6-я лекция курса "Теория дискретных функций"

(1-й курс; лектор - проф. А.С.Подколзин)

Задача об относительной полноте

Критерий полноты системы функций F может существенно упроститься, если предполагать, что в F уже содержится некоторое заданное множество функций M. Тогда задача ставится так: "что надо добавить к M, чтобы получить полную систему ? ". Это - так называемая задача об относительной полноте, т.е. полноте относительно системы M. Мы рассмотрим один частный случай задачи об относительной полноте, когда в качестве M фигурируют все одноместные функции k - значной логики. Она была решена Слупецким. Оказалось, что в случае $k > 2$ для полноты системы, содержащей все одноместные функции, необходимо и достаточно, чтобы она содержала принимающую все k значений функцию, существенно зависящую более чем от одной переменной. Мы приводим далее доказательство теоремы Слупецкого, предложенное С.В.Яблонским. Из доказательства будет следовать даже более сильное утверждение (теорема С.В.Яблонского): достаточно брать не все одноместные функции в P_k, а лишь те из них, которые принимают не более $k-1$ значения. Критерий Слупецкого в этом случае сохраняется. Заметим, что в случае $k = 2$ утверждение теоремы Слупецкого неверно. Здесь легко строится контрпример.

Формулировке и доказательству теоремы предпошлем определение и ряд лемм.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ k - значной логики называется существенной, если она имеет более одной существенной переменной.

Лемма 1 (о трех наборах). Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ - существенная функция из P_k, принимающая l значений, где $l \geq 3$. Пусть x_1 - ее существенная переменная. Тогда существуют наборы $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, на которых f принимает три различных значения.

Так как x_1 - существенная переменная, то существуют такие значения $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, что в следующем списке S:

$f(0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), f(1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), \ldots, f(k-1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

- имеется более одного значения. Рассмотрим два случая:

1. В списке S встречается меньше, чем l значений. Тогда можно рассмотреть набор, на котором функция f принимает значение, не встречающееся в списке S. Обозначим этот набор, например, $(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$. Используемые здесь переменные пока не встречались, и их можно использовать, хотя на первый взгляд такие обозначения и выглядят несколько странно. Очевидно, $f(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$. Выберем в качестве β любое, такое, что $f(\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Так как в списке S более одного элемента, то такое найдется. Но $f(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ не входит в список S, так что получаем: $f(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n) \neq f(\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, и рассмотрение случая завершено.

2. В списке S встречаются все l значений. Так как функция f существенная, то существует такое α, что $f(\alpha, x_2, \ldots, x_n)$ не является константой. Иначе значение

функции f однозначно определялось бы значением переменной x_1. Следовательно, существуют такие значения $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$, что $f(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$. Так как $l \geq 3$, то в списке S имеется не менее трех значений. Поэтому найдется такое β, что $f(\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ отлично и от $f(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, и от $f(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$. Что и требовалось.

Лемма доказана.

Лемма 2. Если $f(x_1, \ldots, x_n)$ - существенная функция в P_k, принимающая хотя бы l значений, где $l \geq 3$, то существуют подмножества $G_1, \ldots, G_n$ множества E_k, такие, что $1 \leq |G_1| \leq l-1, \ldots, 1 \leq |G_n| \leq l-1$, причем на множестве $G_1 \times \ldots \times G_n$ функция f принимает хотя бы l значений.

Забегая вперед, заметим, что лемма понадобится при доказательстве теоремы Слупецкого для обеспечения индуктивного перехода от функций, принимающих $l-1$ значение к функциям, принимающим l значений.

Без ограничения общности можно предположить, что x_1 - существенная переменная функции f. По лемме 1, существуют наборы $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, на которых f принимает три различных значения. Рассмотрим наборы $\delta_i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in})$; $i = 1, \ldots, l-3$, на которых функция f принимает остальные $l-3$ значения. В качестве G_j выберем множество j-х разрядов наборов $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n), \delta_1, \ldots, \delta_{l-3}$. Как легко видеть, получим:

$$G_1 = \{\alpha, \beta, \delta_{11}, \ldots, \delta_{l-3,1}\}, G_2 = \{\alpha_2, \gamma_2, \delta_{12}, \ldots, \delta_{l-3,2}\}, \ldots, G_n = \{\alpha_n, \gamma_n, \delta_{1n}, \ldots, \delta_{l-3,n}\}$$

Таким образом, каждое из множеств G_j непусто и имеет не более $l-1$ элемента. Здесь важную роль сыграл тот факт, что для любого $j \in \{1, \ldots, n\}$ три набора $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ имеют на j -й позиции лишь два различных значения.

По выбору множеств G_j, те указанные выше l наборов, на которых функция f принимает l различных значений, принадлежат прямому произведению $G_1 \times \ldots \times G_n$. Вообще говоря, на этом произведении функция f может принимать и другие значения. Лемма доказана.

Для формулировки следующей леммы введем понятие квадрата в k- значной логике. Будем называть квадратом любую четверку наборов вида $\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, y, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n) | x \in \{p_1, p_2\}, y \in \{q_1, q_2\}\}$. Иными словами, все разряды, кроме i-го и j-го, в квадрате зафиксированы, а i-й и j-й разряды могут принимать каждый одно из двух значений. В случае i-го разряда это значения p_1, p_2; в случае j-го - q_1, q_2.

Лемма 3. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ - существенная функция в P_k, принимающая l значений, причем $l \geq 3$. Тогда существует квадрат, на котором f принимает некоторое свое значение ровно в одной точке.

Забегая вперед, заметим, что такой квадрат позволит нам "извлечь" из функции f некоторый аналог дизъюнкции, которая как раз и характеризуется свойством принимать значение 0 ровно в одной точке.

Снова без ограничения общности предполагаем, что x_1 - существенная переменная функции f. По лемме 1, существуют три набора $(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, на которых f принимает три различных значения. Рассмотрим последовательность пар:

$P_1 = \{(\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n), (\beta, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\}$,

$P_2 = \{(\alpha, \gamma_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n), (\beta, \gamma_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n)\}$,

$\ldots \ \ldots \quad \ldots \ \ldots$

$P_i = \{(\alpha, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n), (\beta, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)\}$

$\ldots \ \ldots \quad \ldots \ \ldots$

$P_n = \{(\alpha, \gamma_2, \ldots, \gamma_n), (\beta, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)\}$.

Принцип построения пар очевиден: в паре P_i значения $\alpha_2, \ldots, \alpha_i$ заменяются на $\gamma_2, \ldots, \gamma_i$.

На наборах пары P_1 функция f принимает два различных значения - a и b. На первом наборе пары P_n она принимает значение, отличное от a, b. Значение, принимаемое ею на втором элементе пары P_n, может совпасть с a либо с b, но не одновременно с обоими. Следовательно, на паре P_n функция f не принимает хотя бы одно из значений a, b. Двигаясь по приведенному выше списку пар сверху вниз, мы должны достигнуть такого i, что на паре P_i функция f принимает оба значения a, b, а на паре P_{i+1} уже не принимает хотя бы одного из них.

Заметим теперь, что объединение пар P_i, P_{i+1} представляет собой квадрат $\{(x, \gamma_1, \ldots, \gamma_i, y, \alpha_{i+2}, \ldots, \alpha_n) | x \in \{\alpha, \beta\}, y \in \{\alpha_{i+1}, \gamma_{i+1}\}\}$. То из значений a, b, которое не принимается функцией f на паре P_{i+1}, и будет приниматься ею на указанном квадрате ровно в одной точке. Лемма доказана.

Теорема (Слупецкий) Пусть система F функций k-значной логики, где $k \geq 3$, содержит все функции одной переменной. Тогда для полноты F необходимо и достаточно, чтобы она содержала существенную функцию, принимающую все k значений.

Докажем сначала необходимость. Пусть F не содержит существенной функции, принимающей все k значений. Покажем, что операции суперпозиции не позволяют получить такую функцию из функций, которые либо не принимают все k значений, либо не являются существенными:

1. Операция подстановки переменных.

   Пусть функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ определена как $f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$. Если функция f не принимает все k значений, то и g не будет их принимать. Если f имела единственную существенную переменную x_m, то g будет иметь единственную существенную переменную x_{i_m}.

2. Операция подстановки одной функции в другую.

   Пусть функция $h(x_1, \ldots, x_{n+m-1})$ определена как $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, g(x_n, \ldots, x_{n+m-1}))$. Если f не принимает все k значений, то и h их не принимает. Если f принимает все k значений, то она должна иметь единственную существенную переменную. Если ее существенная переменная - не x_n, то она же будет единственной существенной переменной у h. Если единственной существенной переменной функции f служит x_n, то рассматриваем функцию g. Если она принимает не все k значений, то и h не будет принимать k значений. Если функция g принимает все k значений, то она имеет единственную существенную переменную. Но тогда она окажется единственной существенной переменной и для h.

3. Операция добавления либо удаления несущественных переменных. Этот случай очевиден.

Так как суперпозициями из F нельзя получить существенной функции, принимающей все k значений, то она неполна.

Перейдем к доказательству достаточности.

Пусть F имеет существенную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, принимающую все k значений. По лемме 3, существует квадрат

$\{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x, \alpha_{i+1}, \ldots,\ \alpha_{j-1}, y, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n) | x \in \{p_1, p_2\}, y \in \{q_1, q_2\}\}$,

на котором функция f принимает некоторое свое значение ровно в одной точке. Обозначим это значение a. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi_0(x)$, равную 0 при $x = a$ и равную 1 в остальных случаях. Так как она зависит от одной переменной, то принадлежит множеству F. Заметим, что все константы $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots,\ \alpha_{j-1}$, $\alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$, как функции одной переменной, тоже принадлежат F. Поэтому следующая функция

$g(x_1, x_2) = \varphi_0(f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_1, \alpha_{i+1}, \ldots,\ \alpha_{j-1}, x_2, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n))$

- получена суперпозициями над F.

Функция g на квадрате $\{(p_1, q_1), (p_1, q_2), (p_2, q_1), (p_2, q_2)\}$ принимает значения 0 и 1, причем значение 0 она принимает в единственной точке. Без ограничения общности можно считать, что $g(p_1, q_1) = 0$. В остальных точках квадрата функция g равна 1.

Введем вспомогательную функцию $\varphi_1(x)$, равную p_1 при $x = 0$ и равную p_2 в остальных случаях. Введем также функцию $\varphi_2(x)$, равную q_1 при $x = 0$ и равную q_2 в остальных случаях. Обе эти функции зависят от одной переменной и принадлежат F.

Поэтому функция $g'(x_1, x_2) = g(\varphi_1(x_1), \varphi_2(x_2))$ получается суперпозициями над F. Она обращается в 0 при $x_1 = x_2 = 0$, а в остальных случаях она равна 1. Таким образом, данная функция совпадает с дизъюнкцией, если значения ее аргументов ограничить множеством $\{0, 1\}$. Будем обозначать ее $x_1 \vee_{01} x_2$.

Функция $j_i(x)$, равная 1 при $x = i$ и равная 0 в остальных случаях, зависит от одной переменной и поэтому входит в F. В частности, функция $j_0(x)$, совпадающая с отрицанием на множестве $\{0, 1\}$, входит в F.

Используя законы Моргана, нетрудно теперь получить функцию в P_k, ограничение которой на множество $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ совпадает с конъюнкцией:

$g''(x_1, x_2) = j_0(j_0(x_1) \vee_{01} j_0(x_2)) \quad (\overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}})$

Будем обозначать эту функцию $x_1 \&_{01} x_2$.

Пусть теперь $h(x_1, \ldots, x_m)$ - произвольная функция в P_k, принимающая только значения 0 и 1. Покажем, что ее можно получить суперпозициями над F. Используем обобщение совершенной дизъюнктивной нормальной формы для P_k:

$$h(x_1, \ldots, x_m) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)} j_{\sigma_1}(x_1) \& \ldots \& j_{\sigma_m}(x_m) \& h(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$$

Здесь символом $\bigvee$ обозначен максимум, символом & - минимум. Максимум берется по всем наборам $(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ элементов E_k.

Заметим, что все значения $j_{\sigma_i}(x_i)$ и $h(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ равны 0 либо 1. Поэтому в выражении для h можно вместо функций максимума и минимума использовать $\vee_{01}$ и $\&_{01}$:

$$h(x_1,\ldots,x_m)=\bigvee_{\substack{01\\(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)}} j_{\sigma_1}(x_1)\&_{01}\ldots\&_{01}j_{\sigma_m}(x_m)\&_{01}h(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$$

С учетом того, что константы $h(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$ принадлежат F, приведенная формула выражает h через функции, которые получены суперпозициями над F. Таким образом, любая функция из P_k, принимающая только значения 0 и 1, получается суперпозициями над F. Если теперь $h(x_1,\ldots,x_m)$ - функция из P_k, принимающая только какие-то два заданные значения a и b, то можно рассмотреть функцию $h'(x_1,\ldots,x_m)$, принимающую значение 0, если $h(x_1\ldots x_m)$ равно a, и значение 1 в противном случае. Рассмотрим также принадлежащую F функцию $\psi(x)$, равную a, если $x=0$, и равную b в противном случае. Очевидно, $h(x_1,\ldots,x_m)=\psi(h'(x_1,\ldots,x_m))$, причем как h', так и ψ получены суперпозициями над F. Это означает, что любая функция в P_k, принимающая не более двух значений, получается суперпозициями над F.

Доказанное утверждение можно рассматривать как базис индукции. Предположим теперь, что для некоторого l, $3\le l\le k$, установлено, что все функции из P_k, принимающие не более, чем $l-1$ значение, получаются суперпозициями над F. Покажем, что это же верно и для всех функций, принимающих не более, чем l значений.

Снова рассмотрим в F существенную функцию $f(x_1,\ldots,x_n)$, принимающую k значений. По лемме 2, существуют подмножества $G_1,\ldots,G_n$ множества E_k, такие, что $1\le|G_1|\le l-1,\ldots,1\le|G_n|\le l-1$, причем на множестве $G_1\times\ldots\times G_n$ функция f принимает хотя бы l значений. Обозначим эти l значений $a_1,\ldots,a_l$. Рассмотрим наборы из $G_1\times\ldots\times G_n$, на которых функция f принимает данные значения:

$a_1=f(a_{11},\ldots,a_{1n})$

$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$

$a_l=f(a_{l1},\ldots,a_{ln})$

Заметим, что $\{a_{11},\ldots,a_{l1}\}\subseteq G_1,\ldots,\{a_{1n},\ldots,a_{ln}\}\subseteq G_n$.

Возьмем теперь произвольную функцию $h(x_1,\ldots,x_m)$ из P_k, принимающую только значения $a_1,\ldots,a_l$, и попробуем подобрать вспомогательные функции $\psi_1,\ldots,\psi_n$ так, чтобы имело место тождество $h(x_1,\ldots,x_m)=f(\psi_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,\psi_n(x_1,\ldots,x_m))$. Будем делать это, используя указанные выше l равенств.

Рассмотрим произвольный набор $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ значений переменных $x_1,\ldots x_m$. На этом наборе функция h принимает какое-то значение a_i. Определим значения $\psi_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_m),\ldots,\psi_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ равными, соответственно, $a_{i1},\ldots,a_{in}$. Тогда получим: $f(\psi_1(\alpha_1,\ldots,\alpha_m),\ldots,\psi_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_m))=f(a_{i1},\ldots,a_{in})=a_i$.

Таким образом, значения функций $\psi_1,\ldots,\psi_n$ определены для всех наборов значений их аргументов. При этом тождество $h(x_1,\ldots,x_m)=f(\psi_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,\psi_n(x_1,\ldots,x_m))$ выполнено "по построению".

Заметим, что функция ψ_i принимает в качестве своих значений только элементы $\{a_{1i},\ldots,a_{li}\}$, которые принадлежат множеству G_i. Поэтому данная функция принимает не более чем $l-1$ значение, и по предположению индукции получается суперпозициями над F. Ввиду указанного тождества, функция h тоже получается суперпозициями над F.

Итак, любая функция из P_k, принимающая только значения $a_1,\ldots,a_l$, получается суперпозициями над F. Если $l=k$, то это уже означает, что любая функция из P_k получается суперпозициями над F.

Пусть $l < k$. Рассмотрим произвольную функцию h из P_k, принимающую не более чем l значений. Пусть ее значения принадлежат списку $b_1, \ldots, b_l$. Рассмотрим функцию h', значение которой на произвольном наборе получается из значения функции h на этом же наборе заменой b_i на a_i. Функция h' получается суперпозициями над F. Определим функцию $\psi(x)$, принимающую в точке a_i значение b_i, а в остальных точках равную 0. Легко видеть, что $h(x_1, \ldots, x_m) = \psi(h'(x_1, \ldots, x_m))$, т.е. h получается суперпозициями над F.

Это завершает доказательство шага индукции. При $l = k$ получаем, что система F полна. Теорема доказана.

Предложенное С.В. Яблонским доказательство выявило тот факт, что в действительности для обеспечения полноты F использовались не все одноместные функции, а только те, которые принимают не более $k-1$ значения. Заметим, что "переходники" ψ, переводящие a_i в b_i, были нужны лишь при $l < k$. Отсюда получается следующий результат:

Теорема(С.В.Яблонский) Пусть система F функций k-значной логики, где $k \geq 3$, содержит все функции одной переменной, принимающие не более $k-1$ значения. Тогда для полноты F необходимо и достаточно, чтобы она содержала существенную функцию, принимающую все k значений.