

5-я лекция курса "Теория дискретных функций"

(1-й курс; лектор - проф. А.С.Подколзин)

Распознавание полноты в k - значной логике

Задача распознавания полноты в k - значной логике оказалась существенно более сложной, чем в алгебре логики. Мы ограничимся тем, что докажем существование алгоритма, распознающего полноту, а также установим существование критерия полноты, аналогичного критерию Поста. Описание самих предполных классов выходит за рамки данного курса.

Прежде всего, дадим одно вспомогательное определение. Пусть $\Sigma : S \rightarrow F$; $F \subseteq P_k$ - некоторая сигнатура. Определение формулы в сигнатуре Σ , данное на первой лекции, таково:

1. Если x_i - символ переменной, то однобуквенное слово x_i - формула в Σ .
2. Если $s \in S$, функция $f = \Sigma(s)$ зависит от n переменных, Φ_1, \dots, Φ_n - формулы в сигнатуре Σ , то слово $s(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ - формула в сигнатуре Σ .

Индукцией по данному определению формулы определяем глубину формулы:

1. Если x_i - символ переменной, то глубина формулы x_i равна 0.
2. Если $s \in S$, функция $f = \Sigma(s)$ зависит от n переменных, Φ_1, \dots, Φ_n - формулы в сигнатуре Σ , причем m - наибольшая из глубин этих формул, то глубина формулы $s(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$ - равна $m + 1$.

Глубину формулы Φ будем обозначать $d(\Phi)$. Очевидно, что глубина формулы - это максимальная из длин цепочек "вложенных" друг в друга "операций" для нее.

Перейдем к задаче распознавания полноты в P_k .

Теорема. Существует алгоритм, распознающий полноту конечных систем функций в P_k .

Пусть $F \subseteq P_k$ - конечная система функций. Рассмотрим для нее какую-либо сигнатуру $\Sigma : S \rightarrow F$.

Определим последовательность G_1, G_2, \dots множеств функций в P_k , зависящих от двух переменных. В качестве G_i берется множество всех функций, определяемых в сигнатуре Σ невырожденными формулами, содержащими только переменные x_1, x_2 и имеющими глубину, меньшую i . При определении функции каждая такая формула рассматривается относительно переменных x_1, x_2 . Эту последовательность называем последовательностью Кузнецова.

Очевидно, $\emptyset = G_1 \subseteq G_2 \subseteq \dots$. Так как число всех функций в P_k , зависящих от двух переменных, равно k^{k^2} , то $|G_i| \leq k^{k^2}$ для всех i , и указанная последовательность стабилизируется начиная с некоторого номера m : $G_m = G_{m+1} = \dots = G$. Будем называть G пределом последовательности Кузнецова.

При построении последовательности Кузнецова будем связывать с каждой функцией из G_i некоторую формулу, содержащую только переменные x_1, x_2 и имеющую глубину, меньшую i , которая эту функцию реализует. Рассмотрим произвольную функцию f из G_{i+1} , не вошедшую в G_i . Она должна определяться некоторой формулой Φ вида $s(\Phi_1, \dots, \Phi_n)$, содержащей только переменные x_1, x_2 и имеющей глубину, меньшую $i + 1$. Тогда глубина каждой формулы Φ_j меньше i , т.е. она является либо переменной, либо определяет функцию $g_j \in G_i$. Но с этими функциями при построении G_i мы уже связали какие-то определяющие их формулы Φ'_j , возможно, отличающиеся от формул Φ_j . Очевидно, что при замене в формуле Φ отличных от переменных формул Φ_j на реализующие те же самые функции формулы Φ'_j мы получим формулу Φ' , определяющую ту же самую функцию, что и формула Φ .

Это означает, что для получения G_{i+1} из G_i нам достаточно рассмотреть только всевозможные формулы Φ' вида $s(\Phi'_1, \dots, \Phi'_n)$, где $s \in S$, а Φ'_1, \dots, Φ'_n - переменные либо формулы, сопоставленные функциям из G_i . Те из формул Φ' , которые дадут новые функции, не встречавшиеся в G_i , сопоставляются этим функциям, а сами функции добавляются к G_i . Повторения отбрасываются.

Таким образом, получаем алгоритм построения множеств $G_i; i = 1, 2, 3, \dots$. Так как G_{i+1} однозначно определяется по G_i , эту последовательность достаточно проследить до первого совпадения ее членов. Далее она стабилизируется. Очевидно, первое совпадение произойдет за конечное число шагов, т.е. получаем алгоритм определения предела G последовательности Кузнецова.

Предположим, что функция Вебба $V_k(x_1, x_2)$ принадлежит пределу G . Тогда, по определению последовательности Кузнецова, она задается формулой в сигнатуре Σ , т.е. получается суперпозициями из F , и F полно.

Обратно, пусть F полно. Тогда функция Вебба задается некоторой формулой в сигнатуре Σ , имеющей ровно две существенные переменные. Переобозначим эти переменные на x_1, x_2 , а все несущественные переменные заменим на x_1 . Если эту формулу рассматривать относительно x_1, x_2 , то, очевидно, она снова будет определять функцию Вебба. Однако, по нашему определению, такая формула определяет функцию из множества G_{i+1} , где i - глубина формулы. Следовательно, функция Вебба попадает в множество G .

Итак, алгоритм распознавания полноты конечной системы функций в P_k состоит в построении по ней последовательности Кузнецова и проверке вхождения функции Вебба в предел этой последовательности. Если входит, то система полна, иначе - неполна. Теорема доказана.

Заметим, что операции переобозначения переменных и подстановки вместо несущественных переменных, все-таки, должны быть определены, а соответствующие эквивалентности формул - доказаны. Однако, такие доказательства являются предметом математической логики, где они известны как лемма о замене и лемма о подстановке. Они выходят за рамки данного курса, и мы будем считать свойства этих операций очевидными.

Заметим также, что почти все приведенные выше рассуждения сохраняются и для бесконечных систем F , так что полнота системы оказывается эквивалентна вхождению функции Вебба в предел последовательности Кузнецова. Однако, в этом случае говорить об алгоритме нельзя, так как входные данные и промежуточные результаты бесконечны.

Теорема. Из каждой полной в P_k системы функций можно выделить конечную полную подсистему.

Это утверждение очевидно. Если система F полна, то функцию Вебба можно выразить формулой в сигнатуре для F . Рассматриваем конечное подмножество функций, использованных в данной формуле. Оно и будет полным.

Переходим к установлению того, что в P_k существует критерий полноты в терминах предполных классов, аналогичный критерию полноты в алгебре логики. Впервые описание предполных классов для $k > 2$ было получено С.В.Яблонским который нашел все предполные классы в P_3 . В дальнейшем различными исследователями находились отдельные серии предполных классов в $P_k, k > 3$. Окончательное описание всех предполных классов в P_k было получено И.Розенбергом. Даже одно лишь их перечисление слишком громоздко для данного курса. Число этих классов быстро растет с ростом k . Поэтому мы приведем лишь результат А.В.Кузнецова о существовании конечной системы предполных классов в P_k , дающей критерий полноты. Он явился стартовой точкой на пути к их явному описанию.

Начнем с определений.

Функции $g_i^p(x_1, \dots, x_p) = x_i; i = 1, \dots, p$, - называются селекторными функциями. Они выбирают заданный разряд из набора значений аргументов.

Пусть K - некоторое множество функций $h(x_1, \dots, x_p)$ из P_k , зависящих от заданного числа переменных p и содержащее все селекторные функции от p переменных. Скажем, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$ сохраняет множество K , если для любых функций h_1, \dots, h_n из K выполнено:

$$f(h_1(x_1, \dots, x_p), \dots, h_n(x_1, \dots, x_p)) \in K.$$

Пример. Пусть $k = 2, p = 1, K = \{x, \bar{x}\}$. Иными словами, в K входят функции $x^\sigma; \sigma \in \{0, 1\}$. Свойство сохранения множества K функцией f означает, что для любых $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ из E_2 имеет место:

$$f(x^{\sigma_1}, \dots, x^{\sigma_n}) = x^\sigma$$

при некотором σ . Подставим в это тождество поочередно значения 1 и 0:

$$f(1^{\sigma_1}, \dots, 1^{\sigma_n}) = 1^\sigma, \text{ что эквивалентно равенству:}$$

$$f(\sigma_1, \dots, \sigma_n) = \sigma;$$

$$f(0^{\sigma_1}, \dots, 0^{\sigma_n}) = 0^\sigma, \text{ что эквивалентно равенству:}$$

$$f(\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n) = \bar{\sigma}.$$

Объединяя полученные два равенства, имеем:

$$f(\bar{\sigma}_1, \dots, \bar{\sigma}_n) = \overline{f(\sigma_1, \dots, \sigma_n)}, \text{ т.е. свойство сохранения класса } K \text{ эквивалентно свойству самодвойственности функции.}$$

Пусть K - некоторое множество функций $h(x_1, \dots, x_p)$ из P_k , зависящих от заданного числа переменных p и содержащее все селекторные функции от p переменных. Через $U[K]$ обозначим множество всех функций в P_k , сохраняющих K .

Лемма 1. Класс $U[K]$ замкнут.

Лемма доказывается точно так же, как доказывалась лемма о замкнутости класса T_0 . Рассматриваются операции суперпозиции: операция подстановки переменных, операция подстановки одной функции в другую, а также операция добавления и удаления

несущественных переменных. В каждом случае свойство новой функции сохранять класс K очевидным образом вытекает из этого свойства для исходных функций.

Лемма 2. Пусть K - некоторое множество функций от двух переменных, содержащее все селекторные функции от двух переменных и не содержащее функции Вебба. Если $F \subseteq U[K]$, то F неполна.

Введем для F какую-либо сигнатуру Σ и рассмотрим последовательность Кузнецова G_1, G_2, \dots . Покажем, что для всех i выполнено $G_i \subseteq K$. Имеем: $G_1 = \emptyset \subseteq K$. Пусть уже доказано $G_i \subseteq K$.

Рассмотрим функцию h из G_{i+1} , не входящую в G_i . Она задается формулой глубины i в сигнатуре Σ , имеющей вид $s(A_1 \dots A_n)$, где $f = \Sigma(s) \in F$, а каждое A_j - либо формула, глубина которой меньше i , либо переменная x_1 , либо переменная x_2 . В первом случае A_j реализует некоторую функцию $h_j(x_1, x_2)$ из G_i . Во втором случае положим $h_j(x_1, x_2) = g_1^2(x_1, x_2)$, в третьем - $h_j(x_1, x_2) = g_2^2(x_1, x_2)$. Так как $G_i \subseteq K$, то при всех $j = 1, \dots, n$ получаем, что $h_j \in K$. Но формула $s(A_1 \dots A_n)$ реализует функцию $h(x_1, x_2) = f(h_1(x_1, x_2), \dots, h_n(x_1, x_2))$. Так как f сохраняет множество K , то и функция $h(x_1, x_2)$ принадлежит K . Таким образом, $G_{i+1} \subseteq K$.

Из доказанного вытекает, что предел последовательности Кузнецова - подмножество множества K , т.е. не содержит функции Вебба. Следовательно, система F неполна. Лемма доказана.

Лемма 3. Если система F функций k -значной логики неполна, то в P_k существует множество K функций от двух переменных, содержащее обе селекторные функции и не содержащее функции Вебба, такое, что $F \subseteq U[K]$.

Снова введем для F какую-либо сигнатуру Σ и рассмотрим последовательность Кузнецова G_1, G_2, \dots . Пусть $G_m = G_{m+1} = \dots$. Так как F неполна, то $\neg(V_k \in G_m)$. Положим $K = G_m \cup \{g_1^2, g_2^2\}$. Очевидно, K не содержит функции Вебба V_k .

Покажем, что F сохраняет K . Пусть $f(x_1, \dots, x_n) \in F$; $h_1, \dots, h_n \in K$. Рассмотрим функцию $h(x_1, x_2) = f(h_1(x_1, x_2), \dots, h_n(x_1, x_2))$. Пусть s - символ, обозначающий функцию f в сигнатуре Σ . Если $h_j(x_1, x_2) \in G_m$, то она определяется некоторой формулой A_j в сигнатуре Σ , глубина которой меньше m . Если $h_j(x_1, x_2)$ - селекторная функция $g_1^2(x_1, x_2)$, то возьмем в качестве A_j переменную x_1 ; если $h_j(x_1, x_2)$ - селекторная функция $g_2^2(x_1, x_2)$, то возьмем в качестве A_j переменную x_2 . Тогда функция $f(h_1(x_1, x_2), \dots, h_n(x_1, x_2))$ будет определяться формулой $s(A_1, \dots, A_n)$. Глубина этой формулы меньше $m + 1$, так что реализуемая ею функция $h(x_1, x_2)$ принадлежит G_{m+1} . Однако, $G_{m+1} = G_m \subseteq K$, и $h \in K$. Таким образом, F сохраняет K , и $F \subseteq U[K]$. Лемма доказана.

Теорема (А.В.Кузнецов) Можно построить систему M_1, \dots, M_s замкнутых классов k -значной логики, такую, что ни один из них не содержится в других, причем произвольная система $F \subseteq P_k$ полна тогда и только тогда, когда она не содержится ни в одном из классов M_1, \dots, M_s .

Рассмотрим все классы N_1, \dots, N_q вида $U[K]$, где K - множество функций от двух переменных, содержащее обе селекторные функции и не содержащее функции Вебба. По лемме 1 они замкнуты. Если система $F \subseteq P_k$ неполна, то по лемме 3 существует такой класс N_i , что $F \subseteq N_i$. Если для некоторого класса N_i имеет место $F \subseteq N_i$, то по лемме 2 система F неполна. Таким образом, полнота системы F эквивалентна невключению ее ни в один из классов N_1, \dots, N_q . Удалив из системы N_1, \dots, N_q те классы, которые содержатся в других, получим искомую систему M_1, \dots, M_s .

Заметим что M_1, \dots, M_s - все предполные классы в P_k . Это доказывается так же, как доказывалось, что T_0, T_1, L, S, M - все предполные классы в P_2 .