17} . Консеквентом служит утверждение x_{18} . Эта импликация регистрируется в списке вывода.

(b) Утверждение x_8 имеет заголовок "не". Переменной x_{15} присваивается утверждение " $x_{10}(x_{13} Q)$ ", переменной x_{16} - утверждение " $\text{не}(x_{10}(P x_{13}))$ ", где P, Q - элементы списка x_{12} . Создается импликация, антецедентами которой служат утверждения списка x_9 и утверждения " $x_{14}(x_{13})$ ", x_{15} . Консеквентом служит утверждение x_{16} . Эта импликация регистрируется в списке вывода.

2. Исключение операции типа "отрицание", если она встречается над всеми входящими заданной переменной.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ce}(c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \neg(e \in (e, c]))$$

из теоремы

$$\forall_{ce}(c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow \neg(-e \in (-e, c]))$$

Переменной x_8 присваивается консеквент. В нем рассматривается входящее x_9 , имеющее единственный операнд - некоторую переменную x_{10} . В нашем примере x_9 - входящее подтерма " $-e$ ". Переменной x_{11} присваивается символ по входящему x_9 . В нашем примере - "минус". Справочник "отрицание" устанавливает, что двойное применение операции x_{11} восстанавливает исходной значение. Проверяется, что все входящие переменной x_{10} встречаются в консеквенте и антецедентах только под операцией x_{11} . Исключение могут составлять антецеденты, имеющие единственную переменную x_{10} , входящую в них однократно. Переменной x_{13} присваивается список результатов подстановки в антецеденты исходной теоремы выражения " $x_{11}(x_{10})$ " вместо переменной x_{10} . Переменной x_{14} присваивается результат такой же подстановки в утверждение x_8 . Создается импликация с антецедентами x_{13} и консеквентом x_{14} . Она обрабатывается операторами "полныепосылки" и "нормтеорема", после чего регистрируется в списке вывода.

Использование теоремы для варьирования дополнительной теоремы

1. Попытка использования простой импликации без существенных посылок для реализации конъюнктивного члена заменяемой части эквивалентности типа "соединение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow |a| \leq a \leftrightarrow 0 \leq a)$$

из теоремы

$$\forall_c(c - \text{число} \rightarrow c \leq |c|)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a \leq b \ \& \ b \leq a \leftrightarrow a = b)$$

Переменной x_8 присваивается консеквент, переменной x_9 - список антецедентов. Переменной x_{10} присваивается заголовок консеквента. В нашем примере

- символ "меньшеилиравно". Проверяется, что символ x_{10} отличен от "не". Справочник поиска теорем "соединение" определяет по символу x_{10} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{13} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{13} совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x_{15} присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте теоремы x_{13} , которая имеет заголовок "и", переменной x_{16} - вхождение другой части. Проверяется, что x_{15} имеет ровно два операнда, и переменной x_{17} присваивается вхождение того операнда вхождения x_{15} , который имеет заголовок x_{10} . В нашем примере - вхождение утверждения " $a \leq b$ ". Переменной x_{18} присваивается вхождение другого операнда вхождения x_{15} . Переменной x_{19} присваивается подтерм x_{17} , переменной x_{20} - объединение корневых связывающих приставок исходной теоремы и теоремы x_{13} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{20} , унифицирующая термы x_8 и x_{19} . Переменной x_{22} присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и теоремы x_{13} . Переменной x_{23} присваивается результат применения подстановки S к подтерму x_{18} . В нашем примере - " $|a| \leq a$ ". Проверяется, что при помощи задачи на доказательство не удастся усмотреть утверждение x_{23} из посылок x_{22} . Переменной x_{25} присваивается результат применения подстановки S к подтерму x_{16} . В нашем примере - " $a = |a|$ ". Создается импликация с антецедентами x_{22} и консеквентом "эквивалентно(x_{23} x_{25})". Она обрабатывается оператором "Нормтеорема" с опцией "направл(второйтерм)", после чего регистрируется в списке вывода.

2. Попытка усиления простой импликации без существенных посылок с помощью эквивалентности типа "соединение".

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_x (x - \text{число} \rightarrow |\sin x| \leq 1)$$

из теоремы

$$\forall_x (x - \text{число} \rightarrow \sin x \leq 1)$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab} (a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow a \leq b \ \& \ -a \leq b \leftrightarrow |a| \leq b)$$

Программа приема почти полностью совпадает с программой предыдущего приема. Для удобства чтения повторим ее.

Переменной x_8 присваивается консеквент, переменной x_9 - список антецедентов. Переменной x_{10} присваивается заголовок консеквента. В нашем примере - символ "меньшеилиравно". Проверяется, что символ x_{10} отличен от "не". Справочник поиска теорем "соединение" определяет по символу x_{10} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{13} присваивается результат переобозначения переменных дополнительной теоремы на переменные, не входящие в исходную теорему. В нашем примере x_{13} совпадает с дополнительной теоремой. Переменной x_{15} присваивается вхождение той части эквивалентности в консеквенте теоремы x_{13} , которая имеет заголовок "и", переменной x_{16}

- вхождение другой части. Проверяется, что x_{15} имеет ровно два операнда, и переменной x_{17} присваивается вхождение того операнда вхождения x_{15} , который имеет заголовок x_{10} . В нашем примере - вхождение утверждения " $a \leq b$ ". Переменной x_{18} присваивается вхождение другого операнда вхождения x_{15} . Переменной x_{19} присваивается подтерм x_{17} , переменной x_{20} - объединение корневых связывающих приставок исходной теоремы и теоремы x_{13} . Определяется подстановка S вместо переменных x_{20} , унифицирующая термы x_8 и x_{19} . Переменной x_{22} присваивается список результатов применения подстановки S к антецедентам исходной теоремы и теоремы x_{13} . Переменной x_{23} присваивается результат применения подстановки S к подтерму x_{18} . В нашем примере - " $-\sin x \leq 1$ ".

Дальше начинаются отличия. Проверяется, что при помощи задачи на доказательство удастся усмотреть утверждение x_{23} из посылок x_{22} . Переменной x_{25} присваивается результат применения подстановки S к подтерму x_{16} . В нашем примере - " $|\sin x| \leq 1$ ". Создается импликация с антецедентами x_{22} и консеквентом x_{25} . Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому разрешается использовать для упрощений уже имеющиеся в списке вывода теоремы. Результат регистрируется в списке вывода.

Замена переменных в теореме

1. Попытка использовать параметрическое описание для атомарных подвыражений с заданным заголовком.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \rightarrow \text{однонаправлены}(a, a))$$

из теоремы

$$\forall_{CD}(C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \rightarrow \text{однонаправлены}(\text{вектор}(CD), \text{вектор}(CD)))$$

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(\text{Вектор}(a) \leftrightarrow \exists_{AB}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ a = \text{вектор}(AB)))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - консеквент. Внутри терма x_9 выбирается вхождение x_{10} неоднобуквенного атомарного подтерма x_{11} . В нашем примере - " $\text{вектор}(CD)$ ". Переменной x_{12} присваивается заголовок выражения x_{11} , переменной x_{14} - тип его значения. В нашем примере x_{14} - символ "Вектор". Переменной x_{15} присваивается список всех атомарных неоднобуквенных подвыражений утверждения x_9 , имеющих тип x_{14} . Проверяется, что он непуст. В нашем примере этот список состоит из единственного выражения " $\text{вектор}(CD)$ ". Переменной x_{16} присваивается список параметров выражений x_{15} . В нашем примере - C, D . Проверяется, что эти параметры встречаются в утверждении x_9 только внутри вхождений выражений набора x_{15} .

Справочник поиска теорем "парамописание" определяет по символу x_{14} указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{19} присваивается вхождение эквивалентности в ее консеквенте. Проверяется, что заголовком левой части

данной эквивалентности служит символ x_{14} , а заголовком правой - квантор существования. Переменной x_{20} присваивается вхождение этого квантора, переменной x_{21} - список конъюнктивных членов подкванторного утверждения. Переменной x_{22} присваивается переменная - корневой операнд левой части эквивалентности. В нашем примере - переменная a . В списке x_{21} находится равенство x_{23} с переменной x_{22} в левой части и заголовком x_{12} правой части. Переменной x_{24} присваивается список не входящих в исходную теорему переменных, длина которого равна длине списка x_{15} . В нашем примере - список a . Переменной x_{27} присваивается результат замены в утверждении x_{10} подтермов набора x_{15} на соответствующие переменные x_{24} . В нашем примере x_{27} имеет вид "однонаправлены(a, a)". Переменной x_{28} присваивается список параметров терма x_{27} . Переменной x_{29} присваивается объединение списка утверждений набора x_8 , параметры которых включаются в список x_{28} , со списком утверждений вида " $x_{14}(X)$ " для всевозможных переменных X набора x_{24} . Переменной x_{30} присваивается объединение списка утверждений набора x_8 , параметры которых не включаются в список x_{28} , со списком равенств выражений набора x_{15} соответствующим переменным набора x_{24} . Переменной x_{31} присваивается список параметров утверждений x_{30} , не входящих в список x_{28} . Решается задача на описание с посылками x_{29} и условиями x_{30} . Цели задачи - "полный", "явное", "прямойответ", "неизвестные x_{31} ", "параметры x_{31} ", "исключ". Ответ задачи присваивается переменной x_{33} . В нашем примере он имеет вид " D - точка". Проверяется, что ответ отличен от символа "отказ". Переменной x_{34} присваивается объединение списка x_{29} со списком конъюнктивных членов утверждения x_{33} . Создается импликация с антецедентами x_{34} и консеквентом x_{27} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Индуктивное обобщение теоремы

1. Обобщение на конечные семейства транзитивного отношения с двумя ассоциативно-коммутативными двуместными операциями.

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_b(\text{конечное}(b) \ \& \ \text{конечные}(b) \ \& \ \text{классмножеств}(b) \rightarrow \text{card}(\bigcup_{a,a \in b} a) \leq \sum_{a,a \in b} \text{card}(a))$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a\text{-set} \ \& \ b\text{-set} \ \& \ \text{конечное}(a) \ \& \ \text{конечное}(b) \rightarrow \text{card}(a \cup b) \leq \text{card}(a) + \text{card}(b))$$

Переменной x_8 присваивается список антецедентов, переменной x_9 - вхождение консеквента. Проверяется, что число операндов вхождения x_9 равно 2. Переменной x_{10} присваивается символ по вхождению x_9 . В нашем примере - "меньшеилиравно". При помощи справочника усматривается, что x_{10} - символ транзитивного отношения. Переменной x_{11} присваивается вхождение одного операнда вхождения x_9 , переменной x_{12} - вхождение другого операнда. В нашем примере x_{11} - вхождение терма " $\text{card}(a \cup b)$ ", x_{12} - вхождение терма " $\text{card}(a) + \text{card}(b)$ ". Переменной x_{13} присваивается подтерм x_{11} . В нем выбирается вхождение x_{14} неоднобуквенного подтерма, имеющего ровно два корневых операнда. В нашем примере - подтерма " $a \cup b$ ". Переменной x_{15} присваивается символ по вхождению x_{14} . В нашем примере - "объединение". Проверяется,

что символ x_{15} ассоциативный и коммутативный. Проверяется, что первым операндом вхождения x_{14} служит некоторая переменная x_{16} , вторым - другая переменная x_{17} . В нашем примере - переменные a, b . Проверяется, что число операндов вхождения x_{12} равно 2, и переменной x_{18} присваивается символ по вхождению x_{12} . В нашем примере - "плюс". Проверяется, что символ x_{18} ассоциативный и коммутативный. Переменной x_{19} присваивается результат замены вхождения x_{14} в терм x_{13} на переменную x_{16} . В нашем примере - " $\text{card}(a)$ ". Переменной x_{20} присваивается результат замены вхождения x_{14} в терм x_{13} на переменную x_{17} . В нашем примере - " $\text{card}(b)$ ". Проверяется, что x_{19}, x_{20} содержатся в списке операндов вхождения x_{12} . Переменной x_{21} присваивается список содержащих переменную x_{16} антецедентов набора x_8 , переменной x_{22} - список содержащих переменную x_{17} антецедентов набора x_8 . Переменной x_{23} присваивается конъюнкция утверждений x_{21} , переменной x_{24} - конъюнкция утверждений x_{22} . Переменной x_{25} присваивается результат подстановки переменной x_{17} вместо переменной x_{16} в терм x_{23} . Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" термов x_{25} и x_{24} совпадают.

Переменной x_{26} присваивается одноэлементный список, образованный утверждением " $x_{10}(a, b)$ ", где a, b - переменные ЛОСа с номерами 1 и 2. То обстоятельство, что они совпадают с переменными исходной теоремы нашего примера, здесь несущественно. Переменной x_{27} присваивается утверждение " $x_{10}(x_{18}(a, c), x_{18}(b, c))$ ". К списку x_{26} добавляются утверждения, необходимые для сопровождения по о.д.з. элемента набора x_{26} и утверждения x_{27} . При помощи задачи на доказательство проверяется, что x_{27} - следствие утверждений x_{26} . В нашем примере x_{26} состоит из утверждений " $a \leq b$ ", " c - число", " b - число", " a - число"; x_{27} - утверждение " $a + c \leq b + c$ ". При помощи справочника "суммавсех" устанавливается обобщение x_{29} ассоциативно-коммутативной операции x_{15} на наборы произвольной длины и обобщение x_{30} ассоциативно-коммутативной операции x_{18} на наборы произвольной длины. В нашем примере x_{29} - "объединениевсех", x_{30} - "суммавсех". Переменной x_{31} присваивается объединение списка не входящих в x_{21} и x_{22} утверждений набора x_8 с утверждениями "множество(x_{17})", "конечное(x_{17})" и всевозможными утверждениями вида "длялюбого(x_{16} если принадлежит(x_{16} x_{17})то A)", где A - элемент списка x_{21} . Переменной x_{32} присваивается результат замены вхождения x_{14} в терм x_{13} на терм " $x_{29}(\text{отображение}(x_{16}$ принадлежит(x_{16} x_{17}) $x_{16}))$ ". Переменной x_{33} присваивается терм " $x_{30}(\text{отображение}(x_{16}$ принадлежит(x_{16} x_{17}) $x_{19}))$ ". Переменной x_{34} присваивается утверждение " $x_{10}(x_{32} x_{33})$ ", если x_{11} - первый операнд вхождения x_9 , иначе - утверждение " $x_{19}(x_{33} x_{32})$ ". Переменной x_{35} присваивается результат обработки списка x_{31} оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{34} . Затем создается импликация с антецедентами x_{35} и консеквентом x_{34} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода.

Глава 4

Приемы вывода теорем, относящиеся к справочнику "теоремы"

Как уже говорилось в 8 томе монографии, база теорем содержит, помимо теорем, также так называемые протоколы. В отличие от теоремы, протокол не является утверждением логического языка, а лишь некоторым термом технического характера, фиксирующим какие-либо общие свойства предметной области или решения, определяющие способы ее алгоритмизации. В ряде случаев протокол представляет собой попросту установку на специальный цикл логического вывода. Протокол хранится в базе теорем в том же формате, что и теорема: в первом окне располагается терм, задающий протокол, во втором окне - список характеристик. Наличие символа "протокол" в этом списке указывает на протокол, отсутствие его - на теорему.

Типы протоколов были перечислены в 8 томе монографии. Ввиду того, что система постоянно развивается, этот список может оказаться неполным.

Как и теорема, протокол может оказаться "стартовой теоремой" ячейки логического вывода. В обоих случаях запуск вывода теорем в этой ячейке осуществляется одной и той же процедурой "прогрвывод". Однако, для обработки протокола данная процедура использует не справочник "прогрвывод", а справочник "теоремы". Обращение к справочнику предпринимается на логическом символе, являющемся заголовком протокола. Входные данные такого обращения суть: x_1 - текущая четверка списка вывода, обрабатываемая оператором "прогрвывод"; x_2 - терм, задающий протокол; x_3 - характеристики протокола (среди них - символ "протокол"); x_4 - блок вывода; x_5 - пара (накопитель четверок списка вывода - индикатор изменений); x_6 - уровень сканирования. Справочник предпринимает вывод теорем, инициируемый протоколом x_2 , и регистрирует результаты в накопителе x_5 . Если цикл вывода должен быть прерван, то справочник выдает значение R , равное 2. Если необходим откат к началу цикла сканирования списка вывода и понижение уровня сканирования до нуля, то $R := 3$. Если необходим немедленный переход к анализу следующей четверки списка вывода, то $R := 4$.

Заметим, что в одном и том же цикле вывода может происходить как рассмотрение теорем, так и рассмотрение протоколов. Вне зависимости от того, являлась ли стартовой точкой теорема либо протокол, список вывода обрабатывается по одной и той же схеме; на каждом шаге процедура "прогрвывод" адресует обработку либо справочнику "прогрвывод", либо справочнику "теоремы". В процессе вывода может предприниматься регистрация в списке вывода новых протоколов. При рассмотрении приемов справочника "прогрвывод" мы сталкивались с ситуацией, когда протокол

создавался по теореме. Обычно в этом случае теорема лишь подсказывала некоторый просмотр теорем раздела, приводящий к созданию протокола.

Кроме протоколов и "обычных" теорем, в базе теорем встречаются также квазипротоколы. По внешнему виду они похожи на теоремы - прорисовываются в обычной формульной записи и не имеют характеристики "протокол". Вместо этого квазипротоколы сопровождаются характеристикой "теоремаприема" и рядом других характеристик. Обычно квазипротокол служит источником какого-либо приема, выполняющего вспомогательную работу. Например, ввод в задаче вспомогательных обозначений либо обращение к вспомогательной задаче, и т.п. Для таких действий, строго говоря, специальной теоремы не требуется. Вместе с тем, такое же использование формульного редактора, как если бы вводилась теорема, упрощает описание ситуации, в которой эти действия нужны.

Перейдем к рассмотрению приемов справочника "теоремы". Выйти на эти приемы можно через пункт "База теорем" - "Программирующий вывод" - "Приемы вывода теорем (справочник ТЕОРЕМЫ)" оглавления программ.

4.1 Протокол "раздел"

Протокол "раздел(x1)" инициирует предварительное рассмотрение теорем раздела x1 для общей алгоритмизации этого раздела.

Усмотрение унифицируемого аргумента группы одноместных операций

В качестве примера рассмотрим создание протокола "унификация(секанс косеканс синус косинус тангенс котангенс тригаргумент)" из протокола "раздел(элементарнаяалгебра)".

Напомним, что протокол "унификация(x1 x2)" перечисляет в списке x1 такие одноместные операции, для которых при решении задач на описание целесообразно сведение их к общему аргументу (унификация аргументов). x2 - название идентифицирующего термина ГЕНОЛОГа, перечисляющего аргументы операций списка x1 в текущем терме. Характеристика "символ(A)", если она есть, указывает одноместную операцию A, допускающую вынесение из-под операций списка x1.

Переходим к описанию приема. Переменной x7 присваивается название раздела из протокола. В нашем примере - "элементарнаяалгебра". Вводится пустой накопитель x9 групп одноместных операций, для которых целесообразна унификация аргументов.

Начинается просмотр теорем x12 раздела x7, представляющих собой кванторные тождества с характеристикой "нормализация(...)" либо "свертка(...)". Переменной x15 присваивается консеквент теоремы x12. Проверяется, что он элементарный, не содержит символа "вариант" и не имеет существенных антецедентов. Внутри x15 выбирается вхождение x16 неоднобуквенного подтерма с одноместной корневой операцией x17. Переменной x18 присваивается список отличных от x17 одноместных операций, для которых в x15 имеется вхождение с тем же аргументом, что у x16. Проверяется, что список x18 непуст, и переменной x19 присваивается результат добавления символа x17 к списку x18. Из списка x19 удаляются символы типа "отрицание" и символы, определяемые через условные выражения. Проверяется, что после

этого список x_{19} имеет не менее двух элементов. Затем просматриваются наборы списка x_9 , пересекающиеся со списком x_{19} . Они удаляются из списка x_9 , а вместо них в x_9 заносится объединение их всех со списком x_{19} .

По окончании просмотра теорем x_{12} все переменные начиная с x_{10} снова оказываются не определены. В нашем примере x_9 оказывается состоящим из четырех групп "косеканс, синус, секанс, косинус, котангенс, тангенс"; "арккосинус, арксинус"; "арккотангенс, арктангенс"; "гипкосинус, гипсинус". Проверяется, что список x_9 непуст. Переменной x_{10} присваивается набор, длина которого равна длине списка x_9 , причем на каждой позиции набора x_{10} располагается набор из столько же символов "пустое слово", какова длина соответствующего набора списка x_9 . Этот набор представляет собой накопитель наборов одноместных операций, допускающих "вынесение" из-под соответствующих операций наборов списка x_9 .

Для заполнения накопителя x_{10} предпринимается повторный просмотр теорем раздела x_7 . Переменной x_{13} присваивается текущая теорема, представляющая собой кванторную импликацию с характеристикой "сокращ(...)". Переменной x_{18} присваивается заменяемое выражение теоремы x_{13} , переменной x_{19} - его заголовок. В списке x_9 просматриваются наборы x_{21} , некоторый разряд x_{22} которых равен x_{19} . Переменной x_{23} присваивается входжение первого операнда терма x_{18} . Проверяется, что единственным операндом входжения x_{23} служит некоторая переменная. Переменной x_{24} присваивается символ по входжению x_{23} . В накопителе x_{10} находится входжение, соответствующее входжению x_{22} в набор x_{21} списка x_9 . К списку по этому входжению добавляется (с блокировкой повторений) символ x_{24} .

По завершении цикла просмотра теорем все переменные начиная с x_{11} снова оказываются не определены. В нашем примере x_{10} оказывается состоящим из четырех списков. Первый из них - "минус", "минус, модуль", "минус", "минус", "минус, модуль", "минус, модуль". Второй список - "минус", "минус, модуль". Третий список - "пустое слово", "минус". Четвертый - "пустое слово", "пустое слово". Выбирается позиция x_{11} списка x_9 и соответствующая ей позиция списка x_{10} . В нашем примере x_{11} - начало списка x_9 . Переменной x_{13} присваивается набор по входжению x_{12} , переменной x_{14} - пересечение всех списков данного набора. В нашем примере оно состоит из единственного символа "минус". Переменной x_{15} присваивается список по входжению x_{11} . В нашем примере - "косеканс, синус, секанс, косинус, котангенс, тангенс". Символы набора x_{15} переупорядочиваются в лексикографическом порядке, после чего x_{15} приобретает вид: "секанс, косеканс, синус, косинус, тангенс, котангенс". Переменной x_{16} присваивается терм "Название(тригаргумент x_{15})". Если уже имеется идентифицирующий терм ГЕНОЛОГа, усматривающий операнды операций набора x_{15} , то его название переписывается переменной x_{16} . В нашем примере x_{16} становится логическим символом "тригаргумент". Переменной x_{17} присваивается протокол "унификация(x_{15} x_{16})", который регистрируется в списке вывода с характеристиками "протокол" и "символ(S)", где S - всевозможные элементы списка x_{14} .

4.2 Протокол "логсимвол"

Протокол "логсимвол(x_1)" инициирует рассмотрение всех связанных с символом x_1 теорем для общей алгоритмизации этого символа.

Создание нормализатора общей стандартизации

В качестве примера рассмотрим создание протокола "нормализация(умножение нормумножение)" по протоколу "логсимвол(умножение)". Создаваемый протокол послужит отправной точкой для создания спецификатором соответствующего нормализатора общей стандартизации.

Переменной x_7 присваивается символ - корневой операнд протокола. В нашем примере x_7 - символ "умножение". Проверяется, что x_7 не является предикатным символом. Проверяется, что арность символа x_7 не равна 0, причем x_7 отлично от символа "значение". Переменной x_8 присваивается название раздела, к которому относится символ x_7 . В нашем примере - "элементарная алгебра". Просматриваются теоремы x_{15} раздела x_8 , имеющие характеристику "нормализация(N)" либо "систкоорд". Если обнаруживается, что теорема - равенство с заголовком x_7 заменяемой части, то начинается создание протокола. Прежде всего, переменной x_{17} присваивается терм "Название(норм x_7)". Если уже имеется нормализатор общей стандартизации выражений с заголовком x_7 , то переменной x_{17} переприсваивается его название. В нашем примере x_{17} становится символом "нормумножение". Создается протокол "нормализация($x_7 x_{17}$)", который регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "протокол".

Создание проверочного оператора - общий случай

В качестве примера рассмотрим создание протокола "легковидеть(меньшеилиравно($x_1 x_2$) усменьшеилиравно)" по протоколу "логсимвол(меньшеилиравно)". Создаваемый протокол послужит отправной точкой для создания спецификатором соответствующего проверочного оператора.

Переменной x_7 присваивается символ - корневой операнд протокола. В нашем примере x_7 - символ "меньшеилиравно". Проверяется, что x_7 является предикатным символом. Проверяется, что арность символа x_7 не равна 0. Переменной x_9 присваивается название раздела, к которому относится символ x_7 . В нашем примере - "элементарная алгебра". Вводится накопитель x_{11} , представляющий собой набор длины 2. Вначале оба его элемента - символы "пустое слово".

Просматриваются теоремы x_{14} раздела x_9 , представляющие собой кванторные импликации. Переменной x_{15} присваивается список antecedентов теоремы x_{14} . Если в списке x_{15} имеется утверждение с заголовком x_7 , то в первый набор накопителя x_{11} добавляется 1 (повторения блокируются). Если в списке x_{15} имеется утверждение с заголовком "не" и заголовком x_7 корневой операнда, то 1 заносится во второй набор накопителя x_{11} .

Если импликация простая, причем ее консеквент имеет заголовок x_7 , то в первый набор накопителя x_{11} заносится 2. Если консеквент имеет заголовок "не", а его корневой операнд - заголовок x_7 , то 2 заносится во второй набор накопителя x_{11} .

По окончании просмотра теорем все переменные начиная с x_{12} снова оказываются не определены. В нашем примере первый элемент накопителя x_{11} состоит из 1 и 2, а второй - только из 2. Выбирается позиция x_{12} пары x_{11} , на которой расположен набор, содержащий 1 и 2. Переменной x_{13} присваивается символьное число, равное арности символа x_7 . В нашем примере - 2. Переменной x_{14} присваивается результат навешивания отношения x_7 на список переменных, начинающийся с первой переменной ЛОСа и заканчивающийся переменной с номером x_{13} . В нашем примере x_{14} имеет

вид "меньшеилиравно($x_1 x_2$)". Если x_{12} - второй элемент пары x_{11} , то x_{14} заменяется на свое отрицание. Переменной x_{15} присваивается терм "Название(легковидеть $x_7 n$)", где n равно 1, если x_{14} имеет заголовок "не", и равно 0 в противном случае. Если уже имелось название для проверочного оператора, связанного с шаблоном x_{14} , то x_{16} переписывается это название. В нашем примере x_{16} становится символом "усменьшеилиравно". Далее создается протокол "легковидеть($x_{14} x_{15}$)", регистрируемый в списке вывода с единственной характеристикой "протокол".

Создание проверочного оператора - случай отрицания равенства

В качестве примера рассмотрим создание протокола "легковидеть(не(равно(x_1 пусто))уснепусто)" по протоколу "логсимвол(пусто)".

Переменной x_7 присваивается символ - корневой операнд протокола. В нашем примере x_7 - символ "пусто". Проверяется, что x_7 не является предикатным символом, причем арность его равна 0. Переменной x_8 присваивается название раздела, к которому относится символ x_7 . В нашем примере - "теориямножеств". Вводится пустой накопитель x_{10} .

Предпринимается просмотр теорем x_{13} раздела x_8 . Если среди антецедентов теоремы x_{13} имеется отрицание равенства с символом x_7 в одной из своих частей, то в накопитель x_{10} заносится 1 (повторения блокируются). Если консеквент теоремы x_{13} - отрицание равенства с символом x_7 в одной из частей, то в накопитель x_{10} заносится 2.

По завершении просмотра теорем x_{13} все переменные начиная с x_{13} снова оказываются не определены. Проверяется, что в накопителе x_{10} есть и 1, и 2. Переменной x_{13} присваивается утверждение "не(равно($a x_7$))", где a - переменная ЛОСа с номером 1. Переменной x_{14} присваивается терм "Название(легковидеть $x_7 2$)". Если уже имеется проверочный оператор для усмотрения истинности утверждений вида x_{13} , то переменной x_{14} переписывается его название. В нашем примере - символ "уснепусто". Далее создается протокол "легковидеть($x_{13} x_{14}$)", который регистрируется в списке вывода с характеристикой "протокол".

Создание нормализатора сокращенной перезаписи

В качестве примера рассмотрим создание протокола "нормупростить(дробь упрощдробь)" по протоколу "логсимвол(дробь)". Создаваемый протокол послужит отправной точкой для создания спецификатором соответствующего нормализатора сокращенной перезаписи.

Переменной x_7 присваивается символ - корневой операнд протокола. В нашем примере x_7 - символ "дробь". Проверяется, что x_7 не является предикатным символом. Проверяется, что арность символа x_7 не равна 0, причем x_7 отлично от символа "значение". Переменной x_8 присваивается название раздела, к которому относится символ x_7 . В нашем примере - "элементарнаяалгебра". Просматриваются теоремы x_{15} раздела x_8 , имеющие характеристику "свертка(N)". Переменной x_{17} присваивается заменяемая часть консеквента теоремы x_{15} . Проверяется, что некоторые ее параметры имеют в ней более одного вхождения. Переменной x_{18} присваивается терм "Название(нормупростить x_7)". Если уже имеется нормализатор сокращенной перезаписи выражений с заголовком x_7 , то переменной x_{18} переписывается его название. В нашем примере x_{18} становится символом "упрощдробь". Создается протокол

"нормупростить(x7 x18)", который регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "протокол".

Создание приема ввода вспомогательной неизвестной для получения уравнения с одной неизвестной, входящей более одного раза

В качестве примера рассмотрим создание квазипротокола

$\forall_{abcd}(\angle(abc) = d \ \& \ d - \text{число})$

по протоколу "логсимвол(угол)".

Создаваемый квазипротокол имеет характеристики "вспомнеизвестная(1)" и "теоремаприема". По нему будет создаваться прием решателя, вводящий вспомогательную неизвестную для угла, если этот угол встречается в текущей посылке задачи на исследование более одного раза, причем вне вхождений данного угла в посылку неизвестные задачи отсутствуют.

Переменной x7 присваивается символ - корневой операнд протокола. В нашем примере x7 - символ "угол". Проверяется, что x7 не является предикатным символом. Проверяется, что выражения с заголовком x7 имеют численное значение и что арность x9 символа x7 больше нуля. В нашем примере x9 равно 3. Переменной x10 присваивается набор последовательных переменных ЛОСа, начиная с первой и кончая имеющей номер x9. Переменной x11 присваивается выражение, получаемое навешиванием операции x7 на набор x10. В нашем примере - " $\angle(abc)$ ". Проверяется, что x11 - числовой атом. Переменной x14 присваивается переменная с номером x9+1. В нашем примере - переменная d . Переменной x15 присваивается квазипротокол "длялюбого(x10 x14 и(равно(x11 x14)число(x14)))". Он регистрируется в списке вывода с характеристиками "вспомнеизвестная(1)" и "теоремаприема".

Создание приема ввода вспомогательной неизвестной для получения системы двух уравнений с двумя неизвестными

В качестве примера рассмотрим создание квазипротокола

$\forall_{abcd}(\angle(abc) = d \ \& \ d - \text{число})$

по протоколу "логсимвол(угол)".

Создаваемый квазипротокол имеет характеристики "вспомнеизвестная(2)" и "теоремаприема". По нему будет создаваться прием решателя, вводящий вспомогательную неизвестную для угла $\angle(abc)$, если текущее уравнение задачи на исследование содержит некоторую численную неизвестную X , а все прочие вхождения неизвестных в это уравнение заключены внутри вхождений терма $\angle(abc)$. При этом должно иметься еще одно уравнение, содержащее как X , так и $\angle(abc)$ и не содержащее других неизвестных подтермов.

Программа приема дословно воспроизводит программу предыдущего приема. Отличие заключается лишь в том, что новый протокол сопровождается не характеристикой "вспомнеизвестная(1)", а характеристикой "вспомнеизвестная(2)".

4.3 Протокол "стандартизация"

Протокол "стандартизация($A f_1 \dots f_n$)" указывает название A нормализатора стандартной формы и список f_1, \dots, f_n символов, для которых предусмотрена инициализация

зация попытки обращения к данному нормализатору.

Создание квазипротокола приема, предпринимающего попытку упрощения путем приведения к стандартной форме и последующей свертки

В качестве примера рассмотрим создание квазипротокола

$$\forall_{abc}(c = a \cdot b \rightarrow a \cdot b = c)$$

по протоколу "стандартизация(станддн кн дн отр плс экв имп)"

Характеристики квазипротокола - "теоремаприема", "упрощединица", "оператор(станддн двгруппировки свертка)". По данному квазипротоколу спецификатором создается прием решателя, предпринимающий попытку упростить формулу алгебры логики с конъюнкцией в заголовке путем приведения ее к виду д.н.ф. оператором "станддн" и последующей свертки ("факторизации") с помощью операторов "двгруппировки" и "свертка". Аналогичные квазипротоколы создаются и для остальных операций алгебры логики, перечисленных в протоколе "стандартизация".

Переменной x7 присваивается логический символ - первый операнд протокола. В нашем примере - "станддн". Переменной x9 присваивается операнд протокола, отличный от первого. В нашем примере - символ "кн". Переменной x10 присваивается арность символа x9. В нашем примере - 2. Переменной x12 присваивается список переменных начиная с первой переменной ЛОСа до переменной с номером x10. В нашем примере - a, b . Переменной x13 присваивается результат соединения переменных x12 операцией x9. В нашем примере - "кн(a, b)". Выбирается переменная x14, не входящая в терм x13. В нашем примере - c . Переменной x15 присваивается импликация, антецедентом которой служит равенство "равно(x14 x13)", а консеквентом - равенство "равно(x13 x14)". Переменной x16 присваивается заготовка характеристик нового протокола - список, состоящий из логических символов "пв", "теоремаприема", "упрощединица". Переменной x17 присваивается пара (x7, свертка). Если среди стартовых протоколов ячейки вывода имеется терм "свертка(x7 A)", указывающий некоторый специальный оператор, используемый для свертки выражений, находящихся в стандартной форме x7, то переменной x17 переприсваивается тройка (x7, A, свертка). Далее к списку x16 добавляется терм "оператор(x17)". В нашем примере - "оператор(станддн двгруппировки свертка)". Этот терм определяет последовательность применяемых операторов. В нашем примере - сначала преобразование к виду д.н.ф. и упрощение, затем - сокращающее преобразование оператором "двгруппировки", выполняющим частичную факторизацию, и далее - преобразование обычными операторами сокращенной перезаписи. Наконец, квазипротокол x15 регистрируется в списке вывода с характеристиками x16.

Заметим, что в ячейке вывода, содержащей определение стандартной формы, кроме протоколов "стандартизация" и "свертка", обычно присутствует также протокол "станддн($A f g$)", где A - название нормализатора стандартной формы, имеющей корневую ассоциативно-коммутативную операцию f и внутреннюю ассоциативно-коммутативную операцию g . В нашем примере - протокол "станддн(станддн дн кн)".

4.4 Протокол "развертка"

Протокол "развертка(x1 x2)" означает, что для двуместной ассоциативно-коммутативной операции x2 введена соответствующая операция x1 над семействами операн-

дов.

Применение серийной операции к семейству констант

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ad}(a - \text{число} \ \& \ d - \text{set} \ \& \ \text{конечное}(d) \rightarrow \sum_{e \in d} a = a \cdot \text{card}(d))$$

из протокола "развертка(сумма всех плюс)"

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

Переменной x_8 присваивается второй операнд протокола. В нашем примере - символ "плюс". Справочники поиска теорем "раздпарам", "свертки" определяют по x_8 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{12} присваивается вхождение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x_8 , переменной x_{13} - вхождение другой части. Переменной x_{14} присваивается список операндов вхождения x_{12} . Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x_{15} присваивается символ по вхождению x_{13} . В нашем примере - "умножение". Проверяется, что каждое выражение пары x_{14} имеет заголовок x_{15} . Проверяется, что число операндов вхождения x_{13} равно 2. Переменной x_{16} присваивается вхождение неоднобуквенного операнда вхождения x_{13} , переменной x_{17} - вхождение другого операнда. Проверяется, что число операндов вхождения x_{16} равно 2. Переменной x_{18} присваивается результат применения справочника "сумма всех" к символу по вхождению x_{16} . Это справочник обеспечивает переход от двуместной ассоциативно-коммутативной операции к соответствующей операции над конечными семействами. В нашем примере x_{18} - символ "сумма всех". Проверяется, что x_{18} не равно 0 и что по вхождению x_{17} располагается некоторая переменная x_{19} . В нашем примере - переменная a . Переменной x_{20} присваивается номер операнда x_{17} вхождения x_{13} . Проверяется, что каждый терм пары x_{14} имеет ровно два корневых операнда, причем операндом с номером x_{20} служит переменная x_{19} .

Переменной x_{21} присваивается список корневых операндов термов x_{14} , номер которых отличен от x_{20} . В нашем примере - b, c . Проверяется, что операнды вхождения x_{16} включаются в список x_{21} . Проверяется, что по вхождению x_{16} расположен символ "плюс". Проверяется, что единицей операции x_{15} служит символ 1, причем эту единицу операция x_{15} имеет для операнда x_{16} . Переменной x_{23} присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Переменной x_{24} присваивается список элементов набора x_{23} , не имеющих параметра списка x_{21} . Переменной x_{27} присваивается результат добавления к списку x_{24} всевозможных утверждений "натуральное(n)" для переменных n списка x_{21} . Переменной x_{28} присваивается разность списков x_{23} и x_{24} . Проверяется, что каждое утверждение списка x_{28} является следствием утверждений x_{27} . Выбираются переменные X, Y , не встречающиеся в дополнительной теореме. В нашем примере - переменные d, e . Переменной x_{30} присваивается объединение списка x_{24} с утверждениями "множество(X)", "конечное(X)". Переменной x_{31} присваивается результат замены вхождения x_{16} в подтерм x_{13} на выражение "мощность(X)". Переменной x_{32} присваивается равенство выражения " $x_7(\text{отображение}(Y \text{ принадлежит}(Y X) x_{19}))$ " выражению x_{31} . Затем создается импликация с антецедентами x_{30} и консеквентом x_{32} , которая регистрируется в списке вывода как обычная теорема.

Вынесение за знак серийной операции константного операнда

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ade}(a - \text{число} \ \& \ d - \text{функция} \ \& \ \text{конечное}(e) \ \& \ \text{Dom}(d) = e \ \& \\ \text{Val}(d) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \sum_{f, f \in e} (ad(f)) = a \sum_{f, f \in e} d(f))$$

из протокола "развертка(сумма всех плюс)"

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

Начало программы приема, вплоть до проверки включения операндов вхождения x16 в список x21, дословно совпадает с программой предыдущего примера. Протокол и дополнительная теорема те же самые.

Дальше начинаются отличия. Выбираются переменные X, Y, Z , не входящие в дополнительную теорему. В нашем примере - d, e, f . Переменной x23 присваивается результат замены вхождения x16 в подтерм x13 на выражение " $X(Z)$ ". В нашем примере x23 имеет вид " $ad(f)$ ". Переменной x24 присваивается выражение " $x7(\text{отображение}(Z \text{ принадлежит}(Z \ Y) \ x23))$ ". Переменной x25 присваивается результат замены вхождения x16 в подтерм x13 на выражение " $x18(\text{отображение}(Z \text{ принадлежит}(Z \ Y) \ X(Z)))$ ". Переменной x26 присваивается равенство выражений x24 и x25. В нашем примере оно имеет вид:

$$\sum_{f, f \in e} (ad(f)) = a \sum_{f, f \in e} d(f)$$

Переменной x27 присваивается список antecedентов дополнительной теоремы. Проверяется, что операнды вхождения x16 суть некоторые различные переменные x28 и x29. В нашем примере - b, c . Переменной x30 присваивается список обработанных оператором "станд" утверждений набора x27, содержащих переменную x28; переменной x31 - список обработанных оператором "станд" утверждений набора x28. Проверяется, что списки x30 и x31 не пересекаются. Переменной x32 присваивается список обработанных оператором "станд" результатов замены переменной x28 на переменную x39 в утверждениях списка x30. Проверяется, что списки x32 и x31, с точностью до порядка элементов, равны.

Переменной x33 присваивается кванторная импликация " $\text{для любого}(Z \text{ если принадлежит}(Z \ Y) \ \text{то } P)$ ", где P - конъюнкция результатов подстановки выражения $X(Z)$ вместо переменной x28 в утверждения списка x30. Переменной x34 присваивается объединение списка не содержащих переменных x28, x29 утверждений набора x27 с утверждениями " $\text{функция}(X)$ ", " $\text{конечное}(Y)$ ", " $\text{равно}(\text{область}(X) \ Y)$ ", x33. Переменной x35 присваивается результат обработки списка x34 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x26. Затем создается импликация с antecedентами x35 и консеквентом x26. Она регистрируется в списке вывода как обычная теорема.

Серийная операция применяется к выражению, заголовком которого служит ее обычная версия

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{fgA}(f - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ \text{конечное}(A) \ \& \ \text{Dom}(f) = A \ \& \\ \text{Dom}(g) = A \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \sum_{x, x \in A} (f(x) + g(x)) = \\ \sum_{x, x \in A} f(x) + \sum_{x, x \in A} g(x))$$

из протокола "развертка(сумма всех плюс)".

Переменной x_7 присваивается первый операнд протокола, переменной x_8 - второй операнд протокола. В нашем примере - символы "сумма всех", "плюс". Переменной x_9 присваивается переменная f , переменной x_{10} - переменная x , переменной x_{11} - переменная A , переменной x_{12} - переменная g . Определяется тип T значений выражений с заголовком x_8 . В нашем примере - символ "число". Переменной x_{14} присваивается список утверждений "функция(x_9)", "функция(x_{12})", "множество(x_{11})", "конечное(x_{11})", "равно(область(x_9) x_{11})", "равно(область(x_{12}) x_{11})", "содержится(значения(x_9) класс($a T(a)$))". Переменной x_{15} присваивается равенство "равно(x_7 (отображение(x_{10} принадлежит(x_{10} x_{11}) x_8 (x_9 (x_{10}) x_{12} (x_{10})))) x_8 (отображение(x_{10} принадлежит(x_{10} x_{11}) x_9 (x_{10}))) x_7 (отображение(x_{10} принадлежит(x_{10} x_{11}) x_{12} (x_{10}))))". Переменной x_{16} присваивается результат обработки списка x_{14} оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{15} . Затем создается импликация с антецедентами x_{16} и консеквентом x_{15} . Она регистрируется в списке вывода как обычная теорема.

Вынесение одноместной операции за знак серийной операции

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{fA}(f - \text{функция} \ \& \ \text{конечное}(A) \ \& \ \text{Dom}(f) = A \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \sum_{x,x \in A}(-f(x)) = -\sum_{x,x \in A} f(x))$$

из протокола

"развертка(сумма всех плюс)"

и дополнительной теоремы

$$\forall_{bc}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow -b - c = -(b + c))$$

Переменной x_7 присваивается первый операнд протокола, переменной x_8 - второй операнд протокола. В нашем примере - символы "сумма всех", "плюс". Справочник поиска теорем "перестановки" определяет по символу x_8 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{12} присваивается входение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет единственный корневой операнд, причем заголовком этого операнда служит символ x_8 . Переменной x_{13} присваивается входение другой части равенства. Проверяется, что она имеет заголовок x_8 и ровно два корневых операнда. Переменной x_{14} присваивается символ по входению x_{12} . В нашем примере x_{12} - входение выражения " $-(b + c)$ ", x_{13} - входение выражения " $-b - c$ ", x_{14} - символ "минус". Переменной x_{15} присваивается входение операнда входения x_{12} . В нашем примере - входение выражения " $b + c$ ". Проверяется, что операндами входения x_{15} служат некоторые различные переменные x_{16} и x_{17} . Проверяется, что заголовком обоих операндов входения x_{13} служит символ x_{14} . Проверяется, что операнды операндов входения x_{13} суть переменные x_{16} , x_{17} . Определяется тип T значения выражений с заголовком x_8 . В нашем примере - символ "число". Переменной x_{21} присваивается переменная f , переменной x_{22} - переменная x , переменной x_{23} - переменная A . Переменной x_{24} присваивается список утверждений "функция(x_{21})", "множество(x_{23})", "конечное(x_{23})", "равно(область(x_{21}) x_{23})", "содержится(значения(x_{21}) класс($a T(a)$))". Переменной x_{25} присваивается равенство "равно(x_7 (отображение(x_{22} принадлежит(x_{22} x_{23}) x_{14} (x_{21} (x_{22})))) x_{14} (x_7 (отображение(x_{22} принадлежит(x_{22} x_{23}) x_{21} (x_{22}))))". Переменной x_{26} присваивается ре-

зультат обработки списка x24 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x25. Создается импликация с антецедентами x26 и консеквентом x25. Она регистрируется в списке вывода как обычная теорема.

Серийная операция применяется к условному выражению с единицей операции

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{aAB}(\text{конечное}(A) \ \& \ B - \text{set} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(a) = A \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \sum_{i,i \in A} (0 \text{ при } i \in B, \text{ иначе } a(i)) = \sum_{i,i \in A \setminus B} a(i))$$

из протокола

"развертка(сумма всех плюс)".

Переменной x7 присваивается первый операнд протокола, переменной x8 - второй операнд протокола. В нашем примере - символы "сумма всех", "плюс". Переменной x10 присваивается единица операции x8. В нашем примере - 0. Переменной x11 присваивается переменная A, переменной x12 - B, переменной x13 - i. Определяется тип T значения выражений с заголовком x8. В нашем примере - символ "число". Переменной x15 присваивается список, образованный утверждениями "множество(x11)", "конечное(x11)", "множество(x12)", "функция(a)", "равно(область(a)x11)", "содержится(значения(a) класс(b T(b)))". Последовательно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x16 присваивается равенство "равно(x7(отображение(x13 принадлежит(x13 x11)вариант(принадлежит(x13 x12) x10 a(x13)))) x7(отображение(x13 принадлежит(x13 разность(x11 x12)) a(x13))))", во втором - равенство "равно(x7(отображение(x13 принадлежит(x13 x11)вариант(принадлежит(x13 x12) a(x13) x10))) x7(отображение(x13 принадлежит(x13 пересечение(x11 x12)) a(x13))))". В нашем примере рассматривается первый случай. Переменной x17 присваивается результат обработки списка x15 оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x16. Затем создается импликация с антецедентами x17 и консеквентом x16, регистрируемая в списке вывода как обычная теорема.

Серийное обобщение дистрибутивности

В качестве примера рассмотрим вывод квазипротокола

$$\forall_{Anf}(\sum_{a,a \in \prod_{i=1}^n A(i)} \prod_{i=1}^n f(a(i), i) = \prod_{i=1}^n \sum_{j,j \in A(i)} f(j, i))$$

из протокола

"развертка(сумма всех плюс)"

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

Переменной x7 присваивается первый операнд протокола, переменной x8 - второй операнд протокола. В нашем примере - символы "сумма всех", "плюс". Справочник поиска теорем "раздпарам" определяет по символу x8 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x12 присваивается входение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x8. Переменной x13 присваивается входение другой части равенства, а переменной x14 - символ по входению x13. В нашем примере x12 - входение подтерма "ab + ac", x13 -

вхождение подтерма " $a(b + c)$ ", x_{14} - символ "умножение". При помощи справочника "дистрибутивно" проверяется дистрибутивность операции x_{14} относительно x_8 . Справочник "суммавсех" определяет обобщение x_{15} операции x_{14} на наборы произвольной длины. В нашем примере x_{15} - символ "произведениевсех". Переменной x_{16} присваивается переменная f , переменной x_{17} - n , переменной x_{18} - A , переменной x_{19} - i , переменной x_{20} - j . Переменной x_{21} присваивается терм "длялюбого(x_{18} x_{17} x_{16} равно(x_7 (отображение(a принадлежит(a Прямопроизведение(отображение(x_{19} и(целое(x_{19})меньшеилиравно(1 x_{19}) меньшеилиравно(x_{19} x_{17})) значение(x_{18} x_{19})))) x_{15} (отображение(x_{19} и(целое(x_{19}) меньшеилиравно(1 x_{19}) меньшеилиравно(x_{19} x_{17})) значение(x_{16} набор(значение(a x_{19}) x_{19})))))) x_{15} (отображение(x_{19} и(целое(x_{19}) меньшеилиравно(1 x_{19}) меньшеилиравно(x_{19} x_{17})) x_7 (отображение(x_{20} принадлежит(x_{20} значение(x_{18} x_{19})) значение(x_{16} набор(x_{20} x_{19})))))))). Этот терм регистрируется в списке вывода с характеристикой "теоремаприема". Характеризатор добавляет характеристики "равны", "отображение", "облфилтъра(второйтерм)".

Использование сокращающего тождества для вычисления простейших серийных операций

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{cd}(c - \text{целое} \ \& \ d - \text{целое} \ \& \ 0 \leq d - c \rightarrow d + 2 \sum_{x=c}^d x - c + 1 = -c^2 + (d + 1)^2)$$

из протокола

"развертка(суммавсех плюс)"

и дополнительных теорем

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a - a = 0)$$

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$$

Переменной x_7 присваивается первый операнд протокола, переменной x_8 - второй операнд протокола. В нашем примере - символы "суммавсех", "плюс". Справочник поиска теорем "констнорм" определяет по символу x_8 указанную выше первую дополнительную теорему. Переменной x_{12} присваивается вхождение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x_8 . Переменной x_{13} присваивается вхождение другой части равенства, а переменной x_{14} - символ по вхождению x_{13} . В нашем примере x_{12} - вхождение подтерма " $a - a$ ", x_{13} - вхождение подтерма " 0 ", x_{14} - символ " 0 ". Проверяется, что x_{14} - единица операции x_8 . Проверяется, что x_{12} имеет ровно два операнда. Переменной x_{16} присваивается вхождение операнда вхождения x_{12} , представляющего собой некоторую переменную x_{18} , переменной x_{17} - вхождение другого операнда. Переменной x_{19} присваивается подтерм x_{17} . В нашем примере x_{18} - переменная a , x_{19} - " $-a$ ". Определяется тип T значения выражений с заголовком x_8 . В нашем примере - символ "число". Переменной x_{21} присваивается название раздела, к которому относится символ T . В нашем примере - "элементарнаяалгебра". Среди теорем данного раздела находится вторая дополнительная теорема, имеющая характеристику "декомпозиция(N)" либо "сокращ(N)". В нашем примере - "декомпозиция(второйтерм)". Переменной x_{30} присваивается заменяемая часть равенства в консеквенте второй дополнительной теоремы. Проверяется, что ее оценка сложности больше 4. В нашем примере x_{30} имеет вид " $(a + b)^2$ ". Проверяется, что выражение x_{30} неповторно и содержит символ "плюс". Проверяется, что символ "плюс" имеет единственное вхождение в

выражение x_{30} , и переменной x_{32} присваивается это вхождение. Проверяется, что вхождение x_{32} имеет ровно два операнда - некоторые переменные x_{33} и x_{34} . В нашем примере - переменные a, b . Переменной x_{35} присваивается заменяющая часть второй дополнительной теоремы. Переменной x_{36} присваивается результат подстановки в нее единицы вместо переменной x_{34} . В нашем примере - " $a^2 + 2a \cdot 1 + 1^2$ ". Переменной x_{37} присваивается результат замены вхождения x_{32} в терм x_{30} на переменную x_{33} , переменной x_{38} - результат подстановки в подтерм x_{17} выражения x_{37} вместо переменной x_{18} . В нашем примере x_{37} имеет вид a^2 , x_{38} - вид " $-a^2$ ". Переменной x_{39} присваивается результат соеденения операцией x_8 выражений x_{36} и x_{38} . В нашем примере - " $a^2 + 2a \cdot 1 + 1^2 - a^2$ ".

Переменной x_{40} присваивается список антецедентов второй дополнительной теоремы, переменной x_{41} - список результатов подстановки единицы вместо переменной x_{34} в утверждения списка x_{40} . Переменной x_{42} присваивается результат обработки списка x_{41} оператором "нормантецеденты" относительно параметров утверждений этого же списка. Решается задача на преобразование с посылками x_{42} и условием x_{39} . Цели задачи - "упростить", "нормтеорема", "неизвестные x_{33} ". Ответ присваивается переменной x_{44} . В нашем примере он имеет вид " $2a + 1$ ". Проверяется, что число вхождений переменной x_{33} в выражение x_{44} меньше числа вхождений этой переменной в выражение x_{39} . Переменной x_{45} присваивается список всех утверждений набора x_{42} , содержащих переменную x_{33} . В нашем примере он состоит из единственного утверждения " a - число". Проверяется, что конъюнкция утверждений x_{45} - следствие утверждения "целое(x_{33})".

Выбираются переменные X, Y , не входящие во вторую дополнительную теорему. В нашем примере - переменные c, d . Переменной x_{47} присваивается выражение " $x_7(\text{отображение}(x_{33} \text{ и } (\text{целое}(x_{33}) \text{ меньшеилиравно}(X \text{ } x_{33}) \text{ меньшеилиравно}(x_{33} \text{ } Y))x_{44}))$ ". Переменной x_{48} присваивается объединение разности списков x_{42} и x_{45} с утверждениями "целое(X)", "целое(Y)", "меньшеилиравно(0 плюс(Y минус(X)))". Переменной x_{49} присваивается результат подстановки в терм x_{37} выражения "плюс(Y 1)" вместо переменной x_{33} . В нашем примере - " $(d + 1)^2$ ". Переменной x_{50} присваивается результат подстановки в терм x_{38} переменной X вместо переменной x_{33} . В нашем примере - " $-c^2$ ". Переменной x_{51} присваивается результат соединения операцией x_8 выражений x_{49} и x_{50} . Создается импликация с антецедентами x_{48} и консеквентом "равно(x_{47} x_{51})". Она обрабатывается оператором "Нормтеорема", которому разрешается использовать для упрощений уже имеющиеся в списке вывода теоремы. Результат регистрируется в списке вывода как обычная теорема.

Использование нормализующего тождества перегруппировочного типа

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bce}(e - \text{функция} \ \& \ c - \text{функция} \ \& \ \text{конечное}(b) \ \& \ \text{Dom}(e) = b \ \& \ \text{Dom}(c) = b \ \& \ \neg(0 \in \text{Val}(c)) \ \& \ \text{Val}(c) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}() \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \prod_{a,a \in b}(e(a)/c(a)) = \prod_{a,a \in b} e(a) / \prod_{a,a \in b} c(a))$$

из протокола

"развертка(произведениевсех умножение)"

и дополнительной теоремы

$$\forall_{abe}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow e \cdot (a/b) = (ae)/b)$$

Переменной x_7 присваивается первый операнд протокола, переменной x_8 - второй операнд протокола. В нашем примере - символы "произведениевсех", "умножение". Справочник поиска теорем "включ" определяет по символу x_8 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{12} присваивается вхождение той части равенства в консеквенте дополнительной теоремы, которая имеет заголовок x_8 . Переменной x_{13} присваивается вхождение другой части равенства, а переменной x_{14} - символ по вхождению x_{13} . В нашем примере x_{12} - вхождение подтерма " $e \cdot (a/b)$ ", x_{13} - вхождение подтерма " $(ae)/b$ ", x_{14} - символ "дробь". Проверяется, что число операндов вхождения x_{12} равно 2. Переменной x_{15} присваивается вхождение того операнда, который представляет собой некоторую переменную x_{17} . Переменной x_{16} присваивается вхождение другого операнда. В нашем примере x_{17} - переменная e . Выбирается переменная x_{18} , не входящая в дополнительную теорему. В нашем примере - переменная s . Переменной x_{19} присваивается терм " $x_{14}(x_{17}, x_{18})$ ", переменной x_{20} - терм " $x_8(x_{19} A)$ ", где A - подтерм x_{16} . В нашем примере x_{19} имеет вид " e/c ", x_{20} - вид " $(e/c) \cdot (a/b)$ ". Решается задача на преобразование, посылка которой служат утверждения, необходимые для сопровождения терма x_{20} по о.д.з, а условием - терм x_{20} . Цели задачи - "упростить". Ответ присваивается переменной x_{23} . В нашем примере он имеет вид " $(ae)/(bc)$ ". Проверяется, что выражение x_{23} неповторно и имеет те же параметры, что выражение x_{20} . Проверяется, что число операндов вхождения x_{16} равно 2, причем эти операнды суть некоторые переменные x_{24} , x_{25} . В нашем примере - a, b . Переменной x_{26} присваивается вхождение переменной x_{24} в терм x_{23} , переменной x_{27} - вхождение, операндом которого служит вхождение x_{26} . Проверяется, что число операндов вхождения x_{27} равно 2, причем отличный от x_{26} операнд равен x_{17} . Переменной x_{29} присваивается вхождение, операндом которого служит x_{27} . Проверяется, что вхождение x_{29} корневое. Переменной x_{30} присваивается вхождение переменной x_{25} в терм x_{23} . Переменной x_{31} присваивается вхождение, операндом которого служит x_{30} . Проверяется, что число операндов вхождения x_{31} равно 2, причем отличный от x_{30} операнд вхождения x_{31} равен x_{18} . Переменной x_{33} присваивается вхождение, операндом которого служит x_{31} . Проверяется, что вхождение x_{33} корневое. Переменной x_{34} присваивается символ по вхождению x_{27} . В нашем примере - "умножение". Справочник "суммавсех" определяет символ x_{35} операции над конечными наборами, обобщающей операцию x_{34} . В нашем примере - символ "произведениевсех". Аналогично, переменной x_{36} присваивается символ по вхождению x_{31} , и определяется символ x_{37} операции над конечными наборами, обобщающей операцию x_{36} . В нашем примере x_{37} - тоже символ "произведениевсех". Переменной x_{38} присваивается список утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. терма x_{19} . Проверяется, что все утверждения, необходимые для сопровождения по о.д.з. терма x_{20} , суть следствия утверждений списка x_{38} и утверждений, необходимых для сопровождения по о.д.з. подтерма x_{16} .

Выбираются переменные X, Y , отличные от переменных x_{17} и x_{18} . В нашем примере - переменные a, b . Переменной x_{40} присваивается список утверждений "функция(x_{17})", "функция(x_{18})", "конечное(Y)", "равно(область(x_{17}) Y)", "равно(область(x_{18}) Y)". Рассматриваются термы C, D вида "значение(x_{17} X)", "значение(x_{18} X)". Переменной x_{42} присваивается объединение списка x_{40} со списком всевозможных утверждений вида "длялюбого(X если принадлежит($X Y$) то P)", где P - результат подстановки термов C, D вместо переменных x_{17}, x_{18} в утверждение списка x_{38} . Переменной x_{44} присваивается равенство "равно(x_7 (отображение(X принадлежит($X Y$) $x_{14}(x_{41}))$) $x_{14}(x_{35}$ (отображение(X принадлежит($X Y$) C)) x_{37} (отображение(X при-

надлежит($X \ Y \ D$)))". Переменной x45 присваивается результат обработки списка x42 оператором "нормантецеденты" относительно параметры равенства x44. Затем создается импликация с антецедентами x45 и консеквентом x44, которая регистрируется в списке вывода как обычная теорема.

Использование разделяющей эквивалентности

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ac}(a - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(a) = c \ \& \ \text{конечное}(c) \ \& \ \text{Val}(a) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \prod_{b,b \in c} a(b) = 0 \leftrightarrow \exists_b(b \in c \ \& \ a(b) = 0))$$

из протокола

"развертка(произведениевсех умножение)"

и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow ab = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0)$$

Переменной x7 присваивается первый операнд протокола, переменной x8 - второй операнд протокола. В нашем примере - символы "произведениевсех", "умножение". Справочник поиска теорем "разделить" определяет по символу x8 указанную выше дополнительную теорему. Проверяется, что она имеет характеристику x11 с заголовком "или". Переменной x14 присваивается заменяемая часть эквивалентности в консеквенте дополнительной теоремы относительно характеристики x11. Переменной x15 присваивается заменяющая часть. В нашем примере x14 имеет вид " $ab = 0$ ", x15 - вид " $a = 0 \vee b = 0$ ". Проверяется, что оба утверждения x14, x15 неповторны, причем x15 имеет заголовок "или". Переменной x16 присваивается список корневых операндов утверждения x15. Проверяется, что он двухэлементный. Переменной x17 присваивается список параметров утверждения x14. Проверяется, что утверждение x15 имеет те же параметры, причем число этих параметров равно 2. Переменной x18 присваивается первый элемент пары x16, переменной x19 - второй элемент. В нашем примере x18 имеет вид $a = 0$, x19 - вид $b = 0$. Переменной x20 присваивается список параметров утверждения x18, переменной x21 - список параметров утверждения x19. Проверяется, что оба списка одноэлементные. Переменной x22 присваивается элемент списка x20. В нашем примере - переменная a . Переменной x23 присваивается результат замены в утверждении x18 переменной x22 на переменную x21. Проверяется, что результаты обработки оператором "станд" утверждений x23 и x19 совпадают. Определяется подстановка S вместо переменной x22, переводящая утверждение x18 в утверждение x14. Переменной x25 присваивается терм, в который эта перестановка переводит переменную x22. В нашем примере - ab . Проверяется, что выражение x25 имеет заголовок x8 и что набор его корневых операндов включается в список однобуквенных термов, образованных переменными набора x17.

Переменной x26 присваивается список антецедентов дополнительной теоремы, переменной x27 - подсписок списка x26, образованный утверждениями, содержащими переменную x22. Переменной x28 присваивается подсписок списка x26, образованный утверждениями, содержащими переменную x21. Проверяется, что списки x27 и x28 не пересекаются и длины их равны. Проверяется, что список обработанных оператором "станд" результатов замены переменной x22 на переменную x21 в утверждениях списка x27 включается в список обработанных оператором "станд" утверждений списка x28.

Выбираются переменные X, Y , отличные от переменной x_{22} . В нашем примере - переменные b, c . Переменной x_{30} присваивается объединение списка "функция(x_{22})", "равно(область(x_{22}) Y)", "конечное(Y)" со списком всевозможных утверждений вида "длялюбого(X если принадлежит($X Y$) то P)", где P - результаты подстановки выражения "значение($x_{22} X$)" вместо переменной x_{22} в утверждения списка x_{27} . Переменной x_{32} присваивается результат подстановки терма " x_7 (отображение(X принадлежит($X Y$) значение($x_{22} X$)))" вместо переменной x_{22} в утверждение x_{18} . Переменной x_{33} присваивается результат подстановки выражения "значение($x_{22} X$)" вместо переменной x_{22} в утверждение x_{18} . Переменной x_{34} присваивается утверждение "существует(X и(принадлежит($X Y$) x_{33}))", переменной x_{35} - утверждение "эквивалентно($x_{32} x_{34}$)". Переменной x_{36} присваивается результат обоаботки списка x_{30} оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{35} . Затем создается импликация с антецедентами x_{36} и консеквентом x_{35} , которая регистрируется в списке вывода как обычная теорема.

Использование тождества для изменения знака

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{fA}(f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = A \ \& \ \text{конечное}(A) \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \prod_{x,x \in A}(-f(x)) = (-1)^{\text{card}(A)} \prod_{x,x \in A} f(x))$$

из протокола

"развертка(произведениевсех умножение)"

и дополнительной теоремы

$$\forall_a(a - \text{число} \rightarrow (-1)a = -a)$$

Переменной x_7 присваивается первый операнд протокола, переменной x_8 - второй операнд протокола. В нашем примере - символы "произведениевсех", "умножение". Справочник поиска теорем "Измзнака" определяет по символу x_8 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{13} присваивается вхождение того операнда равенства в консеквенте дополнительной теоремы, который имеет заголовок x_8 , переменной x_{12} - вхождение другого операнда. Переменной x_{16} присваивается тот операнд вхождения x_{13} , который не имеет параметров. В нашем примере - "-1". Переменной x_{17} присваивается символ по вхождению x_{12} . В нашем примере - символ "минус". Переменной x_{19} присваивается пара x_{19} - результат обращения к справочнику "степень" на символе x_8 . Эта пара состоит из названия операции типа степени, возникающей при применении операции x_8 к набору одинаковых аргументов, и номера того аргумента, который играет роль показателя степени. В нашем примере x_{19} - пара ("степень", 2). Переменной x_{20} присваивается первый элемент пары x_{19} , переменной x_{21} - второй ее элемент.

Переменной x_{22} присваивается переменная A , переменной x_{23} - переменная x , переменной x_{24} - переменная f . Переменной x_{25} присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Переменной x_{26} присваивается объединение списка утверждений "функция(x_{24})", "равно(область(x_{24}) x_{22})", "конечное(x_{22})" со списком всевозможных утверждений вида "длялюбого(x_{23} если принадлежит($x_{23} x_{22}$)то P)", где P - результат подстановки в утверждения набора x_{25} выражения "значение($x_{24} x_{23}$)" вместо переменной - операнда вхождения x_{12} . Переменной x_{27} присваивается равенство "равно(x_7 (отображение(x_{23} принадлежит($x_{23} x_{22}$) x_{17} (значение(x_{24}

$x_{23})))) x_8(Q \text{ x}_{18}(\text{отображение}(x_{23} \text{ принадлежит}(x_{23} \text{ x}_{22})\text{ значение}(x_{24} \text{ x}_{23}))))))$ ". Если x_{21} равно 1, то Q имеет вид " $x_{20}(\text{мощность}(x_{22}) \text{ x}_{16})$ ", иначе - вид " $x_{20}(x_{16} \text{ мощность}(x_{22}))$ ". Переменной x_{28} присваивается результат обработки списка x_{26} оператором "нормантецеденты" относительно параметров равенства x_{27} . Затем создается импликация с антецедентами x_{28} и консеквентом x_{27} . Она регистрируется в списке вывода как обычная теорема.

Использование импликации типа сборки

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bd}(b - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(b) = d \ \& \ \text{конечное}(d) \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq (0, \infty) \rightarrow 0 < \prod_{c,c \in d} b(c))$$

из протокола

"равзертка(произведениевсех умножение)" и дополнительной теоремы

$$\forall_{ab}(0 < a \ \& \ 0 < b \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow 0 < ab)$$

Переменной x_7 присваивается первый операнд протокола, переменной x_8 - второй операнд протокола. В нашем примере - символы "произведениевсех", "умножение". Справочник поиска теорем "сборка" определяет по символу x_8 указанную выше дополнительную теорему. Переменной x_{11} присваивается ее консеквент. В нем рассматривается вхождение x_{12} неоднобуквенного подтерма с двумя корневыми операндами, которыми служат некоторые переменные x_{13} и x_{14} . В нашем примере x_{12} - вхождение подтерма ab ; x_{13} - переменная a ; x_{14} - b . Переменной x_{15} присваивается список антецедентов дополнительной теоремы. Переменной x_{16} присваивается подсписок списка x_{15} , образованный утверждениями, содержащими переменную x_{13} . Переменной x_{17} присваивается подсписок списка x_{15} , образованный утверждениями, содержащими переменную x_{14} . Проверяется, что списки x_{16} и x_{17} не пересекаются и имеют равные длины. Переменной x_{18} присваивается список обработанных оператором "станд" результатов замены в утверждениях списка x_{16} переменной x_{13} на переменную x_{14} . Переменной x_{19} присваивается список обработанных оператором "станд" утверждений списка x_{17} . Проверяется, что список x_{18} включается в список x_{19} . Переменной x_{20} присваивается отработанный оператором "станд" результат замены вхождения x_{12} в терм x_{11} на переменную x_{14} . В нашем примере x_{20} имеет вид " $0 < b$ ". Проверяется, что утверждение x_{20} входит в список x_{19} . Проверяется, что результаты подстановки подтерма x_{12} вместо переменной x_{14} в отличные от x_{20} утверждения списка x_{19} являются следствиями утверждений набора x_{15} .

Выбираются переменные X, Y , не входящие в дополнительную теорему. В нашем примере - переменные c, d . Переменной x_{22} присваивается объединение набора утверждений "функция(x_{14})", "равно(область(x_{14}) Y)", "конечное(Y)" со всевозможными утверждениями вида "длялюбого(X если принадлежит(X Y) то P)", где P - результаты подстановки выражения "значение(x_{14} X)" вместо переменной x_{14} в утверждения набора x_{19} . Переменной x_{24} присваивается выражение " $x_7(\text{отображение}(X \text{ принадлежит}(X \ Y) \ \text{значение}(x_{14} \ X)))$ ". Переменной x_{25} присваивается результат замены вхождения x_{12} в терм x_{11} на выражение x_{24} . Переменной x_{26} присваивается результат обработки списка x_{22} оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{25} . Затем создается импликация с антецедентами x_{26} и консеквентом x_{25} . Она регистрируется в списке вывода как обычная теорема.

4.5 Протокол "функции"

Протокол "функции(x1 x2 x3)" является установкой на вывод тождеств для вычисления заданной характеристики простейших функций, определяемых операциями заданного раздела. x1 - шаблон вычисляемой характеристики функции, x2 - переменная, обозначающая в нем рассматриваемую функцию, x3 - конъюнкция ограничений на параметры шаблона x1. Протокол сопровождается характеристиками "протокол" и "раздел(A)", где A - название того раздела, операции которого будут рассматриваться.

Рассмотрение операции заданного раздела

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdfg}(f - \text{set} \ \& \ [a, b] \subseteq f \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ 0 \leq b - a \ \& \ c - \text{boolean} \ \& \ d - \text{boolean} \rightarrow \text{образ}(\lambda_e(e + g, e \in f), [a, b]) = [a + b, b + g])$$

из протокола

"функции(образ($f, [a, b]$), f, f - функция & Val(f) $\subseteq \mathbb{R}$ & Dom(f) $\subseteq \mathbb{R}$ & a - число & b - число & $a \leq b$ & c - boolean & d - boolean)"

Здесь параметры c, d - двоичные указатели принадлежности промежутку его концов: 0 - не принадлежит, 1 - принадлежит. Они одни и те же у обоих рассматриваемых в выводимой теореме промежутков. Характеристика "раздел(элементарная алгебра)" указывает анализируемый раздел.

Переменной x8 присваивается первый операнд протокола. В нашем примере этот операнд имеет вид "образ($f, [a, b]$)". Второй операнд присваивается переменной x9. В нашем примере - переменная f . Переменной x10 присваивается список конъюнктивных членов последнего операнда протокола. Переменной x11 присваивается определяемое по характеристике "раздел(...)" название раздела. В нашем примере - "элементарная алгебра". Переменной x12 присваивается список всех логических символов, относящихся к разделу x11 и всем его подразделам. Этот список просматривается, и в накопитель x13 из него отбираются все символы операций, имеющие арность 1 либо 2.

Вводится пустой накопитель x14 выражений для одноместных функций, соответствующих операциям списка x13. Выбираются переменные X, Y , не встречающиеся в терме x8. В нашем примере - e, g .

Предпринимается просмотр символов x16 списка x13. Если операция x16 одноместная, то переменной x18 присваивается терм "x16(X)", иначе - терм "x16(X, Y)". В списке x10 находится утверждение вида "содержится(значения(x9) B)" и утверждение вида "содержится(область(x9) C)", где B, C - выражения с заголовком "промежуток". Проверяется, что выражения с заголовком x16 имеют численные значения, причем согласно справочнику "о.д.з." для терма x18 значения его переменных тоже имеют численные значения. Далее в накопитель x14 заносится терм "отображение(X число(X)x18)". Если символ x16 некоммутативный и имеет арность 2, то в x14 заносится также терм "отображение(Y число(Y) x18)".

По окончании просмотра списка x13 все переменные начиная с x16 снова оказываются не определены. Переменной x16 присваивается список всех термов списка x10, не содержащих переменных x9. В списке x14 выбирается выражение x17. В нашем

примере - " $\lambda_e(e + g, e - \text{число})$ ". Переменной x_{18} присваивается результат добавления к списку x_{16} утверждения " $\text{равно}(x_9 \ x_{17})$ ", а также всех утверждений, необходимых для сопровождения терма x_{17} по о.д.з. В нашем примере x_{18} состоит из утверждений " $a - \text{число}$ ", " $b - \text{число}$ ", " $0 \leq b - a$ ", " $c - \text{boolean}$ ", " $d - \text{boolean}$ ", " $\lambda_e(e + g, e - \text{число}) = f$ ", " $g - \text{число}$ ".

Решается задача на преобразование с посылками x_{18} и условием x_8 . Цели задачи - "упростить", "элементарно", "варианты". Последняя цель означает, что требуется получить серию альтернативных результатов, возникающих при различных дополнительных посылах. Ответ задачи накапливается в комментариях (частичный ответ $A_1 \ A_2$), где A_1 - вариант ответа, A_2 - конъюнкция дополнительных посылок. В нашем случае такая цель позволяет вводить дополнительные ограничения, связанные с областью определения рассматриваемой функции.

В нашем примере возникает единственный комментарий x_{21} вида (частичный ответ $[a + g, b + g]$ истина). Переменной x_{22} присваивается результат подстановки выражения x_{17} вместо переменной x_9 в терм x_8 . Переменной x_{23} присваивается равенство выражения x_{22} второму терму набора x_{21} . Переменной x_{24} присваивается объединение списка x_{16} с набором конъюнктивных членов последнего элемента набора x_{21} .

Внутри равенства x_{23} рассматривается подтерм вида "отображение(Z число(Z) Q)". Выбирается переменная U , не входящая в утверждения списка x_{24} и в x_{23} , и вместо "число(Z)" в равенство Z подставляется терм "принадлежит(ZU)". В нашем примере x_{23} приобретает вид "образ($\lambda_e(e + g, e \in f), [a, b]) = [a + g, b + g]$ ". Список x_{24} с добавленными к нему утверждениями, сопровождающими терм x_{23} по о.д.з., обрабатывается оператором "нормантецеденты" относительно параметров терма x_{23} . Затем создается импликация с антецедентами x_{24} и консеквентом x_{23} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и регистрируется в списке вывода как обычная теорема.

4.6 Протокол "стандформа"

Протокол "стандформа($A \ B_1(n_1) \ \dots \ B_k(n_k)$)" представляет собой установку на вывод упрощающих тождеств для нормализатора стандартной формы A . Терм $B_i(n_i)$ указывает оценку n_i стоимости операции B_i .

Для инициализации цикла вывода, кроме первого пункта ячейки вывода, содержащей указанный протокол, используются два последующих пункта. Первый из них содержит тождества, необходимые для преобразования выражений к виду стандартной формы A . Другой - исходные тождества для выражений, уже находящихся в данной стандартной форме. Тождества из первого пункта сопровождаются характеристикой "стандформа($A \ N$)", где N - направление замены. Тождества из второго пункта сопровождаются характеристикой "тожд(A)", а также характеристикой "станд($A \ N$)", указывающей, что тождество создано для упрощений в стандартной форме A . Выше мы уже приводили приемы справочника "прогрвывод" для символа "станд", которые, собственно, и реализуют вывод для получения новых упрощающих тождеств.

Общая схема процесса вывода такова. На период вывода создается вспомогательный нормализатор с заголовком "текнорм". Тождества для приведения к виду д.н.ф. и исходные тождества для данной д.н.ф. порождают стартовые приемы нормализатора

"текнорм". Каждая новая теорема обрабатывается этим нормализатором, чтобы исключить появление упрощающих тождеств, сводящихся к уже имеющимся. Те теоремы, которые прошли такую обработку, если они не выродились в константу "истина", регистрируются в списке вывода с характеристикой "станд($A N$)", и по ним сразу же создается прием нормализатора "текнорм". Так как процесс получения новых теорем обычно неограниченный, в характеристики исходного протокола "стандформа(...)" добавляется элемент "число(K)", указывающий количество K теорем списка вывода, по достижении которого вывод обрывается. При этом нормализатор "текнорм" и все его приемы удаляются.

Для протокола "стандформа" создан единственный прием справочника "теоремы", выполняющий инициализацию цикла вывода. Он создает нормализатор "текнорм" и пополняет исходный список вывода. Работу этого приема проиллюстрируем на примере вывода тождеств в дизъюнктивной нормальной форме. Установку на этот вывод можно найти в разделе "Дискретная математика" - "Алгебра логики" - "Дизъюнкция" - "Дизъюнктивная нормальная форма" - "Вывод тождеств в дизъюнктивной нормальной форме" оглавления базы теорем. Соответствующий протокол имеет вид "стандформа(станддн отр(1) кн(2) дн(2))". Характеристики - "протокол", "число(20)". В качестве тождеств для приведения к виду д.н.ф. выбраны следующие: $\forall_{abc}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \ \& \ c - \text{boolean} \rightarrow a \cdot (b \vee c) = a \cdot b \vee a \cdot c)$, $\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \Rightarrow b = \neg a \vee b)$, $\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a + b = a \cdot \neg b \vee \neg a \cdot b)$, $\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \Leftrightarrow b = a \cdot b \vee \neg a \cdot \neg b)$, $\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow \neg(a \cdot b) = \neg a \vee \neg b)$, $\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow \neg(a \vee b) = \neg a \cdot \neg b)$. Кроме того, добавлены упрощающие тождества для дизъюнкции и конъюнкции с не более чем одной переменной: $\forall_a(a - \text{boolean} \rightarrow a \vee \neg a = 1)$, $\neg 1 = 0$ и т.п.

В качестве исходных тождеств для преобразования выражений, уже имеющих вид д.н.ф., выбраны следующие: $\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \cdot b \vee a \cdot \neg b = a)$, $\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \vee a \cdot b = a)$, $\forall_{ab}(a - \text{boolean} \ \& \ b - \text{boolean} \rightarrow a \vee \neg a \cdot b = a \vee b)$. Собственное, только из них и будут выводиться следствия.

Работа приема начинается с того, что переменной x9 присваивается название стандартной формы. В нашем примере - "станддн". Переменной x7 присваивается список установок на вывод, пополненный набором (стандформа x9) и набором (число ...), извлеченным из характеристик протокола. В нашем примере x7 состоит из наборов (стандформа станддн) и (число 20). Значение x7 переписывается переменной x2 внешнего оператора "прогрвывод", т.е. списку установок на вывод, который будет доступен всем приемам вывода, срабатывающим в цикле.

При просмотре ячейки вывода заполняются накопители x10 и x11. В накопитель x10 заносятся тройки (ссылка "теорема(...)" - теорема - набор ее характеристик) для тождеств приведения к стандартной форме, в накопитель x11 - аналогичные тройки для исходных тождеств стандартной формы. Переменной x13 присваивается набор символов B_i из протокола, переменной x14 - набор их оценок n_i . В нашем примере x13 - (отр, кн, дн), x14 - (1,2,2). В список установок на вывод внешнего оператора "прогрвывод" добавляется элемент (оценка x13 x14). Создаются стартовые приемы "быстрпреобр" и "окончание" вспомогательного нормализатора "текнорм". Теоремой этих приемов служит терм "быстрпреобр(текнорм списокпосылок общнорм уровень(4))".

Нормализатор "текнорм" пополняется приемами, выполняющими лексикографиче-

ское упорядочение коммутативных операций и исключение вложенных ассоциативно-коммутативных операций. Далее предпринимается создание приемов для тождеств приведения к стандартной форме и создание приемов для исходных упрощающих тождеств. В результате список вывода оказывается состоящим из исходного протокола и указанных упрощающих тождеств. Он переупорядочивается по возрастанию длины теорем, и на этом работа приема завершается. Дальше происходит обычное сканирование списка вывода и срабатывания приемов для характеристики "станд".

4.7 Протокол "факторизация"

Протокол "факторизация(A)" представляет собой установку на вывод тождеств приведения к заголовку A .

Цикл вывода тождеств приведения к заданному заголовку реализуется по следующей схеме. В качестве стартовых теорем генерируются несколько тождеств раскрытия скобок по дистрибутивности (т.е. для операции A должны иметься тождества такого типа). Рассматривается как простейший случай "вынесения общего множителя" из суммы нескольких слагаемых, так и случаи перемножения нескольких сумм, по нескольку слагаемых в каждой. Вслед за первым пунктом ячейки вывода размещается пункт, в котором располагаются несколько тождеств типа сокращения, т.е. тождеств, в которых число "слагаемых" заменяющей части меньше числа слагаемых заменяемой. Вывод состоит в последовательном применении таких сокращающих тождеств к заменяемой части тождеств приведения к заголовку A , полученных ранее. Как и в случае протокола "стандформа", протокол "факторизация" обычно сопровождается ограничителем "число(N)" количества выводимых теорем. По выводимым тождествам создаются приемы вспомогательного нормализатора приведения к заголовку A "текнорм", который используется для усмотрения избыточных тождеств и по завершении цикла вывода удаляется.

В список $x16$ заносится набор пар (теорема - список ее характеристик) для всех сокращающих тождеств, указанных в ячейке вывода. Они распознаются по характеристике "нормализация(...)". К списку установок на вывод внешнего оператора "прогрвывод" добавляется набор (факторизация $x9$ ($P A$) $x16$), где P -

В качестве примера рассмотрим протокол "факторизация(умножение)" с характеристиками "протокол", "число(100)". В ячейке вывода используется единственное сокращающее тождество $\forall_a(a - \text{число} \rightarrow a - a = 0)$. Цикл вывода обеспечивает получение различных формул сокращенного умножения, пополняя их список экзотическими соотношениями вроде " $hg^4 + g^5 + h^5 = (gh + g^2 + h^2)(g^3 + h^3 - gh^2)$ ".

Прежде всего, установка на вывод внешнего оператора "прогрвывод" переопределяется на пару (начало число(N)). Переменной $x9$ присваивается символ из протокола. В нашем примере - "умножение". Создаются стартовые приемы "быстрпреобр" и "окончание" вспомогательного нормализатора "текнорм". Теоремой этих приемов служит терм "быстрпреобр(текнорм списокпосылки общнорм уровень(4))". Справочник "дистрибразвертка" определяет список ссылок "теорема(...)" на тождества дистрибутивности для операции $x9$. Последовательно просматриваются тождества $x13$ данного списка, причем переменной $x14$ присваивается набор характеристик тождества $x13$. В нашем примере будут рассмотрены два тождества дистрибутивности; одно для вещественного сложения, другое - для комплексного. Для текущего тождества $x13$ вводится прием оператора "текнорм".

В список x16 заносится набор пар (теорема - список ее характеристик) для всех сокращающих тождеств, указанных в ячейке вывода. Они распознаются по характеристике "нормализация(...)". К списку установок на вывод внешнего оператора "прогрвывод" добавляется набор (факторизация x9 (x13 x14) x16). Далее создаются теоремы, обобщающие исходное тождество дистрибутивности на случай произведения двух "сумм", в каждой из которых два либо три слагаемых. Они регистрируются в списке вывода с характеристикой (факторизация x9 второйтерм). По ним сразу же создаются приемы оператора "текторм". По завершении обработки тождеств x13 работа данного приема завершается. Дальнейшие действия будут выполняться приемом справочника "прогрвывод" при сканировании списка вывода. Этот прием, иницируемый характеристикой "факторизация", был описан ранее. В нашем примере, к моменту первого применения последнего приема, список вывода содержит исходный протокол и тождества

$$\forall_{abde}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow ad + ae + bd + be = (a + b)(d + e))$$

$$\forall_{abdef}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow ad + ae + af + bd + be + bf = (a + b)(d + e + f))$$

$$\forall_{abcdef}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \rightarrow ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf = (a + b + c)(d + e + f)).$$

4.8 Протокол "родобъекта"

Протокол "родобъекта(A)" указывает, что A - название одного из основных типов объектов (число, точка и т.п.).

Отбрасывание избыточного обобщенного antecedента - равенства в консеквенте

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bB}(\neg(b - \text{натуральное}) \rightarrow \forall_a(a - \text{натуральное} \ \& \ B(a) \rightarrow a = b) \leftrightarrow \forall_a(a - \text{натуральное} \rightarrow \neg(B(a))))$$

из протокола

"родобъекта(натуральное)".

Переменной x7 присваивается первый операнд протокола. Переменной x10 присваивается терм "не(x7(b))", переменной x11 - утверждение "эквивалентно(длялюбого(a если x7(a) значение(B a) то равно(a b)) длялюбого(a если x7(a) то не(значение(B a))))". Создается импликация с antecedентами x10 и консеквентом x11. Она регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "antecedенты(второйтерм)".

4.9 Протокол "Линреш"

Протокол "Линреш(A)" означает, что для числовых атомов с заголовком A создаются приемы выражения одного атома через другой из линейного уравнения. Необходимость индивидуального рассмотрения таких уравнений, хотя имеются несложные

общие формулы, продиктована тем, что условия, при которых целесообразно разрешение относительно числового атома, для различных атомов могут существенно отличаться. Различными будут и уровни срабатывания разрешающих приемов. Особенно наглядно это видно на примере планиметрических приемов решателя. Некоторую роль играет также ускорение идентификации, так как разрешающие приемы будут инициироваться сравнительно редко встречающимися названиями атомов.

Решение линейного уравнения общего вида

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefg}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ e - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \rightarrow el(ab) + fl(cd) = g \leftrightarrow l(ab) = (g - fl(cd))/e)$$

из протокола

"линреш(расстояние)".

Переменной x7 присваивается логический символ из протокола. В нашем примере - символ "расстояние". Переменной x8 присваивается аридность этого символа. В нашем примере - 2. Проверяется, что эта аридность больше 0 и меньше 9. Переменной x9 присваивается список различных переменных, длина которого равна x8. В нашем примере - a, b . Переменной x10 присваивается список переменных, не входящих в список x9, причем длина этого списка равна длине списка x9. В нашем примере - c, d . Переменной x11 присваивается результат соединения операцией x7 набора переменных x9, переменной x12 - набора x10. В нашем примере - $l(ab), l(cd)$. Выбираются переменные x14, x15, x16, не входящие в списки x9 и x10. В нашем примере - переменные e, f, g . Переменной x17 присваивается равенство "равно(плюс(умножение(x14 x11)умножение(x15 x12))x16)", переменной x18 - равенство "равно(x11 дробь(плюс(x16 минус(умножение(x15 x12)))x14))". Создается импликация с единственным антецедентом "не(равно(x14 0))" и консеквентом "эквивалентно(x17 x18)". Она обрабатывается оператором "Полныепосылки" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "выражение(второйтерм)".

Выражение числового атома из явного соотношения пропорциональности

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefg}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ e - \text{число} \rightarrow el(ab) = fl(cd) \leftrightarrow l(ab) = fl(cd)/e)$$

из протокола

"линреш(расстояние)".

Начало программы приема полностью совпадает с началом программы предыдущего приема. Различия начинаются при определении значения переменной x17. Теперь это равенство "равно(умножение(x14 x11) умножение(x15 x12))". Переменной x18 присваивается равенство "равно(x11 дробь(умножение(x15 x12)x14))". Создается импликация с единственным антецедентом "не(равно(x14 0))" и консеквентом "эквивалентно(x17 x18)". Она обрабатывается оператором "Полныепосылки" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "выражение(второйтерм)".

Выражение числового атома из неявного соотношения пропорциональности

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdef}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \\ e - \text{число} \rightarrow el(ab) + fl(cd) = 0 \leftrightarrow l(ab) = -fl(cd)/e)$$

из протокола

"линреш(расстояние)".

Начало программы приема полностью совпадает с началом программы предыдущего приема. Различия начинаются при определении значения переменной x17. Теперь это равенство "равно(плюс(умножение(x14 x11) умножение(x15 x12))0)". Переменной x18 присваивается равенство "равно(x11 минус(дробь(умножение(x15 x12)x14)))". Создается импликация с единственным антецедентом "не(равно(x14 0))" и консеквентом "эквивалентно(x17 x18)". Она обрабатывается оператором "Полныепосылки" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "выражение(второйтерм)".

Выражение числового атома из равенства для суммы двух числовых атомов

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdg}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ g - \text{число} \rightarrow \\ l(ab) + l(cd) = g \leftrightarrow l(ab) = g - l(cd))$$

из протокола

"линреш(расстояние)".

Начало программы приема полностью совпадает с началом программы предыдущего приема. Различия начинаются при определении значения переменной x17. Теперь это равенство "равно(плюс(x11 x12)x16)". Переменной x18 присваивается равенство "равно(x11 плюс(x16 минус(x12)))". Создается импликация без антецедентов с консеквентом "эквивалентно(x17 x18)". Она обрабатывается оператором "Полныепосылки" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "выражение(второйтерм)".

Выражение числового атома из равенства для разности двух числовых атомов

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdg}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ g - \text{число} \rightarrow \\ l(ab) - l(cd) = g \leftrightarrow l(ab) = g + l(cd))$$

из протокола

"линреш(расстояние)".

Начало программы приема полностью совпадает с началом программы предыдущего приема. Различия начинаются при определении значения переменной x17. Теперь это

равенство "равно(плюс(х11 минус(х12))х16)". Переменной х18 присваивается равенство "равно(х11 плюс(х16 х12))". Создается импликация без антецедентов с консеквентом "эквивалентно(х17 х18)". Она обрабатывается оператором "Полныепосылки" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "выражение(второйтерм)".

Выражение числового атома из равенства для суммы этого атома и произведения на коэффициент другого атома

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdefg}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \rightarrow l(ab) + fl(cd) = g \leftrightarrow l(ab) = g - fl(cd))$$

из протокола

"линреш(расстояние)".

Начало программы приема полностью совпадает с началом программы предыдущего приема. Различия начинаются при определении значения переменной х17. Теперь это равенство "равно(плюс(х11 умножение(х15 х12))х16)". Переменной х18 присваивается равенство "равно(х11 плюс(х16 минус(умножение(х15 х12))))". Создается импликация без антецедентов с консеквентом "эквивалентно(х17 х18)". Она обрабатывается оператором "Полныепосылки" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "выражение(второйтерм)".

4.10 Протокол "числатом"

Протокол "числатом(A)" означает, что для числовых атомов с заголовком A создаются приемы выражения этого атома из простейших уравнений.

Решение линейного уравнения общего вида

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow cl(ab) + d = e \leftrightarrow l(ab) = (e - d)/c)$$

из протокола

"числатом(расстояние)".

Переменной х7 присваивается логический символ из протокола. В нашем примере - символ "расстояние". Переменной х8 присваивается арность этого символа. В нашем примере - 2. Проверяется, что эта арность больше 0 и меньше 9. Переменной х9 присваивается список различных переменных, длина которого равна х8. В нашем примере - a, b . Переменной х10 присваивается результат соединения операцией х7 набора переменных х9. В нашем примере - $l(ab)$. Выбираются переменные х12, х13, х14, не входящие в список х9. В нашем примере - переменные c, d, e . Переменной х15 присваивается равенство "равно(плюс(умножение(х12 х10)х13)х14)", переменной х16 - равенство "равно(х10 дробь(плюс(х14 минус(х13))х12))". Создается импликация с единственным антецедентом "не(равно(х12 0))" и консеквентом "эквивалентно(х15 х16)". Она обрабатывается оператором "Полныепосылки" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "числ(второйтерм)".

Решение линейного уравнения без свободного члена

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow cl(ab) = d \leftrightarrow l(ab) = d/c)$$

из протокола

"числатом(расстояние)".

Начало программы приема полностью совпадает с началом программы предыдущего приема. Различия начинаются при определении значения переменной x15. Теперь это равенство "равно(умножение(x12 x10))x13)". Переменной x16 присваивается равенство "равно(x10 дробь(x13 x12))". Создается импликация с единственным антецедентом "не(равно(x12 0))" и консеквентом "эквивалентно(x15 x16)". Она обрабатывается оператором "Полныепосылки" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "числ(второйтерм)".

Решение линейного уравнения без свободного члена с дробным коэффициентом

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcde}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ \neg(d = 0) \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow cl(ab)/d = e \leftrightarrow l(ab) = de/c \ \& \ \neg(c = 0))$$

из протокола

"числатом(расстояние)".

Начало программы приема полностью совпадает с началом программы предыдущего приема. Различия начинаются при определении значения переменной x15. Теперь это равенство "равно(дробь(умножение(x12 x10)x13)x14)". Переменной x16 присваивается утверждение "и(равно(x10 дробь(умножение(x13 x14)x12)) не(равно(x12 0)))". Создается импликация с антецедентами "не(равно(x13 0))", "не(равно(x14 0))" и консеквентом "эквивалентно(x15 x16)". Она обрабатывается оператором "Полныепосылки" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "числ(второйтерм)".

4.11 Протокол "линкомб"

Протокол "числатом(A)" означает, что для числовых атомов с заголовком A создаются приемы комбинации уравнений с этими атомами.

Комбинация двух уравнений для исключения заданного числового атома

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcdef}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ cl(ab) + d = 0 \ \& \ \neg(c = 0) \ \& \ c - \text{число} \rightarrow el(ab) + f = 0 \leftrightarrow cf - de = 0)$$

из протокола

"линкомб(расстояние)".

Переменной x_7 присваивается логический символ из протокола. В нашем примере - символ "расстояние". Переменной x_8 присваивается арность этого символа. В нашем примере - 2. Проверяется, что эта арность больше 0 и меньше 9. Переменной x_9 присваивается список различных переменных, длина которого равна x_8 . В нашем примере - a, b . Переменной x_{10} присваивается результат соединения операцией x_7 набора переменных x_9 . В нашем примере - $l(ab)$. Выбираются переменные $x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}$, не входящие в список x_9 . В нашем примере - переменные c, d, e, f . Переменной x_{16} присваивается равенство "равно(плюс(умножение($x_{12} x_{10}$) x_{13})0)", переменной x_{17} - равенство "равно(плюс(умножение($x_{14} x_{10}$) x_{15})0)", переменной x_{18} - равенство "равно(плюс(умножение($x_{12} x_{15}$) минус(умножение($x_{13} x_{14}$)))0)". Создается импликация с антецедентами x_{16} , "не(равно($x_{12} 0$))" и консеквентом "эквивалентно($x_{17} x_{18}$)". Она обрабатывается оператором "Полныепосылки" и регистрируется в списке вывода с единственной характеристикой "уравнменьше(второйтерм)".

Комбинация двух уравнений для вывода равенства двух числовых атомов

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$\forall_{abcdef}(a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ c - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ el(ab) = f \ \& \ \neg(e = 0) \ \& \ e - \text{число} \rightarrow el(cd) = f \leftrightarrow l(ab) = l(cd))$

из протокола

"линкомб(расстояние)".

Переменной x_7 присваивается логический символ из протокола. В нашем примере - символ "расстояние". Переменной x_8 присваивается арность этого символа. В нашем примере - 2. Проверяется, что эта арность больше 0 и меньше 9. Переменной x_9 присваивается список различных переменных, длина которого равна x_8 . В нашем примере - a, b . Переменной x_{10} присваивается список переменных, не входящих в список x_9 , и имеющий ту же длину, что список x_9 . В нашем примере - c, d . Переменной x_{11} присваивается результат соединения операцией x_7 переменных x_9 , переменной x_{12} - результат соединения этой операцией переменных x_{10} . Выбираются переменные x_{14} и x_{15} , не входящие в списки x_9 и x_{10} . В нашем примере - переменные e, f . Переменной x_{16} присваивается импликация с антецедентами "равно(умножение($x_{14} x_{11}$) x_{15})", "не(равно($x_{14} 0$))" и консеквентом "эквивалентно(равно(умножение($x_{14} x_{12}$) x_{15}) равно($x_{11} x_{12}$))". Эта импликация обрабатывается оператором "Полныепосылки" и регистрируется в списке вывода с характеристикой "численныйатом(второйтерм)".

Глава 5

Приемы вывода теорем, не связанные с характеристиками

Обычно приемы вывода теорем инициируются рассмотрением некоторой характеристики текущей теоремы списка вывода. Однако, несколько приемов не связаны с рассмотрением какой-либо характеристики теоремы. Они сгруппированы в процедуре "блоквывода". Обращение к данной процедуре происходит из процедуры "прогрывывод" на нулевом текущем уровне. Выйти на точку ЛОС-программы, где выполняется такое обращение, можно через пункт "База теорем" - "Программирующий вывод" - "Процедура ПРОГРВЫВОД" - "Вывод безотносительно к характеристикам теоремы" оглавления программ. Перейти к программе процедуры "блоквывода" можно через пункт "База теорем" - "Программирующий вывод" - "Приемы вывода теорем (процедура БЛОКВЫВОДА)" оглавления программ.

Обращение к процедуре имеет вид "блоквывода(x1 x2)", где x1 - пара (список четверок (вес - теорема - характеристики - блок вывода), образующих текущий список вывода - индикатор изменений), x2 - текущая четверка списка вывода.

Переход от переменной для пары к явному заданию пары

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \rightarrow (c, d) \in a \times b \leftrightarrow c \in a \ \& \ d \in b)$$

из теоремы

$$\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \rightarrow f \in a \times b \leftrightarrow l(f) = 2 \ \& \ f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b \ \& \ f - \text{слово})$$

Переменной x3 присваивается исходная теорема, переменной x4 - список ее характеристик, переменной x5 - ее блок вывода. Проверяется, что x3 - кванторная импликация. Переменной x6 присваивается вхождение в нее символа "слово". Проверяется, что x6 - операнд вхождения x7 некоторой конъюнкции, причем операндом вхождения x6 служит некоторая переменная x8. В нашем примере x6 - вхождение утверждения "f - слово", x7 - вхождение конъюнкции "l(f) = 2 & f(1) ∈ a & f(2) ∈ b & f - слово", x8 - переменная f. Переменной x9 присваивается вхождение операнда вхождения x7, представляющего собой равенство, имеющее вид "равно(длинанабора(x8)2)". Проверяется, что исходная теорема является стартовой теоремой ячейки вывода. Рассматривается вхождение x12 квантора, внутри которого расположено вхождение x7. В нашем примере x12 - корневое вхождение квантора общности. Переменной x13

присваивается связывающая приставка квантора x_{12} . Проверяется, что она содержит переменную x_8 . Переменной x_{14} присваивается конъюнкция операндов вхождения x_7 , отличных от x_6 и x_9 . Переменной x_{15} присваивается результат замены в подтерме x_{12} вхождения x_7 на вхождение x_{14} . В нашем примере x_{15} имеет вид " $\forall_{abf}(a - \text{set} \ \& \ b - \text{set} \ \rightarrow \ f \in a \times b \leftrightarrow f(1) \in a \ \& \ f(2) \in b)$ ". Выбираются переменные X, Y , не входящие в исходную теорему. В нашем примере - переменные c, d . Переменной x_{17} присваивается результат замены в списке x_{13} переменной x_8 на переменные X, Y . Переменной x_{18} присваивается выражение "набор(X, Y)". Переменной x_{19} присваивается набор, образованный консеквентом утверждения x_{15} , к которому добавлены все антецеденты этого утверждения. Если x_{19} не является кванторной импликацией, то x_{19} состоит из утверждения x_{15} . Переменной x_{20} присваивается список результатов подстановки выражения x_{18} вместо переменной x_8 в утверждения списка x_{19} . Если x_{15} - кванторная импликация, то переменной x_{21} присваивается утверждение "длялюбого(x_{17} если P то Q)", где Q - первый элемент набора x_{20} , P - список остальных элементов набора x_{20} . Если x_{15} не является кванторной импликацией, то переменной x_{21} присваивается утверждение "существует(x_{17} и(x_{20}))". Переменной x_{22} присваивается результат замены вхождения x_{12} в исходную теорему на терм x_{21} . Переменной x_{23} присваивается результат обработки теоремы x_{22} оператором "нормтеорема". В нашем примере x_{23} - указанная выше итоговая теорема. Проверяется, что этой теоремы или ее эквивалента нет в списке вывода. Далее она регистрируется в списке вывода. Вместо обращения к оператору "регтеор" здесь предпринимается непосредственное обращение к характеристизатору, формирование новой четверки для списка вывода и ее добавление к концу данного списка.

Разбиение теоремы с условным выражением на две теоремы для подслу- чаев

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ a \leq b \rightarrow \max(a, b) = b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow \max(a, b) = (b \text{ при } a \leq b, \text{ иначе } a))$$

Переменной x_3 присваивается исходная теорема, переменной x_4 - список ее характеристик, переменной x_5 - ее блок вывода. Проверяется, что x_3 - кванторная импликация. Переменной x_6 присваивается вхождение в ее консеквент символа "вариант". Проверяется, что оно не заключено внутри другого подтерма с заголовком "вариант". В нашем примере x_6 - вхождение выражения " $(b \text{ при } a \leq b, \text{ иначе } a)$ ". Переменной x_7 присваивается связывающая приставка импликации x_3 . Проверяется, что она содержит все параметры подтерма x_6 . Переменной x_8 присваивается список антецедентов теоремы x_3 . Поочередно рассматриваются два случая. В первом из них переменной x_9 присваивается первый операнд вхождения x_6 , а переменной x_{10} - второй операнд. Во втором случае переменной x_9 присваивается отрицание первого операнда вхождения x_6 , а переменной x_{10} - последний операнд этого вхождения. В нашем примере рассматривается первый случай. Переменной x_{11} присваивается результат замены в консеквенте исходной теоремы вхождения x_6 на выражение x_{10} , переменной x_{12} - результат добавления к списку x_8 утверждения x_9 . Переменной x_{13} присваивается импликация с антецедентами x_{12} и консеквентом x_{11} . Она обрабатывается оператором "нормтеорема", а затем - оператором "сокращантецеденты".

Проверяется, что результат x15 представляет собой кванторную импликацию, отсутствующую (с точностью до простейшего варьирования) в списке вывода. Затем теорема x15 регистрируется в списке вывода. Характеристики ее определяются процедурой "характеризатор".

Исключение антецедентов, явно выражающих переменные

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{bcd}(b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \rightarrow \ c = d \leftrightarrow b + c = b + d)$$

из теоремы

$$\forall_{abcd}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ a = b \ \rightarrow \ c = d \leftrightarrow a + c = b + d)$$

Переменной x3 присваивается исходная теорема, переменной x4 - список ее характеристик, переменной x5 - ее блок вывода. Проверяется, что x3 - кванторная импликация. Переменной x6 присваивается список ее антецедентов, переменной x7 - корневая связывающая приставка, переменной x8 - консеквент. Если в списке x6 встречается равенство R переменной x не содержащему ее выражению t , то проверяется, не имеет ли место один из случаев, когда исключение x нецелесообразно. Например, если равенство определяет систему координат либо временной промежуток. Если такой ситуации нет, то переменной x6 переписывается список результатов подстановки t вместо x в отличные от R утверждения списка x6, а переменной x8 - результат такой же подстановки в утверждение x8. Данная процедура применяется до исчерпания возможностей. Если список x6 был изменен, то создается импликация с антецедентами x6 и консеквентом x8. Она обрабатывается оператором "нормтеорема" и, после проверки отсутствия ее в списке вывода, регистрируется в данном списке.

Консеквент допускает простейшие стандартизирующие преобразования

В качестве примера рассмотрим вывод теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \rightarrow \ a + b - a = b)$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \rightarrow \ a + (b - a) = b)$$

Переменной x3 присваивается исходная теорема, переменной x4 - список ее характеристик, переменной x5 - ее блок вывода. Проверяется, что x3 - кванторная импликация. Переменной x6 присваивается список ее антецедентов, переменной x7 - корневая связывающая приставка, переменной x8 - консеквент. Предпринимается, пока это возможно, цикл следующих преобразований терма x8:

1. Если в терме x8 встречается равенство с равными частями, оно заменяется на константу "истина".
2. Если в терме x8 встречаются вложенные ассоциативно-коммутативные операции с одинаковым заголовком, то они объединяются в одну операцию с тем же заголовком.
3. Терм x8 обрабатывается нормализатором "нормлог", и если результат отличен от исходного терма, то он переписывается переменной x8.

Если терм x_8 был преобразован, то создается импликация с антецедентами x_6 и новой версией терма x_8 в качестве консеквента. Проверяется, что эта импликация отсутствует в списке вывода, после чего она в нем регистрируется.

Глава 6

Попытка классификации приемов вывода теорем

Приведенный выше список приемов вывода теорем уже сейчас является неполным. Анализ примеров вывода продолжался параллельно с написанием этой книги, следствием чего явились сотни новых приемов, не отраженных в ней. Тем не менее, уже сложившаяся картина показывает, что для объяснения происхождения даже только одних вариаций теорем, необходимых решателю, приемов вывода теорем понадобится чрезвычайно много. При этом сами объяснения, как правило, почти однозначны и не оставляют надежды на сколь-нибудь существенные альтернативы.

Похожая ситуация имела место при обучении решателя на ГЕНОЛОГе. В том случае продвижения удалось добиться с помощью классификации приемов решателя. Она привела к появлению логического ассемблера и основанного на нем генератора приемов. Можно предположить, что и в случае приемов вывода теорем классификация накопленного материала позволит подняться на более высокий уровень. Либо она подскажет принципы автоматического создания новых приемов вывода, либо позволит, хотя бы вручную, довести коллекцию этих приемов до состояния полноты.

Пока последнее представляется более вероятным, так как большинство приемов имеет общелогический характер. Иногда их можно слегка обобщить, но и не более того. К тому же уже сейчас, по крайней мере как аппарат программирующего вывода, имеющаяся база приемов вывода демонстрирует способность находить множество полезных (пусть пока простых) следствий из исходных определений и теорем. Тем самым реализуется что-то вроде "понимания" этих теорем и определений. Для усиления данной способности нужно попросту продолжать обучение системы.

Программирующий логический вывод является частью процесса алгоритмизации теорем. Он близко примыкает к исследовательскому логическому выводу, обеспечивающему получение самих теорем. В приведенной выше коллекции многие приемы относились скорее к исследовательскому, нежели программирующему выводу. Вероятно, к такой категории естественно отнести приемы, "открывающие" формулу Кардано, теорему Пифагора, различные теоремы из аналитической геометрии и математического анализа. Граница между этими двумя категориями приемов весьма условная. И те, и другие обычно прибегают к помощи решателя. Конечно, обычная практика математических исследований заключается в постановке задач и попытках их решить. Но для такого решения уже нужно иметь какие-то приемы, и далеко не всегда попытки добиться результата "в лоб" оказываются успешными. Возможно, по мере проработки новых примеров, связанных уже с исследовательским выводом, все

большую роль будет играть логика постановки задач и заблаговременное развитие решателя, а поток приемов непосредственного извлечения следствий из теорем, которые и составляют приведенную выше коллекцию, окажется доведен до насыщения. На этом этапе работы трудно оценивать такие перспективы. Для получения точной картины придется продолжать анализ примеров.

На текущий момент была предпринята лишь предварительная классификация приемов вывода теорем. Чтобы ее зафиксировать, было создано оглавление типов приемов вывода теорем. Попасть в данное оглавление можно из оглавления программ нажатием клавиши "т" (кир). Каждый прием справочника "прогрвывод" соответствует некоторому конечному пункту оглавления типов приемов. Если войти в конечной пункт ветви "База теорем" - "Программирующий вывод" - "Приемы вывода теорем (справочник ПРОГРВЫВОД)" оглавления программ, соответствующий некоторому приему вывода теорем, и нажать "Т" (кир.), то произойдет переход в связанный с этим приемом конечной пункт оглавления типов приемов вывода теорем. Название этого пункта совпадает с названием соответствующего пункта оглавления приемов. После названия в скобках добавлена пара (логический символ, к которому относится ЛОС-программа приема - номер N контрольной точки "прием(N)" в этой программе). Чтобы перейти из конечного пункта оглавления типов приемов в конечной пункт оглавления программ, достаточно нажать "курсор вправо".

Если нужно зарегистрировать в оглавлении типов приемов новый прием, следует войти в просмотр конечного пункта оглавления программ, соответствующего данному приему, нажать "т" для перехода в оглавление типов, выбрать нужный подраздел последнего оглавления и нажать "д". В конце меню этого подраздела автоматически сформируется ссылка на прием. В рамках оглавления типов приемов вывода перенесение пунктов из раздела в раздел предпринимается обычными средствами.

Прием вывода теорем - объект гораздо более сложный, чем правило вывода в математической логике. Как правило, исходной точкой для его срабатывания служит рассмотрение некоторой теоремы. Однако, в отличие от правила вывода, которому в явном виде сообщается весь набор теорем, из которых извлекается следствие, прием вывода должен сам находить нужные дополнительные теоремы. Делает он это, руководствуясь определенными целевыми соображениями. Собственно, даже инициализация попытки срабатывания приема осуществляется при рассмотрении какой-либо характеристики теоремы, указывающей на возможные цели ее применения. В правиле вывода целевые соображения отсутствуют. После того, как необходимый приему набор теорем получен, он применяет некоторый алгоритм вывода следствий. "Обычные" правила вывода в логике формируют следствие непосредственно из фрагментов исходных теорем. Прием вывода может обращаться для получения фрагментов следствия к цепочке вспомогательных задач, используя весь потенциал решателя. Это существенно усложняет какое-либо предсказание результатов вывода, так как процесс решения задачи иногда насчитывает сотни шагов. Завершающее редактирование полученного следствия обеспечивается опять-таки обращением к решателю. Оно присутствует практически в каждом приеме. Наконец, после получения следствия прием вывода осуществляет его характеристику - снабжает группой характеристик, предопределяющих цели дальнейших шагов вывода. Вкратце последовательность действий типичного приема вывода теорем можно представить так: поиск дополнительных теорем - применение алгоритма вывода - сборка следствия из фрагментов - редактирование его - характеристика.

Гибридный характер приемов вывода создает определенные трудности при их клас-

сификации. Можно считать первичной классификацию их по алгоритмам вывода, либо по целевой направленности, либо каким-то образом сочетать одно с другим. Мы представим здесь лишь предварительную версию классификации. Работа над ней лишь начата, и скорее всего она будет существенно переработана. Однако, приведенные выше описания приемов вывода теорем представляют собой лишь перефразировку программ ЛОСа, и понимание смысла их действий затруднено. Поэтому даже совсем несовершенная классификация могла бы сделать более наглядной хотя бы общую картину.

За основу классификации пока взяты алгоритмы вывода. Следует понимать, что иногда для одного и того же алгоритма создавались десятки различных приемов, отличающихся целевой ориентацией. Кроме того, в ряде случаев один и тот же прием инициировался рассмотрением различных характеристик, и тогда создавались копии его программы.

Ниже мы ограничимся перечислением лишь разделов, опуская перечни приемов, к ним отнесенных. В каждом разделе приводим число приемов этого раздела. Еще раз напомним, что приводится только классификация приемов. Краткость названий разделов этой классификации, безусловно, создает затруднения для понимания. Однако, с помощью программы логической системы можно перейти от названия раздела к названиям входящих в него приемов, далее - к самим приемам и к примерам их срабатываний. Обычно это полностью проясняет ситуацию.

Кванторные импликации, консеквент которых - равенство либо эквивалентность, ниже называем, соответственно, тождествами и эквивалентностями. Если консеквент не является ни равенством, ни эквивалентностью, кванторную импликацию называем импликацией.

Ниже учтены только приемы справочника "прогрвывод". Всего 1706 приемов.

6.1 Простейшие следствия теоремы

В этом разделе собраны приемы, наиболее приближенные к обычным одноместным правилам вывода. Всего 518 приемов.

Преобразование кванторной импликации

42 приема.

1. Контрапозиции импликации. 21 прием.

- (a) Простая контрапозиция: отрицание консеквента становится антецедентом, а отрицание некоторого антецедента - консеквентом. 6 приемов.
- (b) Простая контрапозиция с упрощением отрицаний. 4 приема.
- (c) Простая контрапозиция с дизъюнктивным консеквентом: отрицания его дизъюнктивных членов переносятся в антецеденты, а отрицание некоторого антецедента превращается в консеквент. 1 прием.
- (d) Контрапозиция и замена нового антецедента на более сильное ограничение. 1 прием.

- (e) Антецедент $P(A, B)$ с транзитивным отношением P заменяется на два антецедента $P(A, C)$ и $P(D, B)$ для новых объектов C, D . Затем отрицание консеквента переносится в антецеденты, а в консеквент переносится отрицание равенства объектов C, D . 1 прием.
 - (f) Несколько антецедентов объединяются в конъюнкцию, после чего предпринимается ее контрапозиция с консеквентом. 1 прием.
 - (g) Контрапозиция после развертки отрицания консеквента в квантор существования. 1 прием.
 - (h) Перенесение в антецеденты отрицания консеквента и замена консеквента на константу "ложь". 1 прием.
 - (i) Антецедент разбивается на два подутверждения, возможно, со вводом вспомогательного параметра. Затем контрапозиция реализуется для одного из этих подутверждений. 1 прием.
 - (j) Вводится вспомогательное обозначение для подвыражения консеквента, после чего контрапозиция предпринимается для равенства, вводящего это обозначение. 4 приема.
 - (k) Отрицание антецедента добавляется к консеквенту в качестве дизъюнктивного члена. 1 прием.
2. Перестановка местами антецедента и консеквента без перехода к отрицаниям. 3 приема.
- (a) Усмотрение того, что антецедент A является следствием прочих антецедентов и конъюнктивного члена B консеквента, после чего B переносится в антецеденты, а A становится консеквентом. 2 приема.
 - (b) Усмотрение того, что один из конъюнктивных членов A консеквента является следствием другого члена B , даже при удалении антецедента C . Тогда C удаляется, B становится антецедентом, а A - консеквентом. 1 прием.
3. Частичная свертка кванторной импликации. 5 приемов.
- (a) Квантор общности по одной из переменных кванторной приставки заносится вглубь теоремы и сворачивается в элементарное утверждение. 3 приема.
 - (b) Квантор общности по одной из переменных кванторной приставки заносится вглубь теоремы и сворачивается в другую кванторную импликацию, имеющую более простые понятия. 1 прием.
 - (c) Квантор существования по некоторой переменной навешивается на все содержащие эту переменную антецеденты, а затем такой же квантор - на консеквент. В обоих случаях кванторы сворачиваются в элементарные утверждения. 1 прием.
4. Развертка консеквента в кванторную импликацию. 1 прием.
5. Преобразования импликации с дизъюнкцией в консеквенте. 5 приемов.
- (a) Вывод эквивалентности отрицания одного из дизъюнктивных членов консеквента дизъюнкции остальных членов. 1 прием.

- (b) Один из дизъюнктивных членов заменяется на более слабое ограничение. 1 прием.
 - (c) Дизъюнкция с альтернативными членами позволяет перегруппировать дизъюнктивно-конъюнктивную конструкцию с двумя другими дизъюнкциям, альтернативы которых содержат в качестве своих фрагментов альтернативы исходной дизъюнкции, в одну дизъюнкцию с такими же фрагментами. 2 приема.
 - (d) Исключение дизъюнкции путем отождествления дизъюнктивных членов. 2 приема.
 - (e) Упрощение дизъюнктивных членов. 1 прием.
6. Преобразования импликации с конъюнкцией в консеквенте. 2 приема.
- (a) Сохранение в консеквенте лишь одного из конъюнктивных членов. 2 приема.
7. Преобразования импликации с квантором в консеквенте. 5 приемов.
- (a) Квантор общности из консеквента выносится в начало теоремы. Если при этом консеквент становится конъюнктивным, сохраняется лишь один из конъюнктивных членов. 1 прием.
 - (b) Отбрасывание части утверждений под квантором существования в консеквенте. 1 прием.
 - (c) Извлечение из параметрического описания класса условия на сам класс. 2 приема.
 - (d) Попытка перестановки квантором общности и существования. 1 прием.

Преобразование кванторной эквивалентности

47 приемов.

1. Перенесение части конъюнктивных членов одной из частей эквивалентности в antecedенты. 9 приемов.
2. Преобразование кванторной эквивалентности с дизъюнкцией в одной из своих частей. 18 приемов.
 - (a) Одна из частей эквивалентности - дизъюнкция равенства $x = t$ и некоторого утверждения $P(x)$. Равенство в данной дизъюнкции отбрасывается, в другую часть эквивалентности переносится его отрицание, и к antecedентам добавляется утверждение $\neg P(t)$. 1 прием.
 - (b) Сохранение в консеквенте единственного дизъюнктивного члена путем перенесения в antecedенты фрагмента этого дизъюнктивного члена, несовместного с остальными дизъюнктивными членами либо отождествляющего их с данным членом. 3 приема.
 - (c) В одной из частей консеквента располагается недизъюнктивная часть A , а в другой - дизъюнкция утверждений B и C . Кванторная импликация, выражающая, что из B вытекает $\neg C$, сворачивается в элементарное утверждение D . Затем A и D переносятся в antecedенты, а консеквентом становится эквивалентность B и $\neg C$. 2 приема.

- (d) Перенесение в antecedentes отрицаний фрагментов дизъюнктивных членов одной из частей консеквента. 8 приемов.
 - (e) В одной из частей эквивалентности находится дизъюнкция равенств переменной различным константам. Выводится эквивалентность существования значений этой переменной, удовлетворяющих дополнительным условиям, дизъюнкции таких условий для константных альтернатив. 1 прием.
 - (f) Попытка подбора параметров, отождествляющих дизъюнктивные члены. 1 прием.
 - (g) Вывод эквивалентности недизъюнктивной части A дизъюнкции $A \vee B$, где B - один из дизъюнктивных членов другой части. 1 прием. 1 прием.
 - (h) Решение задачи на описание для получения дополнительных antecedентов теоремы, при которых дизъюнкция в заменяющей части сводится к одному из своих подслучаев. 1 прием.
3. Преобразование эквивалентности, выполняющей кванторную свертку. 10 приемов.
- (a) Попытка исключения кванторной импликации в одной из частей эквивалентности путем отождествления antecedента с консеквентом либо с его отрицанием. 2 приема.
 - (b) Попытка свертки квантора в одной из частей эквивалентности в бескванторное утверждение. 1 прием.
 - (c) Antecedent кванторной импликации A имеет вид принадлежности варьируемой переменной x некоторому множеству a . Это множество заменяется на параметрическое описание класса, что позволяет свести условие принадлежности к новой варьируемой переменной y - параметру класса - и таким образом обеспечить развязку со "старым" входением x в консеквенте импликации A . 1 прием.
 - (d) Эквивалентность разворачивает элементарное утверждение в квантор существования. К обеим ее частям добавляется одно и то же дополнительное ограничение общего вида, после чего на обе части навешивается квантор существования по дополнительным параметрам этого ограничения. 1 прием.
 - (e) Подстановка вместо параметра заменяемой части сложного выражения, упрощение заменяющей части и обратная свертка при помощи той же теоремы. 1 прием.
 - (f) Исключение квантора существования в заменяющей части путем перенесения в antecedенты равенства, определяющего значение его связанной переменной. 1 прием.
 - (g) В заменяемой части усматривается элементарное утверждение A с переменной x и повторным ее входением в виде некоторого неоднобуквенного выражения $t(x)$. Проверяется, что значение $t(x)$ однозначно определяется по antecedентам и утверждению A , причем под квантором существования в заменяющей части имеется равенство $x = P$. Выбирается новая переменная y , которая замещает в заменяемой части выражение $t(x)$. При этом под квантор существования заносится дополнительное утверждение $y = t(P)$, после чего подкванторные утверждения упрощаются. 1 прием.

- (h) Заменяющая часть эквивалентности - общий вид уравнения для координат множества M точек специального вида. Вводится произвольная точка A данного множества, к антецедентам добавляется равенство для ее произвольных координат, и консеквентом становится эквивалентность существования содержащего A множества M указанного типа и определяемого указанным уравнением выполнению этого уравнения для координат точки A . 1 прием.
 - (i) Заменяющая часть эквивалентности - общий вид уравнения для координат множества M точек специального вида. Среди конъюнктивных членов квантора существования, дающего этот общий вид, усматриваются ограничения R на коэффициенты уравнения. Выводится эквивалентность условия существования множества M указанного вида с данным уравнением выполнению ограничений R . Эквивалентность проверяется при помощи вспомогательных задач. 1 прием.
4. Перенесение антецедента в заменяющую часть с проверкой корректности. 3 приема.
 5. Перенесение антецедента в заменяемую часть с проверкой корректности. 1 прием.
 6. На обе части эквивалентности навешивается отрицание. 5 приемов.
 7. Попытка ввести в заменяющей части условное выражение и предпринять обратную свертку для альтернатив. 1 прием.

Отождествление подтермов теоремы

13 приемов.

1. Отождествление переменных. 6 приемов.
2. Отождествление переменных и контрапозиция. 1 прием.
3. Отождествление подтермов. 6 приемов.

Подстановка константы либо некоторого простого выражения

44 приема.

1. Добавление антецедента, выражающего равенство некоторого выражения константе. 2 приема.
2. Подстановка вместо функциональной переменной константной либо тождественной функции. 9 приемов.
3. Подстановка вместо переменной константы, упрощающей выражение. 23 приема.
4. Подстановка вместо переменной специальной константы. 3 приема.
5. Рассмотрение множеств с малым числом элементов. 1 прием.

6. Рассмотрение наборов малой длины. 2 приема.
7. Замена набора на простейшую операцию над наборами. (конкатенация, суффикс, префикс, инвертирование и т.п.) 4 приема.

Варьирование либо исключение условного выражения

20 приемов.

1. Альтернативами условного выражения в заменяющей части равенства служат константы. Выводится эквивалентность существования значения параметра, при котором выполнено некоторое условие на заменяемую часть, дизъюнкции условий на альтернативные значения заменяемой части. 2 приема.
2. Исключение условного выражения путем добавления антецедента. 7 приемов.
3. Вывод общего следствия каждой из альтернатив условного выражения. 3 приема.
4. Обозначение условного выражения новой переменной и выражение через нее старого параметра. 1 прием.
5. Переход к отрицанию условия и перестановка альтернатив условного выражения. 1 прием.
6. Вывод условия равенства условного выражения одной из своих альтернатив. 2 приема.
7. Вывод эквивалентности для свертки дизъюнкции равенств новой переменной альтернативам условного выражения. 3 приема.
8. Вывод эквивалентности для равенства одной из частей тождества некоторой альтернативе, расположенной в другой ее части. 1 прием.

Использование параметрического описания

6 приемов.

1. Вывод равенства мощностей классов значений параметризуемой переменной до использования параметрического описания и после его использования. 3 приема.
2. Усмотрение типа объекта из выражения его через параметры. 1 прием.
3. Параметрическое описание равенства позволяет переформулировать условие существования для его левой части через условие существования для правой части. 1 прием.
4. Вывод условия равенства объектов, определяемых через параметрическое описание. 1 прием.

Специальная стандартизация теоремы

41 прием.

1. Группировка в одной части всех ненулевых членов двуместного отношения. 20 приемов.
2. Разнесение членов по разным частям двуместного отношения. 5 приемов.
3. Разбиение старого параметра на два новых и перегруппировки между членами операндов двуместных отношений. 3 приема.
4. Разрешение заменяющей части стандартизирующей эквивалентности относительно переменной. 2 приема.
5. Определение случаев, в которых ограничения на неизвестную для разрешающей эквивалентности пропадают. 1 прием.
6. Преобразование тождества для его использования в качестве дополнительного тождества при выводе теорем. 1 прием.
7. Перегруппировка членов тождества и попытка преобразовать одну из частей к заданному заголовку. 1 прием.
8. Преобразование теоремы для специального нормализатора. 5 приемов.
9. Получение из параметрического описания теоремы приема для перечисления конечного множества значений. 1 прием.
10. Ввод дополнительного корневого операнда обеих частей тождества и использование его как одного из входных данных вычисления. 2 приема.

Использование симметрии

13 приемов.

1. Варьирование одной из частей равенства в консеквенте путем перестановки симметричных переменных в другой части этого равенства. 5 приемов.
2. Определение класса симметрично относительно одного из параметров и связанной переменной. Это позволяет воспользоваться их перестановкой для вывода утверждения о равенстве двух классов либо эквивалентности утверждений принадлежности двум классам. 2 приема.
3. Вывод эквивалентности из импликации, у которой антецедент и консеквент отличаются переобозначением переменных. 2 приема.
4. Переобозначение переменных сохраняет антецеденты, но добавляет еще одну версию консеквента. 3 приема.
5. Перестановка местами двух взаимно обратных операций: к каждой части тождества $f(g(x)) = x$ применяется операция g , после чего терм $g(x)$ обозначается новой переменной y , и к антецедентам присоединяется условие представимости y в виде $f(x)$. 1 прием.

Переход к эквивалентности с квантором существования

8 приемов.

1. Эквивалентность для решения уравнения позволяет получить условие существования этого решения. 5 приемов.
2. Эквивалентность для решения уравнения позволяет сделать замену переменной под квантором существования. 1 прием.
3. Квантор существования навешивается на обе части эквивалентности, после чего в одной из частей он исключается. 1 прием.
4. Выражение объекта из заменяемой части эквивалентности через вспомогательные параметры, по которым навешивается квантор существования. 1 прием.

Переход к эквивалентности с квантором общности

4 приема.

1. Переход от условия принадлежности к условию равенства, включения либо непересечения множеств путем навешивания квантора общности. 4 приема.

Попытка вывести следствие несколькими применениями одной и той же теоремы

35 приемов.

1. Из эквивалентности, определяющей значение операции, выводится эквивалентность для равенства значений этой операции. 1 прием.
2. Заменяемая часть тождества общей стандартизации имеет подтерм вида $f(x, t(y))$, где f - ассоциативная и коммутативная операция, x - уникальная переменная, $t(y)$ - выражение с некоторой другой уникальной переменной y . Выбирается новая переменная z , подтерм $f(x, t(y))$ заменяется на $f(x, t(z), t(y))$, и исходное тождество применяется двумя разными способами - относительно $t(y)$ либо $t(z)$. Равенств двух полученных результатов становится консеквентом новой теоремы. 1 прием.
3. Усматривается возможность проварьировать часть параметров с сохранением части подвыражений консеквента неизменными. Их неизменность позволяет связать между собой проварьированные и исходные выражения консеквента. 5 приемов.
4. Часть параметров числовых атомов варьируются, к антецедентам добавляются равенств либо соотношения пропорциональности для исходных и проварьированных атомов одной из частей тождества. Они позволяют связать противоположные части тождества. 4 приема.
5. Один из параметров заменяемой части переобозначается на новую переменную. Затем предпринимается попытка вывести из объединенных контекстов исходной и проварьированной теоремы следствие, симметричное относительно старого и нового параметров. 1 прием.

6. Заменяющая часть тождества несколько раз преобразуется при помощи самого тождества. 6 приемов.
7. Консеквент теоремы - равенство двух версий одного и того же выражения, отличающихся тем, что в одном из них параметр для множества T заменен параметром для элемента t этого множества. Антецедент "принадлежит($t T$)" заменяется на "содержится($S T$)", и такая же замена t на S выполняется в консеквенте. 2 приема.
8. Заменяющая часть эквивалентности - кванторная импликация. При варьировании параметра конъюнкции A ее антецедентов возникает такое утверждение B , что импликация $B \rightarrow A$ сворачивается в бескванторное утверждение. Это утверждение добавляется к антецедентам вместе с исходной заменяемой частью эквивалентности, а консеквентом становится проварьированная заменяемая часть. 1 прием.
9. Выводится следствие заменяющей части эквивалентности, которое сворачивается при помощи той же самой теоремы. 1 прием.
10. Заменяющая часть эквивалентности - кванторная импликация, которая остается истинной при некотором несложном преобразовании. Заменяемая часть исходной теоремы разворачивается в заменяющую, преобразуется указанным образом и снова сворачивается. 6 приемов.
11. Усматривается однозначная определенность одного из подвыражений консеквента через другие подвыражения. Из этого выводится равенство копий данного подвыражений при условии равенства копий прочих подвыражений. 2 приема.
12. Преобразование заменяющей части тождества и обратная свертка. 4 приема.
13. Определяемое понятие применяется к некоторой стандартной операции над своим аргументом, после чего заменяющая часть упрощается и сворачивается обратно. 1 прием.

Переход к импликации от эквивалентности

98 приемов.

1. Эквивалентность с конъюнкцией в заменяющей части.

28 приемов.

- (a) Заменяемая часть эквивалентности переводится в антецеденты, а консеквентом становится один из конъюнктивных членов заменяющей части либо его простое следствие. 11 приемов.
- (b) Заменяющая часть эквивалентности переносится в антецеденты, а консеквентом становится заменяемая часть. 7 приемов.
- (c) Отрицание конъюнктивного члена заменяющей части переносится в антецеденты, а консеквентом становится отрицание заменяемой части. 1 прием.

- (d) Конъюнктивный член заменяющей части разворачивается в кванторную импликацию. Ее антецеденты добавляются к антецедентам теоремы, а консеквент становится консеквентом теоремы. Заменяемая часть исходной теоремы тоже переносится в антецеденты. 1 прием.
- (e) Конъюнктивный член заменяющей части становится консеквентом, а заменяемая часть переводится в антецеденты. 1 прием.
- (f) Попытка подбора значений, опровергающих квантор существования в конъюнктивных членах заменяющей части, после чего выводится отрицание заменяемой части. 1 прием.
- (g) В антецеденты переносится отрицание заменяемой части и все конъюнктивные члены заменяющей, кроме одного. Консеквентом становится отрицание этого последнего конъюнктивного члена. 1 прием.
- (h) Отрицание конъюнктивного члена заменяющей части переносится в антецеденты, а консеквентом становится отрицание заменяемой части. 1 прием.
- (i) Заменяющая часть эквивалентности переносится в антецеденты, а консеквентом становится результат свертки в элементарное утверждение квантора существования, навешанного на заменяемую часть по некоторой ее переменной. 1 прием.
- (j) Выбираются два параметра теоремы и предпринимается попытка вывести следствия из их равенства, в предположении истинности антецедентов и заменяющей части. Отрицание некоторого такого следствия вместе с заменяемой частью добавляется к антецедентам теоремы, а ее консеквентом становится отрицание равенства указанных параметров. 1 прием.
- (k) При помощи задачи на описание подбираются примеры объектов, реализующих заменяющую часть. Консеквентом становится заменяемая часть. 1 прием.
- (l) Усматривается существование значения некоторого параметра одной из частей эквивалентности, при котором эта часть истинна. Консеквентом становится результат навешивания квантора существования по данной переменной на конъюнкцию заменяемой части и некоторых конъюнктивных членов заменяющей части. 1 прием.

2. Эквивалентность с дизъюнкцией в заменяющей части.

7 приемов.

- (a) Один из дизъюнктивных членов заменяющей части переносится в антецеденты, а консеквентом становится заменяемая часть. 6 приемов.
- (b) Отрицания всех дизъюнктивных членов заменяющей части, кроме одного, и заменяемая часть переносятся в антецеденты, а консеквентом становится конъюнктивный член оставшегося дизъюнктивного члена. 1 прием.

3. Эквивалентность двух элементарных утверждений.

31 прием.

- (a) Одна часть эквивалентности либо ее отрицание переносится в антецеденты, а консеквентом становится другая часть либо ее отрицание. 28 приемов.
- (b) В антецеденты переносится одна из частей эквивалентности и отрицание другой части, а консеквентом становится отрицание одного из старых антецедентов. 1 прием.
- (c) В антецеденты переносится одна из частей эквивалентности либо ее отрицание, а консеквентом становится простое следствие другой части либо ее отрицания. 1 прием.
- (d) Усмотрение взаимной однозначности отображения из сокращающей эквивалентности. 1 прием.

4. Эквивалентность, среди конъюнктивных членов заменяющей части которой встречается кванторная импликация.

10 приемов.

- (a) Заменяемая часть эквивалентности и антецеденты заменяющей кванторной импликации переносятся в антецеденты, а консеквентом становится конъюнктивный член консеквента заменяющей импликации. 4 приема.
- (b) Антецеденты и отрицание консеквента заменяющей импликации переносятся в антецеденты теоремы, а ее консеквентом становится отрицание заменяемой части. 1 прием.
- (c) Все конъюнктивные члены заменяющей части, включая кванторные импликации, переносятся в антецеденты, а консеквентом становится заменяемая часть. 1 прием.
- (d) Кванторная импликация в заменяющей части определяет значения функции, упоминаемой в заменяемой части. Это позволяет полностью определить функцию через описатель "отображение" и получить импликацию, у которой консеквентом служит заменяемая часть исходной теоремы с подставленным в нее описателем. 1 прием.
- (e) Заменяемая часть переносится в антецеденты. Кванторная импликация в заменяющей части при помощи задач на описание частично сворачивается, и часть ее антецедентов добавляется к антецедентам теоремы, а остаток превращается в консеквент теоремы. 2 приема.
- (f) Предпринимается попытка найти условие, при котором антецеденты квантора общности в заменяющей части становятся ложными. Это условие добавляется к антецедентам, а консеквентом становится бескванторная часть исходной эквивалентности. 1 прием.

5. Эквивалентность, среди конъюнктивных членов заменяющей части которой встречается квантор существования.

22 приема.

- (a) Утверждение под квантором существования и прочие конъюнктивные члены заменяющей части переносятся в антецеденты, а консеквентом становится заменяемая часть. 5 приемов.

- (b) Заменяемая часть переносится в antecedentes, а консеквентом становится квантор существования - конъюнктивный член заменяющей части. 6 приемов.
- (c) Находится некоторое следствие подкванторных утверждений квантора существования в заменяющей части. Его отрицание добавляется к antecedентам, а консеквентом становится отрицание заменяемой части. 1 прием.
- (d) Отрицание квантора существования в заменяющей части сворачивается в элементарное утверждение, добавляемое к antecedентам. Консеквентом становится отрицание заменяемой части. 1 прием.
- (e) В antecedенты переносится заменяемая часть и некоторое подмножество утверждений из-под квантора существования заменяющей части, содержащее все переменные кванторной приставки. Консеквентом становится конъюнкция оставшихся утверждений под квантором существования. Предпринимается дополнительная проверка. 1 прием.
- (f) В antecedенты переводится часть утверждений из-под квантора существования заменяющей части, содержащая все переменные связывающей приставки этого квантора. Консеквентом становится результат навешивания квантора существования по некоторой переменной заменяемой части на конъюнкцию заменяемой части и остальных утверждений под квантором существования. Содержащие данную переменную старые antecedенты отбрасываются. Предпринимается дополнительная проверка. 1 прием.
- (g) Некоторая подстановка реализует заменяемую часть. Она применяется к antecedентам и заменяющей части, которая становится консеквентом. 1 прием.
- (h) Из реализуемости квантора существования в заменяющей части выводится реализуемость заменяемой части. 1 прием.
- (i) Рассматривается некоторая подстановка вместо переменных, связанных квантором существования, и подкванторные утверждения добавляются к antecedентам, а заменяемая часть становится консеквентом. 3 приема.
- (j) Предпринимается попытка найти условие, при котором квантор существования в заменяющей части становится истинным. Это условие добавляется к antecedентам, а консеквентом становится бескванторная часть исходной эквивалентности. 1 прием.
- (k) Предпринимается попытка найти бескванторное условие, при котором квантор существования в заменяющей части становится истинным. Оно добавляется к antecedентам, после чего эта часть упрощается и тоже добавляется к antecedентам. Консеквентом становится заменяемая часть. 1 прием.

Переход к эквивалентности от импликации

4 приема.

1. Вывод из косвенного (через импликацию) определения эквивалентности для равенства определяемому выражению. 1 прием.
2. Вывод эквивалентности консеквенту дизъюнкции antecedента и консеквента. 1 прием.

3. Ослабление антецедента и получение эквивалентности исходного консеквента дизъюнкции двух условий - отрицания добавленной при ослаблении ситуации и результата преобразования консеквента при наличии такой ситуации. 1 прием.
4. Консеквентом импликации служит утверждение, связывающее значения входных переменных с однозначно определяемыми по ним значениями выходных. 1 прием.

Переход к теореме с функциональными переменными

23 приема.

1. Вместо переменной для множества подставляется описатель "класс(x $A(x)$)". 12 приемов.
2. Тождество для однозначного определения параметра утверждения используется для перехода от мощности класса, заданного параметрическим описанием, к мощности класса, заданного обычным описанием. 1 прием.
3. Замена обычных переменных функциональными с добавлением антецедентов, фиксирующих значения характеристик этих переменных, встречающихся в заменяемой части тождества. 2 приема.
4. Выражение переменных для функций через описатели "отображение". 1 прием.
5. Вместо объектов рассматриваются функции, значениями которых они являются, и на аргументы этих функций навешивается квантор общности. 3 приема.
6. Из эквивалентности для квантора существования выводится эквивалентность для развертки квантора существования в конечную дизъюнкцию. 1 прием.
7. Вывод условия на функцию, значения которой задаются определяемым выражением. 3 приема.

Эквивалентное преобразование консеквента

19 приемов.

1. Нормализатор "нормчисл" выполняет эквивалентное преобразование консеквента для исключения сложных операций (например, степеней или дробных выражений). 3 приема.
2. Попытка свертки заменяющей части при помощи вспомогательной задачи. 8 приемов.
3. Попытка развертки заменяющей части при помощи задачи на описание. 2 приема.
4. Последовательные развертка и свертка заменяющей части при помощи задачи на описание. 1 прием.
5. Навешивание отрицания на обе части эквивалентности. 1 прием.

6. Кванторная расшифровка консеквента. 2 приема.
7. Попытка преобразовать заменяющую часть нормализатором приведения к заданным заголовкам. 1 прием.
8. Общая стандартизация заменяющей части задач на описание. 1 прием.

Повторное упрощение теоремы

9 приемов.

1. Повторное упрощение теоремы с разблокировкой приемов, основанных на уже имеющихся в списке вывода теоремах. 3 приема.
2. Повторное упрощение теоремы с непосредственным использованием уже имеющихся в списке вывода теорем. 1 прием.
3. Попытка специальной стандартизации. 4 приема.
4. Попытка упрощения антецедентов. 1 прием.

Перенесение операции, применяемой к условному выражению с нулем этой операции, внутрь данного выражения

1 прием.

Переход к эквивалентности от тождества

14 приемов.

1. Тождество используется для эквивалентного преобразования равенства. 2 приема.
2. Подвыражение t одной из частей тождества обозначается вспомогательной переменной x , и выводится эквивалентность измененного таким образом равенства равенству $x = t$. Предварительно к тождеству может быть применена упрощающая подстановка. 4 приема.
3. Вывод из условия равенства множеств эквивалентности для принадлежности этим множествам. 2 приема.
4. Использование равенства множеств $A(x) = B(x)$ для вывода условий равенства, включения либо непересечения множеств $A(x), A(y)$. 1 прием.
5. Вывод эквивалентности равенства объектов равенству их координат. Исходная теорема - произвольный элемент группы утверждений, определяющих данные координаты. 1 прием.
6. Усмотрение эквивалентности равенства в консеквенте конъюнкции группы антецедентов. 1 прием.
7. Вывод условия эквивалентности определения объекта через свои координаты определению его без использования координат. Исходная теорема - выражение для координат объекта. 1 прием.
8. Вывод из обращаемого тождества сокращающей эквивалентности. 2 приема.

Переход к тождеству от эквивалентности

13 приемов.

1. Эквивалентность для условий принадлежности множеств порождает равенство для множеств. 5 приемов.
2. Эквивалентность порождает равенство характеристик классов, определяемых частями эквивалентности. 4 приема.
3. Эквивалентность, в одной части которой находится равенство, порождает импликацию с этим равенством в консеквенте. 2 приема.
4. В одной из частей эквивалентности находится кванторное утверждение с равенством в глубине. Предпринимается вынесение этого равенства наружу в консеквенте новой кванторной импликации. 1 прием.
5. Усмотрение обращающего тождества. 1 прием.

Следствия тождества с описателем "класс"

13 приемов.

1. Вывод утверждения принадлежности одной из частей равенства для классов из принадлежности другой части. 4 приема.
2. Попытка подобрать пример элемента класса путем реализации условия на объекты этого класса. 1 прием.
3. Попытка заменить описатель "класс" на конечный список. 2 приема.
4. Уравнение для координат множества объектов позволяет получить теорему, усматривающую тип множества по его уравнению. 1 прием.
5. Вывод условия на мощность класса. 2 приема.
6. Ослабление условия под описателем "класс" и вывод тождества для разности нового и старого классов. 1 прием.
7. Вывод условий включения либо непересечения с классом. 2 приема.

Следствия тождества с описателем "отображение"

8 приемов.

1. Занесение внешних операндов под конечную операцию. 2 приема.
2. Определение значения функции, заданной через описатель "отображение". 1 прием.
3. Расшифровка отношения для функции, заданной через описатель "отображение". 1 прием.
4. Варьирование области определения функции, заданной описателем "отображение". 3 приема.
5. Рассмотрение константной функции под описателем "отображение". 1 прием.

Извлечение из косвенного определения операции условия на ее значение

1 прием.

Замена переменной в теореме

8 приемов.

1. Подвыражение консеквента обозначается новой переменной. 4 приема.
2. Варьирование переменной с помощью операции типа "отрицание". 3 приема.
3. Замена варьируемой переменной описателя. 1 прием.

Ввод в antecedentes теоремы равенств, используемых в приемах для идентификации

43 приема.

1. Вынесение в antecedentes равенств для выражений с невырожденными числовыми атомами. 7 приемов.
2. Вынесение в antecedentes равенств для выражений с нечисловыми атомами. 6 приемов.
3. Вынесение в antecedentes равенств с неатомарными выражениями. 9 приемов.
4. Вынесение в antecedentes равенства, обращающегося к вычислению. 4 приема.
5. Ввод в antecedentes соотношений пропорциональности для числовых атомов. 8 приемов.
6. Ввод в antecedentes обычных либо кванторных равенств для подбора значения. 8 приемов.
7. Ввод в antecedentes кванторного равенства для идентификации подвыражения консеквента, имеющего связанные переменные. 1 прием.

Вывод неравенства из равенства

5 приемов.

1. Попытка доказать неравенство для комбинации числовых атомов. 3 приема.
2. Вывод эквивалентности для неравенств, выражающей одинаковость знаков частей равенства. 2 приема.

Добавление антецедентов, упрощающих консеквент

5 приемов.

1. Нахождение условий вырождения заменяющей части консеквента. 1 прием.
2. Добавление условий, позволяющих применить к консеквенту эквивалентность типа сокращения. 3 приема.
3. Попытка упростить консеквент, добавив к антецедентам условие невырожденности некоторого выражения. 1 прием.

Применение некоторого оператора к обеим частям тождества

4 приема.

1. Переход от равенства значений к равенству функций и вывод следствий из этого равенства (например, интегрирование частей равенства). 1 прием.
2. Применение одной и той же операции к обеим частям тождества и упрощение одной из этих частей. 3 приема.

Переход к утверждению существования

8 приемов.

1. Усматривается реализуемость группы антецедентов, содержащих некоторые параметры X консеквента. Эти антецеденты исключаются; часть их добавляется к консеквенту, и на консеквент навешивается квантор существования по X . Если некоторые переменные X в новом консеквенте выражаются через другие, то они исключаются. 3 приема.
2. Подвыражение консеквента заменяется на вспомогательную переменную, и на консеквент навешивается квантор существования по этой переменной. 3 приема.
3. Вывод утверждения существования из частного случая. 2 приема.

Переход к импликации, используемой приемом усмотрения противоречивости посылок

5 приемов.

1. Отрицание консеквента переносится в антецеденты, а консеквентом становится константа "ложь". 2 приема.
2. Отрицание консеквента переносится в антецеденты и переформулируется в терминах вспомогательных переменных, обозначающих числовые атомы. Равенства, вводящие такие обозначения, тоже добавляются к антецедентам. 3 приема.

Консеквент дает равенство координат некоторому специальному набору. В antecedentes заносится равенство этих координат набору новых параметров, а консеквентом становится соотношение, связывающее новый параметр со старым выражением

4 приема.

Переход от элементарного консеквента к консеквенту с описателем

1 прием.

Проверка стандартного свойства одной части тождества и перенесение его на другую часть

1 прием.

Непосредственное усмотрение простейшего свойства определяемого понятия

3 приема.

Переход от тождества, дающего значение функции, к заданию этой функции через описатель "отображение"

2 приема.

6.2 Склейка нескольких теорем

В этом разделе представлены приемы, предпринимающие попытку объединить две или более теоремы текущего списка вывода в одну обобщающую их теорему. В исключительных случаях к объединению может быть привлечена теорема из другой ячейки вывода. Как правило, после склейки исходные теоремы из дальнейших рассмотрений исключаются. Всего в разделе 63 приема.

1. Две импликации отличаются только группами antecedentes, дизъюнкция которых тождественно истинна. Они объединяются в одну импликацию, получаемую из исходных отбрасыванием указанных antecedentes. 15 приемов.
2. Две импликации отличаются только двумя antecedентами, причем дизъюнкция этих antecedентов преобразуется в элементарное утверждение. Импликации объединяются в одну, где исходные antecedенты заменены на указанное элементарное утверждение. 8 приемов.
3. Два тождества с одинаковыми заменяемыми частями и различными заменяющими имеют списки antecedентов, отличающиеся только двумя утверждениями A_1 и A_2 , дизъюнкция которых эквивалентна элементарному утверждению B . Они объединяются в одно тождество с условным выражением в заменяющей части и antecedентом B , замещающим A_1 и A_2 . 3 приема.

4. Несколько теорем отличаются лишь заменой одних и тех же вхождений некоторого подтерма на другой подтерм. На эти вхождения помещается новая переменная, а в антецедентах добавляется условие принадлежности ее списку варьируемых подтермов. 4 приема.
5. Несколько теорем, отличающихся только антецедентами, преобразуются в несколько других, но более простых. 2 приема.
 - (а) Две теоремы отличаются только двумя парами антецедентов: у одной A_1, A_2 , а у другой - B_1, B_2 . Дизъюнкция $(A_1 \& A_2 \vee B_1 \& B_2)$ упрощается. Если получается дизъюнкция элементарных утверждений, то для каждого дизъюнктивного члена C создается импликация, получаемая из исходных заменой указанной пары антецедентов на C . 1 прием.
 - (б) Несколько импликаций отличаются только антецедентами. Формируется дизъюнкция конъюнкций тех фрагментов антецедентов, по которым наблюдается отличие. Она разрешается относительно одного из параметров, причем после этого число альтернатив становится меньшим. Для каждой альтернативы создается своя версия теоремы. 1 прием.
6. Использование третьей теоремы для склейки двух теорем. 5 приемов.
7. Получение эквивалентности из двух противоположных импликаций. 2 приема.
8. Несколько эквивалентностей с одинаковыми заменяемыми частями склеиваются так, что заменяющей частью становится дизъюнкция конъюнкций $A \& B$, где A - заменяющая часть для подслучая, B - антецеденты, выделяющие этот подслучай. 5 приемов.
9. Несколько теорем определяют по отдельности параметры некоторого терма. Они склеиваются в теорему, определяющую данный терм. 2 приема.
10. Две эквивалентности имеют в своих заменяемых частях конъюнкции некоторого утверждения A с такими утверждениями, дизъюнкция которых истинна. Они объединяются в эквивалентность утверждения A дизъюнкции исходных заменяющих частей. 1 прием.
11. Склеиваются две копии одной и той же кванторной эквивалентности при помощи другой эквивалентности, выражающей конъюнкцию заменяющих частей исходных копий в виде элементарного утверждения. Конъюнкция заменяемых частей приводится к виду элементарного утверждения при помощи вспомогательной задачи на описание. 1 прием.
12. Две теоремы позволяют составить систему из двух уравнений относительно двух сложных выражений. После ее решения получаются тождества для данных выражений. 1 прием.
13. Несколько импликаций с одинаковыми консеквентами, выражающими некоторое "сложное" свойство, отличаются группами "простых" антецедентов. Они объединяются в одну, с новым дизъюнктивным антецедентом, составленным из исходных различающихся антецедентов. 1 прием.

14. Имеются две импликации с одинаковыми консеквентами, у которых часть параметров антецедентов не входит в консеквент. Рассматриваются всевозможные способы унификации по этим переменным антецедентов одной импликации с антецедентами другой, при которых остается не отождествленным единственный антецедент. Дизъюнкция таких остаточных антецедентов (их может быть больше двух, из-за различия унифицирующих подстановок) преобразуется к элементарному утверждению, которое и замещает не отождествленный антецедент. 1 прием.
15. Консеквенты двух теорем однозначно определяют в совокупности параметры правой части некоторого общего для этих теорем реализуемого равенства в антецедентах. Тогда создается теорема, у которой это равенство перенесено в консеквент, а оба старых консеквента перенесены в антецеденты. 1 прием.
16. Две теоремы определяют одну и ту же характеристику двух функций, отличающихся только областями определения. Дизъюнкция условий принадлежности этим областям сводится к элементарному утверждению, причем условное выражение для значений характеристики преобразуется к безусловному виду A . Новая теорема дает характеристику A для функции, определенной на объединении исходных областей. 1 прием.
17. Теорема - тождество, определяющее значение некоторого "сложного" выражения. В списке вывода находится группа других тождеств для того же выражения, но в альтернативных частных случаях, причем для этих случаев удается усмотреть, что "общее" значение исходного тождества сохраняется, а дизъюнкция условий применимости тождеств сводится к конъюнкции элементарных утверждений. 1 прием.
18. Имеется два варианта равенства для двух числовых атомов A и B , причем атом B однозначно восстанавливается из равенства по атому A . Их антецеденты отличаются только условиями на атомы A . В области, где эти условия одновременно истинны, тождества эквивалентны. Переменные равенств переобозначаются так, чтобы не пересекались; различающиеся антецеденты заменяются на условие равенства двух версий атома A , а консеквентом становится равенство атомов B . Исходные теоремы сохраняются. 1 прием.
19. Имеется два варианта тождества для двух числовых атомов A и B . Их переменные сначала переобозначаются так, чтобы не пересекались, а затем предпринимается унификация двух атомов B . Дополнительно унифицируется часть антецедентов. В полученном контексте K , где присутствуют как унифицированные, так и не унифицированные антецеденты, предпринимается исключение из двух тождеств атома B и получение соотношения для атомов A . Это соотношение становится консеквентом новой теоремы; ее антецеденты - утверждения контекста K . Исходные теоремы сохраняются. 1 прием.
20. Две эквивалентности отличаются лишь консеквентами. Дизъюнкция левых частей этих эквивалентностей эквивалентна элементарному утверждению A , дизъюнкция правых - элементарному утверждению B . Выводится эквивалентность A и B . Исходные теоремы сохраняются. 1 прием.
21. Склейка двух кванторных тождеств, отличающихся альтернативными антецедентами и правыми частями консеквентов. 1 прием.

22. Склейка двух импликаций с одинаковыми антецедентами, конъюнкция консеквентов которых сворачивается в элементарное утверждение. 1 прием.
23. Контрапозиция дополнительной теоремы с дизъюнкцией в консеквенте позволяет реализовать антецедент исходной теоремы, после чего новый антецедент, возникший из дизъюнктивного члена консеквента дополнительной теоремы, возвращается в консеквент, который таким образом приобретает вид дизъюнкции. 1 прием.
24. Склейка нескольких теорем, получаемых при примерке подслучаев конъюнктивно-дизъюнктивного определения на элементарные операции раздела. 1 прием.

6.3 Использование теоремы для варьирования дополнительной теоремы

В этом разделе собраны приемы, которые находят по исходной теореме некоторую дополнительную теорему - в произвольном месте базы теорем либо в текущем списке вывода. Результатом вывода служит определенное преобразование дополнительной теоремы при помощи исходной. Всего в разделе 105 приемов.

Использование эквивалентности для преобразования дополнительной теоремы

18 приемов.

1. Эквивалентность позволяет одновременно проварьировать антецеденты и консеквент дополнительной теоремы. 7 приемов.
2. Дополнительная эквивалентность преобразуется в импликацию, после чего текущая эквивалентность реализует группы ее антецедентов. 2 приема.
3. Одна из частей эквивалентности переносится в антецеденты, а другая, среди конъюнктивных членов которой содержатся равенства, позволяет преобразовать консеквент дополнительной теоремы. 2 приема.
4. Замена переменных для множеств в дополнительной теореме на описатели "класс" и использование текущей эквивалентности для преобразования этих описателей. 1 прием.
5. Эквивалентность с операциями над семействами позволяет получить индуктивное обобщение дополнительной теоремы. 2 приема.
6. Эквивалентность преобразует заменяемую часть дополнительной эквивалентности. 3 приема.
7. Взаимно однозначное параметрическое описание преобразует тождество для описателя "класс" с сохранением мощности класса. 1 прием.

Использование кванторной импликации с дизъюнкцией в консеквенте для преобразования дополнительной теоремы

2 приема.

1. Текущая теорема - дизъюнкция, определяющая некоторую альтернативу для объектов заданного типа. Находится дизъюнктивное определение для объектов некоторого надтипа, дизъюнктивные члены которого удастся усилить с помощью данной альтернативы при переходе к исходному типу объектов. 1 прием.
2. Текущая теорема - дизъюнкция, определяющая некоторую альтернативу для объектов заданного типа. Находится дизъюнктивное определение для объектов некоторого надтипа. У данного определения отрицание одного из дизъюнктивных членов переносится в определяемую часть, после чего эта часть усиливается с использованием альтернативы. 1 прием.

Использование тождества для преобразования дополнительной теоремы

80 приемов.

1. Использование тождества для варьирования дополнительной эквивалентности.

23 приема.

- (a) Тождество преобразует заменяемую часть дополнительной эквивалентности. 18 приемов.
- (b) Текущая теорема позволяет вывести из одной части дополнительной эквивалентности равенство, на которое можно заменить некоторый конъюнктивный член противоположной части этой эквивалентности. 2 приема.
- (c) Тождество варьирует заменяющую часть дополнительной эквивалентности, после чего она сворачивается обратно. 1 прием.
- (d) Тождество реализует одну из частей дополнительной эквивалентности, преобразуемой далее в импликацию. 2 приема.

2. Использование тождества для варьирования дополнительного тождества.

49 приемов.

- (a) Тождество преобразует заменяемую часть дополнительного тождества. 37 приемов.
- (b) Тождество преобразует заменяющую часть дополнительного тождества. 2 приема.
- (c) Тождество применяется к обеим частям дополнительного тождества. 6 приемов.
- (d) Тождество преобразует операнд перегруппировочного тождества. 2 приема.
- (e) Координатные выражения исходного и дополнительного тождества выражаются через одни и те же числовые атомы, что позволяет связать между собой эти координаты без использования числовых атомов. 1 прием.

- (f) Тожество разрешается относительно подвыражения, и результат подставляется в дополнительное тождество. 1 прием.
3. Использование тождества для варьирования консеквента дополнительной импликации.
- 7 приемов.
- (a) Преобразование операнда консеквента. 2 приема.
 - (b) Индуктивное обобщение дополнительной теоремы с помощью тождества для операции над семейством. 1 прием.
 - (c) Определение класса используется для расшифровки условия принадлежности. 1 прием.
 - (d) Тожество разрешается относительно подвыражения, и результат подставляется в консеквент дополнительной теоремы. 1 прием.
 - (e) Тожество позволяет фиксировать значение переменной, связанной в дополнительной теореме квантором существования. 2 приема.
4. Использование тождества для варьирования произвольной дополнительной теоремы. 1 прием.

Использование импликации для варьирования дополнительной теоремы

5 приемов.

1. Импликация позволяет расширить список условий под квантором существования в дополнительной теореме. 1 прием.
2. Простая импликация реализует фрагмент консеквента дополнительной теоремы. 3 приема.
3. Фиксация значений параметров дополнительной теоремы при помощи равенств из консеквента исходной теоремы. 1 прием.

6.4 Использование дополнительной теоремы для варьирования текущей теоремы

В этом разделе собраны приемы, которые находят по исходной теореме некоторую дополнительную теорему - в произвольном месте базы теорем либо в текущем списке вывода. Результатом вывода служит определенное преобразование исходной теоремы при помощи дополнительной. Всего 372 приема.

Вывод дизъюнктивного утверждения при помощи дополнительного тождества

1 прием.

1. Дополнительное тождество, связывающее два выражения A и B , позволяет переформулировать некоторый антецедент P , содержащий A , через выражение B . После такой переформулировки возникает новая версия теоремы. При некотором переобозначении переменных ее антецеденты совпадают с антецедентами исходной, кроме единственного антецедента Q , полученного из P . Проверяется, что дизъюнкция P и Q тождественно истинна, после чего антецедент P исходной теоремы отбрасывается, а консеквентом становится дизъюнкция консеквентов исходной и модифицированной теорем. 1 прием.

Использование дополнительного тождества для варьирования консеквента теоремы

202 приема.

1. Преобразование заменяемой части тождества. 85 приемов.
2. Преобразование заменяющей части тождества. 31 прием.
3. Преобразование заменяемой части эквивалентности. 30 приемов.
4. Преобразование заменяющей части эквивалентности. 16 приемов.
5. Применение к обеим частям двух тождеств $A = B$ и $C = D$ одной и той же двуместной операции f и сокращение одной из частей равенства $f(A, C) = f(B, D)$. 1 прием.
6. Использование дополнительного тождества и извлечение импликации из эквивалентности.
2 приема.
 - (a) Дополнительное тождество преобразует заменяемую часть эквивалентности, после чего заменяющая часть добавляется к списку антецедентов. 1 прием.
 - (b) Заменяемая часть добавляется к антецедентам, после чего заменяющая часть преобразуется дополнительным тождеством, сворачивается обратно исходной теоремой и становится консеквентом. 1 прием.
7. Преобразование подтерма консеквента без учета его размещения в заменяемой либо заменяющей частях. 37 приемов.

Использование дополнительного тождества для вывода эквивалентности, комбинирующей уравнения

1 прием.

Использование дополнительной эквивалентности для одновременного преобразования антецедента и консеквента

1 прием.

Использование дополнительной эквивалентности для варьирования консеквента теоремы

74 приема.

1. Варьирование тождества с условным выражением при помощи дополнительной эквивалентности. 2 приема.
2. Попытка упрощения заменяемой части эквивалентности при помощи дополнительной эквивалентности. 16 приемов.
3. Попытка варьирования заменяющей части эквивалентности при помощи дополнительной эквивалентности.

21 прием.

- (a) Применение дополнительной эквивалентности к заменяющей части и обратная свертка после преобразования.

7 приемов.

- i. Преобразование без добавления антецедентов. 5 приемов.
- ii. Добавляется антецедент - недостающий для преобразования фрагмент заменяющей части. 1 прием.
- iii. Исходная версия заменяемой части переносится в антецедент и позволяет отбросить часть конъюнктивных членов заменяющей части после ее преобразования. 1 прием.

- (b) Дополнительная эквивалентность преобразует фрагменты заменяющей части в дизъюнктивно-конъюнктивные конструкции, и для их приведения к элементарному виду добавляются новые антецеденты. 1 прием.

- (c) Дополнительная эквивалентность преобразует подкванторное утверждение в заменяющей части. 1 прием.

- (d) Простое преобразование заменяющей части. 12 приемов.

4. Использование дополнительной эквивалентности для вывода импликации из параметрического описания. 1 прием.
5. Дополнительная эквивалентность позволяет ввести дополнительное условие в заменяемую часть параметрического описания и скорректировать заменяющую часть. 2 приема.
6. Преобразование конъюнктивных членов консеквента к виду дизъюнкции и добавление к антецедентам части подслучаев. 3 приема.

7. Преобразование консеквента импликации с помощью дополнительной эквивалентности.

11 приемов.

- (a) Определение условия, при котором нарушается истинность консеквента, обобщение его при помощи дополнительной теоремы, и перенесение в консеквент исходной теоремы определяемого найденным обобщением ограничения на новые параметры. 1 прием.

- (b) Преобразование консеквента импликации при помощи дополнительной эквивалентности. 8 приемов.
 - (c) Преобразование консеквента импликации при помощи дополнительной эквивалентности и использование задачи на исследование для вывода следствий из преобразованного консеквента. 1 прием.
 - (d) Варьирование косвенного определения путем эквивалентного преобразования определяющей части. 1 прием.
8. Варьирование описателя "класс" с помощью дополнительной эквивалентности. 12 приемов.
- (a) Дополнительная эквивалентность преобразует утверждение под описателем, после чего выполняется обратная свертка с помощью исходной теоремы. 2 приема.
 - (b) Дополнительная эквивалентность варьирует утверждение под описателем "класс". 10 приемов.
9. Попытка одновременной свертки антецедентов и консеквента при помощи дополнительной эквивалентности. 2 приема.
10. Варьирование тождества с помощью эквивалентности для равенства. 1 прием.

Преобразование эквивалентности для равенства в тождество

1 прием.

Преобразование эквивалентности в импликацию

15 приемов.

1. Эквивалентность используется для свертки фрагментов импликации, извлекаемой из дополнительного тождества. 1 прием.
2. Преобразование эквивалентности в импликацию и использование дополнительной теоремы для реализации антецедента. 4 приема.
 - (a) Непосредственная реализация антецедента. 3 приема.
 - (b) Контрапозиция дополнительной теоремы для реализации антецедента. 1 прием.
3. Реализация заменяемой части эквивалентности при помощи дополнительной теоремы. 2 приема.
4. Реализация фрагмента заменяющей части и преобразование эквивалентности в импликацию, консеквентом которой становится заменяемая часть. 5 приемов.
5. Идентификация связанной переменной квантора существования в заменяющей части при помощи дополнительного тождества и вывод импликации. 1 прием.
6. Заменяемая часть переводится в антецеденты, а заменяющая часть при помощи дополнительной теоремы упрощается до элементарного утверждения. 2 приема.

Использование дополнительной теоремы для усмотрения эквивалентности консеквента одному из антецедентов

1 прием.

Дополнительная эквивалентность позволяет получить одностороннюю модификацию исходной эквивалентности, после чего предпринимается попытка доказать, что эта модификация тоже является эквивалентностью

2 приема.

Использование дополнительной импликации для варьирования заменяющей части эквивалентности

15 приемов.

1. Использование дополнительной импликации для реализации фрагмента заменяющей части эквивалентности. 8 приемов.
2. Использование дополнительной импликации для вывода следствия из заменяющей части эквивалентности и обратной свертки с помощью той же эквивалентности. 3 приема.
3. Перенесение в антецеденты теоремы некоторого условия, при котором квантор общности в заменяющей части теряет одну из переменных связывающей приставки. Затем дополнительная теорема типа транзитивности позволяет переформулировать этот квантор в виде эквивалентности. 1 прием.
4. Попытка использовать дополнительную теорему для варьирования квантора в заменяющей части. 3 приема.

Использование дополнительной импликации для варьирования заменяемой части эквивалентности

10 приемов.

1. Использование дополнительной импликации для реализации фрагмента заменяемой части эквивалентности. 7 приемов.
2. Использование дополнительной импликации для вывода следствия из заменяемой части эквивалентности и обратной свертки с помощью той же эквивалентности. 2 приема.
3. Перенесение в антецеденты теоремы ее заменяющей части и некоторых антецедентов дополнительной теоремы, применение которой к заменяемой импликации позволяет ее свернуть. 1 прием.

Использование параметрического описания для перехода к новым переменным

35 приемов.

1. Свертка параметрического описания.

26 приемов.

- (a) Параметрическое описание вида объектов данного типа позволяет перейти в теореме от выражения для общего вида объектов такого типа (например, "прямая(AB)") к переменной данного типа. 22 приема.
- (b) Теорема преобразуется с помощью вспомогательной задачи, выражающей переменные параметрического описания объектов заданного типа через одноместные операции над такими объектами. 2 приема.
- (c) Попытка перейти в теореме от выражения для общего вида объектов заданного типа к переменной этого типа и упростить некоторое новое выражение, содержащее заменяемую часть теоремы. 2 приема.

2. Развертка параметрического описания.

9 приемов.

- (a) Переход от переменной для объектов заданного типа к выражению для их общего вида. 8 приемов.
- (b) Варьирование выражения для объектов заданного типа, использующее два различных их параметрических описания. 1 прием.

Использование уравнений для координат множеств точек

5 приемов.

Переход от координат объекта к самому объекту

1 прием

Использование условия существования для преобразования эквивалентности в условие существования

2 приема.

Использование дополнительной импликации для извлечения тождества из текущей импликации

1 прием.

Использование дополнительного условия существования для установления эквивалентности консеквента одному из antecedентов

1 прием.

Использование дополнительных тождеств для варьирования функциональной переменной

2 приема.

Тождество с описателем "класс" порождает эквивалентность для условия включения либо непересечения двух таких классов, которое упрощается при помощи дополнительной теоремы

1 прием.

Дополнительная теорема определяет условия однозначной определенности объекта, рассматриваемого в текущей теореме

1 прием.

6.5 Обобщение теоремы

В этом разделе собраны приемы, предпринимающие попытку обобщения теоремы. Всего 194 приема.

Отбрасывание избыточного антецедента

39 приемов.

1. Отбрасывание избыточного отрицания равенства. 25 приемов.
2. Отбрасывание избыточного отрицания в общем случае. 4 приема.
3. Отбрасывание реализуемой группы антецедентов с переменной, не входящей в консеквент. 4 приема.
4. Отбрасывание антецедента, являющегося следствием каждой из частей эквивалентности. 1 прием.
5. Отбрасывание антецедента - следствия остальных антецедентов. 1 прием.
6. Попытка доказать избыточность антецедента. 3 приема.
7. Попытка усмотреть избыточность антецедента после подстановки, позволяющей сохранить остальные антецеденты и консеквент. 1 прием.

Ослабление антецедентов

10 приемов.

1. Переход к ослабленному отношению в антецеденте сохраняет истинность теоремы. 7 приемов.
2. Устранение связи антецедента по некоторой переменной с остальной частью теоремы. 1 прием.

3. Отбрасывание антецедента с усложнением консеквента. 1 прием.
4. Использование дополнительной теоремы для ослабления антецедента. 1 прием.

Развязка переменной

Если в теореме некоторая переменная встречается в различных местах, то под развязкой ее понимается размещение на этих местах различных переменных, с добавлением связывающего новые переменные соотношения. 9 приемов.

1. Развязка переменных консеквента. 5 приемов.
2. Развязка переменных антецедентов. 3 приема.
3. Развязка связи консеквента с антецедентами. 1 прием.

Переход к новому параметру, обозначающему сложное подвыражение

36 приемов.

1. Обозначение новым параметром не содержащего неизвестных подтерма. 4 приема.
2. Обозначение новым параметром подтерма консеквента. 12 приемов.
3. Обозначение новым параметром подтерма антецедента. 3 приема.
4. Исключение операции типа "отрицание". 15 приемов.
5. Ввод функциональной переменной, обозначающей старое выражение с функциональными переменными. 2 приема.

Домножение обеих частей двуместного отношения на выражение с новым параметром

28 приемов.

1. Домножение обеих частей равенства в консекvente на выражение с новым параметром.
25 приемов.
 - (a) Домножение обеих частей тождества на новый параметр и перемещение его вглубь заменяемой части. 23 приема.
 - (b) Домножение обеих частей тождества на выражение с новым параметром. 2 приема.
2. Домножение обеих частей двуместного отношения в антецеденте на выражение с новым параметром. 1 прием.
3. Домножение на новый параметр обеих частей равенства в заменяемой части эквивалентности. 2 приема.

Ввод дизъюнктивного члена заменяющей части эквивалентности для учета вырожденного случая

6 приемов.

Усмотрение возможности перенести антецедент в конъюнктивные члены заменяющей части эквивалентности

3 приема.

Обобщение тождества либо эквивалентности путем подстановки вместо переменной выражения с двумя переменными

34 приема.

1. Ввод неповторного внешнего параметра. 13 приемов.
2. Ввод неповторного дополнительного параметра операнда. 8 приемов.
3. Ввод повторного дополнительного параметра операнда. 4 приема.
4. Ввод функционального неповторного внешнего параметра. 3 приема.
5. Ввод функционального неповторного дополнительного параметра операнда. 1 прием.
6. Ввод внешней двуместной операции над сложной одноместной. 2 приема.
7. Ввод коэффициента при повторном вхождении переменной. 2 приема.
8. Ввод коэффициента при неповторной переменной. 1 прием.

Обобщение тождества путем перенесения в условное выражение консеквента

5 приемов.

Подстановка вместо переменной сложного выражения

2 приема.

Выражение параметра через два новых параметра, разносимых по разным частям двуместного отношения

2 приема.

Индуктивное обобщение теоремы

14 приемов.

1. Кратное применение упрощающего тождества. 6 приемов.
2. Переход от обычной операции к операции над конечным семейством. 10 приемов.
3. Переход от операции типа умножения к операции типа степени. 3 приема.
4. Обобщение тождества для ассоциативной двуместной операции на наборы произвольной длины. 1 прием.

Разрешение заменяемой части относительно сложного подтерма

1 прием.

Обобщение путем подстановки в дополнительное тождество

3 приема.

1. Дополнительное тождество позволяет ввести вспомогательный параметр внутри исходного тождества. 1 прием.
2. Дополнительное тождество обобщает заменяемую часть исходного тождества, отбрасывая из нее некоторые фрагменты. 2 приема.

Обобщение вида уравнения, разрешаемого эквивалентностью

1 прием.

Обобщение уравнения для координат множества точек путем изменения системы координат

1 прием.

6.6 Использование задачи на описание для вывода следствий теоремы

В этом разделе собраны приемы, у которых основную роль при выводе следствия теоремы играет некоторая задача на описание. Всего 95 приемов.

Заметим, что на самом деле обращения к задачам любых типов, причем неоднократные, часто встречаются и во всех остальных приемах вывода теорем. Например, завершающее редактирование теоремы предпринимается при помощи задачи на преобразование. Поэтому отнесение приемов к данному и следующим трем разделам классификации означает лишь то, что в них решение задачи является центральным моментом.

Рассматривается некоторая характеристика встречающихся в консеквенте атомарных выражений. При помощи задачи на описание предпринимается попытка выразить данную характеристику одного из выражений через характеристики остальных

1 прием.

Разрешение тождества относительно некоторого подвыражения

11 приемов.

Разрешение заменяемой части эквивалентности относительно некоторого подвыражения

1 прием.

Разрешение отношения в консеквенте относительно некоторого подвыражения

2 прием.

Зануление фрагмента заменяемой части эквивалентности либо тождества

2 приема.

Разрешение заменяющей части эквивалентности относительно параметра

2 приема.

Использование дополнительной теоремы для создания системы из двух уравнений с двумя неизвестными

2 приема.

Решение задачи на описание для установления связи объектов текущей и дополнительной теорем

1 прием.

Однозначное определение варьируемых переменных квантора существования в консеквенте после добавления новых антецедентов

3 приема.

Переход от параметрического задания класса к непосредственному

3 приема.

Попытка варьирования описателя

5 приемов.

Варьирование квантора существования

1 прием.

Попытка разрешения подкванторного утверждения относительно части переменных связывающей приставки

2 приема.

Получение явного описания для заданного условия

56 приемов.

1. Усмотрение стандартных свойств определяемого множества. 8 приемов.
2. Усмотрение перенесения свойств исходных функций на свойство операции над функциями. 11 приемов.
3. Определение стандартных свойств определяемой функции. 9 приемов.
4. Попытка выразить координаты одного объекта через координаты другого. 5 приемов.
5. Попытка вычислить значение определяемой операции на других операциях раздела. 7 приемов.
6. Определение стандартных свойств определяемой двуместной операции. 2 приема.
7. Определение условий, при которых фрагмент теоремы становится тождественно ложным либо тождественно истинным. 1 прием.
8. Сравнение двух кванторных определений. 1 прием.
9. Определение стандартных свойств числового атома. 6 приемов.
10. Определение связи числовых атомов с координатами. 2 приема.
11. Попытка определить по уравнению для координат множества точек некоторые параметры. 2 приема.
12. Попытка определить условие существования решения уравнения, удовлетворяющего дополнительному условию. 1 прием.
13. Попытка описать класс значений операции. 1 прием.

Попытка решить уравнение

3 приема.

1. Попытка решить простейшее уравнение с определяемой операцией. 2 приема.
2. Попытка разрешить отношения раздела относительно определяемой одной операции. 1 прием.

Операнды X подтерма T заменяемой части эквивалентности однозначно определяются по его значению. Это используется для получения эквивалентности, в которой подтерм T заменяемой части обозначен вспомогательной переменной, причем одна из частей эквивалентности - квантор общности по некоторому параметру списка X

1 прием.

Попытка выразить характеристику операции через такие же характеристики операндов

1 прием.

Вывод явного параметрического описания из простой импликации

1 прием.

6.7 Использование задачи на исследование для вывода следствий теоремы

В этом разделе собраны приемы, у которых основную роль при выводе следствия теоремы играет некоторая задача на исследование. Всего 89 приемов.

Вывод следствий из антецедентов и консеквента

35 приемов.

1. Вывод новых теорем путем анализа объединенного списка антецедентов и частей определяющей эквивалентности. 9 приемов.
2. Вывод новых теорем путем анализа объединенного списка антецедентов и консеквента. 12 приемов.
3. Вывод следствий только из антецедентов. 1 прием.
4. Пополнение консеквента дополнительными следствиями антецедентов. 2 приема.
5. Вывод следствий из антецедентов и обеих частей определяющей эквивалентности для реализации антецедентов дополнительной теоремы. 1 прием.

6. Решение задачи на исследование для выражения старых параметров через новые. 1 прием.
7. По итогам предварительного анализа следствий из антецедентов и обеих частей эквивалентности формируется некоторое дополнительное условие A . После анализа пополненного этим условием контекста выявляются новые утверждения. Из отрицания таких утверждений выводится отрицание утверждения A . 1 прием.
8. Анализ объединения двух контекстов - исходного объединения антецедентов с частями эквивалентности в консеквенте и контекста, полученного заменой некоторого параметра на новую переменную. 1 прием.
9. Анализ следствий из антецедентов и подкванторных утверждений квантора существования. 3 приема.
10. Пополнение списка антецедентов равенствами для вспомогательных обозначений подтермов консеквента. Следствие с этими обозначениями преобразуется согласно исходной связи между обозначенными подтермами. 1 прием.
11. Вывод следствий антецедентов и консеквента с навешиванием квантора существования. 3 приема.

Вывод следствий из антецедентов и утверждений под квантором существования в консеквенте

2 приема.

Вывод следствий из антецедентов и условия, связанного с консеквентом

9 приемов.

Использование задачи на исследование для формирования гипотезы

5 приемов.

Решение задачи на исследование с целью исключить заданные подвыражения

19 приемов.

Попытка усмотрения однозначного определения переменной под квантором существования

3 приема.

Анализ утверждения типа "длялюбого существует длялюбого"

3 приема.

Изменение уравнения для координат множества объектов

5 приемов.

Вывод следствий с привлечением дополнительных построений

3 приема.

Добавление антецедентов для исключения квантора существования в консеквенте

1 прием.

Использование задачи на исследование для усмотрения возможной замены переменной

1 прием.

Вывод следствий из антецедентов и заменяющей части эквивалентности после применения к ним некоторой подстановки

1 прием.

Анализ антецедентов и консеквента исходной теоремы, с добавлением фрагмента дополнительной теоремы

2 приема.

6.8 Использование задачи на преобразование для вывода следствий теоремы

В этом разделе собраны приемы, у которых основную роль при выводе следствия теоремы играет некоторая задача на преобразование. Всего 9 приемов.

Упрощение характеристики определяемого объекта

6 приемов.

Проверка стандартного тождества для определяемой операции

1 прием.

Попытка упростить результат применения операции к стандартной операции над ее аргументом

1 прием.

Рассмотрение экстремального значения параметра

1 прием.

6.9 Использование задачи на доказательство для вывода следствий теоремы

В этом разделе собраны приемы, у которых основную роль при выводе следствия теоремы играет некоторая задача на доказательство. Всего 58 приемов.

Проверка того, что один из антецедентов является следствием прочих антецедентов и консеквента, и перестановка их местами

3 приема.

Вывод эквивалентности консеквента конъюнкции части антецедентов

12 приемов.

Исключение квантора существования в консеквенте путем перенесения в антецеденты части подкванторных утверждений

1 прием.

Исключение квантора существования в одной из частей эквивалентности путем перенесения в антецеденты части подкванторных утверждений

1 прием.

Попытка вывести эквивалентность консеквента результату навешивания квантора существования на часть антецедентов

1 прием.

Попытка вывести эквивалентность антецедента результату навешивания квантора существования на консеквент и часть других антецедентов

1 прием.

Перенесение отрицания одного из антецедентов в дизъюнктивные члены заменяющей части эквивалентности, служащей консеквентом

1 прием.

Перенесение одного из антецедентов в конъюнктивные члены эквивалентности, служащей консеквентом

1 прием.

Попытка перенести отрицание дизъюнктивного члена одной части эквивалентности в конъюнктивные члены другой части

1 прием.

Проверка стандартного свойства операции либо отношения

22 приема.

Проверка сохранения определяемого свойства после применения элементарных операций раздела

5 приемов.

Попытка получить параметрическое описание из простой импликации

1 прием.

Попытка получить явное параметрическое описание из косвенного

1 прием.

Попытка получить эквивалентность для консеквента и одного из антецедентов

1 прием.

Попытка доказательства гипотезы, подсказанной предметной областью

6 приемов.

6.10 Варьирование антецедентов теоремы

В этом разделе собраны приемы, предпринимающие попытку преобразовать один либо несколько антецедентов теоремы - за счет тождества, эквивалентности, либо импликации, реализующей антецедент. Антецеденты дополнительной теоремы, использованной для такого преобразования, добавляются к антецедентам исходной теоремы. Всего в разделе 176 приемов.

Реализация антецедента текущей теоремы

Обычно реализация антецедента происходит в результате унификации его с консеквентом дополнительной теоремы. При этом дополнительные антецеденты существенно проще реализованного либо вообще отсутствуют.

56 приемов.

1. Реализация антецедента с помощью дополнительной теоремы, которую находит справочник поиска теорем. 30 приемов.

2. Реализация антецедента с помощью подходящей теоремы, определяемой при просмотре раздела базы теорем. 11 приемов.
3. Реализация антецедента с помощью другой теоремы текущего списка вывода. 6 приемов.
4. Реализация консеквента кванторного антецедента с помощью дополнительной теоремы. 1 прием.
5. Реализация антецедента без привлечения дополнительных теорем. 8 приемов.

Реализация антецедента дополнительной теоремы

14 приемов.

1. Реализация антецедента дополнительной теоремы, которую находит справочник поиска теорем. 7 приемов.
2. Реализация антецедента дополнительной теоремы, находящейся в текущем списке вывода. 2 приема.
3. Реализация антецедентов дополнительной теоремы и ввод квантора существования по новым параметрам. 1 прием.
4. переформулировка антецедента дополнительной теоремы при помощи консеквента текущей теоремы. 1 прием.
5. Реализация антецедента дополнительной теоремы, определяемой при просмотре раздела базы теорем. 2 приема.
6. Реализация антецедента дополнительной теоремы после ее контрапозиции. 1 прием.

Реализация антецедента с помощью задачи на описание

2 приема.

Упрощение антецедента

38 приемов.

1. Исключение многоместного предиката в антецедентах. 10 приемов.
2. Переход к антецедентам, имеющим меньшее число параметров. 6 приемов.
3. Исключение сложных понятий в антецедентах. 20 приемов.
4. Переход к сложному антецеденту с более простыми операндами. 1 прием.
5. Обработка антецедента упрощающей эквивалентностью. 1 прием.

Усиление антецедента

5 приемов.

Сужение теоремы путем добавления антецедента, упрощающего идентификацию

1 прием.

Варьирование сложного антецедента

32 приема

1. Попытка свести одно равенство к другому. 10 приемов.
2. Варьирование антецедента дополнительной теоремы. 9 приемов.
3. Варьирование подвыражения антецедента. 4 приема.
4. Переформулировка антецедента через координаты объектов. 1 прием.
5. Варьирование антецедента эквивалентностью перегруппировочного типа. 3 приема.
6. Попытка свести одно неравенство к другим. 2 приема.
7. Попытка вывести аналогичное утверждение из альтернативного антецедента. 1 прием.
8. Варьирование антецедента, возникающего после контрапозиции импликации. 1 прием.
9. Попытка свести антецедент к тому же отношению, что и у консеквента. 1 прием.

Развязка параметров антецедента с помощью дополнительной теоремы

9 приемов.

1. Развязка двух антецедентов, имеющих общие параметры. 2 приема.
2. Развязка подвыражения антецедента. 1 прием.
3. Развязка антецедента, имеющего общий параметр с консеквентом. 5 приемов.
4. Развязка подвыражения консеквента. 1 прием.

Группировка нескольких антецедентов в один

3 приема.

1. Группировка антецедентов исходной теоремы. 2 приема.
2. Группировка антецедентов дополнительной теоремы. 1 прием.

Одновременное ослабление антецедентов и консеквента

7 приемов.

1. Переход к ослабленным отношениям. 3 приема.
2. Перенесение антецедента под квантор существования в консеквент. 2 приема.
3. Поглощение антецедента более общим понятием и преобразование консеквента в дизъюнкцию, учитывающую альтернативные случаи нового антецедента. 2 приема.

Перенесение фрагмента консеквента в антецеденты и реализация нового антецедента

2 приема.

Усиление антецедента для варьирования консеквента

4 приема.

Исключение кванторного антецедента и ввод условного выражения в консеквенте

1 прием.

Использование дополнительной теоремы для опровержения антецедента

1 прием.

Ослабление антецедента путем ввода дополнительных антецедентов

1 прием.

6.11 Теорема, подготавливающая срабатывание других приемов

Некоторые приемы решателя лишь подготавливают срабатывание других приемов, выполняющих существенный шаг решения. Для вывода теорем таких приемов пока создан единственный прием, варьирующий шаблон для стандартного вида уравнения.

6.12 Получение дополнительной теоремы программирующего вывода

В разделе собраны приемы, преобразующие теорему для придания ей некоторого специального вида, который должна иметь дополнительная теорема, применяемая в выводе теорем. Всего 3 приема.

Решение задачи на описание для получения тождества, возвращающего исходное значение

1 прием.

Подстановка единицы для получения дополнительной теоремы заданного вида

2 приема.

Вывод теоремы справочника "Сокращение"

1 прием.

6.13 Извлечение теоремы из протокола

В разделе собраны приемы, извлекающие из протокола теоремы приемов решателя. Всего 8 приемов.

Непосредственное извлечение теоремы приема из протокола

4 приема.

Использование дополнительной эквивалентности для извлечения теоремы приема из протокола

3 приема.

Использование дополнительного тождества для извлечение теоремы приема из протокола

1 прием.

6.14 Создание теоремы, вводящей новые объекты

Прием вывода теорем, создающий теорему приема решателя, вводящую новые объекты, пока единственный.

6.15 Создание квазипротокола

В разделе собраны приемы, создающие квазипротоколы. Всего 8 приемов.

6.16 Создание протокола

В разделе собраны приемы, создающие протоколы. Всего 6 приемов.

Глава 7

Примеры цепочек вывода теорем

При обучении системы вывода теорем наиболее существенным является первый шаг - планирование последовательности переходов от "известных" теорем, ведущей к требуемой итоговой теореме. Каждый переход должен быть как можно лучше мотивирован, чтобы факт "открытия" выглядел наиболее естественным. При наличии такой последовательности создание самих приемов вывода теорем, реализующих ее, является сравнительно несложным делом, требующим лишь владения техникой.

Примеры, сопровождавшие приемы вывода теорем, имели сугубо локальный характер. Всю цепочку вывода, элементами которой они являлись, по ним представить невозможно. Поэтому имеет смысл привести примеры таких цепочек. Чтобы не утомлять читателя, ограничимся лишь несколькими примерами.

Каждая цепочка вывода начинается с некоторой стартовой теоремы ячейки вывода и завершается теоремой той же ячейки. Все они реализуются системой автоматически, в одном цикле вывода для данной ячейки. Подзаголовки пунктов цепочки скопированы из оглавления приемов вывода теорем.

1. Вывод формулы корней квадратного уравнения из формулы для решения простейшего степенного уравнения.

Ячейка вывода расположена в разделе "Элементарная алгебра" - "Степени" - "Простейшие степенные уравнения" оглавления базы теорем.

- (a) Стартовая теорема:

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ b - \text{rational} \ \& \ \text{числитель}(b) - \text{even} \ \& \ \neg(b = 0) \rightarrow a^b = c \leftrightarrow 0 \leq c \ \& \ (a = c^{1/b} \vee a = -c^{1/b}))$$

- (b) Попытка проварьировать эквивалентность, разрешающую утверждение с единственным вхождением неизвестной, при помощи тождества, создающего кратные вхождения неизвестной.

$$\forall_{cde}(c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow 2de + d^2 = c - e^2 \leftrightarrow (d = -e + \sqrt{c} \vee d = -(e + \sqrt{c})) \ \& \ 0 \leq c)$$

В качестве дополнительной использована теорема

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2)$$

- (с) Обобщение эквивалентности для решения уравнения: выделение невырожденного известного подвыражения с уникальным параметром и замена его на новый параметр.

$$\forall_{ade}(d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow 2de + d^2 = a \leftrightarrow \\ (d = -e + \sqrt{a + e^2} \vee d = -(e + \sqrt{a + e^2})) \ \& \ 0 \leq a + e^2)$$

- (d) Обобщение эквивалентности для решения уравнения: выделение невырожденного известного подвыражения с уникальным параметром и замена его на новый параметр.

$$\forall_{abd}(d - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \rightarrow bd + d^2 = a \leftrightarrow \\ (d = -(b + \sqrt{4a + b^2})/2 \vee d = (-b + \sqrt{4a + b^2})/2) \ \& \ 0 \leq 4a + b^2)$$

- (e) Обобщение эквивалентности для разрешения относительно неизвестной: домножение обеих частей двуместного отношения на новый параметр и дистрибутивная развертка.

$$\forall_{abcd}(\neg(c = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \rightarrow bcd + cd^2 = \\ ac \leftrightarrow (d = -(b + \sqrt{4a + b^2})/2 \vee d = (-b + \sqrt{4a + b^2})/2) \ \& \ 0 \leq 4a + b^2)$$

В качестве дополнительных использованы теоремы:

$$\forall_{abc}(\neg(b = 0) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab = bc \leftrightarrow a = c)$$

$$\forall_{abc}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \rightarrow ab + ac = a(b + c))$$

- (f) Обобщение эквивалентности для решения уравнения: выделение невырожденного известного подвыражения с уникальным параметром и замена его на новый параметр.

$$\forall_{bcde}(\neg(c = 0) \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow bcd + cd^2 = \\ e \leftrightarrow (d = -(b + \sqrt{4e/c + b^2})/2 \vee d = (-b + \sqrt{4e/c + b^2})/2) \ \& \ 0 \leq 4e/c + b^2)$$

- (g) Обобщение эквивалентности для решения уравнения: выделение невырожденного известного подвыражения с уникальным параметром и замена его на новый параметр.

$$\forall_{acde}(\neg(c = 0) \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ a - \text{число} \rightarrow ad + cd^2 = \\ e \leftrightarrow (d = -(a + \sqrt{4ce + a^2})/2 \vee d = (-a + \sqrt{4ce + a^2})/2) \ \& \ 0 \leq 4ce + a^2)$$

2. Вывод соотношения для длин сторон треугольника и длины медианы из теоремы косинусов.

Ячейка вывода расположена в разделе "Элементарная геометрия" - "Фигуры" - "Треугольник" - "Теорема косинусов".

- (a) Стартовая теорема:

$$\forall_{ABC}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ \neg(A = C) \ \& \ \neg(A = B) \rightarrow \\ 2l(AB)l(AC) \cos(\angle(BAC)) = l(AB)^2 + l(AC)^2)$$

- (b) Попытка использования двух соотношений для исключения тригонометрической функции угла.

$$\forall_{defg}(\neg(d = e) \ \& \ \neg(e = f) \ \& \ \neg(e = g) \ \& \ e \in \text{отрезок}(df) \ \& \ d - \text{точка} \ \& \\ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \rightarrow l(dg)^2 l(ef) + l(fg)^2 l(de) = (l(de)l(ef) + \\ l(eg)^2)(l(de) + l(ef)))$$

Стартовая теорема используется и как основная, и как дополнительная.

- (с) Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной либо константному выражению в антецедентах.

$$\forall_{defg}(f - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \neg(e = f) \ \& \ \neg(e = g) \ \& \ e \in \text{отрезок}(df) \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \rightarrow \ l(dg)^2l(ef) + l(fg)^2l(de) = (l(de)l(ef) + l(eg)^2)(l(de) + l(ef)))$$

- (d) Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной либо константному выражению в антецедентах.

$$\forall_{defg}(f - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ \neg(e = g) \ \& \ e \in \text{отрезок}(df) \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \rightarrow \ l(dg)^2l(ef) + l(fg)^2l(de) = (l(de)l(ef) + l(eg)^2)(l(de) + l(ef)))$$

- (е) Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной либо константному выражению в антецедентах.

$$\forall_{defg}(f - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e \in \text{отрезок}(df) \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \rightarrow \ l(dg)^2l(ef) + l(fg)^2l(de) = (l(de)l(ef) + l(eg)^2)(l(de) + l(ef)))$$

- (f) Попытка отождествления двух числовых атомов для сокращения соотношения.

$$\forall_{defg}(\neg(d = e) \ \& \ l(de) = l(ef) \ \& \ e \in \text{отрезок}(df) \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ g - \text{точка} \ \rightarrow \ -2l(ef)^2 - 2l(eg)^2 + l(dg)^2 + l(fg)^2 = 0)$$

- (g) Попытка отбросить избыточное отрицание равенства переменной либо константному выражению в антецедентах.

$$\forall_{defg}(f - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ l(de) = l(ef) \ \& \ e \in \text{отрезок}(df) \ \& \ g - \text{точка} \ \rightarrow \ -2l(ef)^2 - 2l(eg)^2 + l(dg)^2 + l(fg)^2 = 0)$$

3. Вывод формулы для расстояния от точки до прямой в трехмерном пространстве из условия перпендикулярности двух прямых.

Ячейка вывода расположена в разделе "Аналитическая геометрия" - "Уравнение прямой в пространстве" - "Условие перпендикулярности двух прямых".

- (a) Стартовая теорема:

$$\forall_{ABCDKabcdefghkpqr}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \ \& \ p - \text{число} \ \& \ q - \text{число} \ \& \ r - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ \text{прямкоорд}(K) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x + a, y + b, z + c), (d, e, f)) \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число}) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u + g, v + h, w + k), (p, q, r)) \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число} \ \& \ w - \text{число}) \ \rightarrow \ \text{прямая}(AB) \perp \text{прямая}(CD) \leftrightarrow dp + eq + fr = 0)$$

- (b) Переход к импликации, выводящей соотношение для параметров уравнения.

$$\forall_{abcdefghkpqrABCDK}(\neg(A = B) \ \& \ \neg(C = D) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(AB), K) = \text{set}_{xyz}(\text{пропорцнаборы}((x + a, y + b, z + c), (d, e, f)) \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число} \ \& \ z - \text{число}) \ \& \ \text{коорд}(\text{прямая}(CD), K) = \text{set}_{uvw}(\text{пропорцнаборы}((u + g, v + h, w + k), (p, q, r)) \ \& \ u - \text{число} \ \& \ v - \text{число} \ \& \ w - \text{число}) \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \ \& \ f - \text{число} \ \& \ g - \text{число} \ \& \ h - \text{число} \ \& \ k - \text{число} \ \& \ p - \text{число} \ \& \ q - \text{число} \ \& \ r - \text{число}) \ \rightarrow \ dp + eq + fr = 0)$$

h – число & k – число & p – число & q – число & r – число & A – точка & B – точка & C – точка & D – точка & прямая(AB) \perp прямая(CD) & $\text{прямкоорд}(K) \rightarrow dp + eq + fr = 0$)

- (с) Преобразование параметрического описания для уравнения множества точек в явное задание этого уравнения и определение координат точки.

$\forall_{abcdefghijlmnptu}(\neg(a = l) \& \neg(m = n) \& t = h(b + c) + i(d + f) + j(e + q) \& u = h^2 + i^2 + j^2 \& \text{коорд}(l, p) = (b, d, e) \& \text{коорд}(\text{прямая}(mn), p) = \text{set}_{qrs}(q - \text{число} \& r - \text{число} \& s - \text{число} \& \text{пропорцнаборы}((h, i, j), (c + q, f + r, g + s))) \& a \in \text{прямая}(mn) \& c - \text{число} \& f - \text{число} \& g - \text{число} \& h - \text{число} \& i - \text{число} \& j - \text{число} \& a - \text{точка} \& l - \text{точка} \& m - \text{точка} \& n - \text{точка} \& \text{прямая}(al) \perp \text{прямая}(mn) \& \text{прямкоорд}(p) \rightarrow \text{коорд}(a, p) = (-c + ht/u, -f + it/u, -g + jt/u)$

В качестве дополнительной используется теорема:

$\forall_{abcdehijklBCK}(\neg(a = s) \& \neg(B = C) \& \text{коорд}(s, K) = (b, d, e) \& \text{коорд}(\text{прямая}(BC), K) = \text{set}_{xyz}(x - \text{число} \& y - \text{число} \& z - \text{число} \& \text{пропорцнаборы}(j, k, l), (c + x, h + y, i + z)) \& a \in \text{прямая}(BC) \& c - \text{число} \& h - \text{число} \& i - \text{число} \& j - \text{число} \& k - \text{число} \& l - \text{число} \& a - \text{точка} \& s - \text{точка} \& B - \text{точка} \& C - \text{точка} \& \text{Трехмерн}(K) \rightarrow \exists_m(\text{коорд}(a, K) = (jm - c, km - h, lm - i) \& \text{коорд}(\text{прямая}(as), K) = \text{set}_{pqr}(p - \text{число} \& q - \text{число} \& r - \text{число} \& \text{пропорцнаборы}((p - b, q - d, r - e), (jm - b - c, km - d - h, lm - e - i))) \& m - \text{число}))$

После идентификации прямых исходной теоремы с прямыми дополнительной соотношение из консеквента исходной теоремы используется для определения параметра m . Далее из-под квантора существования извлекается соотношение для координат точки a .

- (d) Попытка анализа контекста теоремы для получения соотношения, не содержащего точки, координаты которой определяются теоремой.

$\forall_{bcdefghijlmnp}(\neg(m = n) \& \neg(l \in \text{прямая}(mn)) \& \text{коорд}(l, p) = (b, d, e) \& \text{коорд}(\text{прямая}(mn), p) = \text{set}_{qrs}(q - \text{число} \& r - \text{число} \& s - \text{число} \& \text{пропорцнаборы}((h, i, j), (c + q, f + r, g + s))) \& c - \text{число} \& f - \text{число} \& g - \text{число} \& h - \text{число} \& i - \text{число} \& j - \text{число} \& l - \text{точка} \& m - \text{точка} \& n - \text{точка} \& \text{прямкоорд}(p) \rightarrow (h(d + f) - i(b + c))^2 + (i(e + g) - j(d + f))^2 + (h(e + g) - j(b + c))^2 = (h^2 + i^2 + j^2)(\text{расстдопрямой}(l, \text{прямая}(mn)))^2$

Решается задача на исследование, посылки которой суть антецеденты и консеквент исходной теоремы. Задаче ставится цель на вывод следствий, не содержащих точки a . В частности, выводится соотношение для расстояния от точки l до прямой mn . Затем, при помощи задачи на описание, точка a исключается из антецедентов. Вместо содержащих ее антецедентов добавляется антецедент " $\neg(l \in \text{прямая}(mn))$ ".

- (e) Попытка отбросить несущественный антецедент.

$\forall_{bcdefghijlmnp}(\neg(m = n) \& \text{коорд}(l, p) = (b, d, e) \& \text{коорд}(\text{прямая}(mn), p) = \text{set}_{qrs}(q - \text{число} \& r - \text{число} \& s - \text{число} \& \text{пропорцнаборы}((h, i, j), (c + q, f + r, g + s))) \& c - \text{число} \& f - \text{число} \& g - \text{число} \& h - \text{число} \& i - \text{число} \& j - \text{число} \& l - \text{точка} \& m - \text{точка} \& n - \text{точка} \& \text{прямкоорд}(p) \rightarrow$

$$(h(d + f) - i(b + c))^2 + (i(e + g) - j(d + f))^2 + (h(e + g) - j(b + c))^2 = (h^2 + i^2 + j^2)(\text{расстдопрямой}(l, \text{прямая}(mn)))^2)$$

4. Вывод формулы интегрирования по частям из определения первообразной.

Ячейка вывода расположена в разделе "Математический анализ" - "Интегрирование" - "Первообразные" - "Определение первообразной".

- (a) Стартовая теорема:

$$\forall_{fg}(f - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \text{первообразная}(f, g) \leftrightarrow g - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \forall_x(x \in \text{Dom}(g) \rightarrow \text{дифференцируема}(g, x) \ \& \ \text{производная}(g, x) = f(x))$$

- (b) Усмотрение явного выражения функции через параметры.

$$\forall_g(\forall_x(x \in \text{Dom}(g) \rightarrow \text{дифференцируема}(g, x)) \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g - \text{функция} \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(\text{производная}(g, x), x \in \text{Dom}(g)), g))$$

- (c) Примерка тождеств, упрощающих выражение под описателем "отображение".

$$\forall_{acde}(\text{Dom}(a) = \text{Dom}(e) \ \& \ \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \ \& \ \text{первообразная}(e, d) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(x)d(x) + c(x)e(x), x \in \text{Dom}(e)), \lambda_b(c(b)d(b), b \in \text{Dom}(e))))$$

В качестве дополнительной используется теорема

$$\forall_{aeg}(\text{Dom}(e) = \text{Dom}(g) \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \in \text{Dom}(g) \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ \text{дифференцируема}(e, a) \ \& \ \text{дифференцируема}(g, a) \rightarrow \text{производная}(\lambda_c(e(c)g(c), c \in \text{Dom}(g)), a) = e(a)\text{производная}(g, a) + g(a)\text{производная}(e, a))$$

- (d) Попытка исключить один из операндов для выделения новой двуместной операции.

$$\forall_{acdei}(\text{Dom}(a) = \text{Dom}(e) \ \& \ \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \ \& \ \text{первообразная}(e, d) \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_x(-c(x)e(x), x \in \text{Dom}(e)), i) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_k(a(k)d(k), k \in \text{Dom}(e)), \lambda_g(c(g)d(g) + i(g), g \in \text{Dom}(e))))$$

В качестве дополнительной используется теорема

$$\forall_{acde}(\text{Dom}(a) = \text{Dom}(e) \ \& \ \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \ \& \ \text{первообразная}(e, d) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(x) + e(x), x \in \text{Dom}(e)), \lambda_b(c(b) + d(b), b \in \text{Dom}(e))))$$

- (e) Переход к области определения исходных функций.

$$\forall_{acdei}(\text{Dom}(a) = \text{Dom}(e) \ \& \ \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \ \& \ \text{первообразная}(e, d) \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_x(-c(x)e(x), x \in \text{Dom}(e)), i) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_k(a(k)d(k), k \in \text{Dom}(a)), \lambda_g(c(g)d(g) + i(g), g \in \text{Dom}(e))))$$

- (f) Попытка отбросить внешнюю одноместную операцию (антецедент).

$$\forall_{acdeh}(\text{Dom}(a) = \text{Dom}(e) \ \& \ \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \ \& \ \text{первообразная}(e, d) \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_x(c(x)e(x),$$

$x \in \text{Dom}(e), h) \rightarrow$ первообразная($\lambda_k(a(k)d(k), k \in \text{Dom}(e)), \lambda_g(c(g)d(g) - h(g), g \in \text{Dom}(e))$))

(g) Переход к области определения исходных функций.

$\forall_{acdeh}(\text{Dom}(a) = \text{Dom}(e) \ \& \ \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \ \& \ \text{первообразная}(e, d) \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_x(c(x)e(x), x \in \text{Dom}(e)), h) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_k(a(k)d(k), k \in \text{Dom}(a)), \lambda_g(c(g)d(g) - h(g), g \in \text{Dom}(e))))$

(h) Усмотрение явной выразимости параметров друг через друга.

$\forall_{abch}(\forall_f(f \in \text{Dom}(b) \rightarrow \text{дифференцируема}(b, f)) \ \& \ \text{Dom}(a) = \text{Dom}(b) \ \& \ \text{Dom}(b) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(b) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ b - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \ \& \ \text{первообразная}(\lambda_x(c(x)\text{производная}(b, x), x \in \text{Dom}(b)), h) \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(a(k)b(k), k \in \text{Dom}(b)), \lambda_g(b(g)c(g) - h(g), g \in \text{Dom}(b))))$

В качестве дополнительной используется теорема

$\forall_g(\forall_x(x \in \text{Dom}(g) \rightarrow \text{дифференцируема}(g, x)) \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ g - \text{функция} \rightarrow \text{первообразная}(\lambda_x(\text{производная}(g, x), x \in \text{Dom}(g)), g))$

5. Вывод утверждения о перестановке столбцов определителя из определения определителя.

Ячейка вывода расположена в разделе "Линейная алгебра" - "Определители" - "Определение определителя".

(a) Стартовая теорема:

$\forall_{An}(n - \text{натуральное} \ \& \ \text{матр}(A, \mathbb{R}, n, n) \rightarrow \det(A) = \sum_{p, \text{перестановка}(p, \{1, \dots, n\})} (-1)^{\text{четность}(p)} \prod_{i=1}^n A(i, p(i)))$

(b) Попытка замены варьируемой переменной при вычислении операции над конечным семейством.

$\forall_{acA}(\text{перестановка}(a, \{1, \dots, c\}) \ \& \ \text{матр}(A, \mathbb{R}, c, c) \rightarrow \det(A) = (-1)^{\text{четность}(a)} \det(\lambda_{df}(A(d, a(f)), d \in \{1, \dots, c\} \ \& \ f \in \{1, \dots, c\}))$

В качестве дополнительной используется теорема:

$\forall_{fhn}(n - \text{натуральное} \ \& \ \text{перестановка}(f, \{1, \dots, n\}) \ \& \ \text{перестановка}(h, \{1, \dots, n\}) \rightarrow \text{перестановка}(\text{произведение}(f, h), \{1, \dots, n\}))$

(c) Попытка явного разрешения тождества относительно единственной численной операции над семейством.

$\forall_{acA}(\text{перестановка}(a, \{1, \dots, c\}) \ \& \ \text{матр}(A, \mathbb{R}, c, c) \rightarrow \det(\lambda_{df}(A(d, a(f)), d \in \{1, \dots, c\} \ \& \ f \in \{1, \dots, c\})) = (-1)^{\text{четность}(a)} \det(A))$

Упражнения

В заключение предложим несколько упражнений на планирование вывода.

1. Предложить цепочку шагов для вывода теоремы

$$\forall_{abcdABK}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ \text{прямоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) = \text{set}_{xy}(d+ax^2+ay^2+bx+cy = 0 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}) \rightarrow 4a^2l(AB)^2 = b^2+c^2-4ad)$$

из теоремы

$$\forall_{abABK}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ \text{прямоорд}(K) \ \& \ \text{коорд}(A, K) = (a, b) \rightarrow \text{коорд}(\text{окружность}(AB), K) = \text{set}_{xy}((x-a)^2 + (y-b)^2 = l(AB)^2 \ \& \ x - \text{число} \ \& \ y - \text{число}))$$

2. Предложить цепочку шагов для вывода теоремы

$$\forall_{abcde}(\neg(a = 0) \ \& \ \neg(b - 1 = 0) \ \& \ \neg(d - 1 = 0) \ \& \ \neg(e - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \ \& \ 0 < d \ \& \ 0 < e \ \& \ a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ c - \text{число} \ \& \ d - \text{число} \ \& \ e - \text{число} \rightarrow d^{c/(a \log_b e)} = b^{c/(a \log_a e)})$$

из теоремы

$$\forall_{ab}(a - \text{число} \ \& \ b - \text{число} \ \& \ 0 < a \ \& \ \neg(a - 1 = 0) \ \& \ 0 < b \rightarrow a^{\log_a b} = b)$$

3. Предложить цепочку шагов для вывода теоремы

$$\forall_{abdef}(\neg(a = b) \ \& \ \neg(e = f) \ \& \ \neg(d = e) \ \& \ l(de) = l(ef) \ \& \ d \in \text{окружность}(ab) \ \& \ e \in \text{окружность}(ab) \ \& \ f \in \text{окружность}(ab) \ \& \ a - \text{точка} \ \& \ b - \text{точка} \ \& \ d - \text{точка} \ \& \ e - \text{точка} \ \& \ f - \text{точка} \ \& \ \text{разныестороны}(d, f, \text{прямая}(ae)) \rightarrow \text{биссектриса}(defa))$$

из теоремы

$$\forall_{ABCDEFA}(A - \text{точка} \ \& \ B - \text{точка} \ \& \ C - \text{точка} \ \& \ D - \text{точка} \ \& \ E - \text{точка} \ \& \ F - \text{точка} \ \& \ \neg(A = B) \ \& \ C \in \text{окружность}(AB) \ \& \ D \in \text{окружность}(AB) \ \& \ E \in \text{окружность}(AB) \ \& \ F \in \text{окружность}(AB) \rightarrow l(CD) = l(EF) \leftrightarrow \angle(CAD) = \angle(EAF))$$

4. Предложить цепочку шагов для вывода теоремы

$$\forall_{af}(\neg(\cos(f(a)) = 0) \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \in \text{Dom}(f) \ \& \ f - \text{функция} \ \& \ \text{дифференцируема}(f, a) \rightarrow \text{производная}(\lambda_x(\text{tg } f(x)), x \in \text{Dom}(f)), a) = \text{производная}(f, a) / (\cos f(a))^2)$$

из теоремы

$$\forall_{fga}(f - \text{функция} \ \& \ g - \text{функция} \ \& \ \text{Dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(f) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(g) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a \in \text{Dom}(f) \ \& \ \text{дифференцируема}(f, a) \ \& \ \text{дифференцируема}(g, f(a)) \rightarrow \text{дифференцируема}(\lambda_x(g(f(x)), x \in \text{Dom}(f)), a) \ \& \ \text{производная}(\lambda_x(g(f(x)), x \in \text{Dom}(f)), a) = \text{производная}(g, f(a)) \cdot \text{производная}(f, a))$$

5. Предложить цепочку шагов для вывода теоремы

$$\forall_{abce}(\neg(\text{знаменатель}(b) - \text{even}) \ \& \ \neg(\text{числитель}(b) - \text{even}) \ \& \ b - \text{rational} \ \& \\ \text{первообразная}(\lambda_j(a(j)(-j^2 + 1)^{(b-1)/2}/e(j), j - \text{число}), c) \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(a(\sin x)(\cos x)^b/e(\sin x), x - \text{число}), \lambda_d(c(\sin d), d - \text{число})))$$

из теоремы

$$\forall_{ace}(\forall_f(f \in \text{Dom}(e) \rightarrow \text{дифференцируема}(e, f)) \ \& \ \text{Dom}(a) \subseteq \mathbb{R} \ \& \\ \text{Dom}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ \text{Val}(e) \subseteq \mathbb{R} \ \& \ a - \text{функция} \ \& \ e - \text{функция} \ \& \ \text{первообразная}(a, c) \rightarrow \\ \text{первообразная}(\lambda_x(a(e(x))\text{производная}(e, x), x \in \text{Dom}(e)), \lambda_d(c(e(d))), \\ d \in \text{Dom}(e))))$$

Указания

1. Путь к итоговой теореме в базе теорем - "Аналитическая геометрия" - "Линии второго порядка" - "Окружность" / - "Уравнение окружности на плоскости" / - "Выражение радиуса окружности через коэффициенты уравнения". Выбирается та теорема списка, которая совпадает с указанной в упражнении, нажимается "д", и при помощи клавиш курсора просматривается вся цепочка вывода. Переход к следующей теореме (из нее выводится текущая) - "курсор вправо". Для запуска повтора текущего перехода цепочки нажимается "ъ". Для возвращения в просмотр цепочки - "0" и "Enter".
2. Путь к итоговой теореме в базе теорем - "Элементарная алгебра" - "Логарифмы" - "Определение логарифма" - "Изменение основания степени за счет преобразования логарифма в показателе степени".
3. Путь к итоговой теореме в базе теорем - "Элементарная геометрия" - "Фигуры" - "Окружность на плоскости" - "Центральные углы, опирающиеся на равные хорды" - "Две равные хорды, проведенные из общей точки".
4. Путь к итоговой теореме в базе теорем - "Математический анализ" - "Дифференцируемость и вычисление производных" - "Производные функции одной переменной" - "Производная сложной функции" - "Производная тангенса".
5. Путь к итоговой теореме в базе теорем - "Математический анализ" - "Интегрирование" - "Первообразные" - "Замена переменной интегрирования" - "Простейшие тригонометрические замены".

Список литературы

1. А.Черч. Введение в математическую логику. Том 1. М.: ИЛ, 1960, с.484.
2. С.К.Клини. Введение в метаматематику. М.: ИЛ, 1957. 526с.
3. С.К.Клини. Математическая логика. М.: Мир, 1973, 480с.
4. Ч.Чень, Р.Ли. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Мир, 1983, 360 с.
5. Э.Мендельсон. Введение в математическую логику. М.: Наука, 1971, с.320.
6. Г.Метакидес, А.Нероуд. Принципы логики и логического программирования. М.: Факториал, 1998, 288с.

7. И.Братко. Программирование на языке Пролог для искусственного интеллекта. М.: Мир, 1990, 560 с.
8. Дж.Малпас. Реляционный язык Пролог и его применение. М.: Наука, 1990, 464 с.
9. Э.Хант. Искусственный интеллект. М.: Мир, 1978, 558с.
10. Ж.-Л. Лорьер. Системы искусственного интеллекта. М.: Мир, 1991, 568с.
11. E.A.Bender. Mathematical methods in artificial intelligence. Los Alamitos, IEEE, Comp.Society Press, 1996, 638p.
12. Д. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения. М.: Наука, 1975, 463с.
13. Д. Пойа. Математическое открытие. М.: Наука, 1976, 448с.
14. Лавров И.А., Максимова Л.Л., Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов, М., "Наука", 1975, 232 с.
15. Антонов Н.П., Выгодский М.Я., Никитин В.В., Санкин А.И.. Сборник задач по элементарной математике, М., "Наука", 1964, 528 с.
16. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Алгебра. М., "Наука", 1988, 431 с.
17. Вавилов В.В., Мельников И.И., Олехник С.Н., Пасиченко П.И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М., "Наука", 1988, 237 с.
18. Губницкий С.Б., Хануков М.Г., Шедей С.А. Полный курс шахмат. М., "Фолио", 2004.
19. Еремин В.В., Кузьменко Н.Е. Сборник задач и упражнений по химии. Школьный курс. М., "Мир и Образование", 2003.
20. Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В. Конкурсные задачи по математике. М., "Наука", 1992, 478 с.
21. Сканави М.И. Сборник задач по математике. М., "Высшая школа", 1988, 431 с.
22. Ваховский Е.Б., Рывкин А.А. Задачи по элементарной математике. М., "Наука", 1971, 360 с.
23. Лидский В.Б., Овсянников Л.В., Тулайков А.Н., Шабунин М.И., Федосов Б.В. Задачи по элементарной математике. М., 1973, 415 с.
24. Сергеев И.Н. Математика. Задачи с ответами и решениями. М., "Высшая школа", 2003, 336 с.
25. Шарыгин И.Ф. Геометрия, 9-11 классы. М., "Дрофа", 1997, 396 с.
26. Шарыгин И.Ф., Гордин Р.К. Сборник задач по геометрии. М., Астрель, 2001, 396 с.
27. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., "Наука", 1969, 544 с.

28. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. т.1. М., "Высшая школа", 2000, 722 с.
29. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии. М., "Наука", 1976, 384 с.
30. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., "Наука", 1965, 100 с.
31. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей. М., "Высшая школа", 2000, 364 с.
32. Пантелеев А.В., Якимова А.С. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. М., "Высшая школа", 2001, 445 с.
33. Черноуцан А.И. Физика. Задачи с ответами и решениями. М., Книжный дом "Университет", 2001, 335.
34. Подколзин А.С. Об организации баз знаний, ориентированных на автоматическое решение задач. "Дискретная математика", 1990, т.2., вып.1., с. 13-30.
35. Подколзин А.С. Система автоматического решения задач по элементарной алгебре. "Дискретная математика", 1994, т.6., вып.4., с. 35-57.
36. Подколзин А.С. Компьютерный решатель математических задач. ДАН РФ, 1994, т.335, № 4.
37. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование процессов решения математических задач. Изд-во ЦПИ при мех.-мат. факультете МГУ, 2001. 235 с.
38. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 1. Архитектура и языки решателя задач. М., "Физматлит", 2008. 1022 с.
39. Подколзин А.С. О самообучении интеллектуальной системы. "Интеллектуальные системы", 2014, том 18, выпуск 2, с. 197 - 266.
40. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 2. Опыт обучения компьютерного решателя задач: логические приемы, алгебра множеств, комбинаторика и элементарная алгебра. МГУ. - М., 2015. 1153 с. Деп. в ВИНТИ РАН 09.11.2015, № 184-В2015.
41. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 3. Опыт обучения компьютерного решателя задач: математический анализ, дифференциальные уравнения и элементарная геометрия. МГУ. - М., 2015. 1320 с. Деп. в ВИНТИ РАН 09.11.2015, № 185-В2015.
42. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 4. Опыт обучения компьютерного решателя задач: аналитическая геометрия, линейная алгебра, теория вероятностей, комплексный анализ и другие разделы. МГУ. - М., 2017. 969с. Деп. в ВИНТИ РАН 27.02.2017, № 18-В2017.

43. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 5. Опыт обучения компьютерного решателя задач: Элементарные физика и химия, шахматы. МГУ. - М., 2019. 939с. Деп. в ВИНТИ РАН 12.08.2019, № 66-В2019.
44. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 6. Опыт обучения компьютерного решателя задач: Понимание естественного языка и анализ рисунков. МГУ. - М., 2019. 758с. Деп. в ВИНТИ РАН 12.08.2019, № 67-В2019.
45. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 7. Автоматическое создание приемов логической системы: классификация приемов решателя; логический ассемблер; компилятор спецификаций; создание тестовых примеров и доводка приемов. 739с. Деп. в ВИНТИ РАН 06.12.2021, № 65-В2021.
46. Подколзин А.С. Компьютерное моделирование логических процессов. Том 8. Автоматическое создание приемов логической системы: база теорем, характеристика теорем, создание спецификаций приемов. 518с. Деп. в ВИНТИ РАН 06.12.2021, № 66-В2021.