4-я лекция курса "Теория дискретных функций"

(1-й курс; лектор - проф. А.С.Подколзин)

k - значная логика

Естественным развитием функций, аргументы и значение которых принадлежат двухэлементному множеству, являются функции, аргументы и значение которых принадлежат произвольному конечному множеству. Этот переход исторически был связан с математической логикой, в которой предпринимались попытки перехода от двух значений истинности - "истина" и "ложь" - к нескольким таким значениям. Например, в трехзначной логике третьим значением было "не определено". Поэтому раздел, изучающий функции указанного типа, получил название "k-значная логика". Однако, в связи с развитием вычислительной техники, как сама алгебра логики, так и ее обобщения на множества большей мощности, стали широко использоваться в различных задачах математической кибернетики и информатики. Поэтому термин "логика" в данном названии сейчас имеет, главным образом, историческое значение. Фактически, это просто теория функций, определенных на конечных множествах, составляющая часть теории дискретных функций.

Вместо двухэлементного множества $E_2 = \{0, 1\}$ мы будем рассматривать k - элементное множество $E_k = \{0, \ldots, k-1\}$.

Функцию $f : E_k \times \ldots \times E_k \to E_k$ будем называть функцией k - значной логики. Множество всех таких функций обозначаем P_k.

Функцию k - значной логики можно задавать таблицей, аналогичной таблице для функции алгебры логики. Первые n столбцов таблицы, определяющей функцию $f(x_1 \ldots x_n)$, соответствуют ее аргументам $x_1, \ldots, x_n$; последний столбец задает значения функции. Так как каждый аргумент может принимать одно из k значений, число строк таблицы равно k^n. Столбец значений функции имеет ровно столько позиций. На каждой позиции может быть расположено одно из k значений, т.е. число возможных столбцов - k^{k^n}. Это - число функций k-значной логики, зависящих от n переменных.

Как и в случае алгебры логики, выделяется некоторый список элементарных функций:

1. $\bar{x} = x + 1 (\mod k)$. Эта функция называется отрицанием Поста. В двузначном случае она совпадает с отрицанием из алгебры логики.

2. $\sim x = k - 1 - x$. Эта функция называется отрицанием Лукашевича. Иногда она обозначается Nx. В двузначном случае совпадает с отрицанием из алгебры логики, начиная с трехзначного случая отличается от отрицания Поста.

3. $I_i(x) = (k-1,$ если $x = i,$ иначе $0)$. Это - индикаторная функция, принимающая в точке i "большое" значение $k-1$.

4. $j_i(x) = (1,$ если $x = i,$ иначе $0)$. Это - индикаторная функция, принимающая в точке i "маленькое" значение 1. Заметим, что в литературе функции $I_i(x)$ обычно обозначаются $J_i(x)$, так что по размерам буквы j определяется тип индикаторной функции. Эти функции так и называются "j большое" и "j маленькое". Мы сохраняем обозначения из учебника С.В.Яблонского.

5. $\min(x_1, x_2)$ - одно из возможных обобщений конъюнкции на k - значный случай. Иногда будем обозначать эту функцию $x_1 \& x_2$.

6. $x_1 \cdot x_2 \pmod k$ - другое возможное обобщение конъюнкции. Иногда будем отбрасывать указатель "mod k".

7. $\max(x_1, x_2)$ - одно из возможных обобщений дизъюнкции на k - значный случай. Иногда будем обозначать эту функцию $x_1 \vee x_2$.

8. $x_1 + x_2 \pmod k$. Иногда будем отбрасывать указатель "mod k".

Рассматриваются и другие элементарные функции k-значной логики. Некоторые из них будут введены на упражнениях.

В k- значном случае вводятся такие же определения сигнатуры $\Sigma : S \to F; F \subseteq P_k$, формулы в сигнатуре Σ и функции, реализуемой формулой относительно заданного списка переменных, как и в случае алгебры логики. Дословно так же вводятся понятие суперпозиции и три операции суперпозиции. Формулы, определяющие относительно объединения своих переменных равные функции, называются эквивалентными.

Приведем некоторые тождества для перечисленных выше элементарных функций.

1. Операции $\min(x_1, x_2)$, $\max(x_1, x_2)$, $x_1 \cdot x_2 \pmod k$, $x_1 + x_2 \pmod k$ ассоциативны и коммутативны.

2. Имеют место дистрибутивности:

   $(x_1 \vee x_2) \& x_3 = (x_1 \& x_3) \vee (x_2 \& x_3)$

   $(x_1 \& x_2) \vee x_3 = (x_1 \vee x_3) \& (x_2 \vee x_3)$

   Здесь посредством & обозначен минимум, а посредством $\vee$ - максимум.

   $(x_1 + x_2) \cdot x_3 = x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 \pmod k$.

3. Двойное применение отрицания Лукашевича возвращает исходное значение, но для отрицания Поста при $k > 2$ это неверно:

   $\sim (\sim (x)) = x$; $\bar{\bar{x}} = x + 2 \neq x$.

4. $\sim (\min(x_1, x_2)) = \max(\sim (x_1), \sim (x_2))$. Это тождество является аналогом законов Моргана в алгебре логики. Оно позволяет выразить каждую из функций min, max через другую, если использовать также отрицание Лукашевича. Заметим, что для отрицания Поста аналогичное равенство при $k > 3$ тождеством не является.

Разумеется, можно приводить и другие тождества для указанных выше элементарных операций. Однако, нам будет достаточно лишь этих.

Используя операции $I_i, \vee, \&$ и константы, можно построить аналог совершенной дизъюнктивной нормальной формы в k-значной логике. Именно, для произвольной функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_k$ имеет место следующее тождество:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in (E_k)^n} I_{\sigma_1}(x_1) \& \ldots \& I_{\sigma_n}(x_n) \& f(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$$

.

Доказывается оно точно так же, как в случае совершенной д.н.ф.: выясняется, что на произвольном наборе $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ все члены, кроме члена с $\sigma_1 = \alpha_1, \dots, \sigma_n = \alpha_n$, обращаются в 0, а этот единственный член равен $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Полнота в P_k

Как и в случае алгебры логики, систему $F \subseteq P_k$ назовем полной, если каждая функций из P_k получается из F суперпозициями. Очевидным примером полной системы служит все P_k. Кроме того, полна система $\{0, 1, \dots, k-1, I_0(x), \dots, I_{k-1}(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\}$, образованная функциями, использованными в приведенном выше аналоге совершенной дизъюнктивной формы.

Теорема. Система $\{\bar{x}, \max(x_1, x_2)\}$ полна в P_k.

Прежде всего, покажем, что через функции данной системы можно выразить все константы. Из $\bar{x} = x + 1$ получаем $x + 2 = \bar{\bar{x}}, x + 3 = \bar{\bar{\bar{x}}}, \dots, x + k - 1$, навешивая отрицание Поста над переменной x различное количество раз. Так как значения $x, x + 1, \dots, x + k - 1$ по модулю k различны, а число их равно k, то они составляют все значения $0, 1, \dots, k - 1$. Следовательно, $\max(x, x + 1, \dots, x + k - 1) = k - 1$.

Таким образом, из функций нашей системы можно получить константу $k - 1$. Используя отрицание Поста $x + 1 \pmod k$, из $k - 1$ получаем все остальные константы.

Теперь покажем, как построить все функции, зависящие от одной переменной. Тогда будем иметь функции I_i и отрицание Лукашевича, а с его помощью из максимума получим минимум.

Снова рассмотрим максимум выражений $x, x+1, \dots, x+k-1$, но на этот раз отбросим одно из них - например, выражение $x + j$. Если отброшенное выражение принимало значение $k - 1$, то максимум оставшихся выражений будет на единицу меньше, т.е. равен $k - 2$. Если же значение $k - 1$ принимало одно из оставшихся выражений, то максимум по-прежнему будет равен $k - 1$. Так как выражение $x + j$ принимает значение $k - 1$ в точке $k - 1 - j$, то получаем, что функция

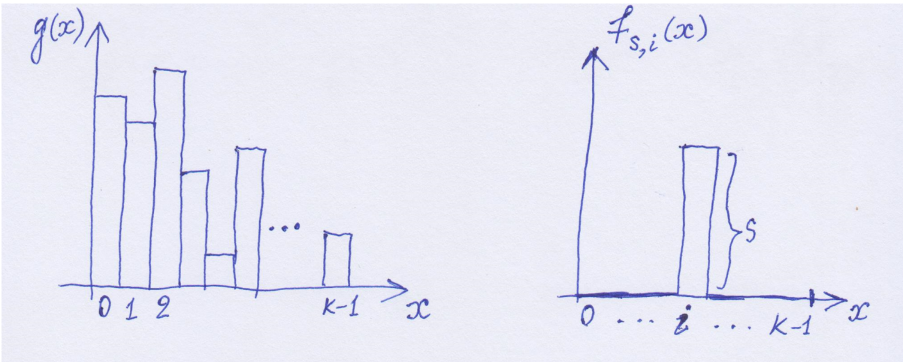
$$\varphi_j(x) = \max\left\{x + \alpha \mid \alpha \in \{0, \dots, j - 1, j + 1, \dots, k - 1\}\right\},$$

равна $k - 1$ при $x \neq k - 1 - j$ и равна $k - 2$ при $x = k - 1 - j$. Если к этой функции прибавить 1, что можно сделать с помощью отрицания Поста, то получится функция $\psi_j(x)$, равная $k - 1$ в точке $k - 1 - j$ и равная 0 в других точках. Иными словами, получится функция $I_{k-1-j}(x)$. Так как j можно варьировать на множестве $\{0, \dots, k - 1\}$, то в результате имеем все функции $I_0(x), \dots, I_{k-1}(x)$.

Мы будем получать произвольные функции одной переменной, "складывая" их график из отдельных "столбиков":

Каждый такой "столбик" является графиком функции, принимающей в единственной точке заданное ненулевое значение, а объединять их будем при помощи максимума. Для большей наглядности "столбик" изображен в виде прямоугольника, хотя на самом деле график образован дискретным множеством точек.

У нас уже имеются "столбики" высоты $k - 1$ - графики функций I_i. Если взять максимум функции I_i и константы $p, p \in \{0, \dots, k - 1\}$, то получится функция, принимающая в точке i значение $k - 1$, а в остальных точках - значение p. Это - "столбик"



высоты $k-1-p$, но сдвинутый вверх на p. Чтобы получить нужный нам "столбик", прибавим к данной функции $k-p$. Получится функция, принимающая в точке i значение $k-1-p$, а в остальных точках - ноль. Обозначим эту функцию $h_{p,i}$; $h_{p,i}(x) = \max(I_i(x), p) + (k-p)$.

Данная функция определена через ранее полученные функции I_i и константы при помощи имеющихся в исходной системе максимума и функции $x+1 \pmod k$. Таким образом, она получается из исходной системы суперпозициями. Варьируя значение p, получим все функции $f_{s,i}$, принимающие в точке i значение s и равные нулю в других точках: $f_{s,i}(x) = h_{k-1-s,i}(x)$.

Пусть теперь $g(x)$ - произвольная одноместная функция из P_k. Складывая ее график из "столбиков" - графиков функций $f_{s,i}$, получим:

$g(x) = \max(f_{g(0),0}(x), \ldots, f_{g(k-1),k-1}(x))$

Таким образом, любая одноместная функция может быть получена суперпозициями из рассматриваемой системы функций. В частности, может быть получено отрицание Лукашевича $\sim (x)$. Но тогда получаем и функцию минимум: $\min(x_1, x_2) = \sim (\max(\sim (x_1), \sim (x_2)))$. Это означает, что все функции полной системы $\{0, 1, \ldots, k-1, I_0(x), \ldots, I_{k-1}(x), \min(x_1, x_2), \max(x_1, x_2)\}$ могут быть получены суперпозициями из функций нашей системы, т.е. она полна. Теорема доказана.

Введем в рассмотрение функцию $V_k(x_1, x_2) = \max(x_1, x_2) + 1 \pmod k$. Она называется функцией Вебба.

Теорема. Система $\{V_k(x_1, x_2)\}$ полна в P_k.

Из функции Вебба сразу получается отрицание Поста:

$V_k(x, x) = x + 1 = \bar{x}$.

Следовательно, из нее можно получить суперпозициями все функции вида $x+i \pmod k$. Тогда функция "максимум" получается следующим образом:

$\max(x_1, x_2) = V_k(x_1, x_2) + (k-1) \pmod k$.

Так как имеются максимум и отрицание Поста, то, согласно предыдущей теореме, система полна. Теорема доказана.

В k-значной логике точно так же, как это делалось в алгебре логики, вводятся понятия замыкания и замкнутого класса. Простейший пример замкнутого класса - все P_k. Приведем еще один пример замкнутого класса, обобщающий классы T_0, T_1. Пусть $Q \subseteq E_k$. Обозначим T_Q множество всех функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ из P_k, таких, что для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in Q$ выполнено $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Q$. Иными словами, T_Q - класс функций, сохраняющих множество Q. Точно так же, как для классов T_0, T_1 в P_2, доказывается, что класс T_Q замкнут.

Рассмотрим систему функций $F = \{\sim (x), \max(x_1, x_2)\}$. Пусть $k \geq 3, Q = \{0, k-1\}$. Очевидно, обе функции из F сохраняют Q, а так как Q - собственное подмножество множества E_k, то существуют функции, не сохраняющие Q, т.е. $[F] \subseteq T_Q \neq P_k$, и система F неполна. Таким образом, замена отрицания Поста на отрицание Лукашевича в рассмотренной выше системе из отрицания и максимума приводит к потере полноты.